

## 第一章

## 1.1

设地球表面的总电量为  $q_1$ , 月球表面的总带电量  $q_2$ . 由于电荷在月球和地球表面均匀分布, 故地球和月球均可等价于点电荷来考虑. 设地月心距为  $r$ , 而地月之间的万有引力与库仑力恰好平衡, 则有以下力学平衡方程

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1), \text{ 整理得 } q_1 q_2 = 4Gm_1 m_2 \pi\epsilon_0 \quad (1.2)$$

记总电量最小值为  $q_0$ . 利用均值不等式, 可以由 (1.2) 得到

$$q_0 = 2\sqrt{q_1 q_2} = 2\sqrt{4Gm_1 m_2 \pi\epsilon_0} \quad (1.3). \text{ 代入数据得 } q_0 = 1.14 \times 10^{-14} \text{ C}.$$

若电荷分配与质量成正比, 可设比例系数  $k$  满足  $q_1 = km_1$  以及  $q_2 = km_2$ . 代入 (1.2) 并整理, 解得总电量

$$q = \sqrt{4G\pi\epsilon_0(m_1 + m_2)} \quad (1.4). \text{ 代入数据得 } q = 5.21 \times 10^{14} \text{ C}.$$

## 1.2

该匀速圆周运动过程中, 库仑力作向心力. 给出该质点满足的力学平衡方程:

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = mr \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (1.5), \text{ 整理得 } \frac{r^3}{T^2} = \frac{qQ}{16\pi^3 \epsilon_0 m} \quad (1.6)$$

## 1.3

粒子受三等大共面而互成  $120^\circ$  的力的作用, 合力为零. 记该平衡位置距任一电荷的距离为  $r$ , 则应有  $\sqrt{3}r = a$  (1.7).

设粒子在轴线上有一微小位移  $\delta$ , 则由对称性可知诸库仑力对其合力必沿轴线方向, 且

$$F = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(r^2 + \delta^2)^{1.5}} \delta \quad (1.8). \text{ 因 } \delta \ll r \text{ 可写 } F = -k\delta \quad (1.9), \text{ 其中 } k = \frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.10)$$

该力大小与位移成正比且反向, 从而符合简谐运动的特征. 粒子作简谐运动. 与 (1.7) 共同考虑, 得到

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-3qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3 m}} \quad (1.11). \text{ 代入数据, 解得 } \nu = 2.1 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

## 1.4

取两电荷连线的中点为极点并建立极坐标系.

对称性分析表明, 位于该平面上  $r$  处的点电荷  $q_0$  所受力只能在该坐标系平面内, 其大小

$$F = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 Q r}{(r^2 + l^2)^{1.5}} \quad (1.12) \text{ 作为 } r \text{ 的单变量函数.}$$

欲求受力的极大值, 可对 (1.12) 两端关于  $r$  求微并其等于零, 或

$$\frac{d}{dr} F = \frac{q_0 Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{l^2 - 2r^2}{(r^2 + l^2)^{2.5}} = 0 \quad (1.13). \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{2}}{2} l \quad (1.14).$$

可判断该点为受力最大值点. 诸满足条件的点构成一个圆, 其半径由 (1.14) 给出.

## 1.5

对称性分析表明,  $A$  点的电场强度只能沿  $\hat{y}$  方向. 由电场强度叠加原理, 直接有

$$\mathbf{E} = \frac{2qd\hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ [(x-d)^2 + d^2]^{-1.5} - [(x+d)^2 + d^2]^{-1.5} \right\} \quad (1.15). \text{ 式中 } 2d = l \quad (1.16)$$

利用  $x \gg l$  可对上式化简. 对分式项进行泰勒展开, 舍去二阶及以上无穷小量. 结合 (1.16), 可得到

$$\mathbf{E} = \frac{3l^2 q}{4\pi\epsilon_0 x^4} \hat{y} \quad (1.17).$$

即电四极子产生的电场强度的衰减速度可以预见地快于电偶极子. 它与距离的四次方成反比关系.

## 1.6

只需证明  $AC$  上任意位置处的电场强度水平分量为零, 或其上电势处处相等.

