CNY520501：模式识别

习题 2 答案

2018 年 4 月 15 日

1. 什么是最小距离分类器？分别计算下列两个模式类的平均样本：

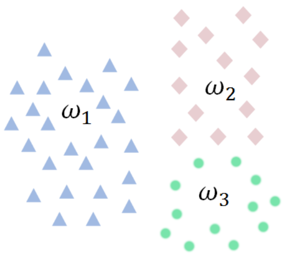
$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})^T, \boldsymbol{X_2} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_3} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})^T, \boldsymbol{X_4} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})^T$$

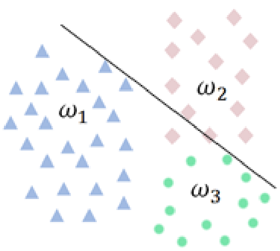
最小距离分类器：利用两个模式在特征空间中的距离作为两者之间的相似性度量，由此设计的度量函数就是最小距离分类器

平均样本：ω_1: $(0,0)^T$；ω_2: $(1,1.5)^T$

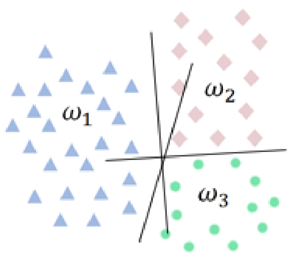
---

2. 下图所示的样本集合　　　　　　　　是否总体线性可分？　是否成对线性可分？





不是总体线性可分

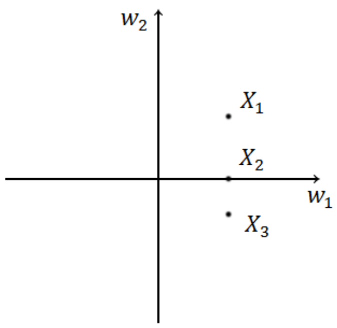


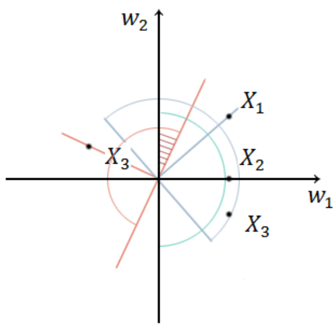
是成对线性可分

---

3. 画出下图中两个模式类的线性分类器$\boldsymbol{G(X) = W^T X}$的解区

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})^T, \boldsymbol{X_2} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_3} = \left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right)^T$$





---

4. 对以下样本集合，使用感知器算法求解线性分类器（取初始W为全 0 向量，取$\rho=1$），写出迭代过程。

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1}=(\mathbf{1},\mathbf{0})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_2}=(-\mathbf{1},\mathbf{0})^T, \boldsymbol{X_3}=(\mathbf{0},\mathbf{1})^T$$

- 模式类的增广形式：$\omega_1: X_1=(1,0,1)^T$; $\omega_2: X_2=(-1,0,1)^T, X_3=(0,1,1)^T$
- $k=0, g(X_1)=0$;　$W(1)=W(0)+\rho X_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=1, g(X_2)=2$;　$W(2)=W(1)-\rho X_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=2, g(X_3)=0$;　$W(3)=W(2)-\rho X_3=(2,-1,-1)^{\mathrm{T}}$;　$N_c=0$
- $k=3, g(X_1)=2$;　$W(4)=W(3)$;　$N_c=1$
- $k=4, g(X_2)=-3$;　$W(5)=W(4)$;　$N_c=2$
- $k=5, g(X_3)=-2$;　$W(6)=W(5)$;　$N_c=3$

注：

1. 增广形式
2. 迭代终止的条件为$N_c=$样本个数
3. 每次迭代只输入一个样本

---

5. 对以下样本集合，使用感知器算法求解线性分类器并保证不存在不确定区域（取初始W为全 0 向量，取$\rho=1$），写出迭代过程。

$$\boldsymbol{\omega_1}: \boldsymbol{X_1}=(\mathbf{1},\mathbf{1})^T;\ \boldsymbol{\omega_2}: \boldsymbol{X_2}=(-\mathbf{2},\mathbf{1})^T;\ \boldsymbol{\omega_3}: \boldsymbol{X_3}=(\mathbf{2},-\mathbf{2})^T$$

- 初始化

  模式类的增广形式：$\omega_1: X_1=(1,1,1)^T$; $\omega_2: X_2=(-2,1,1)^T$; $\omega_3: X_3=(2,-2,1)^T$

  初始化三个决策函数$g_1(X)=W_1^T X, g_2(X)=W_2^T X, g_3(X)=W_3^T X$

- $k=0$, $g(X_1)=0$, $g(X_1)=0$, $g(X_1)=0$, $N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(1)=W_1(0)+\rho X_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(1)=W_2(0)-\rho X_1=(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_3(1)=W_3(0)-\rho X_1=(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=1$, $g(X_2)=0$, $g(X_2)=0$, $g(X_2)=0$, $N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(2)=W_1(1)-\rho X_2=(3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_2(2)=W_2(1)+\rho X_2=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(2)=W_3(1)-\rho X_2=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=2$, $g(X_3)=6$, $g(X_3)=-6$, $g(X_3)=4$, $N_c=0$

$$\begin{cases} W_1(3)=W_1(2)-\rho X_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(3)=W_2(2)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(3)=W_3(2)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=3$, $g(X_1)=2$, $g(X_1)=-3$, $g(X_1)=-3$, $N_c=1$

$$\begin{cases} W_1(4)=W_1(3)=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(4)=W_2(3)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(4)=W_3(3)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=4$, $g(X_1)=-1$, $g(X_1)=6$, $g(X_1)=-6$, $N_c=2$

$$\begin{cases} W_1(5)=W_1(4)=(1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(5)=W_2(4)=(-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(5)=W_3(4)=(1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- $k=5$, $g(X_1)=-3$, $g(X_1)=-6$, $g(X_1)=4$, $N_c=3$

$$\begin{cases} W_1(5) = W_1(4) = (1,2,-1)^{\mathrm{T}} \\ W_2(5) = W_2(4) = (-3,0,0)^{\mathrm{T}} \\ W_3(5) = W_3(4) = (1,-2,-2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

