5.1.3 可积函数类

我们假定在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是有界的, 并设它的上确界和下确界分别是 M 和 m, 因此

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b].$$

对于区间 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界分别为

$$M_i = \sup\left\{f(x): \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} \quad m_i = \inf\left\{f(x): \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

并记

$$\omega = M - m; \quad \omega_i = M_i - m_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

分别称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 和 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.

定义 1 对于上面给定的有界函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 的分割, 和式

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

分别称之为函数 $f(x)$ 的 "Darboux 上和" 与 "Darboux 下和".

显然, 对于任意的点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 有

$$m\leqslant m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i\leqslant M,\quad i=1,\cdots,n$$

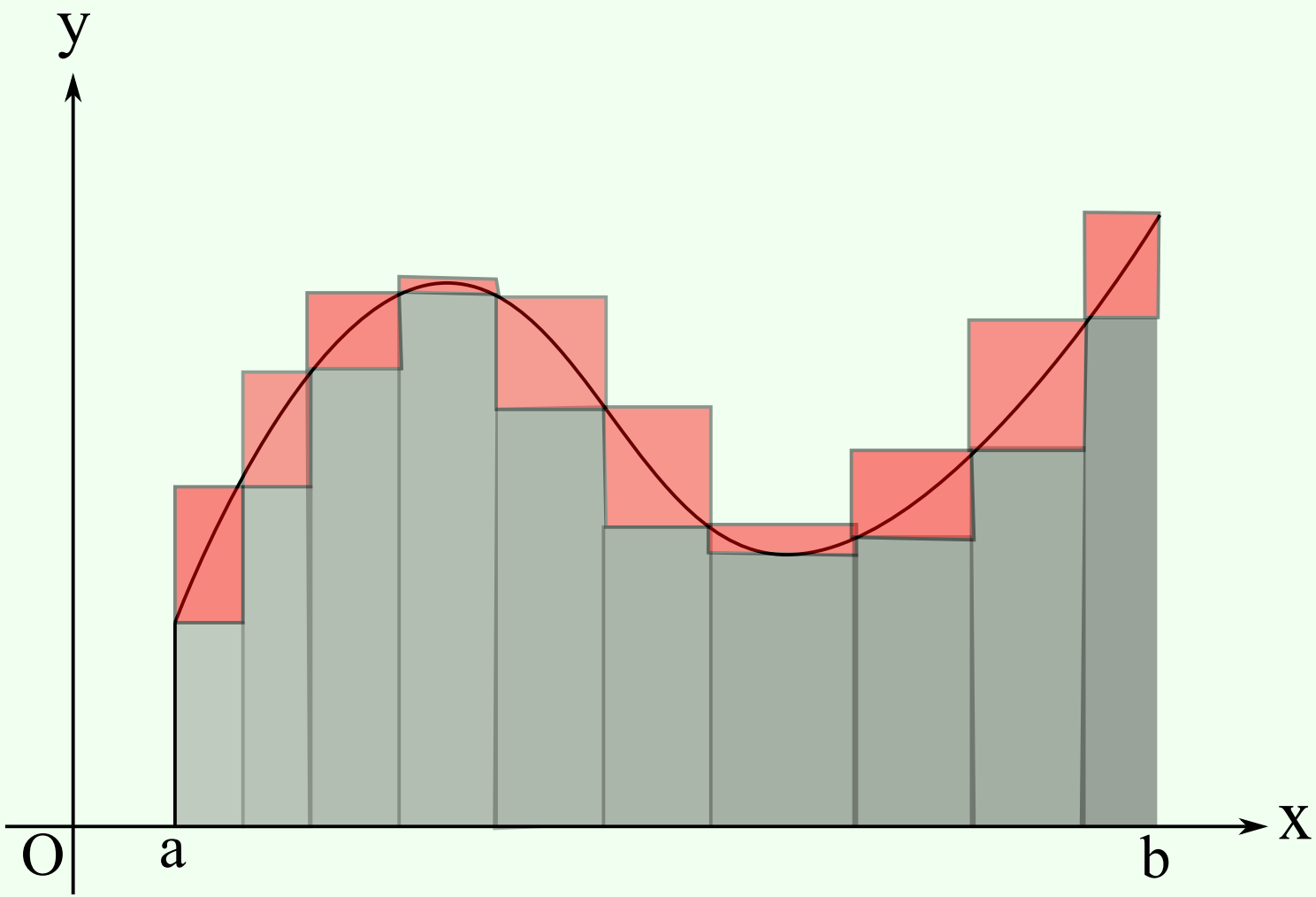
因此函数 $f(x)$ 的任意一个 Riemann 和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

