§10.2　二重积分的换元

在计算单变量定积分时, 换元法发挥过重要作用. 那时, 一个积分区间被换成另一个积分区间, 积分区域不会变得更简单, 因此, 换元的目的是要把被积函数变得简单一些.

二重积分也有换元法, 此时换元有两个目的.

第一是把被积函数变得简单一些.

第二是把积分区域变得简单一些.

由于在计算二重积分时, 复杂的积分区域更难于应付, 所以第二个目的就显得更重要一些, 有时为了积分区域变得简单而把被积函数变得复杂了一些也是值得的.

10.2.1　面积元素和换元公式

设 D 是 Oxy 平面上一个有面积的区域, $f(x,y)$ 是定义在 D 上的一个可积函数. 设 D' 是 $O'uv$ 平面上一个有面积的区域. 变换 (映射)

$$\varphi:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ (u,v)\in D' \tag{10.1}$$

将 D' 映成 D.

我们假设映射 φ 是正则的, 即, $\varphi\in C^1(D')$, 且满足 $|J\varphi|\neq 0$, 也即

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{10.2}$$

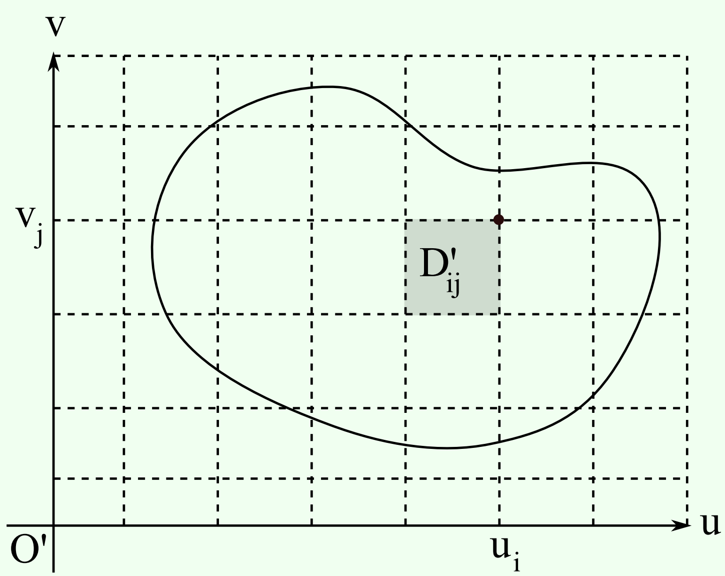
之所以要假设 φ 是正则的, 是因为我们希望在映射之下, 有面积的区域总被变成有面积的区域, 两条相交的曲线仍被变成相交 (而不是相切) 的曲线.

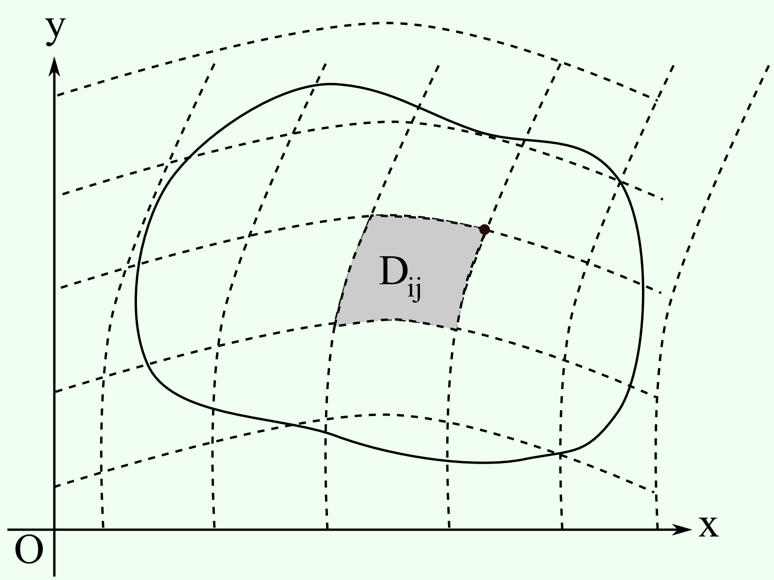
为了计算 $f(x,y)$ 在区域 D 上的积分, 先将区域 D' 进行矩形分割:

$$T': \; u_0 < u_1 < \cdots < u_n; \quad v_0 < v_1 < \cdots < v_m.$$

此时 D' 被分成许多小区域, 其中典型的小区域是矩形小区域:

$$D'_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j].$$





对于与 $\partial(D')$ 相交非空的那些小区域当分割 T' 加细时, 这些小区域的面积总和趋于零. 因此非矩形小区域可忽略不计.