- 无不确定区域的解：

$$\begin{cases} G_{12}(X) = g_1(X) - g_2(X) = (4,2,-1)^T \\ G_{13}(X) = g_1(X) - g_3(X) = (0,4,1)^T \\ G_{23}(X) = g_2(X) - g_3(X) = (-4,2,2)^T \end{cases}$$

注：

1. 增广形式
2. 注意不确定区域的消除方法

---

6. 对于二维线性判别函数$g(X) = 4x_1 - 3x_2 + 5$

a) 将判别函数写成矩阵形式$g(x) = W^T X + w_{n+1}$

$$W = [4,-3]^T,\ \ X = [x_1, x_2]^T,\quad w_{n+1} = 5,\ \ g(X) = [4,-3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 5$$

b) 映射成广义线性函数$f(Y) = W^T Y, Y = (y_1, y_2, y_3)^T = (2x_1, x_2, 1)^T$

$$W = [2,-3,5]^T,\ \ f(Y) = [2,-3,5]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

---

7. 用广义线性判别函数法解决以下两个模式类的分类：

$$\boldsymbol{\omega_1: X_1 = (1,0)^T, X_2(-1,0)^T;\ \ \omega_2: X_3 = (0,1)^T, X_4 = (0,-1)^T}$$

a) 设计变换函数$y_i = f_i(x_1, x_2), i = 1,2, \ldots$使变换后的样本在 Y 空间线性可分。

$$Y = [y_1, y_2]^T = [x_1, x_2^2]^T$$

b) 给出一个决策面函数$g(Y)$

$$g(Y) = [0,1]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - 0.5$$

注：

1. 不少同学写$g(Y) = \frac{1}{2}$，注意$g(Y)$是关于Y的函数，正确应为$g(Y) = y_1 - 1/2$
2. 本题解法不唯一

---

8. 若准则函数的形式为$J(W,X) = \frac{1}{2}(1 - W^T X)^2$。$W = (2,1)^T, X_1 = (2,3)^T, X_2 = (1,4)^T$，在应用梯度下降法时，求$\nabla J(W, X_1)$和$\nabla J(W, X_2)$

$$\nabla J(W,X) = \frac{\partial J}{\partial W} = (1 - W^T X)(-X)$$

$$\nabla J(W,X_1) = (1 - W^T X_1)(-X_1) = (-6)[-2,-3]^T = [12,18]^T$$

$$\nabla J(W,X_2) = (1 - W^T X_2)(-X_2) = (-5)[-1,-4]^T = [5,20]^T$$

注：很多同学误写为$\nabla J(W,X) = (1 - W^T X)(-W)$

---

9. 利用位势法对以下模式类进行分类，位势函数选$K(X,X_n)=\exp\left(-\left||x-x_n|\right|^2\right),K_{\mathrm{A},0}(x)=0$

$$\omega_1: X_1=(0,0)^T, \mathrm{X}_2=(1,2)^T; \omega_2: X_3=(1,-1)^T, X_4=(3,0)^T$$

- $k=0,\quad X'=X_1=(0,0)^T,\quad K_{A,0}(X')=0,\quad N_c=0$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')\le 0$

$$K_{A,1}(X)=K_{A,0}(X)+K(X,X')=\exp\{-\left||X|\right|^2\}$$

- $k=1,\quad X'=X_2=(1,2)^T,\quad K_{A,1}(X')=\exp\{-1\}>0,\quad N_c=1$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,2}(X)=K_{A,1}(X)=\exp\{-\left||X|\right|^2\}$$

- $k=2,\quad X'=X_3=(1,-1)^T,\quad K_{A,2}(X')=\exp\{-2\}>0,\quad N_c=0$
  因为$X'\in\omega_2$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,3}(X)=K_{A,2}(X)-K(X,X')=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=3,\quad X'=X_4=(3,0)^T,\quad K_{A,3}(X')=\exp\{-9\}-\exp\{-5\}<0,\quad N_c=1$
  因为$X'\in\omega_2$，且$K_{A,0}(X')<0$

$$K_{A,4}(X)=K_{A,3}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=4,\quad X'=X_1=(0,0)^T,\quad K_{A,4}(X')=1-\exp\{-2\}>0,\quad N_c=2$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,5}(X)=K_{A,4}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=5,\quad X'=X_2=(1,2)^T,\quad K_{A,5}(X')=\exp\{-5\}-\exp\{-9\}>0,\quad N_c=3$
  因为$X'\in\omega_1$，且$K_{A,0}(X')>0$

$$K_{A,6}(X)=K_{A,5}(X)=\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

- $k=6,\quad X'=X_3=(1,-1)^T,\quad K_{A,6}(X')=\exp\{-2\}-1<0,\quad N_c=4$
  $\because N_c=4\ \therefore$迭代结束
- 最终位势函数为：

$$\exp\left\{-\left||X|\right|^2\right\}-\exp\{-\left||X-(1,-1)^T|\right|^2\}$$

---

10. 用 Fisher 线性判别法对以下模式类构造分类器，确定最佳投影方向

$$\omega_1: X_1=(0,0)^T, \mathrm{X}_2=(1,2)^T; \omega_2: X_3=(1,-1)^T, X_4=(3,0)^T$$