一定介于它的 Darboux 上和与 Darboux 下和之间, 而且三种和都是有界的

$$m(b-a)\leqslant \underline{S}(T)\leqslant S(T)\leqslant \overline{S}(T)\leqslant M(b-a)$$

Darboux 上和与下和图示:



现在考虑分割的变化对 Darboux 和的影响. 注意到, 如果 T' 是分割 T 中增加一个分割点 x'_k 形成的分割, 即

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$
$$T': \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x'_k < x_k < \cdots < x_n = b.$$

则函数 $f(x)$ 分别在两个子区间 $[x_{k-1}, x'_k]$ 和 $[x'_k, x_k]$ 的上确界不会超过它在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的上确界 (部分的上确界不会超过整体的上确界)

$$M_k \geqslant M'_k = \sup\left\{f(x): \ x \in [x_{k-1}, x'_k]\right\},$$
$$M_k \geqslant M''_k = \sup\left\{f(x): \ x \in [x'_k, x_k]\right\}$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{S}(T) - \overline{S}(T') &= M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(x'_k - x_{k-1}) - M''_k(x_k - x'_k) \\ &\geqslant M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k(x'_k - x_{k-1}) - M_k(x_k - x'_k) = 0.\end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\bar{S}(T)-\bar{S}(T') &\leqslant M(x_k-x_{k-1})-m(x_k'-x_{k-1})-m(x_k-x_k')\\ &=\omega(x_k-x_{k-1})\leqslant \omega\|T\|.\end{aligned}$$

即

$$\bar{S}(T)\geqslant \bar{S}(T')\geqslant \bar{S}(T)-\omega\|T\|.$$

当分割 T' 是通过将 T 增加多个分割点所得到的分割时, 有类似的结果; 也可以考虑 Darboux 下和的情况.

定理 1 设 T' 是通过对分割 T 添加 l 个分割点所得到的新的分割, 则

$$\begin{aligned}\underline{S}(T)\leqslant \underline{S}(T')\leqslant \underline{S}(T)+l\omega\|T\|,\\ \bar{S}(T)\geqslant \bar{S}(T')\geqslant \bar{S}(T)-l\omega\|T\|.\end{aligned}$$

定理 1 说明, 在对分割加密 (即分割点的密度增加) 的过程中, 上和不增, 下和不减, 具有一种 “单调性” .

定理 2 对于区间 $[a,b]$ 的任意两个分割 T_1 和 T_2, 将两个分割的分割点合起来形成一个新的分割 T, 则 T 既是对 T_1 的加密, 也是对 T_2 的加密, 因此有

$$\underline{S}(T_1) \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T_2).$$

这说明一个分割对应的下和, 总是不超过另一个分割对应的上和.

我们现在观察 Darboux 上和与下和当 $\|T\| \to 0$ 时的极限. 因为上和与下和都是有界的, 而且具有某种单调性（定理 1）, 类比于“单调有界数列有极限, 而且极限就是数列的上确界或下确界”的事实, 所以对于函数 $f(x)$, 我们考虑所有上和（下和）组成的集合的下确界（上确界）, 记

$$\underline{I} = \sup_T \underline{S}(T), \quad \overline{I} = \inf_T \overline{S}(T)$$

分别称为函数 $f(x)$ 的下积分和上积分. 作为定理 2 的直接推论, 对于任意两个分割, 有不等式

$$\underline{S}(T_1) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(T_2)$$

定理 3 对于任意一个有界函数 $f(x)$, 有

$$\lim_{\|T\|\to 0} \overline{S}(T) = \overline{I}, \quad \lim_{\|T\|\to 0} \underline{S}(T) = \underline{I}.$$

