第 8 章　空间解析几何

§8.1　向量与坐标系

8.1.1　向量的定义

空间中既有大小又有方向的量称为向量. 在数学中用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示起点为 A 终点为 B 的向量, 线段的长度就是向量的大小, 从 A 指向 B 的方向就是向量的方向. 也常用带箭头的小写黑体字母 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等来表示向量.

若两个向量的大小和方向都一样, 就称这两个向量是相等的. 与向量 $\vec{a}$ 大小一样, 但方向相反的向量记为 $-\vec{a}$, 称为 $\vec{a}$ 的负向量. 向量 $\vec{a}$ 的大小称为此向量的模, 记为 $|\vec{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为零的向量称为零向量, 记为 $\vec{0}$. 零向量只有大小没有方向.

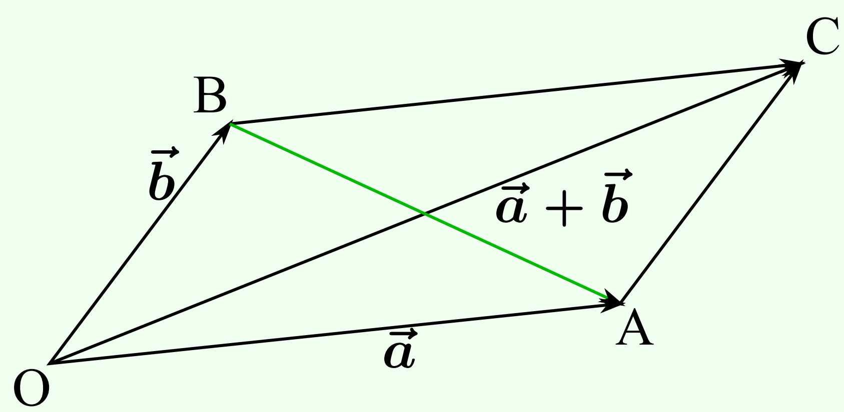
若向量 $\vec{b}$ 的方向与向量 $\vec{a}$ 的方向相同或相反, 就称 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行, 记为 $\vec{b}//\vec{a}$. 若向量 $\vec{b}$ 的方向与向量 $\vec{a}$ 的方向互相垂直, 就称 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直或正交, 记为 $\vec{b} \perp \vec{a}$.

约定零向量与任何向量平行, 也与任何向量垂直.

向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 所夹的角, 称为它们之间的夹角. 规定向量的夹角在 0 与 π 之间. 显然两个非零向量平行当且仅当它们的夹角是 0 或 π, 两个非零向量垂直当且仅当它们的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

8.1.2 向量的加法和数乘

加法运算 将两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移到同一点, 即, 令 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 称 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在空间中所张成的平行四边形的有向对角线 $\overrightarrow{OC}$ 所表示的向量称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和, 记为 $\vec{a}+\vec{b}$.



减法运算 称 $\vec{a}+(-\vec{b})$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差, 记为 $\vec{a}-\vec{b}$.

数乘运算 对于实数 λ 和向量 $\vec{a}$, 定义 $\lambda\vec{a}$ 为一个向量, 它的模等于 $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, 它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同, 当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反. 由定义可知 $0\vec{a}=\vec{0}$.

加法运算和数乘运算满足下面的运算法则:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}; \qquad \text{(交换律)} \tag{8.1}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}); \qquad \text{(结合律)} \tag{8.2}$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}; \qquad \text{(有零元)} \tag{8.3}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}; \qquad \text{(有负元)} \tag{8.4}$$

$$1\vec{a}=\vec{a}; \tag{8.5}$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}; \tag{8.6}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}; \qquad \text{(向量关于数的分配率)} \tag{8.7}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}; \qquad \text{(数关于向量的分配率)} \tag{8.8}$$

8.1.3 向量的共线与共面

一组向量称为是共线的, 如果它们都平行于某条直线. 一组向量称为是共面的, 如果它们都平行于某个平面.

一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 称为是线性相关的, 若存在不全为零的实数 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 使得

$$\boldsymbol{\lambda}_1\vec{a}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2\vec{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

若 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 不是线性相关的就称为是线性无关的.

性质 1 两个向量共线当且仅当它们线性相关.

性质 2 三个向量共面当且仅当它们线性相关.