在变换 φ 之下, 对应于

$$u = u_i\ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad v = v_j\ (j = 1, 2 \cdots, m)$$

的坐标曲线形成 Oxy 平面上的区域 D 的一个分割 T. 假设 D_{ij} 是 D'_{ij} 在映射下的像. 在 D'_{ij} 中取点 (u_i, v_j), 此点被映成 D_{ij} 中的点 $P_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$, 即

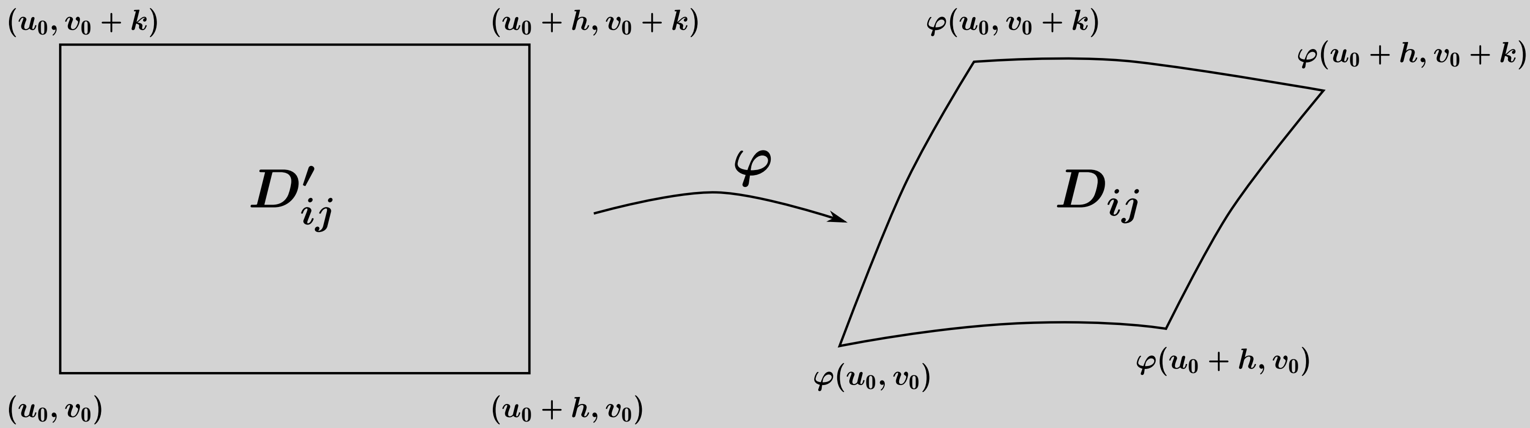
$$\xi_{ij} = x(u_i, v_j), \quad \eta_{ij} = y(u_i, v_j).$$

作函数 $f(x, y)$ 关于分割 T 的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\sigma(D_{ij}),$$

这里 $\sigma(D_{ij})$ 是 D_{ij} 的面积. 当分割的宽度充分小时, D_{ij} 近似于一个小平行四边形. 如下图所示, 其中

$$(u_0, v_0) = (u_{i-1}, v_{j-1}), \quad h = u_i - u_{i-1}, \ k = v_j - v_{j-1}.$$



因此有

$$\sigma(D_{ij}) \approx \left\| \big(\varphi(u_0+h, v_0) - \varphi(u_0, v_0)\big) \times \big(\varphi(u_0, v_0+k) - \varphi(u_0, v_0)\big) \right\|.$$

因为映射 φ 是可微的, 所以有

$$\varphi(u_0+h, v_0) - \varphi(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)h + o(h)$$

$$\varphi(u_0, v_0+k) - \varphi(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)k + o(k)$$

因而有

$$\begin{aligned}\sigma(D_{ij}) &\approx \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\right\| hk + o(hk)\\ &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right| \Delta u_i\Delta v_j + o(\Delta u_i\Delta v_j)\end{aligned}\tag{10.3}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\sigma(D_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\circ\varphi(u_i,v_j)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_j)\right|\Delta u_i\Delta v_j.$$

当 $\|T'\|\to 0$ 时, 有 $\|T\|\to 0$, 由上式可得如下定理.

