# 2023春《数学分析B2》期末试题

2023年7月16日上午

一（本题共30分）：

(1) (本题10分)计算 $\mathrm{I}=\int_L \frac{1}{2}y^2dx+xydy$，其中$L$为 $\mathrm{y}=\sqrt{2\mathrm{x}-\mathrm{x}^2},(0\le \mathrm{x}\le 1)$

方向为x增加的方向

解：令$P=\frac{1}{2}y^2;Q=xy$；则P,Q在$R^2$上有一阶连续偏导数；

且：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$=0；设L与有向直线段$\overline{AB},\overline{BO}$所围成的区域为D

其中A(1,1),B(1,0),0(0,0)

由格林公式：$\mathrm{I}=\int_L \frac{1}{2}y^2dx+xydy=0+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$

（2）（本题10分）：求曲面积分：$\mathrm{I}=\iint_\Sigma 4\mathrm{xzdydz}-2\mathrm{yzdzdx}+(1-\mathrm{z}^2)\mathrm{dxdy}$，

其中Σ是由曲线 $\mathrm{z}=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2,(0\le \mathrm{z}\le 2)$，方向取下侧.

解析：补平面z=2,$(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le 2)$取上侧，由高斯公式

得：$\mathrm{I}=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} \quad -\iint_{\Sigma_1} 4\mathrm{xzdydz}-2\mathrm{yzdzdx}+(1-\mathrm{z}^2)\mathrm{dxdy}$

：$=\iiint_\Omega 0\,\mathrm{dxdydz}+\iint_\mathrm{D} 3\mathrm{dxdy}$

：$=3\iint_\mathrm{D} \mathrm{dxdy}$

：$=6\pi.$

（3）（本题10分）求极限：$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$

证：$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt$

：$=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\Gamma(\frac{1}{n}+1)$

故：$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\Gamma(\frac{1}{n}+1)=\Gamma(1)=1$

二（本题 10 分）:求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

解：令$u_n=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{2n-1}x^{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(2x)^{2n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n},(t=2x)$

即：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}t^2=(2x)^2<1$

收敛区间为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；当 $x=\pm\frac{1}{2}$时，由莱布尼兹判别法知，

级数都收敛故收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

令：$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}=tS_1(t)$

所以：$S_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}$

：$\Rightarrow S_1^{'}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}$

：$=\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}=\frac{1}{1+t^2},t\in(-1,1)$

所以当 t ∈(-1,1)时，有$S_1(t)=\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}=\arctan t$

由幂级数和函数的连续性可知，$S_1(t)$在 t=-1,1 处右左连续

所以：$S(t)=t\arctan t, t\in[-1,1]$

故：原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{2n-1}x^{2n}=2x\arctan 2x,x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

三（本题 20 分）：设 f(x)是以 2π为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}\pi-x.0\le x\le\pi\\ \pi+x,-\pi\le x<0\end{cases}$.

求 f(x)的傅里叶级数，并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$的值.

解析（1）：f(x)为偶函数，所以$b_n=0,(n=1,2,\dots)$

而$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

：$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx$

：$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)d(\sin nx)$

：$=\frac{2}{n\pi}(\pi-x)\sin nx|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

: $=-\frac{2}{n^2\pi}\cos nx|_0^{\pi}$

: $=-\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$

: $=\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)$

: $=\begin{cases}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}, k=2n-1\\ 0, \quad k=2n\end{cases}$

而：$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{2}{\pi}(\pi^2-\frac{1}{2}\pi^2)=\pi.$

由于函数 f(x)是连续函数

所以：$\mathrm{f(x)}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, x\in(-\infty,+\infty)$

在$[0,\frac{\pi}{2}]$上积分

: $\int_0^{\pi/2}(\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x|_0^{\pi/2}$

: $\frac{3\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$

所以：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

再由巴塞瓦尔等式：

有：$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$

得：$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx-\frac{\pi^2}{2}$

其中：$\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx=\int_0^{\pi}(\pi^2-2\pi x+x^2)dx=\frac{1}{3}\pi^3$

故：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$

四（本题 10 分）：利用 Dirichlet 积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$来计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}dx$，其中 $0<a<b$.

解析：令 $\mathrm{f(t)}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)\sin(bx)}{x^2}dx,(0\le t<b)$

则：$\mathrm{f'(t)}=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)\sin(bx)}{x}dx,(0\le t<b)$

因为对 $\mathrm{t}\in[0,\tau], \mathrm{a}<\tau<\mathrm{b}$

则：$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\sin(tx)\sin(bx)}{x^2}) = \frac{\cos(tx)\sin(bx)}{x} = \frac{1}{2}(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x})$

由 Dirichlet 判别法

有：$\left|\int_0^y \sin(t+b)xdx\right| \le \frac{2}{t+b} \le \frac{2}{b}$

和：$\left|\int_0^y \sin(b-t)xdx\right| \le \frac{2}{b-t} \le \frac{2}{b-\tau}$

且：$\frac{1}{x}$单调趋于 0

故推出：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x})\,dx$在 $\mathrm{t} \in [0,\tau]$一致收敛

积分求导可换顺序

即$\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x})\,dx$

：$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

且：$\mathrm{f}(0) = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{dx} = 0$

得：$\mathrm{f}(\mathrm{a}) = \frac{\pi \mathrm{a}}{2}$.