考虑计算复杂程度, 此处取后者. 以  $O$  为极心建立极坐标系和直角坐标系, 则点  $P(x, 0)$  处的电势

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{Rd\theta\lambda_0 \sin\theta}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2xR \cos\theta}} = \frac{\lambda_0 R}{\pi\epsilon_0} \quad (1.18). \text{ 与 } x \text{ 无关.}$$

上式证明了该直径上处处等势. 换言之, 即该直径上任一点的电场强度均与该直径垂直.

**1.7**

将导线段考虑为左边半圆和右边两条长直线两部分考虑. 对称性分析表明, 两部分导线产生的电场均只能沿水平方向. 建立合适的坐标系以用积分求出中心处的电场强度. 记右为正方向, 则由电场强度叠加原理,

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos\theta - \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\lambda x dx}{(R^2 + x^2)^{1.5}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = 0 \quad (1.19)$$

这就说明, 圆心处的电场强度为零.

**1.8**

平行于水平轴的电偶极子不受力矩作用而只受力的作用. 记  $2d = l$ , 则由力的合成法则化简可得

$$\mathbf{F} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Dd}{(D^2 - d^2)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.20)$$

垂直时, 电偶极子为了达到与电场强度有相同的取向而受力和力矩的作用. 容易写出

$$\mathbf{M}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{D\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{z}}}{(D^2 + d^2)^{1.5}} \quad (1.21). \text{ 以及 } \mathbf{F}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{(D^2 + d^2)^{1.5}} \quad (1.22)$$

**1.9**

设内球面上的面电荷密度为  $\sigma_0$ . 选取包含外球面的曲面作为积分面应用高斯定理, 有

$$4\pi R_1^2 \sigma_0 + 4\pi R_2^2 \sigma = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.23). \text{ 解得 } \sigma_0 = -\frac{R_2^2}{R_1^2} \sigma \quad (1.24)$$

再取半径为  $r$  而满足  $R_1 \leq r \leq R_2$  的球体作积分面应用高斯定理, 得到

$$4\pi R_1^2 \sigma_0 = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 \quad (1.25). \text{ 联立 (1.24) 解得 } \mathbf{E} = -\frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.26)$$

而小球面内部的电场强度均为零的结论是不难得出的.

**1.10**

将厚平板视为若干薄板的叠加, 则  $x \sim x + dx$  处薄板的面电荷密度  $\sigma = kx dx$ .

约定  $x$  正方向为电场强度正方向. 板外任意位置有相同的电场强度大小:

$$E = \int_0^b \frac{kx dx}{2\epsilon_0} = \frac{kb^2}{4\epsilon_0} \text{ for } r > b \quad (1.27)$$

板内的电场强度是纵坐标坐标  $r$  的函数, 或

$$E = \int_0^r \frac{kx dx}{2\epsilon_0} - \int_r^b \frac{kx dx}{2\epsilon_0} = \frac{k}{4\epsilon_0} (2r^2 - b^2) \text{ for } 0 \leq r \leq b \quad (1.28)$$

**1.11**

核外带负电荷, 总电量  $q_0 = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ . 取半径为  $r$  的球壳作高斯面并应用高斯定理, 有

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi R^2 dR \rho = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 \quad (1.29). \text{ 求得 } \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi a^2 \epsilon_0} \left[ \left(2 + \frac{2a}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right) e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^2}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}} \quad (1.30)$$

其中式 (1.29) 左边的定积分求解有一定难度. 适当的部分积分会消去难算的项.

**1.12**

为重叠部分充满均匀而等量的正负电荷. 设空腔内一点  $P$  相对于大小球球心位矢分别为  $\mathbf{r}_a$  及  $\mathbf{r}_b$ .

由高斯定理推得  $P$  点处的电场强度只受部分电荷的影响, 即

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_a^3} \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho \mathbf{r}_a - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_b^3} \frac{4}{3} \pi r_b^3 \rho \mathbf{r}_b = \frac{\rho \mathbf{d}}{3\epsilon_0} \quad (1.31)$$

式中  $\mathbf{d}$  是由大球球心指向小球球心的矢量. 可见, 空腔内是匀强场.