证明 我们只证明第二个公式, 第一个公式的证明是类似的. 根据上确界的定义, 对于任意给定的正数 ε, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$T_0: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b$$

使得

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(T_0) \leqslant \underline{I}.$$

取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2l\omega + 1} > 0,$$

对于任意分割 T, 只要 $\|T\| < \delta$ 时, 将 T 和 T_0 的分割点合起来组成一个新的分割 T', 这时 T' 是在 T 的分割点基础上, 至多增加了 T_0 的 l 个分割

点（“至多”的含义是有可能分割点有重复）. 因此, 由定理 1 可知,

$$\begin{aligned}\underline{S}(T) &\geqslant \underline{S}(T') - l\omega\|T\| \geqslant \underline{S}(T_0) - l\omega\|T\| \\ &> \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - l\omega\frac{\varepsilon}{2l\omega+1} > \underline{I} - \varepsilon\end{aligned}$$

注意到显然有

$$\underline{S}(T) \leqslant \underline{I},$$

所以

$$|\underline{S}(T) - \underline{I}| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\|T\|\to 0} \underline{S}(T) = \underline{I}.$$

定理 4 有界函数 $f(x)$ 的 Darboux 上和与下和的极限相等, 等价于

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$$

这个结果的证明是简单的, 只要注意到于任意分割 T,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \overline{S}(T) - \underline{S}(T)$$

即可.

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是它的 Darboux 上和与下和的极限相等, 或者说

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$$

其中, $\omega_i = M_i - m_i$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, \cdots n)$ 上的振幅.

证明 对于一个有界函数 $f(x)$, 当 $\|T\| \to 0$ 时, 虽然并不知道它的任意 Riemann 和 $S(T)$ 是否有极限, 但它的 Darboux 上和 $\overline{S}(T)$ 与下和 $\underline{S}(T)$ 的极限是存在的. 由关于三种和的不等式

$$\underline{S}(T) \leqslant S(T) \leqslant \overline{S}(T)$$

立刻可知, 如果 Darboux 上和与下和的极限相等, 则任意的 Riemann 和有相同的极限, 即, $f(x)$ 可积.

反之, 如果函数 $f(x)$ 可积, 即它的 Riemann 和有极限, 即存在一个数 I,

对于任意的正数 ε, 存在一个正数 δ, 使得当分割 T 满足 $\|T\| < \delta$ 时, 有

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ 成立, 因而分别对每一个小区间中取上(下)确界, 有

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon$$

即上和与下和的极限相等.

几何意义: Darboux 上和与下和的差就是那些正好覆盖函数图像的一些小矩形的面积之和 (如第 3 页的图), 随着分割的加密, 它趋于零时 (即, 函数图像的面积为零) 函数就是可积的.

定理 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T, 有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

定理 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T, 有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leqslant \|T\| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))
\end{aligned}
$$

定理 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T, 有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant \|T\|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \|T\|(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

定理 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T, 有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant \|T\|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \|T\|(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

这里注意到单调递增函数在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅就是函数在两个端点函数值的差, 所以

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

定理 7 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 7 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因为闭区间上连续函数一定是一致连续的, 所以对任意给定的正数 ε, 存在一个正数 δ, 使得当任意两点 $x, x' \in [a,b]$ 满足 $|x-x'| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

定理 7 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因为闭区间上连续函数一定是一致连续的, 所以对任意给定的正数 ε, 存在一个正数 δ, 使得当任意两点 $x, x' \in [a,b]$ 满足 $|x-x'| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

对于 $[a,b]$ 的一个分割

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

因连续函数在闭区间上一定能够取到上(下)确界, 可设

$$M_i = f(s_i), \quad m_i = f(t_i), \quad s_i,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \cdots, n$$

当 $\|T\| < \delta$ 时, 显然有 $|s_i - t_i| \leqslant \|T\| < \delta$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

当 $\|T\| < \delta$ 时, 显然有 $|s_i - t_i| \leqslant \|T\| < \delta$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(s_i) - f(t_i)) \Delta x_i\end{aligned}$$

当 $\|T\| < \delta$ 时, 显然有 $|s_i - t_i| \leqslant \|T\| < \delta$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(s_i) - f(t_i))\Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.\end{aligned}$$

当 $\|T\| < \delta$ 时, 显然有 $|s_i - t_i| \leqslant \|T\| < \delta$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(s_i) - f(t_i))\Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

所以函数 $f(x)$ 可积.