- 计算两个样本的均值向量：

$$m_x^1=\frac{1}{n_1}\sum_{X_k\in\omega_1}X_k=[0.5,1]^T$$

$$m_x^2=\frac{1}{n_2}\sum_{X_k\in\omega_2}X_k=[2,-0.5]^T$$

- 计算类内总离散度矩阵：

$$S_w=\sum_{X_k\in\omega_1}(X_k-m_x^1)(X_k-m_x^1)^T+\sum_{X_k\in\omega_2}(X_k-m_x^2)(X_k-m_x^2)^T$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5 & 2\\ 2 & 2.5\end{bmatrix}$$

- 计算S_w的逆矩阵S_w^{-1}：

$$S_w^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{9}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

- 最佳投影：

$$\begin{aligned} W^* &= S_w^{-1}(m_x^1 - m_x^2) \\ &= [-3,3]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

注：有疑问或习题有错误请联系助教

张海峰： hfz@mail.ustc.edu.cn
谢晓路： xxxl@mail.ustc.edu.cn

第三、四章作业答案

1. 说明最大后验概率判决准则为什么可以被成为最小错误概率判决准则。

最大后验概率判决：

$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) > p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_1$$
$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) < p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_2$$

因此，决策面为

$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) = p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2)$$

在课本图 3.2 中对应于图(c)的情形。

而错误概率：

$$P(e) = P(x\text{在}\Omega_2\text{中}|\omega_1) + P(x\text{在}\Omega_1\text{中}|\omega_2) = \int_{\Omega_2} p(x|\omega_1)P(\omega_1)\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} p(x|\omega_2)P(\omega_2)\mathrm{d}x$$

即由阈值 t 所确定的阴影部分的面积，显然阴影部分的面积在 $p(x|\omega_1)P(\omega_1) = p(x|\omega_2)$

$P(\omega_2)$ 时最小，所以最大后验概率判决准则也是最小错误概率判决准则。

2. 已知两个一维模式类别的类概率密度函数为

$$p(x|\omega_1) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$
$$p(x|\omega_2) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x < 2 \\ 3-x, & 2 \le x \le 3 \\ 0, & else \end{cases}$$

先验概率分别为 $p(\omega_1) = 0.4, p(\omega_2) = 0.6$。试求最大后验概率判决函数以及总的分类错误

概率 $P(e)$。

$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) > p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_1$$
$$p(\boldsymbol{X}|\omega_1)P(\omega_1) > p(\boldsymbol{X}|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_2$$

$$p(x|\omega_1)P(\omega_1) = \begin{cases} 0.4x, & 0 \le x < 1 \\ 0.8-0.4x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$
$$p(x|\omega_2)P(\omega_2) = \begin{cases} 0.6x-0.6, & 1 \le x < 2 \\ 1.8-0.6x, & 2 \le x \le 3 \\ 0, & else \end{cases}$$

$0 < x < 1:$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) = 0.4x$
$p(x|\omega_2)P(\omega_2) = 0$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) > p(x|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow x \in \omega_1$
$1 \le x < 2:$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) = 0.8 - 0.4x$
$p(x|\omega_2)P(\omega_2) = 0.6x - 0.6$
$s.t. p(x|\omega_1)P(\omega_1) = p(x|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow x = 1.4$

$1 \le x < 1.4:$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) > p(x|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow x \in \omega_1$
$1.4 < x < 2:$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) < p(x|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow x \in \omega_2$
$2 \le x < 3:$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) = 0$
$p(x|\omega_2)P(\omega_2) = 1.8 - 0.6x$
$p(x|\omega_1)P(\omega_1) < p(x|\omega_2)P(\omega_2) \Rightarrow x \in \omega_2$

综上，

$$\begin{cases} \omega_1, & 0 < x < 1.4 \\ \omega_2, & 1.4 < x < 3 \\ \text{无法判断}, & otherwise \end{cases}$$

分类错误概率：

$$P(e) = \int_0^{1.4} p(x|\omega_2)P(\omega_2)\mathrm{d}x + \int_{1.4}^{3} p(x|\omega_1)P(\omega_1)\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{1.4} (0.6x - 0.6)\mathrm{d}x + \int_{1.4}^{2} (0.8 - 0.4x)\mathrm{d}x = 0.12$$

3. 从似然比形式的角度说明最大后验概率判决准则同最小风险判决准则之间的联系与区别。

注意：似然比为相应两个类别的类条件概率密度函数之比的形式。

即：$l_{12} = \dfrac{p(\boldsymbol{X}|\omega_1)}{p(\boldsymbol{X}|\omega_2)}$

似然比形式的判决规则：

$l_{12} > \theta_{12} \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_1$
$l_{12} < \theta_{12} \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \omega_2$

最大后验概率判决规则中：$\theta_{12}=\dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$

最小风险判决规则中：$\theta_{12}=\dfrac{[L(\alpha_1\,|\,\omega_2)-L(\alpha_2\,|\,\omega_2)]P(\omega_2)}{[L(\alpha_2\,|\,\omega_1)-L(\alpha_1\,|\,\omega_1)]P(\omega_1)}$

两者在似然比表现形式上面完全一样，但是判决阈值的计算不同。若令最小风险判决准则中判决正确的风险为 0，判决错误的代价为 1，则二者的判决阈值计算也是一样的。所以最大后验概率判决准则是 0-1 风险判决准则。

4. 在图像识别中，假定有灌木丛和坦克两种类型，它们的先验概率分别是 0.8 和 0.2，损失函数如下表所示，其中 ω_1 和 ω_2 分别表示灌木丛和坦克，α_1 和 α_2 表示判决为灌木丛和坦克，α_3 表示拒绝判决。

