上古密卷·复变函数

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学复变函数(A/B)、复分析考试题.

2. 按照复变函数(A)、复变函数(B)、复分析进行排序，其次为时间先后.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大60周年校庆，亦为少年班成立40周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大， 也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程.

6. 感谢杨光灿烂同学提供往年题目！感谢王昌煜助教录入题目！再次祝愿科大数学教育越办越好！

2018-2019秋季学期复变函数(A)助教

15级 少年班学院 理科试验1班 吴天

2018年12月 于合肥

欢迎拜访我的主页：http://home.ustc.edu.cn/~wt1997

2005-2006学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (20分=5分+5分+10分)计算.

   (1) 设$f(z)=\oint_{|t|=3}\dfrac{2t^2+5t+1}{t-z}\mathrm{d}t$，计算$f'(2+\mathrm{i})$.

   (2) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^5+1}$.

   (3) $\oint_{\gamma}\dfrac{e^{\pi+z}}{z(1-z)^2}\mathrm{d}z$，其中$\gamma$为不经过0，1的简单闭曲线.

2. (8分)已知$A>1$，试求Laurant级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}A^{-n}(z-1)^n$的收敛区域.

3. (8分)求$\dfrac{1}{1+z}$在$z_0=\mathrm{i}$处的Taylor展开式及其收敛半径.

4. (8分)试将$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$在$4<|z-3|<+\infty$展成Laurant级数.

5. (8分)试求方程$4z^4+2z+9=0$在圆环$1<|z|<\dfrac{3}{2}$内根的个数. (附：如果把$2z$改成2^z呢？)

6. (20分=10分×2) 用留数定理计算实积分.

   (1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\sin ax\mathrm{d}x\ (a>0)$.　　(2) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ (a>1)$.

7. (10分)用拉氏变换解微分积分方程$\begin{cases} y'(t)-\mathrm{e}^t=\int_0^t y(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$

8. (10分)求一保形变换$w=f(z)$将圆盘区域$|z|<1$映为角形域$\dfrac{\pi}{3}<\arg w<\dfrac{2}{3}\pi$

9. (6分)若函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在复平面$\mathbb{C}$上解析，且$u+v=2x^2-4xy+x-y-2y^2$. 试求$f(z)$.

10. (7分)设$f(z)$是一个整函数，并且假定存在着一个正整数n，以及两个正数R及M，使得当$|z|\geqslant R$时，$|f(z)|\leqslant M|z|^n$，试证：$f(z)$是个至多n次多项式或一常数.

2006-2007学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (10分)求$\frac{1}{z}$和$\frac{1}{z^2}$在$z=-1$处的Tayler展式，并指出收敛半径.

2. (10分)设在$0<r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2<1$内有$f(z)=\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_2}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}-\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}$，求$f(z)$在$r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2$内的解析表达式及其Laurant展开式.

3. (10分)计算$I=\oint_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}$

4. (10分)试求方程$z^6-3z^4+z^3-az=0$在圆环$1<|z|<2$内按重数计算的根个数，其中$0<|a|<1$.

5. (20分=10分×2)用留数定理计算实积分(任选两题).

(1)$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$

(2)$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ $(0<b<a)$

(3)$\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)d\theta$ (a是实数且$a\neq 0$)

6. (10分)用拉氏变换解积分方程$y(t)-\mathrm{e}^t=\int_0^t y(\tau)(\tau-t)d\tau$.

7. (10分)

(1)问$w=\frac{z+1}{z-1}$将有割痕$(-\infty,-1]$的单位圆外域映成了什么？

(2)求保形变换$w=f(z)$将有割痕$(0,1]$的右半平面$\mathrm{Re}z>0$映为带形域$-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi$，$\mathrm{Re}(z)>0$.

8. (10分)设解析函数$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$，其中$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 试证明：$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$，$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$.

9. (5分)假设$f(z)=\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$在$(-1,1)$的上边沿为正，试求$f(\mathrm{i})$和$f(-\mathrm{i})$.

10. (5分)设$f(z)$在扩充平面上除去非本性奇点$z=z_0$外是单叶解析的，则$f(z)$必是分式线性变换.

2007-2008学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (25分=5分×5)简答题.

(1)试在复平面上画出满足$|z| < 1 - \mathrm{Re}z$的点集的图形.

(2)设$f(z) = xy^2 + \mathrm{i}x^2y$，问：复变函数$f(z)$在何处满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程.