**1.13**

对称性分析表明空间中任意位置处的电场强度只能沿  $x$  轴.

将整个半导体考虑为若干均匀带电薄板. 由电场强度叠加原理, 知  $x = x_0 (0 \leq x_0 \leq x_p)$  处的电场强度

$$E = \left( \int_{-x_n}^0 - \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_p} \right) \frac{\rho_e(x) dx}{2\epsilon_0} = \frac{N_A e}{\epsilon_0} (x_p - x) \quad (1.32)$$

类似地, 对满足  $-x_n \leq x_0 \leq 0$  的点  $x = x_0$ , 应有

$$E = \left( \int_{-x_n}^{x_0} - \int_{x_0}^0 + \int_0^{x_p} \right) \frac{\rho_e(x) dx}{2\epsilon_0} = \frac{N_D e}{\epsilon_0} (x_n + x) \quad (1.33)$$

化简 (1.32)(1.33) 式的过程中, 须利用  $N_A x_p = N_D x_n$  (1.34).

**1.14**

显然这是一维问题. 选取半径为  $r$  而高为  $h$  的圆柱面应用高斯定理, 即

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r 2\pi R dR \rho_e(R) = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r h E \quad (1.35). \text{ 可解得 } \mathbf{E} = \frac{a^2 \rho_0}{2\varepsilon_0(a^2 + r^2)} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.36)$$

**1.15**

电场力为保守力, 做功大小与移动路径无关. 从电势角度出发便于计算.

单位正电荷从  $O$  移动到  $D$  被做的功在数值上与电势差等号, 即

$$A = U_O - U_D = 0 - \left( \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l} \right) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l} \quad (1.37)$$

而单位负电荷从  $D$  移动到  $\infty$  被做的功在数值上与电势差反号, 或

$$A = -(U_D - U_\infty) = -\left( \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3l} \right) + 0 = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l} \quad (1.38)$$

**1.16**

电场中不可能存在任何形式的电荷否则给定条件将不能满足. 此外电场应处处连续.

任选一与电场平行的长细线管应用高斯定理. 管横截面积  $\delta S$  极小, 则可写

$$\frac{0}{\varepsilon_0} \equiv \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \delta S \Delta E \quad (1.39)$$

式中  $\Delta E$  为管两端场强之差. 解得  $\Delta E \equiv 0$ , 这说明与电场平行的任一直线上场强处处相等.

再选取矩形回路  $L$ , 使得其一组对边与电场平行且长度为  $l$ , 另一组对边与电场垂直. 由环路定理, 得

$$0 \equiv \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = l \Delta E \quad (1.40)$$

式中  $\Delta E$  为沿电场方向的一组对边上的场强之差. 得到  $\Delta E \equiv 0$ . 这说明与电场平行的任两条直线上场强处处相等.

以上演论说明, 凡是电场强度的方向处相同的地方, 电场强度的大小必定处处相等.

**1.17**

先由电势叠加原理写出  $A$  点处的电势. 利用  $r \gg l$  化简, 再利用泰勒展开并舍去三阶及以上小量. 即

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos \theta}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta}} - \frac{2q}{r} \right] = \frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (1.41)$$

而电场强度作为电势梯度的相反数, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla U = \frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} [-2 \cos \theta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + (3 \cos^2 \theta - 1) \hat{\mathbf{r}}] \quad (1.42)$$

**1.19**

选取高为  $h$  而半径为  $r$  ( $a < r < b$ ) 的共轴圆筒面为高斯面应用高斯定理, 得到

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{h\lambda_e}{\varepsilon_0} \quad (1.43). \text{ 解得 } \mathbf{E} = \frac{\lambda_e}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \text{ for } a < r < b \quad (1.44).$$

容易判断 (1.44) 给出的空间外任意位置无电场存在. 取无穷远点为电势零点, 则对满足  $a < r_0 < b$  的  $r_0$ , 有

$$U = \int_r^b \frac{\lambda_e dr}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{\lambda_e}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{r} \quad (1.45). \text{ 在 } (a, b) \text{ 上连续.}$$

令 (1.45) 中  $r = a$  则可得到内筒内部的电势; 而外筒外部的电势为零是容易得出的.