	ω_1	ω_2
α_1	0.5	6
α_2	2	1
α_3	1.5	1.5

现在做了三次实验，从类概率密度函数曲线上查得三个样本 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 的类概率密度值如下：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_1: p(\boldsymbol{X}_1\,|\,\omega_1)=0.1, p(\boldsymbol{X}_1\,|\,\omega_2)=0.7\\
&\boldsymbol{X}_2: p(\boldsymbol{X}_2\,|\,\omega_1)=0.3, p(\boldsymbol{X}_2\,|\,\omega_2)=0.45\\
&\boldsymbol{X}_3: p(\boldsymbol{X}_3\,|\,\omega_1)=0.6, p(\boldsymbol{X}_3\,|\,\omega_2)=0.5
\end{aligned}
$$

(1) 试用贝叶斯最小误判概率准则判决三个样本各属于哪一个类型。

(2) 假定只考虑前两种判决，试用贝叶斯最小风险判决准则判决三个样本各属于哪一个类型。

(3) 把拒绝判决考虑在内，重新考核三次实验的结果。

(1) 贝叶斯最小误判准则：

$$
\begin{aligned}
&p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_1)P(\omega_1)>p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow \boldsymbol{X}\in\omega_1\\
&p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_1)P(\omega_1)>p(\boldsymbol{X}\,|\,\omega_2)P(\omega_2)\Rightarrow \boldsymbol{X}\in\omega_2
\end{aligned}
$$

第一个样本：

$$p(\boldsymbol{X}_1 | \omega_1)P(\omega_1) = 0.1 \times 0.8 = 0.08$$
$$p(\boldsymbol{X}_1 | \omega_2)P(\omega_2) = 0.14$$
$$\boldsymbol{X}_1 \in \omega_2$$

第二个样本：

$$p(\boldsymbol{X}_2 | \omega_1)P(\omega_1) = 0.24$$
$$p(\boldsymbol{X}_2 | \omega_2)P(\omega_2) = 0.09$$
$$\boldsymbol{X}_2 \in \omega_1$$

第三个样本：

$$p(\boldsymbol{X}_3 | \omega_1)P(\omega_1) = 0.48$$
$$p(\boldsymbol{X}_3 | \omega_2)P(\omega_2) = 0.1$$
$$\boldsymbol{X}_3 \in \omega_1$$

(2) 考虑前两种判决，贝叶斯最小风险判决准则

$$l_{12} > \theta_{12} \Rightarrow x \in \omega_1$$
$$l_{12} < \theta_{12} \Rightarrow x \in \omega_1$$
$$l_{12} = \frac{p(x | \omega_1)}{p(x | \omega_2)}$$
$$\theta_{12} = \frac{[L(\alpha_1 | \omega_2) - L(\alpha_2 | \omega_2)]P(\omega_2)}{[L(\alpha_2 | \omega_1) - L(\alpha_1 | \omega_1)]P(\omega_1)} = \frac{5}{6}$$

第一个样本：

$$l_{12} = \frac{1}{7} < \theta_{12} = \frac{5}{6}$$
$$\boldsymbol{X}_1 \in \omega_2$$

第二个样本：

$$l_{12} = \frac{2}{3} < \theta_{12} = \frac{5}{6}$$
$$\boldsymbol{X}_2 \in \omega_2$$

第三个样本：

$$l_{12} = 1.2 > \theta_{12} = \frac{5}{6}$$
$$\boldsymbol{X}_3 \in \omega_1$$

(3) 考虑拒绝判决

注意：书中的推导是在假设所有的正确判决损失均为 0，所有的错误判决损失均为 λ_F，所

有的拒绝判决损失均为λ_R的情况下进行的。而本题正确判决损失不为 0，错误判决损失也不都相同。

$$R(\alpha_{N+1} \mid \boldsymbol{X}) < R(\alpha_i \mid \boldsymbol{X}), \forall i = 1, 2, \cdots, N \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \alpha_{N+1}$$

$$R(\alpha_i \mid \boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{N} L(\alpha_i \mid \omega_j) P(\omega_j \mid \boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{N} L(\alpha_i \mid \omega_j) \frac{p(\boldsymbol{X} \mid \omega_j) P(\omega_j)}{\sum_{j=1}^{N} p(\boldsymbol{X} \mid \omega_j) P(\omega_j)}, i = 1, 2, 3, \cdots, N+1$$

第一个样本：

$$R(\alpha_1 \mid \boldsymbol{X}_1) = 4$$

$$R(\alpha_2 \mid \boldsymbol{X}_1) = \frac{15}{11} \approx 1.36$$

$$R(\alpha_3 \mid \boldsymbol{X}_1) = 1.5$$

$$\boldsymbol{X}_1 \in \omega_2$$

第二个样本：

$$R(\alpha_1 \mid \boldsymbol{X}_2) = 2$$

$$R(\alpha_2 \mid \boldsymbol{X}_2) = \frac{19}{11} \approx 1.73$$

$$R(\alpha_3 \mid \boldsymbol{X}_2) = 1.5$$

拒绝判决

第三个样本：

$$R(\alpha_1 \mid \boldsymbol{X}_3) = \frac{42}{29} \approx 1.45$$

$$R(\alpha_2 \mid \boldsymbol{X}_3) = \frac{53}{29} \approx 1.83$$

$$R(\alpha_3 \mid \boldsymbol{X}_3) = 1.5$$

$$\boldsymbol{X}_3 \in \omega_1$$

5. 简要分析贝叶斯统计判决准则的缺陷以及 Neyman-Peason 判决准则的基本思想。

贝叶斯风险判决准则的缺陷：需要已知先验概率和类条件概率密度且二者不变。在最小风险判决情况需要对误判风险做出恰当的定义。

Neyman-Peason 判决规则基本思想：在保持一类分类错误概率不变的情况下，使另外一类分类错误概率最小。

6. 简要分析最小最大判决准则的基本思想。它的错分概率是最小的吗？为什么？

最小最大判决准则的基本思想：在最坏的情况下取得最好的结果，在其他情况下并不追求性能的最佳化。在最坏的情况下，它给出最好的结果，而在其他情况下给出的结果既不是最差

也不是最好。具体来讲就是使最大的总平均风险最小化而给出的分类判决。

显然，它的错分概率并不是最小的，因为它只获得最坏的情况下的最好的结果。采取的是一种过于保守的判决方法，所以它的分类器性能在大多数情况下相比于贝叶斯分类器是下降的。