5.1.4 定积分的基本性质

定理 8 (积分的线性性质) 设函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积. 则对任意常数 α,β, 函数 $\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx;$$

定理 8 称为积分的线性性质: 即两个可积函数的 "线性组合" 仍是可积的, 并且积分值就等于这两个函数的积分的 (相应的) "线性组合". 特别, 取 $g(x)$ 恒为零, 则由 $f(x)$ 可积, 可推出 $\alpha f(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx,$$

即被积表达式中的常数因子可提取至积分号之外.

定理 9 (积分的可加性) 设 $a < c < b$. 若函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均可积. 反过来, 若 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积. f 在三个区间上的积分满足

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.1}$$

几何直观上该定理的结论是清楚的, 分析的证明中, 可按下述方式分割区间: 即把 c 取作一个分点 $c = x_m$ (或者说对一个分割, 可插入 c 使之成为一个分点). 这样 $[a, b]$ 的一个分割, 就分成为 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割. 反之如果 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 分别有各自的分割, 则合在一起就是 $[a, b]$ 的一个分割. 不难发现 $[a, b]$ 的分割 T 与 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割 T_1 及 T_2 的宽度之间的关系

$$\|T_1\|,\ \ \|T_2\| \leqslant \|T\| = \max\{\|T_1\|,\ \|T_2\|\}$$

当 c 是分点时, 在 $[a,b],[a,c],[c,b]$ 这三个区间上的 Dabourx 上下和之差, 以及 Riemann 和有如下关系:

$$\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i=\sum_{[a,c]}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[c,b]}\omega_i\Delta x_i \tag{5.2}$$

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{5.3}$$

从 (5.2) 可证明定理 9 的可积性论述, 从 (5.3) 可证明 (5.1).

当 $b<a$ 时, 约定

$$\int_a^a f(x)\,dx=0,\quad \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

这样, 只要 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 则对于 $[\alpha,\beta]$ 中的任意三个数 a,b,c, 都有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因 $f(x)$ 可积, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 设

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是 $[a,b]$ 的任意分割, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\omega_i(f)$ 是 f 在 I_i 上的振幅. 则有

$$\omega_i(f^2) = \sup_{x \in I_i} f^2(x) - \inf_{y \in I_i} f^2(y)$$

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因 $f(x)$ 可积, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 设

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是 $[a,b]$ 的任意分割, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\omega_i(f)$ 是 f 在 I_i 上的振幅. 则有

$$\omega_i(f^2) = \sup_{x \in I_i} f^2(x) - \inf_{y \in I_i} f^2(y) = \sup_{x,y \in I_i} (f^2(x) - f^2(y))$$

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因 $f(x)$ 可积, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 设

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是 $[a,b]$ 的任意分割, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\omega_i(f)$ 是 f 在 I_i 上的振幅. 则有

$$\begin{aligned}\omega_i(f^2) &= \sup_{x\in I_i} f^2(x) - \inf_{y\in I_i} f^2(y) = \sup_{x,y\in I_i} (f^2(x) - f^2(y)) \\ &\leqslant \sup_{x,y\in I_i} |(f(x)-f(y))(f(x)+f(y))|\end{aligned}$$

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因 $f(x)$ 可积, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 设

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是 $[a,b]$ 的任意分割, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\omega_i(f)$ 是 f 在 I_i 上的振幅. 则有

$$\begin{aligned}\omega_i(f^2) &= \sup_{x\in I_i} f^2(x) - \inf_{y\in I_i} f^2(y) = \sup_{x,y\in I_i} (f^2(x) - f^2(y)) \\ &\leqslant \sup_{x,y\in I_i} |(f(x)-f(y))(f(x)+f(y))| \\ &\leqslant 2M \sup_{x,y\in I_i} |(f(x)-f(y))| \leqslant 2M\omega_i(f).\end{aligned}$$