两筒的电势差由 (1.45) 给出. 或具体地, 有

$$U_0 = U_a - U_b = \frac{\lambda_e}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (1.46)$$

**1.20**

借用 1.11 题的结论. 核外电荷产生的电势可通过积分得到:

$$U = \frac{q}{4\pi a^2 \varepsilon_0} \int_r^\infty \left[ \left( 2 + \frac{2a}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^2}{r^2} \right] dr = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \right) e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{1}{r} \right] \quad (1.47)$$

而所有电荷产生的电势还应包括原子核内部正电荷的电势, 即

$$U' = U + \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \right) e^{-\frac{2r}{a}} \quad (1.48)$$

## 第二章

## 2.1

两板达到静电平衡后,板内任意位置处的电场强度为零.因此总有

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}; \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \quad (2.1). \text{解得 } \sigma_1 - \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.2).$$

即相向面上的面电荷密度等大反号,相背面上面电荷密度等大同号.再考虑电荷守恒定律:

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1; \sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_2 \quad (2.3)$$

与(2.2)联立,解得金属板各面的电量

$$\sigma_1 S = \sigma_4 S = (Q_2 + Q_1)/2; \sigma_3 S = -\sigma_2 S = (Q_2 - Q_1)/2 \quad (2.4)$$

## 2.2

设中心球体表面分布的电量为 $q$ ,则外球内表面会出现 $-q$ 的电荷.由电荷守恒定律及静电平衡条件,知外球外表面总电量为 $Q+q$ .取半径为 $r$ 的球壳面作高斯面应用高斯定理,容易得到

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ for } R_1 < r < R_2; E = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ for } r > R_3 \quad (2.5)$$

导体内部处处电场强度为零.而要保证内球的电势为零,即须

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \int_{R_3}^{\infty} \frac{(q+Q)dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0 \quad (2.6).$$

上式给出了内球的电荷量和球壳的电势.或具体地,

$$q = \frac{-R_1 R_2}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2} Q \quad (2.7). \text{以及 } U = \int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2} Q \quad (2.8)$$

## 2.3

将肥皂泡平均分成两个半球壳来考虑.一半球因表面张力和内外压力差的作用而平衡.

意到肥皂泡内外表面均有表面张力作用,故须按两倍计算.设带电前肥皂泡内部的压强为 $p_0$ ,则

$$p_0 \pi r^2 = p \pi r^2 + 2 \cdot 2\pi r \alpha \quad (2.9)$$

而带电后的内部压强 $p'_0$ 可由克拉伯龙方程给出

$$p_0 \frac{3}{4} \pi r^3 = p'_0 \frac{3}{4} \pi R^3 = nRT \quad (2.10)$$

而两均匀带电半球壳之间的相互作用力的大小已由例2.1给出.这样便可以建立带电后新的力学平衡方程:

$$p'_0 \pi R^2 + \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} = 2 \cdot 2\pi R \alpha + p \pi R^2 \quad (2.11)$$

联立以上诸式并整理.消去 $p_0$ 和 $p'_0$ 即可得到待证明关系.

## 2.4

当导体 $A$ 带正电后,周围导体将被感应出电荷:靠近 $A$ 的面负电荷较多,远离 $A$ 的面正电荷较多.可以认为,有电场线从 $A$ 发出,并终止于周围导体靠近 $A$ 的面.同时,诸周围导体上远离 $A$ 的面上的正电荷仍然发出电场线并终止于无穷远处.无穷远点为电势零点,而电势沿电场线逆流而升.这样,诸导体均有正电势,且 $A$ 的电势最高.

## 2.5

由静电平衡条件和唯一性定理,可说明 $q_1$ 所在空腔内表面出现平均分布的量为 $-q_1$ 的电荷,而 $q_2$ 所在空腔内表面出现平均分布的量为 $-q_2$ 的电荷.由于金属球本身不带电,由电荷守恒条件和唯一性定理,知大金属球表面出现均匀分布的量为 $q_1 + q_2$ 的电荷.这样,由于 $q_1$ 以及 $q_2$ 所在空腔内无电场,则两电荷不受力.