7. 二维空间中的两类样本均服从正态分布，其参数分别为：

均值向量：$\boldsymbol{\mu}_1=(1,0)^T, \boldsymbol{\mu}_2=(-1,0)^T$

协方差矩阵：$\boldsymbol{\Sigma}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

且两类的先验概率相等，试证明其基于最小错误率判决准则的决策分界面方程为一圆，并求其方程。

$$d=2, |\boldsymbol{\Sigma}_1|=1, |\boldsymbol{\Sigma}_2|=4, \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$p(\boldsymbol{X}\mid\omega_1)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)^T\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)\}$$

$$p(\boldsymbol{X}\mid\omega_2)=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)\}$$

由 $p(\boldsymbol{X}\mid\omega_1)P(\omega_1)=p(\boldsymbol{X}\mid\omega_2)P(\omega_2)$ 得

$$\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)^T\Sigma_1^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_1)\}=\frac{1}{4\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_2)\}$$

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，并对上式左右同时取自然对数

$$\ln 2-\frac{1}{2}[(x_1-1)^2+x_2^2]=-\frac{1}{4}(x_1+1)^2-\frac{1}{4}x_2^2$$

整理得到

$$(x_1-3)^2+x_2^2=8+4\ln 2$$

8. 参数估计和非参数估计有何区别？试述最大似然估计和 Parzen 窗估计的基本原理。

参数估计：适用于类条件概率密度的函数形式已知，但是相关参数未知的情况。此时相应的估计问题转换为一个参数估计问题求解。

非参数估计：适用于类条件概率密度函数的形式和相关参数都未知的情况。此时需要根据给定的样本同时确定类条件概率密度的函数形式和相关参数。

最大似然估计的基本思想：对于有监督的样本集，按照所属类别（类别数为 S）将样本集中

所有样本划分为 S 个子集。另假设所有这些样本按照类条件概率密度 $p(\boldsymbol{X} \mid \omega_i)$ 从总体中独立抽取，这样，若 $p(\boldsymbol{X} \mid \omega_i)$ 的函数形式已知而仅是参数未知（参数集合为 θ_i ）只要能用观测样本确定出 θ_i ,即可以求得 $p(\boldsymbol{X} \mid \omega_i)$ 的估计。

Parzen 窗估计法的基本思想：把包含估计点 $\boldsymbol{X}$ 在内的区域 R_n 选为训练样本数 n 的函数。用变换以后的窗函数来表征特征空间中围绕 $\boldsymbol{X}$ 的超立方体区域 R_n ，得到第 n 次操作以后样本落入 R_n 中的个数与 R_n 的体积之比即为所求概率密度的估计式，此时只需要窗函数满足 $\phi(u) \geq 0, \quad \int_{E_d} \phi(u) du = 1$ 。

第五章作业

1. 聚类算法可分为哪几类？影响聚类算法性能优劣的因素有哪些？

答：

(1) 增类聚类算法（基于分裂的聚类算法）
(2) 减类聚类算法（基于合并的聚类算法）
(3) 动态聚类算法

因素：聚类中心的选择与更新、聚类策略和聚类准则的选择、控制阈值和类别数的设置等

2. 请给出最小张树聚类算法的具体过程，并分析其优缺点。

答：（课本第 218~221 页）

优点：简洁、明快，特别适用于距离较远的两个密集样本点集之间的区分。

缺点：1）当样本集合中存在噪声样本时可能造成错分；2）对于相距较近的两个密集样本点集的区分能力较弱。

3.有以下四个样本：

$$\boldsymbol{X_1=(3,5)^T，X_2=(5,1)^T，X_3=(1,0)^T，X_4=(1,4)^T}$$

初始划分为两类，$\boldsymbol{\omega_1}$：$\{\boldsymbol{X_1，X_2}\}$ 和 $\boldsymbol{\omega_2}$：$\{\boldsymbol{X_3，X_4}\}$，则：

（1）若将$\boldsymbol{X_2}$移到$\boldsymbol{\omega_2}$类中，试计算出转移前后的总的类内离散度矩阵$\boldsymbol{S_w}$，请给出具体计算过程。

（2）若使用$\boldsymbol{S_w}$的行列式作为聚类准则，（1）中的转移是否合适？请给出具体过程。

（3）若使用 C-均值算法的准则函数，（1）中的转移是否合适？请给出具体过程。

答：（1）

类内离散度计算公式：

$$S_w=\sum_{j=1}^{c}P_jS_j$$

$$S_j=\frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j}(X_k^j-m_j)(X_k^j-m_j)^T$$

转移前：

$$m_1=(4,3)^T，m_2=(1,2)^T$$

$$S_1=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}，S_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$S_w=\sum_{j=1}^{2}P_jS_j=\frac{1}{2}S_1+\frac{1}{2}S_2=\begin{bmatrix}1/2 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

转移后：

$$m_1 = (3,5)^T，m_2 = (7/3,5/3)^T$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}，S_2 = \begin{bmatrix} 32/9 & -8/9 \\ -8/9 & 26/9 \end{bmatrix}$$

$$S_w = \sum_{j=1}^{2} P_j S_j = \frac{1}{4}S_1 + \frac{3}{4}S_2 = \begin{bmatrix} 8/3 & -2/3 \\ -2/3 & 13/6 \end{bmatrix}$$