定理 10 (i) 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. (ii) 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant m > 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明 因 $f(x)$ 可积, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 设

$$T: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是 $[a,b]$ 的任意分割, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\omega_i(f)$ 是 f 在 I_i 上的振幅. 则有

$$\begin{aligned}\omega_i(f^2) &= \sup_{x\in I_i} f^2(x) - \inf_{y\in I_i} f^2(y) = \sup_{x,y\in I_i} (f^2(x) - f^2(y)) \\ &\leqslant \sup_{x,y\in I_i} |(f(x)-f(y))(f(x)+f(y))| \\ &\leqslant 2M \sup_{x,y\in I_i} |(f(x)-f(y))| \leqslant 2M\omega_i(f).\end{aligned}$$

因 f 可积, 所以 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i \to 0$, 因而 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f^2)\Delta x_i \to 0$. 于是 f^2 可积. 再从 $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$, 可知 fg 可积.

类似可证明 (ii).

定理 11 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(i) (保号性) 若对所有 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0;$$

(ii) (保序性) 若对所有 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

(iii) (绝对可积性) 函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

保号性, 保序性及 (iii) 中的不等式都可以从积分定义立刻得到. 绝对可积性成立是因为: $|f(x)|$ 在小区间上的振幅不超过 $f(x)$ 在小区间上的振幅.

定理 12 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, M 及 m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的一个上界及一个下界, 即对所有 $x \in [a,b]$, 有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

定理 12 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, M 及 m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的一个上界及一个下界, 即对所有 $x \in [a,b]$, 有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

证明 记 $I = \int_a^b f(x)\,dx$. 则对于 $[a,b]$ 的任意分割

$$T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

有

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(T) \leqslant I \leqslant \overline{S}(T) \leqslant M(b-a).$$

定理 13 (积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

定理 13 (**积分中值定理**) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

证明 设 m 和 M 分别是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的最小值和最大值. 根据定理12, 有

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

有介值定理知存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

即,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

定理 14 (推广的积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5.4}$$

定理 14 (**推广的积分中值定理**) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5.4}$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以可以取到最小值 m 和最大值 M, 则有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

不妨设 $\varphi(x)$ 是非负的. 因此有

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x).$$

因而

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

如果 $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$, 那么由上面可得 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$, 因而 (5.4) 成立.

如果 $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \leqslant M.$$

根据介值定理知存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}.$$

例 1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数. 若 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 因为 $f(x)$ 连续, 所以在 $[a,b]$ 上取到最大值, 设 $M = \max f(x) = f(x_0)$. 不妨设 $x_0 \in (a,b)$ (x_0 是端点的情况可类似讨论). 若 $M > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$. 并且当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x) \geqslant \frac{M}{2}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx \\
&\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \\
&\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{M}{2}\,dx \\
&= \delta M > 0.
\end{aligned}$$

这与条件矛盾. 因此 $M = 0$. 因而 $f(x) \equiv 0$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导且 $|f'(x)| \leqslant 1$, $f(0) = f(2) = 1$. 求证: $1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 3$.

证明 当 $x \in [0,1]$ 时, 存在 ξ 使得 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$. 因此

$$-x \leqslant f(x) - f(0) \leqslant x.$$

在 $[0,1]$ 上积分得

$$-\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx - 1 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

当 $x \in [1,2]$ 时, 存在 η 使得 $f(x) - f(2) = f'(\eta)(x-2)$. 因此

$$x - 2 \leqslant f(x) - f(2) \leqslant 2 - x.$$

在 $[1,2]$ 上积分得

$$-\frac{1}{2} \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx - 1 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(1) 与 (2) 相加即得所证.

5.1.5 微积分基本定理

定理 15 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的变上限积分

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad a\leqslant x\leqslant b$$

在区间 $[a,b]$ 上连续.

5.1.5 微积分基本定理

定理 15 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的变上限积分

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

在区间 $[a,b]$ 上连续.

证明 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 所以 f 在这区间上有界, 即存在 M 使得 $|f(t)|\leqslant M,\ \ a\leqslant t\leqslant b$. 设 $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$, 根据定理 9, 定理 11 (iii) 及定理 12, 我们有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|dt\leqslant M|x_2-x_1|.$$

这个不等式说明 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件. 因此 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

定理 16 (微积分基本定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 如果 f 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 φ 在 $x=x_0$ 处可微, 且 $\varphi'(x_0)=f(x_0)$.