(3)求下列值：(a) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}$；(b) i^{i}.

(4)求下列函数$f(z)$的奇点(不包含∞)且指出其类型.如果是极点，给出它的阶数：

(a)$f(z) = \dfrac{\sin z}{z-\pi}$

(b)$f(z) = \dfrac{1}{z^3(\mathrm{e}^{z^3}-1)}$

(5)设D是一个以正三角形为边界的有界区域，而G为一个以椭圆为边界的有界区域，问：是否存在单叶解析函数$w = f(z)$将D映满G. (回答“存在”或“不存在”，并且简要地给出理由.)

2. (10分)求一个解析函数$f(z)$，使其实部为$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$，且满足$f(\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$.

3. (10分)设$0 < a < b$，求函数$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$在域$D: a < |z| < b$内的罗朗(Laurant)展开.

4. (25分=5分×5)计算题.

(1)$\displaystyle\int_{|z+3\mathrm{i}|=1} \frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z$

(2)$\displaystyle\int_{|z+\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{1+z^2}\mathrm{d}z$

(3)$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{3}} \sin\frac{1004}{z}\mathrm{d}z$

(4)$\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^{2007}}{z^{2008}-1}\mathrm{d}z$

(5)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$，$(m > 0, a > 0)$

5. (10分)利用拉氏变换解微分方程：$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1. \end{cases}$

6. (7分)求一保形变换$w = f(z)$，将半带域$D: -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}z < \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Im}z > 0$映射为上半平面 $\mathrm{Im}w > 0$.

7. (7分)求方程 $kz^4 = \sin z$ $(k > 2)$在圆$|z| < 1$内根的个数.

8. (6分)设$f(z)$是在有界域D上解析的非常值函数，并且在有界闭域$D + C$上连续，其中C为D的边界. 如果存在实数a使得$|f(z)| = a$, $\forall z \in C$，证明：在D内至少存在一个点z_0使得$f(z_0) = 0$.

2008-2009学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (24分=4分+8分+6分+6分)填空题.

(1)若幂函数$\sqrt{z}$取$\sqrt{1}=1$的分支，则$\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^2}{1-\sqrt{z}},1\right]=$__________.

(2)设$\sqrt[3]{z(1-z)^2}$在去掉线段[0,1]的区域内的某一单值分支为$f(z)$. 若f在$\dfrac{1}{2}$的上边沿的值是$\dfrac{1}{2}$，则$f(2)=$__________，$f'(2)=$__________.

(3)设$f(z)=\displaystyle\oint_{|t|=3}\frac{t^2+t+1}{t-z}\mathrm{d}t$，则$f'(2+\mathrm{i})=$__________.

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=1.5}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z-2)^2}=$__________.

2. (8分)设u和v是解析函数$f(z)$的实部和虚部，且$u+v=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+3xy$，其中$z=x+y\mathrm{i}$，$f(0)=0$. 试求$f(z)$.

3. (8分)试将$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$展开成Laurent级数，其中$|a|<|b|$，$a,b$都是复数. 圆环域为

(1) $0<|a|<|z|<|b|$；(2) $|z|>|b|$.

4. (8分)设$f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}$，试指出它的不解析点的类型.

5. (8分)试求方程$2z^6-3z^3+2=0$在各个象限内根的个数.

6. (20分=10分×2)计算积分.

(1)$\displaystyle\oint_{0<|z|=r\neq 1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z-1}$.

(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\mathrm{d}x$ ($a>0$，$b>0$).

7. (8分)用拉普拉斯变换解方程.

$$\begin{cases} y'(t)-\mathrm{e}^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

8. (8分)求一分式线性变换$w=f(z)$将圆盘区域$|z-2\mathrm{i}|<2$映为圆盘区域$|w-2|<1$，且满足条件$f(\mathrm{i})=2$，$\arg f'(\mathrm{i})=0$.

9. (8分)设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是不可约有理真分式函数，$a_k(k=1,\cdots,m)$是$Q(z)$的全部零点，且其阶数为n_k. 试证明$f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$，其中$A_{ks}$为复常数.

2003-2004学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (20分)填空.

(1) 设方程$z^3=\overline{z}$，则$z=$____________.

(2) 求复对数的单值解析分支____________，使得$\ln(-\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{2}\mathrm{i}$，其辐角主值是____________.

(3) 设复函数$f(z)=x^4+\mathrm{i}y^2$，则$f(z)$的可微点是____________. $f(z)$的解析点是____________.