返回　全屏　关闭　退出

定理 1 设 D, D' 是由分段光滑曲线围成的区域. 映射 $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ 将 D' 映为 D, 且 φ 是正则的, 即 $\varphi \in C^1(D')$, 且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0$. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right| dudv. \tag{10.4}$$

这就是二重积分的换元公式, 可简写为

$$\iint_{\varphi(D')} f d\sigma = \iint_{D'} f \circ \varphi |J\varphi| dudv. \tag{10.5}$$

近似式 (10.3) 在极限状态下可写为

$$d\sigma = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right| dudv. \tag{10.6}$$

这是变换前区域 D' 上的面积微元与变换后区域 D 上面积微元之间的关系, 它们相差一个膨胀率 (伸缩因子) $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|$.

从形式上看, 二重积分换元公式与单变量积分换元公式没有太多不同.

例 1 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积 V.

解 椭球上半部分的函数是

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad (x,y)\in D=\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\},$$

所以

$$V=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy.$$

令 $x=as,\ y=bt$, 则 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|=ab,\quad (s,t)\in D'=\{(s,t):\ s^2+t^2\leqslant 1\}$, 所以

$$V=2abc\iint_{D'}\sqrt{1-s^2-t^2}dsdt.$$

令 $s=r\cos\varphi,\ t=r\sin\varphi$, 则 $\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(r,\varphi)}\right|=r;\quad D'':\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$V=2abc\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}\sqrt{1-r^2}rdrd\varphi=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{4}{3}\pi abc.$$

例 2 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 所截下的体积 V.

解 由对称性可知

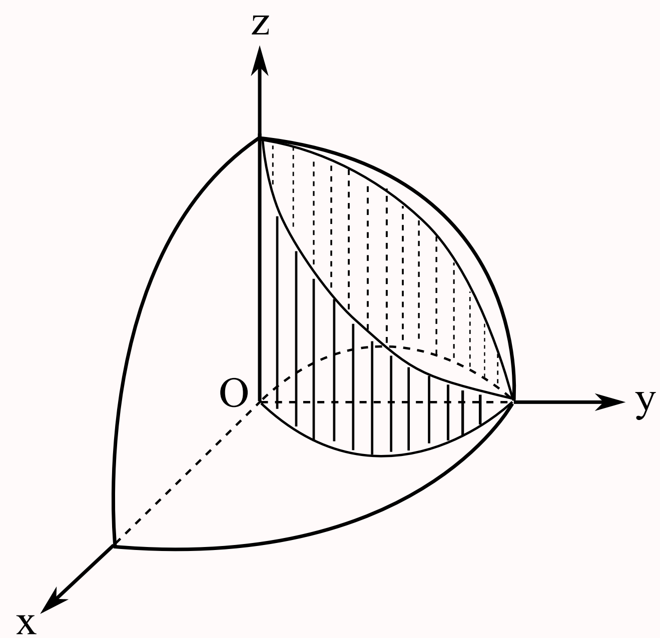
$$V = 4\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

其中区域 D : $x^2+y^2 \leqslant ay, x \geqslant 0$. 化成极坐标形式为

$$D': \quad 0 \leqslant r \leqslant a\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

故

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi} \sqrt{a^2-r^2}rdr \\ &= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\varphi)d\varphi \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3. \end{aligned}$$



例 3 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围成的面积.