利用向量运算可以解决许多几何问题，其思想是将几何性质转化为向量的代数运算。

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，D, E 分别是边 BC, AC 的中点，AD, BE 相交于点 G. 证明：$AG = \frac{2}{3}AD$.

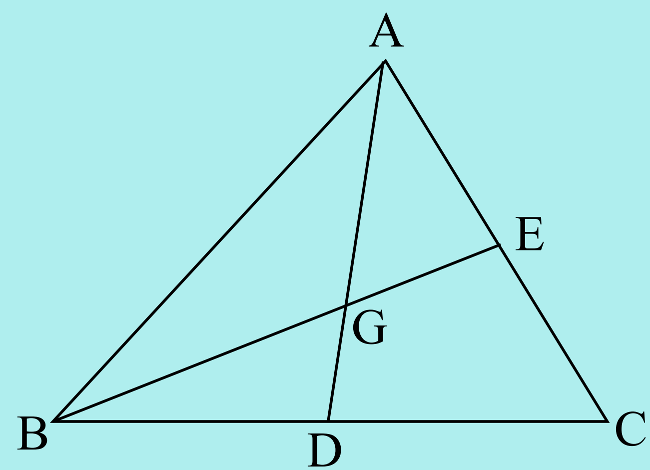
证明 设 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BG} = y\overrightarrow{BE}$. 因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

又因为 $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$, 所以

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}.$$

即, $(\frac{x}{2} + y - 1)\overrightarrow{AB} = \frac{y-x}{2}\overrightarrow{AC}$. 由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线, 因此有 $\frac{x}{2} + y - 1 = \frac{y-x}{2} = 0$, 即 $x = y = \frac{2}{3}$.



8.1.4 向量的点乘与叉乘

定义 1 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积为一个实数, 它等于这两个向量的模长与夹角的余弦的乘积, 记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$. 如果向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 θ, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta. \tag{8.9}$$

数量积也常称为内积.

从数量积的定义可知, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直的充分必要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

性质 3 对向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 及实数 λ, 我们有

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \tag{8.10}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \tag{8.11}$$

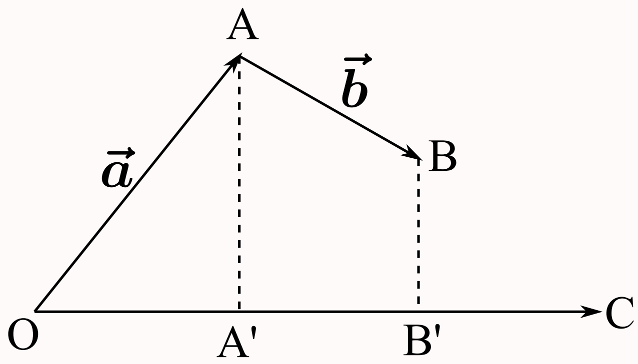
$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}), \tag{8.12}$$

$$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} \geqslant 0, \text{等号成立当且仅当 } \vec{a}=\vec{0}. \tag{8.13}$$

(8.11) **的证明** 不妨设 $\vec{c}\neq\vec{0}$. 作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, 则有 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$. 过点 A, B 作直线 OC 的垂线, 垂足分别为 A', B'. 则存在实数 x, y 使得 $\overrightarrow{OA'}=x\vec{c}$, $\overrightarrow{A'B'}=y\vec{c}$, $\overrightarrow{OB'}=(x+y)\vec{c}$. 由数量积的定义可知

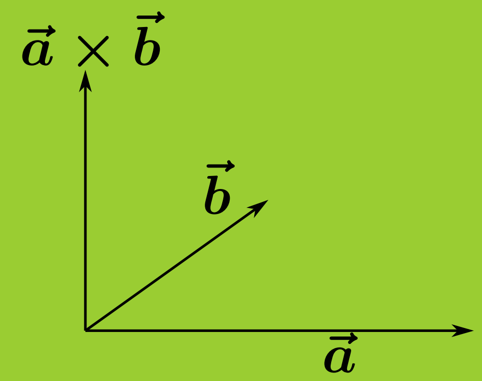
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=x|\vec{c}|^2,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=y|\vec{c}|^2,$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(x+y)|\vec{c}|^2.$$



所以 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

定义 2 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为一个向量, 它的方向与 $\vec{a},\vec{b}$ 都垂直, 且使 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系; 它的模等于以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积, 即 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, 其中 θ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.