(4) 计算积分$\displaystyle\int_{|z|=1,\mathrm{Im}z\geqslant 0}\overline{z}dz=$____________. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{(z+1)^3}dz=$____________.

(5) $\mathrm{Res}\Big(z^{-2}\sin^3\dfrac{1}{z},0\Big)=$____________. $\mathrm{Res}\Big(\dfrac{1-\cos 7z}{z^3},0\Big)=$____________.

2. (20分)

(1) 已知解析函数$f(z)$的虚部为$x+y$，且$f(1)=\mathrm{i}$，求$f(z)$.

(2) 判别方程$z^5-6z^3+2z^2+7=0$在圆环$2<|z|<3$内有多少个根.

3. (20分)

(1) 已知$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$，求$f(z)$在$|z-1|<1$及$0<|z|<2$内的级数展开式.

(2) 设$f(z)$在$z=a$解析，$f(z)$在a点附近不恒为0，而$f(a)=0$. 证明$z=a$为$f(z)$在a点的某个邻域内的唯一零点.

4. (20分)计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+2\cos^2\theta}$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z(z^2+4)}dz$

5. (20分)用拉氏变换解方程.

(1) $\begin{cases} y''(t)-y(t)=4\sin t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\cos t \\ y'(t)-y(t)+x(t)=0 \\ x(0)=0,\ y(0)=1 \end{cases}$

2006-2007学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (16分=2分×8)填空题. (写出复数的标准式$a+b\mathrm{i}$或指数表示$re^{i\theta}$均可)

(1)$(1+\mathrm{i})^2 =$ ____________　　(2)$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})^2} =$ ____________

(3)$\sin(1+\mathrm{i}) =$ ____________　　(4)$\mathrm{ch}(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(5)$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) =$ ____________　　(6)$(1+\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} =$ ____________

(7)$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} =$ ____________　　(8)$\mathrm{Arc\ sh\ i} =$ ____________

2. (25分=5分×5)设$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)^4}$试求

(1) $f(z)$在环域$0<|z|<1$内的罗朗级数展开式.

(2) $f(z)$在环域$0<|z-1|<1$内的罗朗级数展开式.

(3) $f(z)$在环域$|z|>1$内的罗朗级数展开式.

(4) $f(z)$在$z=4$处的罗朗级数展开式.

(5) 求$\mathrm{Res}[f(z),0]$，$\mathrm{Res}[f(z),1]$，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

3. (36分=6分×6)(1-4小题的闭路积分方向均沿逆时针).

(1)$\displaystyle\oint_{|z|=2}\overline{z}\mathrm{d}z$　　(2)$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-\overline{z})}\mathrm{d}z$　　(3)$\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}z$

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=10}\frac{\cos z}{\sin z}\mathrm{d}z$　　(5)$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{5-\cos\theta}\mathrm{d}\theta$　　(6)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x$

4. (8分)解析函数$f(z)$的实部为$\mathrm{Re}f(z)=x^2+y^2+2x+y$，且$f(0)=0$，求$\mathrm{Im}f(z)$，并求$f'(1+\mathrm{i})$

5. (5分)若在$|z|\leqslant 1$上$f(z)$解析，且在$|z|=1$上$|f(z)|<1$，求证：在$|z|<1$内存在唯一的点z_0，使得$f(z_0)=z_0$.

6. (10分)利用拉普拉斯变换求初值问题.

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-2y(t)=1\ (t>0) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

2007-2008学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (12分)求解下列方程：

(1) $z^3=1+\mathrm{i}$ (2) $\mathrm{e}^z=3+4\mathrm{i}$ (3) $\cos(2+z)=3$

2. (12分)已知复变函数$f(z)$解析，实部$u(x,y)=x^3-3xy^2-y+1$，且$f(0)=1$，求虚部$v(x,y)$和$f'(0)$.

3. (15分=5分×3)已知$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$.

(1)在$|z|<1$内把$f(z)$展为z的幂级数.

(2)在$0<|z-1|<3$上把$f(z)$展为罗朗级数.

(3)在$1<|z|<4$上把$f(z)$展为罗朗级数.