（2）

优化目标：使S_w的行列式，即 $|S_w|$ 越来越小

转移前：

$$|S_w| = 1$$

转移后：

$$|S_w| = \frac{16}{3}$$

综上所述，转移不合适。

（3）

C-均值准则函数：误差平方和准则，越小越好

$$J_e = \sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n_j} ||X_k^j - m_j||^2$$

转移前：

$$J_e = 18$$

转移后：

$$J_e = 19.33$$

综上所述，转移不合适。

4.有以下五个样本：

$$\boldsymbol{X_1 = (0,1,2,1,2,4)^T，}$$
$$\boldsymbol{X_2 = (3,2,3,1,2,1)^T，}$$
$$\boldsymbol{X_3 = (1,0,0,0,1,1)^T，}$$
$$\boldsymbol{X_4 = (2,1,0,2,1,2)^T，}$$
$$\boldsymbol{X_5 = (0,0,1,0,1,0)^T，}$$

请按照最小距离准则用层次聚类算法进行聚类分析(矩阵 D 直接用根号表示)，并给出层次聚类示意图。

答：Too Simple! 在此省略具体计算过程。

$$\omega_1 = \{X_1\}，\omega_2 = \{X_2\}，\omega_3 = \{X_3\}，\omega_4 = \{X_4\}，\omega_5 = \{X_5\}$$
$$\downarrow$$
$$\omega_1 = \{X_1\}，\omega_2 = \{X_2\}，\omega_3 = \{X_3, X_5\}，\omega_4 = \{X_4\}$$
$$\downarrow$$
$$\omega_1 = \{X_1\}，\omega_2 = \{X_2\}，\omega_3 = \{X_3, X_4, X_5\}$$
$$\downarrow$$
$$\omega_1 = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}，\omega_2 = \{X_2\}$$
$$\downarrow$$
$$\omega_1 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$$

5. 已知一个样本集合：

$$\{(\mathbf{0},\mathbf{0})^T,\ (\mathbf{1},\mathbf{1})^T,\ (\mathbf{2},\mathbf{1})^T,\ (\mathbf{4},\mathbf{4})^T,\ (\mathbf{5},\mathbf{3})^T,\ (\mathbf{5},\mathbf{4})^T,\ (\mathbf{6},\mathbf{3})^T,\ (\mathbf{6},\mathbf{5})^T\}$$

试用近邻函数法进行聚类分析，请给出具体过程和最终的聚类结果。

答：

计算距离矩阵：

$$D=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{32} & \sqrt{34} & \sqrt{41} & \sqrt{45} & \sqrt{61} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{18} & \sqrt{20} & 5 & \sqrt{29} & \sqrt{41} \\ \sqrt{5} & 1 & 0 & \sqrt{13} & \sqrt{13} & \sqrt{18} & \sqrt{20} & \sqrt{32} \\ \sqrt{32} & \sqrt{18} & \sqrt{13} & 0 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{34} & \sqrt{20} & \sqrt{13} & \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{41} & 5 & \sqrt{18} & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{45} & \sqrt{29} & \sqrt{20} & \sqrt{5} & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{61} & \sqrt{41} & \sqrt{32} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

计算近邻系数矩阵：m_{ij}表示X_i对X_j的近邻系数，即进行列统计

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

计算近邻函数值矩阵：$\alpha_{ij}=m_{ij}+m_{ji}-2$

$$A=\begin{bmatrix} 16 & \mathbf{1} & 2 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 16 & \mathbf{0} & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & \mathbf{0} & 16 & 6 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 16 & 3 & \mathbf{0} & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 6 & 3 & 16 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 \\ 10 & 9 & 8 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 16 & 3 & 2 \\ 11 & 10 & 9 & 5 & \mathbf{0} & 3 & 16 & 3 \\ 12 & 11 & 10 & 4 & 5 & \mathbf{2} & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

进行分类：

$$\omega_1=\{X_1,X_2,X_3\},\ \omega_2=\{X_4,X_5,X_6,X_7,X_8\}$$

进行判断：

$$\gamma_{12}=6,\ \max\gamma_1=1,\ \max\gamma_1=2$$

$$\gamma_{12}>\gamma_1,\ \gamma_{12}>\gamma_2$$

因此分类结束，分为两类。

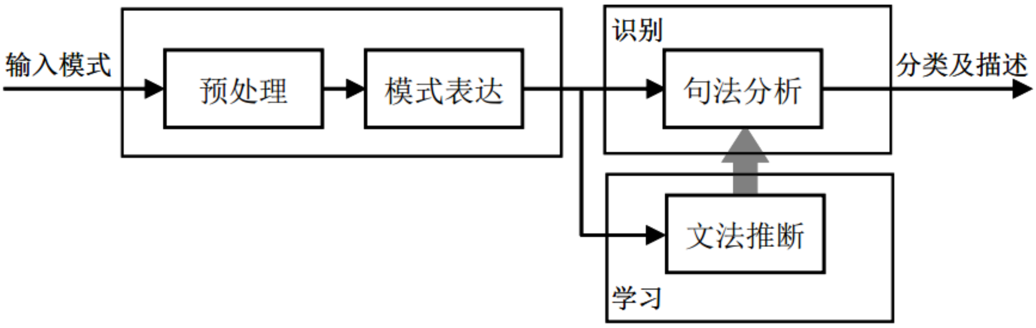
6.查阅基于密度的聚类算法 DBSCAN，了解其相关概念定义，并给出算法的伪代码表达。

答：理解内涵，自由发挥。

第六章习题解答

1. 给出结构模式识别方法的定义。
答:
教程第 222 页下方,“首先，使用某种方法从输入复杂模式……最后，借助于所获得的组合规则对输入复杂模式的结果进行分析，完成识别任务。”

2. 画出一个句法模式识别的系统框图,简述构建该系统的步骤。
答:



1. 学习过程（文法推断）：利用已知结构的样本模式来推断产生这些模式的文法规则。
2. 识别过程（句法分析）：用有序字符串表达输入模式，并利用文法规则对其进行句法分析以判断能否由相应的文法所生成。

3. 简述文法的分类以及相应的定义。
答:
文法分为四类:0 型文法、1 型文法、2 型文法和 3 型文法。

0 型文法：也称为无约束文法或短语结构文法,其产生式具有

$$\alpha \to \beta$$

的形式．其中, $\alpha \in \Sigma^{+}$ 和 $\beta \in \Sigma^{*}$．这类文法对产生式没有任何限制.