大金属球和远处电荷之间的相互作用可以认为是点电荷之间的相互作用,即:

$$F = \frac{q(q_1 + q_2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (2.12). \text{该力为斥力.}$$

## 2.6

分析该结构的拓扑特征,发现其实际上是两个板距为 $d$ ,板面积为 $S$ 的平行板电容器的并联.

这样便可以利用电容公式和并联关系得出该电容器的电容 $C = 2\varepsilon_0 S/d$  (2.13),代入数据,解得 $C = 1.1 \times 10^2 \text{ pF}$ .

记带电后的面电荷密度为 $\sigma$ ,则应有 $2S\sigma = UC$  (2.14).代入数据,解得 $\sigma = 1.9 \times 10^{-5} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$ .

## 2.7

将该电容器视为两电容的并联.其中一块为板面积为 $S/2$ ,而板间距为 $d$ 的平行板电容器,电容 $C_1 = \varepsilon_0 S/2d$  (2.15);

而另一块中间插入宽为 $t$ 导体,相当于板间距为 $d-t$ ,面积为 $S/2$ 的平行板电容器,电容 $C_2 = \varepsilon_0 S/2(d-t)$  (2.16).

这样,总电容为各部分参并电容之和

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{1}{d-t} + \frac{1}{d} \right) \quad (2.17)$$

**2.8**

将诸电容上的带电量 and 电压分别记为列向量  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{U}$ , 而诸电容记为淮对角矩阵  $\mathbf{C} = \text{diag}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ .

先设上端节点的电势高于下端. 上下两孤岛上电荷守恒即  $\mathbf{BQ} = \mathbf{0}$  (2.18), 而电容约束  $\mathbf{Q} = \mathbf{CU}$  (2.19).

分别取电容 134 及 253 所在回路应用基尔霍夫第二定律, 得到方程  $\mathbf{DU} = \mathbf{0}$  (2.20). 联立以上诸式, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{BC} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{U} \quad (2.21). \text{ 解得 } \mathbf{U} = \eta \cdot (2, 3, 1, 3, 2)^T.$$

再取含源回路如  $U$ -4-5 应用基尔霍夫第二定律, 得  $3\eta + 2\eta = U$ , 故  $\eta = 120\text{V}$ .

则  $\mathbf{U} = (240, 360, 120, 360, 240)^T \text{V}$ .

**2.9**

分析其拓扑结构发现这是两个圆筒状电容器的并联. 其中一个长为  $l$ , 内外径分别为  $a, b$ ;

另一个长为亦  $l$ , 但内外径变为  $b, d$ . 利用圆筒状电容器的公式和电容并联公式, 直接得到

$$C = 2\pi l \epsilon_0 \ln^{-1} \frac{b}{a} + 2\pi l \epsilon_0 \ln^{-1} \frac{d}{b} \quad (2.22)$$

**2.10**

单位体积饱和水蒸气的电极化强度的最大值

$$P = \frac{\rho}{\mu} \cdot p N_A \quad (2.23). \text{ 代入数据, 得 } P = 1.2 \times 10^{-4} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}.$$

**2.11**

面电荷密度  $\sigma = E_m \epsilon_0$  (2.24), 得到  $\sigma = 8.6 \times 10^{-3} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ . 金属导体表面的  $N$  个毗邻原子的面积为  $Nd^2$ .

设其中至多有  $\omega\%$  原子缺少或多出一个电子, 则应有  $N\omega\%e = \sigma Nd^2$  (2.25). 整理并代入数据, 解得  $\omega\% \approx 0.2\%$ .

**2.12**

本题情景属于介质界面与等势面平行的情况. 记撤去电源而填充介质前的电场为  $E_0$ , 则

$$E_0 = \frac{U}{d} \quad (2.26); E_i = \frac{E_0}{\epsilon_{ri}} \quad (2.27); P_i = (\epsilon_{ri} - 1)E_i \quad (2.28). \text{ where } i = 1, 2.$$

电极化强度的大小由式 (2.28) 给出. 代入数据, 解得  $P_1 = 1.4 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $P_2 = 8.9 \times 10^{-6} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ .

而右侧极板接地后成为电势零点. 由于两场区内电场强度均匀, 则直接有

$$U_+ = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{U}{d} \left( \frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right) \quad (2.29); U_p = E_2 d_2 = \frac{U}{d} \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \quad (2.30).$$

代入数据, 解得正极板的电势  $U_+ = 3800\text{V}$ ; 以及两介质接触面上的电势  $U_p = 3000\text{V}$ .

**2.13**

本题中介质界面与等势面平行. 先撤去介质, 并记原电场为  $E_0$ . 则

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.31). \text{ 以及 } D = \epsilon_0 E_0 = \sigma \quad (2.32). \text{ 对介质区, 有 } E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (2.33).$$

极板间各处的电位移矢量均由 (2.32) 给出. 代入数据, 解得  $D = 8.9 \times 10^{-10} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ . 介质区外部的电极化强度显然为零, 而电

场强度由 (2.31) 给出, 代入数据得到  $E_0 = 100\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ . 介质区内部的电场强度由 (2.33) 给出,  $E = 50\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 而介质区内部的电

极化强度  $P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$  (2.34). 得到  $P = 4.4 \times 10^{-10} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ . 电势易求. 若取  $x$  单位为  $\text{cm}$ ,  $U$  的单位为  $\text{kV}$ , 则

$$U = 10x(0 < x < 1); 5x + 5(1 < x < 2); U = 10x - 5(2 < x < 3) \quad (2.35).$$

**2.14**

选取半径为  $r(R_1 < r < R_2)$  长度为  $l$  的同轴圆筒面作为高斯面, 应用高斯定理, 有

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = l\lambda_0 \quad (2.36). \text{ 得到 } \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.37); \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.38); \mathbf{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.39)$$

电荷体密度为电极化强度的散度之负值, 界面的极化电荷密度为两侧电极化强度之差在法向上的投影.

$$\rho' = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\lambda}{2\pi r} \right] \equiv 0 \quad (2.40); \sigma'_i = -\mathbf{P}_{R_1} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right) \frac{\lambda}{2\pi R_1}; \sigma'_e = \mathbf{P}_{R_2} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{\lambda}{2\pi R_2} \quad (2.41)$$

利用圆筒电容的计算公式可直接得到该电容器的电容. 电压是容易得到的.

$$C = 2\pi \epsilon l \ln^{-1} \frac{R_2}{R_1} \quad (2.42); U = \frac{l\lambda_0}{C} = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (2.43)$$

**2.15**

该球体可视为两双同心导体球壳电容的串联. 其中一个内外径分别为  $R_1$  和  $r$ , 其间填充了相对介电为  $\varepsilon_1$  的介质; 另一个内外径分别为  $r$  和  $R_2$ , 其间填充了相对介电为  $\varepsilon_2$  的介质. 利用双同心导体球壳电容公式和电容串联公式, 得到

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R_1 r}{r - R_1}; C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r R_2}{R_2 - r} \quad (2.44); C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 R_1 R_2 r}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_1 R_2 + (\varepsilon_2 R_2 - \varepsilon_1 R_1)r} \quad (2.45)$$

内球带负电, 则电场强度指向球心. 距球心距离为  $u$  的点处的电极化强度

$$\mathbf{P} = (\varepsilon_i - 1) \frac{\partial}{\partial u} \frac{\varepsilon_0 Q}{C_i} (-\hat{\mathbf{u}}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\right) \frac{Q \hat{\mathbf{u}}}{4\pi u^2} \quad (2.46). \text{ 其中 } i = 1, 2, \text{ 分别对应两介质区.}$$

本情境中共有三个介质界面. 容易得到

$$\sigma'_{R_1} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \frac{Q}{4\pi R_1^2}; \sigma'_{R_2} = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) \frac{Q}{4\pi R_2^2}; \sigma'_r = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (2.47)$$

**2.16**

选取半径为  $r$  的球面作为高斯面. 由高斯定理, 得到

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2 = Q \quad (2.48). \text{ 解得 } D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (2.49), E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (1 + kr) \quad (2.50)$$

解出两同心导体球壳之间的电势差以计算电容.

$$U = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (1 + kr) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + k \ln \frac{b}{a}\right) \quad (2.51); C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a) + abk(\ln b - \ln a)} \quad (2.52)$$