解 用极坐标表示, 双纽线方程为

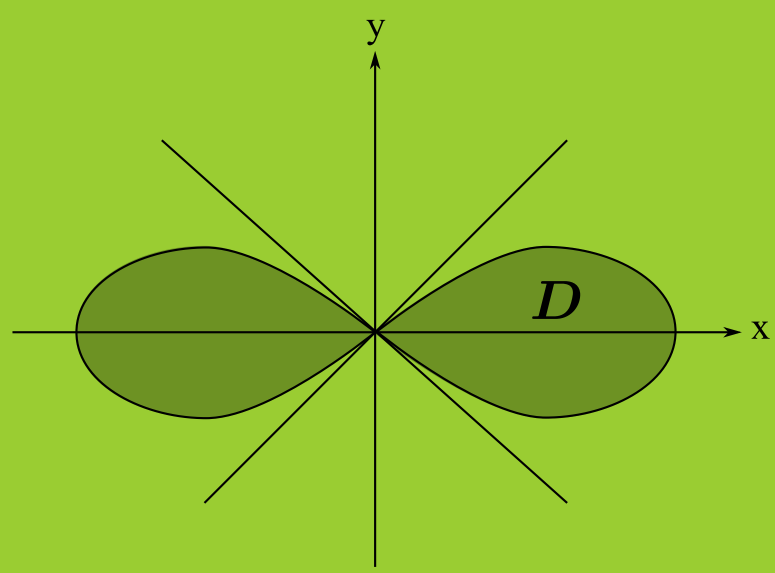
$$r^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

所围图形在第一象限部分为区域

$$D:\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

故由对称性, 双纽线围成的面积为

$$\begin{aligned}S&=4\iint_D dxdy\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}rdr\\&=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi\\&=2a^2.\end{aligned}$$



例 4 计算积分 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leqslant R^2$.

解 作极坐标变换 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $(r,\varphi) \in D': 0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 得

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1-e^{-R^2}).$$

利用这个结果可以求出一个重要的广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

的值. 我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy \\ &= \iint\limits_{\substack{-R\leqslant x\leqslant R\\ -R\leqslant y\leqslant R}} e^{-x^2-y^2}dxdy,\end{aligned}$$

由 $e^{-x^2-y^2} > 0$ 及积分区域的包含关系可知

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqslant \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \iint_{x^2+y^2\leqslant 2R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

由此例可得到不等式

$$\pi(1-e^{-R^2}) \leqslant \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \pi\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

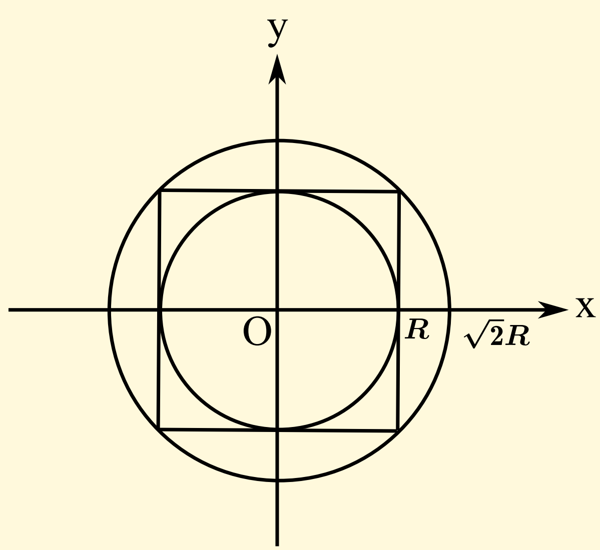
命 $R\to+\infty$, 即得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

或

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这个积分叫概率积分.



例 5 设 $f(t)$ 在 $[0,ab]$ 上连续 $(a>0,b>0)$. 求证:

$$\iint_{D_1} f(xy)\,dxdy = \iint_{D_2} f(xy)\,dxdy.$$

其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,\frac{a}{b}y\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$,

$D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,\ \frac{b}{a}x\leqslant y\leqslant b\}$.

证明

$$\iint_{D_2} f(xy)\,dxdy \xlongequal[y=\frac{b}{a}v]{x=\frac{a}{b}u} \iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant b\\ \frac{a}{b}u\leqslant v\leqslant a}} f(uv)\,dudv$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\ \frac{a}{b}y\leqslant x\leqslant a}} f(xy)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} f(xy)\,dxdy$$