定理 16 (微积分基本定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 如果 f 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 φ 在 $x=x_0$ 处可微, 且 $\varphi'(x_0)=f(x_0)$.

证明 首先考虑 x_0 不是 a 或 b 的情形. 由于 f 在 x_0 处连续, 则对给定的 $\varepsilon>0$, 有一个正数 δ, 使得在 $|t-x_0|<\delta$ 且 $a\leqslant t\leqslant b$ 时,

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因此, 若 $0<|x-x_0|<\delta$ 而且 $a\leqslant x\leqslant b$, 则由上一不等式, 可推出

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\Big(f(t)-f(x_0)\Big)dt\right|<\varepsilon.$$

这就直接证得了 $\varphi'(x_0)=f(x_0)$.

若 x_0 为 a 或 b, 将上面的证明作适当的修改, 便能得出所要的结果. 证毕.

这个定理说明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则它的变上限积分 $\varphi(x)$ 是它的一个原函数.

定理 17 (Newton–Leibniz **公式**) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数, $F(x)$ 是它的任意一个原函数. 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这一等式也常表示为

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

定理 17 (Newton–Leibniz **公式**) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数, $F(x)$ 是它的任意一个原函数. 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这一等式也常表示为

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

证明 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的变上限积分, 则 $\varphi(x)$ 也是 $f(x)$ 的原函数. 因此存在常数 C 使得 $\varphi(x) = F(x) + C$. 因为 $\varphi(a) = 0$, 所以 $C = -F(a)$. 于是 $\varphi(x) = F(x) - F(a)$. 特别 $x = b$ 时, 有 $\varphi(b) = F(b) - F(a)$, 即,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

定理 18 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F'(x)=f(x)$, 则我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

定理 18 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F'(x)=f(x)$, 则我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

证明 设

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 的任一个分割. 则

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big)=F(b)-F(a).$$

显然 $F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足微分中值定理的条件. 因此, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

于是我们得出

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

上式左边是相应于前述分割 T 的一个 Riemann 和. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故当 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$ 时, 这个积分和趋于 $\int_a^b f(x)dx$, 从而导出了积分学基本公式.

例 3 设 n 是自然数. 则 $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$.

例 3 设 n 是自然数. 则 $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$.

解 因为 x^n 的一个原函数是 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, 所以

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}).$$

例 3 设 n 是自然数. 则 $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$.

解 因为 x^n 的一个原函数是 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, 所以

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}).$$

例 4 计算 $\displaystyle\int_a^b \sin x\,dx$.

例 3 设 n 是自然数. 则 $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$.

解 因为 x^n 的一个原函数是 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, 所以

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}).$$

例 4 计算 $\displaystyle\int_a^b \sin x\,dx$.

解 因为 $\sin x$ 的一个原函数是 $-\cos x$, 所以

$$\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

特别有,

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\, dx.$

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\, dx.$

解

$$\left|\int_0^1 x^n \sin x\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

因此所求极限为零.

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\, dx.$

解

$$\left|\int_0^1 x^n \sin x\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

因此所求极限为零.

例 6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\,dx$.

解

$$\left|\int_0^1 x^n \sin x\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

因此所求极限为零.

例 6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

解 令 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 则 I_n 非负且单调递减, 因此有极限. 设其极限为 I. 显然 $I \geqslant 0$. 对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得 $I \leqslant \varepsilon$. 再令 $\varepsilon \to 0$, 得 $I \leqslant 0$. 于是 $I = 0$.

例 7 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

例 7 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 令

$$F(t) = \int_a^t xf(x)\,dx - \frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,dx.$$

则由于 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,dx - \frac{a+t}{2}f(t) \\ &= \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,dx \\ &\geqslant \frac{t-a}{2}f(t) - \frac{1}{2}(t-a)f(t) = 0. \end{aligned}$$

这说明 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a)=0$, 所以 $F(b)\geqslant 0$. 证毕.

例 8 设 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上连续函数, 且存在正常数 M, c 使得

$$|f(x)| \leqslant M + c\int_0^x |f(t)|\,dt,$$

求证: $|f(x)| \leqslant Me^{cx}$, $x \in [0,a]$.

