

一. 填空 (30%)

1.  $z^3 = -z$  的解为 \_\_\_\_\_ 2.  $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \bar{z} + z\alpha = c$  同解为 \_\_\_\_\_

3. CR \_\_\_\_\_

4.  $\frac{(\sin z)^2}{(z-3)^2 z^2 (z+1)^3}$  \_\_\_\_\_

5.  $\text{Res}\left(\frac{z^3 \sin z}{(1-e^{2z})^5}, 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$   $\text{Res}\left(z^{2016} \sin\left(z-\frac{1}{z}\right), 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

6.  $L\left[\frac{d}{dt}(e^{-t} \sin t)\right] = \underline{\hspace{2cm}}$   $L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-2)^2}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$

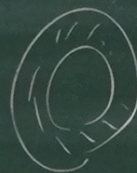
7. 在  $z=0$  处展开  $\sin z$  且  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}$   $n \in \mathbb{N}$ . 函数 \_\_\_\_\_ 存在 ( )

8.  $f(z) = \cos z$  在  $|z|=1$  上 \_\_\_\_\_ 点  $z$  使  $|\cos z| > 1$

二. 级数展开 (15%)

1.  $f(z) = \frac{z^3}{(1-z^2)^2}$  在  $z=0$  处 Taylor 展开. 且求  $R$

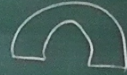
2.  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$   $z < |z| < \infty$  Laurent 展开



中国科学技术大学  
现代教育技术中心

三 积分 (24%)  $\frac{4}{3}$

(1)  $\int_{\gamma} \frac{z}{z} dz$   $\gamma$  为  $\{z: |z| < 2, \text{Im} z > 0\}$  边界



(2)  $\int_{|z|=1.5} \frac{dz}{z^5 \cos z}$

(3)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}$

(4)  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{e})$

四 (6%)

$2\pi i (\frac{5}{24} - (\frac{2}{\pi})^2)$

$u(x,y)$  为调和,  $u^2(x,y)$  也是  $\frac{4\sqrt{5}\pi}{9}$  求合付  $u$

$f(z) = \frac{z + i(e^{2z} - 1)}{z^3(z^2 + 1)}$  ( $u \equiv \text{const}$ )

五 (10%)  $D = \{z \in \mathbb{C}: \text{Re} z > 1, |z| < 2\} \rightarrow B(0,1)$

六 (7)  $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$   $n \geq 1$   $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$   $a_n \neq 0$

且  $|z| \leq 1$   $|P_n(z)| \leq M$  设  $R > 1$

证明:  $|P_n(z)| \leq MR^n$   $|z| \leq R$

七 (8分)  $n \in \mathbb{N}$   $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{C}$   $|a_k| < 1$   $k=1, \dots, n$

$f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$

证明: (1)  $|b| < 1$  (2)  $|b| > 1$   $f(z) = b$  对  $|z| < 1$  内恰有  $n$  个根

(2)  $|b| > 1$   $\dots \dots \dots |z| > 1$