五（本题 10 分）：已知函数级数 $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\sin(\mathrm{nx})}{\mathrm{n}^{\mathrm{x}}}$;

（1）证明：函数 f(x)在$(0,+\infty)$非一致收敛；

（2）证明：函数 f(x)在$(0,+\infty)$连续

证明（1）：$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow \exists\varepsilon_0 = \frac{\sin 1}{2} > 0, \ni \forall n \ge N, \exists x_0 = \frac{1}{n}$

有：$\left|\sum_{k=n}^{n} u_k(x_0)\right| = u_n(x_0) = \frac{\sin 1}{n^{\frac{1}{n}}} \ge \frac{\sin 1}{2}$

由柯西准则可知函数 f(x)在$(0,+\infty)$非一致收敛

证明（2）：当 $\mathrm{x} \ge \pi$时，由$\left|\frac{\sin(nx)}{n^x}\right| \le \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{\pi}}$

由 M 判别法可知，函数 f(x)在$[\pi,+\infty)$一致收敛，故连续

对 $0 < \delta < \pi$时，当$\delta < \mathrm{x} < \pi$；由和差化积

可知：$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2}{\sin\frac{\delta}{2}}$

且：$\frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^\delta} \to 0, n \to \infty$

由狄利克雷判别法，函数 f(x)在$[\delta,\pi]$上一致收敛，在$[\delta,\pi]$上连续，

由于$\delta > 0$ 的任意性可知，函数 f(x)在$(0,\pi]$上连续，

综上所述，函数 f(x)在$(0,+\infty)$ 上连续

六（本题 10 分）：设$\varphi(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{x(x+1)}dx, (t \ge 0)$.

（1）证明：$\varphi(t)$在$(0,+\infty)$上有连续的导函数；

（2）计算$\varphi(1)$的值.

证明（1）：$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{(x+1)(1+tx)}, (t > 0)$对于$[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$

有：$0 < \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{(x+1)(1+\alpha x)}, (t \in [\alpha,\beta])$

因为$\int_\alpha^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(1+\alpha x)}$收敛

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}dx$关于 t 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，

于是$\psi(t)$在$(0,+\infty)$上可导，且$\psi'(t) = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(1+tx)}$

当 t>0,t ≠ 1 时，$\int_0^{A}\frac{dx}{(x+1)(1+tx)} = \frac{\ln t}{t-1}$,　　　(*)

即：$\psi'(t) = \frac{\ln t}{t-1}$

当 t=1 时，$\psi'(1) = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2} = 1$

注意到$\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1} = 1$；故$\psi'(t)$在$(0,+\infty)$上连续

证明（2）：由（*）式：$\psi(1) = \int_0^1\frac{\ln t}{t-1}dt$

：$= -\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx$

：$= \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)dx$

：$= \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)dx$

: $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

七（本题 10 分）：设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围成的区域，f(x,y)在 D 上连续的偏导数。记：$d=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}$.

（1）证明：$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_L xf(x,y)dy-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$

（2）$\forall(x,y)\in L, f(x,y)=0$,证：$\iint_D f^2(x,y)d\sigma\le d^2\iint_D ((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2)d\sigma$.

证明（1）：由格林公式可知$\int_L xfdy=\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+f)dxdy$

即证出：$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_L xfdy-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$

证明（2）：由（1）的思路

可得：$\int_L xf^2dy=\iint_D (2xf\frac{\partial f}{\partial x}+f^2)dxdy$

以及：$\int_L yf^2dx=-\iint_D (2yf\frac{\partial f}{\partial y}+f^2)dxdy$

又由于：$\forall(x,y)\in L, f(x,y)=0\Rightarrow\int_L xf^2dy=\int_L yf^2dx=0$

可得：$\iint_D (2xf\frac{\partial f}{\partial x}+f^2)dxdy=-\iint_D (2yf\frac{\partial f}{\partial y}+f^2)dxdy$

由柯西不等式：$\iint_D f^2d\sigma\le\iint_D |xff_x^{'}+yff_y^{'}|d\sigma$

即：$=\iint_D |(x,y)||(f_x^{'}+f_y^{'})||f|d\sigma$

即：$=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{f_x^{'2}+f_y^{'2}}|f|d\sigma$

即：$\le d\iint_D \sqrt{f_x^{'2}+f_y^{'2}}|f|d\sigma$

即：$\le d(\iint_D f^2dxdy\iint_D (f_x^{'2}+f_y^{'2})dxdy)^{\frac{1}{2}}$

即：$(\iint_D f^2dxdy)^{\frac{1}{2}}\le d(\iint_D (f_x^{'2}+f_y^{'2})dxdy)^{\frac{1}{2}}$

即：$\iint_D f^2(x,y)d\sigma\le d^2\iint_D ((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2)d\sigma$