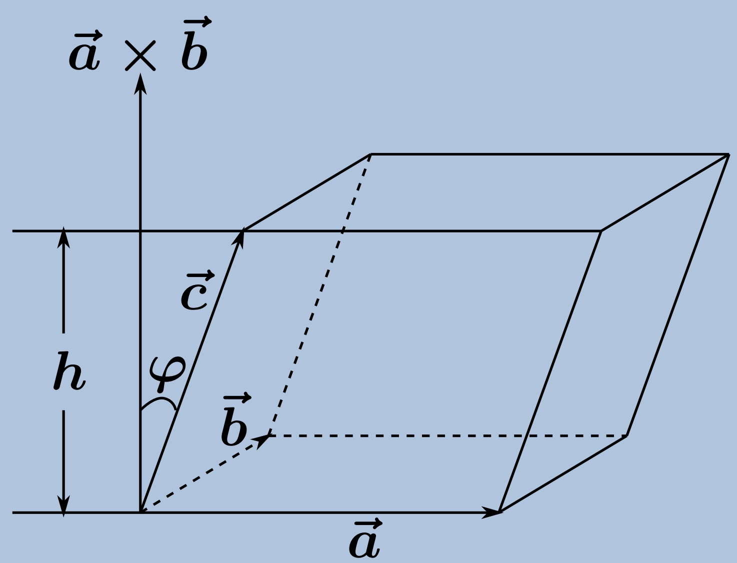
定义 3 给定三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积.

混合积的几何意义 混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 表示的是以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的“有向体积”. 即: 当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为右手系时, 就是六面体的体积; 当 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为左手系时, 它是六面体体积的相反数.

混合积几何意义的证明 以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V 等于以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为边的平行四边形的面积 S 乘以高 h 即 $V = S\,h$. 由向量积的定义知 $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, 另一方面, 设 $\vec{a} \times \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 φ, 则有 $|h| = |\vec{c}||\cos\varphi|$. 于是

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}||\cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

注意到 φ 为锐角时, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成右手系, $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; 当 φ 为钝角时, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成左手系， $V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. 因此结论成立.



向量的向量积和混合积运算具有以下性质.

性质 4 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三个向量, λ 为实数, 则有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}, \tag{8.14}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}, \tag{8.15}$$

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}), \tag{8.16}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}. \tag{8.17}$$

证明 前三个式子从定义或几何意义看都是显然的. 下面我们证明 (8.17). 对于任意向量 $\vec{d}$, 有

$$\begin{aligned}&(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\&=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})\\&=\left((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\right)\cdot\vec{d}.\end{aligned}$$

于是 (8.17) 成立.

8.1.5 向量的坐标表示

定理 1 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为空间中三个不共面的向量，则对每个向量 $\vec{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3), 使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \tag{8.18}$$

定理1 的证明 (唯一性) 若有两组数 (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) 使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad \vec{a} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

则

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

因此

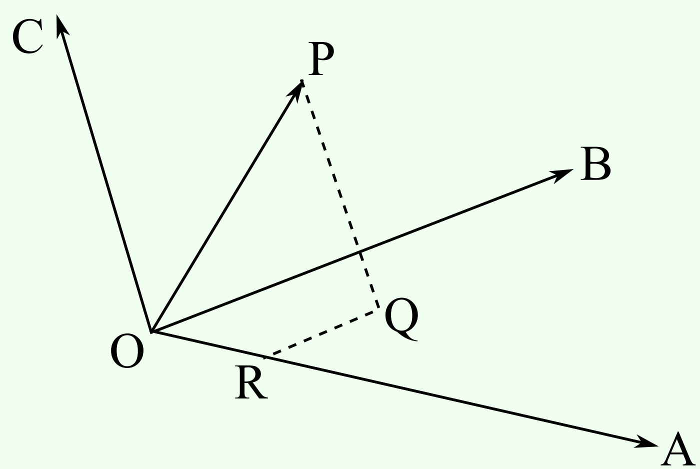
$$(x_1 - y_2)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

由于 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面, 因此 $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$.