1 型文法：也称为上下文有关文法,其产生式具有

$$\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \beta \alpha_2$$

的形式．其中, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^{*}, \beta \in \Sigma^{+}$ 以及 $A \in N$.

2 型文法：也称为上下文无关文法，其产生式具有

$$A \to \beta$$

的形式．其中，$A \in N, \beta \in \Sigma^{+}$．

3 型文法：也称为有限状态文法或正则文法，其产生式具有

$$A \to aB \quad 或 \quad A \to b$$

的形式．其中，$A, B \in N, a, b \in T$.

4. 考虑文法 G = (N, T, P, S)，其中 N = {S, A, B}，T={a, b, c}，以及
P: （1）S → aAb （2）A → aBc （3）B → bBc （4）B → a
问：
（1）说明以上文法定义中各符号的含义 ？
（2）这是什么文法？
（3）由此可以生成的语言？（要求给出推导过程）
答：
（1）N 为 G 的非终结符或变量的有穷集合，T 为 G 的终结符或常量的有穷集合，P 是产生式或再写规则的有穷集合，而 S∈N 为句子的起始符。
（2）文法 G 是二型文法.
（3）文法 G 可以生成的语言是 $L(G) = \{a^2\mathrm{b}^n ac^{n+1}b \mid n = 0,1,2,\cdots\}$,

推导过程如下：

$$S \underset{G}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} aAb \underset{G}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} aaBcb \underset{G}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} aaacb$$

$$S \underset{G}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} aAb \underset{G}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} aaBcb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabBccb \underset{G}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} aabaccb$$

$$S \underset{G}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} aAb \underset{G}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} aaBcb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabBccb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabbBcccb \underset{G}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} aabbacccb$$

$$S \underset{G}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} aAb \underset{G}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} aaBcb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabBccb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabbBcccb \underset{G}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} aabbbBccccb \underset{G}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} aabbbaccccb$$

……

所以，由文法 G 生成的语言是

$$L(G)=\{aaacb, aabaccb, aabbacccb, aabbbaccccb, \cdots\}=\{a^2\mathrm{b}^n ac^{n+1}b \mid n=0,1,2,\cdots\}$$

5. 已知一个非确定的有限状态自动机$A=\left(Q,\Sigma_I,\delta,q_0,F\right)$，其中，

Q = {q$_0$, q$_1$, q$_2$}，Σ$_I$ = {0, 1}，F={q$_2$}，以及δ：

（1）$\delta(q_0,0)=\{q_0,q_1\}$ （2）$\delta(q_0,1)=\{q_1,q_2\}$

（3）$\delta(q_1,0)=\{q_1\}$ （4）$\delta(q_1,1)=\{q_2\}$

（5）$\delta(q_2,0)=\{q_2\}$ （6）$\delta(q_2,1)=\{q_2\}$

请你：

（1）给出状态转移表以及状态转移图。

（2）构造对应的确定的有限状态自动机，并给出状态转移图。

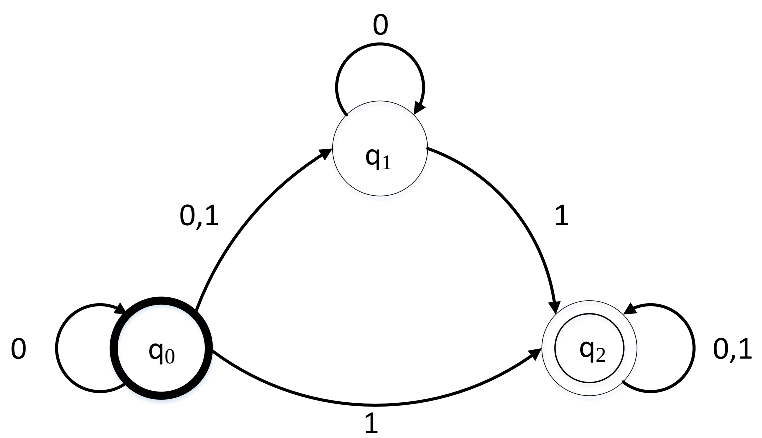
答：

（1）

状态转移表：

符号 状态	0	1
$^{\cdot}q_0$	$\{^{\cdot}q_0,q_1\}$	$\{q_1,q_{2\cdot}\}$
q_1	q_1	$q_{2\cdot}$
$q_{2\cdot}$	$q_{2\cdot}$	$q_{2\cdot}$

状态转移图：



(2)设所求的确定的有限状态自动机为$A^{'}=(Q^{'},\Sigma_I,\delta^{'},q_0^{'},F^{'})$，$A^{'}$的初始状态为$[q_0]$，