4. (36分=6分×6)求下列积分(其中凡闭路积分沿逆时针方向)

(1)$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)(z-1)^2}\mathrm{d}z,\ C:|z|=3.$ (2)$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\sin^2\theta}.$

(3)$\displaystyle\oint_C\frac{z-\sin z}{z^6}\mathrm{d}z,\ C:|z|=1.$ (4)$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^7-2z^4},\ C:|z|=1.$

(5)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}.$ (6)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+2x+5)}\mathrm{d}x.$

5. (12分) 用Laplace变换的方法求解处值问题：

$$\begin{cases}y''-2y'+2y=t\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases}$$

6. (6分) 求方程$z^4+7z+1=0$在圆环$\dfrac{3}{2}<|z|<2$的根的个数，并说明理由.

7. (7分) 设$f(z)$和$g(z)$区域D内解析，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$是$D$内的一个点列，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\in D$，如果对于任意的$k$，都有$f(a_k)=g(a_k)$，求证：在$D$内恒有$f(z)=g(z)$成立.

2009-2010学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (6分=3分×2)

(1) 若$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$，其中$a,b$为实数，请求出$a,b$的值.

(2) 若$1+\sin 2\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$，其中$c,d$为实数，请求出$c,d$的值.

2. (9分=3分×3)求解以下复方程：

(1)$z^4+2=0$　　(2)$\mathrm{e}^z=\mathrm{i}$　　(3)$2\cos z=3$

3. (9分)已知复变函数$f(z)$解析，其实部$u(x,y)=x^2-y^2+2y$，且$f(0)=\mathrm{i}$，求其虚部$u(x,y)$，并求$f'(0)$.

4. (16分=6分+5分+5分)

(1) 设$f_1(z)=\dfrac{1}{1-3z},f_2(z)=\dfrac{z}{(1-3z)^2}$. 请把$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域$|z|<\dfrac{1}{3}$展成$z$的幂级数.

(2) 设函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z-6)}$. 在环域$3<|z|<6$内把$f(z)$展成$z$的罗朗级数.

(3) 设$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$. 在区域$0<|z-2|<2$内把$f(z)$展为$z-2$的罗朗级数.

5. (21分=5分×3+6分)计算复积分.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2}z^2(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{z}})\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z-5)}$　　(4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^5(2-z)}$

6. (18分=6分×3)计算定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

7. (16分=8分×2)利用拉普拉斯变换解微分方程：

(1) $\begin{cases}y''(t)+y'(t)=2\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y''(t)-2y'(t)+y(t)=t\mathrm{e}^{2t}\\ y(0)=1,\ y'(0)=-2\end{cases}$

8. (5分)记$C=\left\{z\middle||z|<R,R>0\right\},H=\left\{z\middle||z|<R,0<\alpha<\arg z<\beta<\dfrac{1}{2}\pi\right\}$，这样$H$为圆域$C$内的一个扇形区域，设有复变函数$f(z)$在$C$内解析，且在$H$内为常数. 求证：$f(z)$在$C$内必为常数.

2017-2018学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (30分)基础知识.

(1)求解以下复方程：

(a) $e^{iz} = 2017$　　　　(b)$(z-3)^4 = 1$.

(2)已知调和函数$v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数a，并求出以$v(x,y)$为虚部且满足$f(0) = 1$的解析函数$f(z)$.

(3)已知幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^n}$，求收敛半径$R$，并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

(4)已知$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$，把$f(z)$在区域$0 < |z| < +\infty$展成Laurent级数.

(5)求$z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$在$1 < |z| < 2$的根的个数，并说明理由.

2. (30分)计算以下复积分.

(1)$\displaystyle\int_0^{3i}(2z+3z^2)dz$　　(2)$\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{z-2i}dz$　　(3)$\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin 5z}{z^2}dz$

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z^4}dz$　　(5)$\displaystyle\oint_{|z-3|=2}\frac{e^z}{|z|^2}|dz|$

3. (14分)计算以下定积分.

(1)$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-4\cos\theta)^2}$　　(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x(x^4+1)}dx$

4. (10分)利用Laplace变换解微分方程初值问题：$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$

5. (6分)设函数$f(z)$和$g(z)$在围道C及内部解析，$g(z)$在围道C上没有零点，在C内$g(z)$有唯一的零点a. 已知$f(a) = p_1 \neq 0$，$f'(a) = p_2$，$f''(a) = p_3$. 而$g'(a) = 0$，$g''(a) = q_1 \neq 0$，$g'''(a) = q_2$，$g''''(a) = q_3$. 计算积分：$\displaystyle\oint_C\frac{f(z)}{g(z)}dx$.

6. (10分)设$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$ $(a_0 \neq 0)$的收敛半径$R > 0$.