而电极化矢量, 极化电荷体密度和面密度的计算与 2.14, 2.15 题是同理的.

$$\mathbf{P} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \mathbf{D} = -\frac{kQ}{4\pi r} \quad (2.53); \rho' = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-\frac{kQ}{4\pi r}\right)\right] = \frac{kQ}{4\pi r^2} \quad (2.54); \sigma'_a = \frac{kQ}{4\pi a}, \sigma'_b = -\frac{kQ}{4\pi b} \quad (2.55)$$

**2.17**

本题情境中等势面与介质界面垂直. 考虑半径为  $r$  的球面, 易得

$$E = \frac{Q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot 2\pi r^2} \quad (2.56). \text{ 以及 } U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (2.57), C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi ab}{b-a} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (2.58).$$

**2.18**

空心球状介质内的电荷分布均匀, 设密度为  $\rho$ . 则半径为  $r (R < r < 2R)$  的球面内包含的自由电荷总量

$$q = \frac{3}{4}\pi(r^3 - R^3) \cdot \rho \quad (2.59), \text{ 其中 } \rho = \frac{4q_0}{3\pi[(2R)^3 - R^3]} \quad (2.60)$$

除此之外, 该球面内还包含中央金属球表面上产生的极化电荷  $q'$ . 以上述面为高斯面, 易得  $D = (q + q')/4\pi r^2$  (2.61).

这样, 介质区和球壳外侧区域的电场强度容易得到:

$$E = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \text{ for } R < r < 2R; E = \frac{q_0 + q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ for } r > 2R \quad (2.62)$$

内侧金属球接地从而与无穷远处等势. 这样, 考虑 (2.59)(2.60), 应有

$$0 = \int_R^{2R} \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr + \int_{2R}^{\infty} \frac{q_0 + q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{7q + 2q_0}{56\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} + \frac{q + q_0}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad (2.63). \text{ 有 } q = -\frac{16}{21}q_0 \text{ 并代回, 得 } U = \frac{5q_0}{168\pi\varepsilon_0 R}.$$

**2.19**

介质界面上电场的切向分量连续, 得到  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$  (2.64); 另一方面,  $\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 - \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = \sigma$  (2.65).

两式联立, 消去  $E_2$  则可立即得到待证明式.

**2.20**

取介质板中面上一点为原点建立坐标系  $Ox$ . 由于能产生电场的电荷均以面对称的形式分布在中央区域, 所以中央大平板两侧一定有等大反向的电场强度  $E$ . 选取沿  $x$  轴的穿过三种介质的长方体并应用高斯定理, 不难得到  $E\varepsilon_1 + E\varepsilon_2 = b\rho$  (2.66).

另一方面, 再选取沿  $x$  轴的短长方体使其左端面位于左面介质中而右端面位于中央大平板, 以其表面为高斯面, 应用高斯定理, 得到  $E\varepsilon_1 + E'\varepsilon_0 = \rho(x - b/2)$  (2.67), 综合 (2.66) 的结论, 可写

$$\mathbf{E} = \frac{b\rho}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{\mathbf{x}} \text{ for } |x| > \frac{b}{2}; \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} b + x\right) \hat{\mathbf{x}} \text{ for } |x| < \frac{b}{2} \quad (2.68)$$

考虑到平板外侧电场分布的对称性,  $A$  和  $B$  之间的电势可直接写为

$$U_{AB} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} b + x\right) \hat{\mathbf{x}} dx = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0} \quad (2.69)$$

**2.21**

此题情形中介质界面与等势面垂直. 则类似 2.17 题得到对  $r > a$  有  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E \cdot 2\pi r^2 = q$  (2.70). 解得

$$\mathbf{E} = \frac{q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.71); \sigma_0 = \varepsilon_i \mathbf{E}|_{r=a} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{q\varepsilon_i}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \text{ where } i = 1, 2 \quad (2.72)$$