例 8 设 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上连续函数, 且存在正常数 M, c 使得

$$|f(x)| \leqslant M + c\int_0^x |f(t)|\,dt,$$

求证: $|f(x)| \leqslant Me^{cx}$, $x \in [0,a]$.

证明 令

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt, \quad G(x) = F(x)e^{-cx} + \frac{M}{c}e^{-cx}.$$

则有

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(t)e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &= |f(x)|e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} \\ &\leqslant (M + cF(x))e^{-cx} - cF(x)e^{-cx} - Me^{-cx} = 0. \end{aligned}$$

这说明 $G(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减. 因为 $G(0) = \frac{M}{c}$, 所以 $G(x) \leqslant \frac{M}{c}$. 因而

$$F(x) + \frac{M}{c} \leqslant \frac{M}{c}e^{cx}.$$

再结合条件可得 $|f(x)| \leqslant M + cF(x) \leqslant Me^{cx}$.

定理 19 (Cauchy **积分不等式**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{5.5}$$

等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $f = cg$ $(a.e.)$ 或者 $g = cf$ $(a.e.)$.

定理 19 (Cauchy **积分不等式**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \tag{5.5}$$

等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $f = cg$ $(a.e.)$ 或者 $g = cf$ $(a.e.)$.

证明 当 $g = 0$ $(a.e.)$ 时, 不等式显然成立. 不妨设没有 $g = 0$ $(a.e.)$, 即, $\int_a^b g^2(x)\,dx > 0$. 对任意实数 t, 有 $(f(x) - tg(x))^2 \geqslant 0$. 因此

$$\int_a^b (f(x) - tg(x))^2\,dx \geqslant 0.$$

也就是

$$t^2 \int_a^b g^2(x)\,dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

这个关于 t 的一元二次式恒非负, 说明判别式非正, 即

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx.$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx.$$

证明 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt, \quad x\in[a,b].$$

所以应用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$|f(x)|^2=\left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|^2 \leqslant \int_a^x 1^2\,dt\int_a^x |f'(t)|^2\,dt=(x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\,dt.$$

因而

$$|f(x)|^2 \leqslant (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,dt, \quad x\in[a,b].$$

两边在 $[a,b]$ 上积分即得所证.

定理 20 (Hölder **积分不等式**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, p,q 是两个正数满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.6}$$

定理 20 (Hölder **积分不等式**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, p,q 是两个正数满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.6}$$

证明 记 $A=\int_a^b f^p(x)\,dx$, $B=\int_a^b g^q(x)\,dx$. 若 A,B 中有一个为零, 比如 $A=0$, 则 $f(x)=0$ $(a.e.)$, 因而 $f(x)g(x)=0$ $(a.e.)$, 此时不等式成立. 不妨设 $A>0, B>0$. 根据 Young 不等式, 有

$$\left(\frac{f^p(x)}{A}\right)^{1/p}\left(\frac{g^q(x)}{B}\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{f^p(x)}{A}+\frac{1}{q}\cdot\frac{g^q(x)}{B}.$$

两边积分, 得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{A^{1/p}B^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

这等价于 (5.6).

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可积. 则数列 $I_n = \left(\int_0^1 f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可积. 则数列 $I_n = \left(\int_0^1 f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

证明 根据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^n(x)\,dx &= \int_0^1 1\cdot(f^n(x))dx \\ &\leqslant \left(\int_0^1 1^{n+1}dx\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_0^1 (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}dx\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)dx\right)^{\frac{n}{n+1}},\end{aligned}$$

即,

$$\left(\int_0^1 f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)dx\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可积. 则数列 $I_n = \left(\int_0^1 f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 是单调递增的.

证明 根据 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^n(x)\,dx &= \int_0^1 1\cdot(f^n(x))dx \\ &\leqslant \left(\int_0^1 1^{n+1}dx\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_0^1 (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}dx\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)dx\right)^{\frac{n}{n+1}},\end{aligned}$$

即,

$$\left(\int_0^1 f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_0^1 f^{n+1}(x)dx\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

问题 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = ?$