(存在性) 在空间中任取一点 O, 作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1, \overrightarrow{OB}=\vec{e}_2, \overrightarrow{OC}=\vec{e}_3, \overrightarrow{OP}=\vec{a}$. 过 P 点作直线 OC 的平行线, 交 AOB 平面于 Q 点. 再过 Q 点作直线 OB 的平行线, 交 OA 直线于 R 点. 则 $\vec{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP}$. 由于 $\overrightarrow{OR}//\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{RQ}//\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}//\overrightarrow{OC}$, 利用性质 1 知, 存在实数 x_1, x_2, x_3 使得

$$\overrightarrow{OR}=x_1\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{RQ}=x_2\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{QP}=x_3\vec{e}_3.$$

因此 $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$.



定义 4 空间中任意三个有序的不共面的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 称为空间的一组基。对于向量 $\vec{a}$，若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的仿射坐标或简称坐标.

8.1.6 空间坐标系

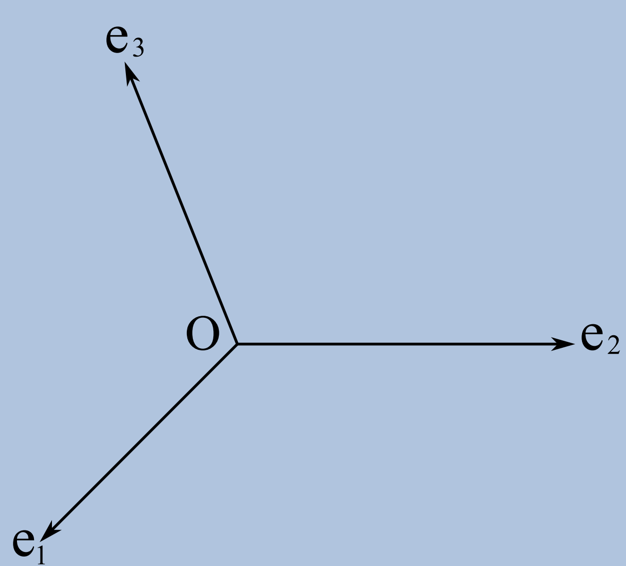
定义 5 空间中任意一点 O 和一组基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 合在一起称为空间的一个仿射坐标系, 记为 $[O;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$. 点 O 称为坐标原点, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 称为坐标向量. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 所在直线分别称为 x 轴, y 轴和 z 轴, 统称为坐标轴. 三个坐标轴的任意两个决定了一个平面, 称为坐标面, 分别记为 Oxy, Oyz, Ozx.

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, 对空间中一点 P, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的坐标称为点 P 在仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ 下的坐标. 因此点 P 在 $[O;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3) 当且仅当 $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

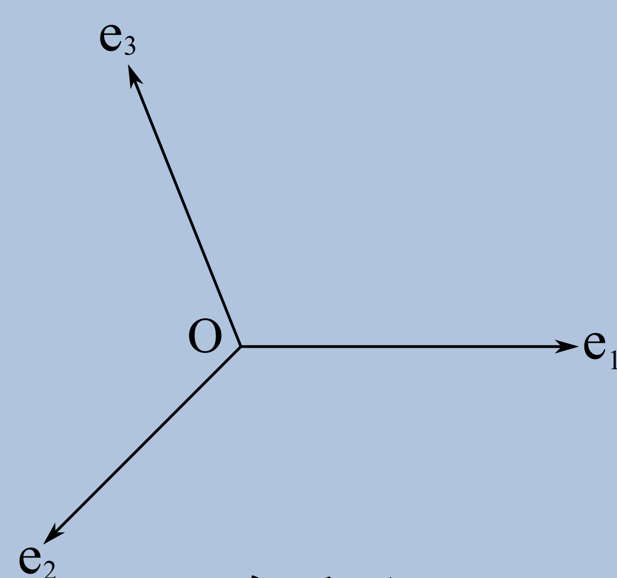
引入仿射坐标系后, 在下列三者间存在一一对应的关系:

$$\text{空间中的点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} \longleftrightarrow \text{坐标 } (x_1, x_2, x_3)$$

对于给定的仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 当我们伸出右手指向 $\vec{e}_1$ 的方向, 并朝 $\vec{e}_2$ 的方向握过去时, 如果大拇指的方向正好与 $\vec{e}_3$ 的方向成锐角, 那么这个坐标系称为 **右手仿射坐标系**; 当我们伸出左手指向 $\vec{e}_1$ 的方向, 并朝 $\vec{e}_2$ 的方向握过去时, 如果左手大拇指的方向正好与 $\vec{e}_3$ 的方向成锐角, 那么这个坐标系称为 **左手仿射坐标系**. 只有这两种类型的坐标系.