(1)记$M(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r}|f(z)|$ $(0 < r < R)$，利用Cauchu积分公式证明：$|f^{(n)}(0)| \leqslant \dfrac{n!M(r)}{r^n}$.

(2)证明：当$|z| < \dfrac{|a_0|r}{|a_0| + M(r)}$时，函数$f(z)$无零点. (其中$r < R$)

2010-2011学年第二学期复分析期中试题

1. (15分)计算题.

(1) 设$u(x,y)=y^3-3x^2y$，求$\mathbb{C}$上的全纯函数$f(z)$.使得$\mathrm{Re}f(z)=u$且$f(\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

(2) 求积分$I=\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$，$r\neq 1,2$.

2. (15分)求函数$f(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$的所有支点，一个单值域，并求使得$f(3)=0$的单值解析分支在$z=\mathrm{i}$的值.

3. (15分)求将区域$\left\{z:|z|<1,\left|z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\right\}$映到上半平面的单叶保角变换.

4. (15分)求证方程$z+\mathrm{e}^{-z}=a\ (a>1)$在$\mathrm{Re}z>0$内只有一个根，且为实根.

5. (15分)若$f(z)$是$|z|<1$上的全纯函数，且$|f(z)|<1$. 求证：$|f'(z)|\leqslant\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$，$|z|<1$.

6. (10分)设$D=\{|z|<1\}$. 若$f(z)$是D上的函数，且$f^2(z)$和$f^3(z)$都是D上的全纯函数. 求证$f(z)$是D上的全纯函数.

7. (15分=5分+10分)求证：

(1)若$f(z)$是$|z|<r$上的全纯函数，则$|f(0)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\pi}r}\Big(\displaystyle\int_{|z|<r}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}}$.

(2)若$f(z)$在$0<|z|<r$上全纯，且$\displaystyle\int_{0<|z|<r}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$. 则$z=0$是$f(z)$的可去奇点.

2014-2015年第二学期复分析(H)期末试题

1. (20分=10分×2)

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{2z^2+1}\mathrm{d}z$ (2) $a,b>0$，求$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x$

2. (15分)求一个共形映射，使$B(0,1)\bigcap\Big\{\mathrm{Im}z>0\Big\}\longmapsto B(0,1)$.

3. (15分)利用Rouché定理去证代数学基本定理.

4. (10分)设$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上仅有一极点$z=1$，其主要部分是$\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $f(0)=1$，求$f(z)$表达式，并对$f(z)$在$1<|z|<+\infty$上作Laurant展开.

5. (10分)设$f\in H\big(B(0,1)\big), f(0)=0$,求证：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f(z^n)$在$B(0,1)$绝对内闭一致收敛.

6. (10分)证明：除掉线性函数之外，不存在其它整函数使其反函数也是整函数.

7. (10分)设$f\in H\big(B(0,1)\big)\bigcap C\big(\overline{B(0,1)}\big), |f(z)|=1, \forall z\in\partial B(0,1)$，证明：$f$是有理函数.

8. (10分)设区域D关于实轴对称，f在D上全纯. 证明：存在$f_1(z), f_2(z)\in H(D)$，使$f(z)=f_1(z)+\mathrm{i}f_2(z)$，且$f_1, f_2$在实轴上取得实值.

2015-2016年第二学期复分析期中试题

1. (20分=4分×5)判断下列命题的对错，请直接及那个答案写在命题左侧的下划线上，不要解答过程.

(1)____ $\mathbb{C}$中区域上的调和函数一定有共轭调和函数.

(2)____ 若函数$f(z)$在$\mathbb{C}$中的区域Ω上全纯，在Ω的闭包上连续，则对任何$z \in \Omega$有$|f(z)| \leqslant \sup\limits_{w \in \partial\Omega} |f(w)|$.

(3)____ 设f为有理函数，且∞是f的一阶零点，那么f在$\mathbb{C}$上的所有留数之和等于0.

(4)____ 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径等于1，在单位圆盘$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$内定义出解析函数$f(z)$，那么必有$z_0$，使得$|z_0| = 1$，并且$f(z)$不能解析延拓到$z_0$的任何邻域上.

(5)____ 存在从上半平面$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$到$\mathbb{C}$的共形一一对应.

2. (24分)计算题，要求有详细解答过程，直接给出答案者不得分.

(1)求留数$\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \cdot z^5, 0)$.

(2)利用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2} \mathrm{d}x$.