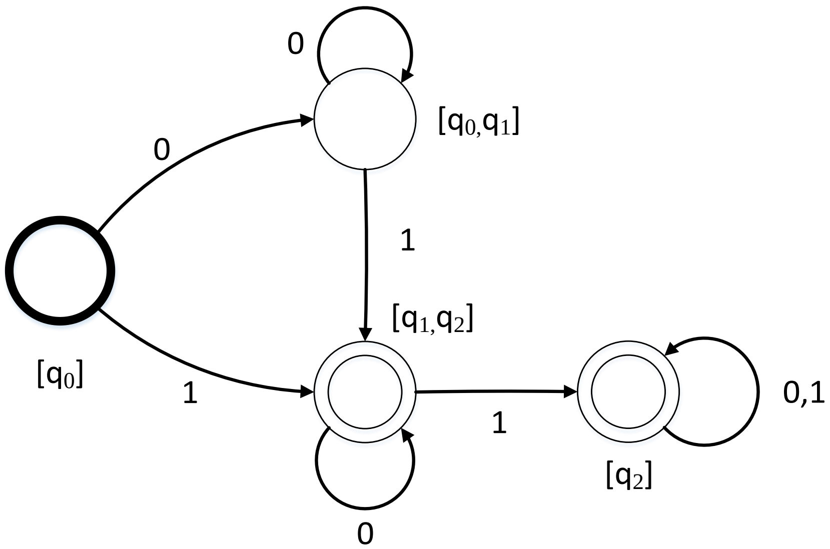
则可以按照以下步骤求解：

i）考虑初始状态$[q_0]$ 在输入符号为 0,1 情况下的状态转移情况。因为在δ中有$\delta(q_0,0)=\{q_0,q_1\}$，而$A^{'}$中无对应的转移状态，故新增状态$[q_{0,}q_1]$。又因为在$\delta$中有$\delta(q_0,1)=\{q_1,q_2\}$，而在$A^{'}$中无对应的转移状态，故新增状态$[q_{1,}q_2]$，而该状态含有$A$的终结状态，故$[q_{1,}q_2]$为$A^{'}$的终结状态。

ii） 考虑状态$[q_{0,}q_1]$在输入符号 0，1 情况下的状态转移情况。因为在在δ中有$\delta(\{q_0,q_1\},0)=\{q_0,q_1\}$，$\delta(\{q_0,q_1\},1)=\{q_1,q_2\}$，而在$A^{'}$已有状态$[q_{0,}q_1]$和$[q_{1,}q_2]$，因此使用已有状态。

iii） 考虑状态$[q_{1,}q_2]$在输入符号 0,1 情况下的状态转移情况。因为在在δ中有$\delta(\{q_1,q_1\},0)=\{q_1,q_2\}$，$\delta(\{q_1,q_2\},1)=\{q_2\}$，而在$A^{'}$已有状态$[q_1q_2]$，可以直接使用此状态，但无转移状态$[q_2]$，因此新增状态$[q_2]$。

iv） 考虑状态$[q_2]$在输入符号为 0,1 情况下的状态转移情况。因为在在δ中有$\delta(\{q_2\},0)=\{q_2\}$，$\delta(\{q_2\},1)=\{q_2\}$，而在$A^{'}$已有状态$[q_2]$，故可以直接使用此状态。至此，所有状态已被遍历，所得对应的确定的有限状态自动机的状态转移图如下：



***[选做题] 虽然本题不计入本次作业成绩，但要求掌握。若能正确完成，则本次作业附加 2 分，但最终得分不超过满分上限。**

试用 CYK 算法判断符号串 x = b+c*a 能否被上下文无关文法 G = (N, T, P, S) 所接收。其中，N = {S, T}, T= {a, b, c, +, *}，以及 P：

(1)S → T，(2)S → S+T，(3)T→I，(4)，T→T*I，(5)I→a，(6)I→b，(7)I→c.

答:

可以被上下文无关文法 G = (N， T， P， S)所接收。

参考教材第 296 页，首先将题目中的产生式改写成乔姆斯基范式的形式，这部分与教材上的相同。然后根据 CYK 算法，依次进行如下操作：

对于三角表格的第一行，在 P' 中查找是否有形如 $A_{i,1} \to a_i$ 的产生式

对于三角表格的第二行，在 P' 中查找是否有形如 $A_{i,2} \to A_i A_{i+1,1}$ 的产生式

对于三角表格的第三行，在 P' 中查找是否有形如 $\begin{cases} A_{i,3} \to A_{i,1}A_{i+1,2} \\ A_{i,3} \to A_{i,2}A_{i+2,1} \end{cases}$ 的产生式

对于三角表格的第四行，在 P' 中查找是否有形如 $\begin{cases} A_{i,4} \to A_{i,1}A_{i+1,3} \\ A_{i,4} \to A_{i,2}A_{i+2,2} \\ A_{i,4} \to A_{i,3}A_{i+3,1} \end{cases}$ 的产生式

对于三角表格的第五行（最后一行），在 P' 中查找是否有形如 $\begin{cases} A_{1,5} \to A_{1,1}A_{1,4} \\ A_{1,5} \to A_{1,2}A_{3,3} \\ A_{1,5} \to A_{1,3}A_{4,2} \\ A_{1,5} \to A_{1,5}A_{5,1} \end{cases}$ 的产生式

如果找到这样的产生式，则把相应产生式左端的 $A_{i,j}$ 填写在当前考虑的单元格中，

若不存在这样的产生式，则在此处填写 ϕ 。

可以得到如下三角表格：

x =	b	+	c	*	a
	S,T,I	A	S,T,I	M	S,T,I
j = 1	φ	B	φ	C	
	S	φ	T		
	φ	B			
	S				

例如填写三角表格 $A_{2,4}$ 位置处时，查找 P' 中是否有产生式产生 AT 或者 BC? 通过查找，存在(2)B→AT，所以在这个位置上填写 B。

由于表格的最后一行包含 S，故有 CYK 算法的结论，判 x 有 S 派生，即 x 能够被上下文无关文法 G = (N， T， P， S)所接收。