(a) 右手系



(b) 左手系

向量的坐标运算

设在空间中取定了一个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 由于向量与其坐标之间存在一一对应的关系, 向量的运算可以转化为其坐标间的运算.

设 $\vec{a}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{b}=(y_1,y_2,y_3)$, λ 为一个实数, 则

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)+(y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3)\\&=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+(x_3+y_3)\vec{e}_3,\\ \lambda\vec{a}&=\lambda(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)=\lambda x_1\vec{e}_1+\lambda x_2\vec{e}_2+\lambda x_3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

所以我们有下面的坐标计算公式:

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3), \tag{8.19}$$

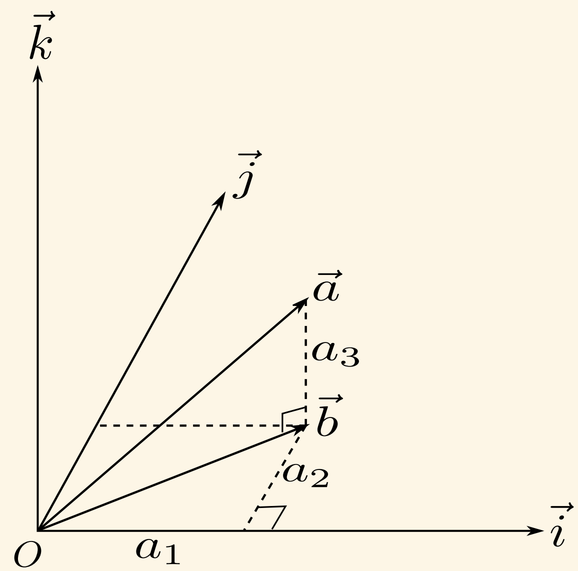
$$\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3). \tag{8.20}$$

直角坐标系

当仿射坐标系 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ 的三个坐标向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为两两垂直的单位向量时，就称为直角坐标系. 一般选择右手直角坐标系. 在直角坐标系中，可以用向量的坐标来计算模长和夹角.

设 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ 为一个空间直角坐标系，若向量 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，则

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \tag{8.21}$$



设向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与坐标向量 $\vec{i}, \vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 的夹角分别为 α, β, γ, 则

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\,|\vec{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}.$$

同理,

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的**方向余弦**. 我们有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right). \tag{8.22}$$

从而

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

直角坐标系下数量积的计算

设 $[O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}]$ 为一个空间直角坐标系. 则有

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

因此对于给定的两个向量 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\quad\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

即,

$$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{8.23}$$

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间的夹角为 θ, 则有

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{8.24}$$

由上面的式子, 可得

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}. \tag{8.25}$$

这就是 Cauchy 不等式. 此不等式可以推广到一般情况:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{8.26}$$

例 2 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 是空间上的两点, 线段 AB 上的点 $P(x, y, z)$ 将此线段分成定比 λ, 即, $|AP| = \lambda|PB|$. 求 P 的坐标.

解 已知 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$, 即

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}).$$

用坐标表示就是

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

于是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

直角坐标系下向量积和混合积的计算

设 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ 为一个右手直角坐标系。由于 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为两两垂直的单位向量且满足右手法则, 由向量积的定义知

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$. 则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \tag{8.27}$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}. \tag{8.28}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3 \tag{8.29}$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{8.30}$$

性质 5 三个向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 共面当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

证明 由于混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 表示的是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成的平行六面体的有向体积, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$. 由上面的公式即得证.

二重向量积

给定三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 称 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 为这三个向量的二重向量积.

性质 6 对任意向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 有

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}. \tag{8.31}$$

证明 取一个右手直角坐标系, 设

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

只要验证等式两边的向量具有相同的坐标即可. 由于

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1),$$

所以 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 的第一个坐标为

$$(a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2.$$

另一方面, $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ 的第一个坐标为

$$\begin{aligned}&(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1\\&=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2.\end{aligned}$$

因此等式两边向量的第一个坐标相同, 同理另两个坐标相同, 从而等式成立.

公式 (8.31) 通常称作二重向量积展开式, 从这个公式可以看出, 向量积不满足结合律, 就是说, 一般情况下,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}),$$

因为上式左边是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的线性组合, 而右边是 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的线性组合.