(3)求$f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$在$0 < |z| < 1$和$1 < |z| < +\infty$的Laurant展开.

(4)设γ为闭曲线$z(t) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$，计算积分$\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^9}{z^{10} - 1} \mathrm{d}z$.

3. (16分)设$f(z)$为$\mathbb{C}$中的区域Ω上的解析函数，且恒不为零，证明：实值函数$\log|f(z)|$为Ω上的调和函数.

4. (10分)方程$z^7 - 2z^5 + 2016z^3 - z + 1 = 0$在单位开圆盘$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$内共有多少个根？要求详细说明理由，直接写出得数者不得分.

5. (10分)证明Weierstrass定理：设解析函数列$\{f_n\}$在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上内闭一致收敛，设$k$为任意正整数，那么相应的$k$阶导函数列$\{f_n^{(k)}(z)\}$也在$\Omega$上内闭一致收敛.

6. (10分)求从区域$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\}$到单位圆盘$\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$的共形一一对应$w = f(z)$，使得$f(\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}) = 0$，且$f'(\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}) > 0$. 要求有详细解答过程，直接写出答案者不得分.

7. (10分)设$f(z)$为单位开圆盘$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$上的解析函数，$|f(z)| \leqslant 1$，且$f$在$\mathbb{D}$内有两个不动点，i.e. 存在$z_1 \neq z_2 \in \mathbb{D}$，使得$f(z_1) = z_1$，$f(z_2) = z_2$. 利用Schwarz引理证明：在$\mathbb{D}$内$f(z) = z$.

8. (10分)设$f(z)$为上半平面$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$上恒不为零的解析函数，并且当$z \in \mathbb{H}$趋于实轴$\mathbb{R}$上的点时，$|f(z)| \to 1$.

(1)证明$f(z)$可以延拓为整函数，仍然记作$f(z)$.

(2)在(1)的条件下，假设∞不是$f(z)$的本性奇点，证明$f(z)$为常值函数.

9. (10分)设$\Omega = \{0 < |z| < 1\}$，设f在Ω上全纯，且$\displaystyle\iint\limits_{\Omega} |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$. 证明：$z = 0$是$f(z)$的可去奇点.

2016-2017年第二学期复分析期中试题

1. (2分)设$z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbb{R})$，证明：$f(z)=\sqrt{xy}$在$z=0$处满足Cauchy-Riemann方程，但$f(z)$在$z=0$处不可导.

2. (2分)设f是凸区域Ω上的全纯函数，如果对每点$z\in\Omega$有$\mathrm{Re}f'(z)>0$，则f是Ω上的单叶函数.

3. (4分=2分×2)

(1)若幂级数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为$R=1$，且在点$z=1$收敛到$s$，则

(a)设$\theta_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$且$A$为如下四条直线所围城的四边形区域$y=\pm\cot\theta_0\cdot x,\ y=\pm\tan\theta_0\cdot(x-1)$.则上述级数在区域$A$上一致收敛.

(b)$\lim\limits_{z\to1,z\in A}f(z)=s$.

(2)利用上述结论求和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$，并详细说明推导理由.

4. (2分=1分×2)

(1)对任何$z_1,z_2\in\mathbb{D}$，有$\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right|\leqslant\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$.

(2)对任何$z_1\in\mathbb{D}$，有$|f'(z_1)|\leqslant\dfrac{1-|f(z_1)|^2}{1-|z_1|^2}$.

5. (2分)设$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，试分别给出这个函数$D_1=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|1<|z|<2\right\}$和$D_2=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|2<|z|<\infty\right\}$上的Laurant展开式.

6. (2分)设$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0<r_1<|z|<r_2<\infty\right\}$，$f$是$\Omega$上的全纯函数且在$\overline{\Omega}$上连续，$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，求证：对任何$r\in(r_1,r_2)$，$\log M(r)\leqslant\dfrac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\dfrac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$.

7. (2分)利用留数定理计算积分(写清楚详细推导过程，不得直接套用公式).

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\mathrm{d}x$$

8. (2分)设$f(z)$是$\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|<1\right\}$上的全纯函数，实数列$\{x_n\}$满足$\lim_{n\to+\infty}x_n=0$，且对任何$n\in\mathbb{N}$有$0<x_{n+1}<x_n<1$，求证：如果对任何$n\in\mathbb{N}$有$f(x_{2n+1})=f(x_{2n})$，则$f(z)$是常值函数.