**2.22**

此题情形中等势面与介质界面垂直. 考虑以  $Q$  为球心,  $d$  为半径的球面类比 2.17, 2.22 题, 应有  $(\epsilon + \epsilon_0)E \cdot 2\pi d^2 = Q$  (2.73). 则

$$E = \frac{q}{2\pi r^2(\epsilon + \epsilon_0)} \quad (2.74). \text{ 以及 } F = qE = \frac{qQ}{2\pi r^2(\epsilon + \epsilon_0)} \quad (2.75).$$

**2.23**

两极板分别为等势面, 故场区的电场强度必定处处相等. 若电容两端一直加有恒压, 则两点场强均相等且与无介质时一样. 若先充电后撤去恒压源再放入介质, 则电容之中的电荷将重新分配而保证场强处处相等. 设充电后极板带电量为  $q$ , 半极板面积为  $S$ , 则  $\epsilon_0 E \cdot 2S = q$  (2.76) 描述了无介质时的情况, 而有介质时, 等势线与介质界面垂直, 则  $(\epsilon + \epsilon_0)E'S = q$  (2.77). 得

$$E' = \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} E \quad (2.78).$$

**2.25**

为保证导体平面为等势体, 像电荷必须正负间隔而关于原点高度对称分布. 选诸电荷的电量顺时针记  $(q_i) = (+q, -q, +q, -q)$ ; 坐标分别为  $(\mathbf{r}_i) = ((a, b, 0), (a, -b, 0), (-a, -b, 0), (-a, b, 0))$ . 空间中一点  $\mathbf{r}_0 = (x, y, z)$  的电势

$$U = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0\|} \quad (2.79).$$

而电场  $E = -\nabla U$  (2.80). 可以预见, 因  $x = 0$  平面等势, 则该平面上  $E_y \equiv 0$ . 这一结论也可从 (2.80) 得到, 但表达繁杂.

在  $y = 0$  平面上的面电荷密度此处直接给出:

$$\sigma = \frac{bq}{2\pi} \{ [(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} - [(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} \} \quad (2.81)$$

**第三章****3.1**

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l} \quad (3.1), \quad F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \quad (3.2)$$

代入数据, 解得两质子的静电势能  $E = 3.8 \times 10^{-14} \text{J}$  以及静电力  $6.3 \text{N}$ .

**3.2**

电荷系统的相互作用能

$$A = \frac{(-q) \cdot 2q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{2q \cdot (-q)}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{-7q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad (3.3)$$

**3.3**

该点电荷排布具有一定的对称性. 顶点上任意一个正电荷处由其它诸电荷累加而来的电势

$$U = 2 \cdot \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}Q}{4\pi\epsilon_0 3a} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 2a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{5}{2} \right] \quad (3.4)$$

不难判断顶点上负电荷所在位置处的外场势应为以上值的相反数. 注意到求解静电能时此负号将与电荷值所带的负号相抵消, 这样, 在数学上, 可以认为体系中有六个所处环境完全相同的电荷, 即

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6QU = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ 2\sqrt{3} - \frac{15}{2} \right] \quad (3.5)$$

由于位移过程是准静态过程, 所以过程中只存在外力做功与静电势能之间的转换. 若在原来的正六边形任一邻位放置两个与该处实际电荷相反的电荷, 并再取一对电荷置于无穷远处, 所构造出来的排布与上述移动后的情景完全等价. 外力所做的功就是构造两对新增的电荷所需的能量, 包括自能和互能, 即:

$$W = - \left[ \frac{1}{2} \cdot 2QU + 2 \cdot \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ 3 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \right] \quad (3.6)$$

**3.4**

由于面元在自身处产生的电势趋近于零, 于是可直接令总电势参与运算. 这样, 均匀带电  $e$  的球壳的静电自能容易得到. 而依照假设, 电子的静止能量全部来自其静电自能, 且其关系由爱因斯坦的质能方程给出. 具体来说,

$$A = \frac{1}{2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} e = mc^2 \quad (3.7), \quad R = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (3.8)$$

另一方面, 若认为电子电荷平均分布在球体内, 则电子球内的平均电荷密度不难得出. 设此时电子的理论半径为  $\gamma$ . 注意到体元在其自身处产生的电势也收敛于零, 则此处的计算也可以直接利用总势. 即有

$$A = \frac{1}{2} \frac{3e}{4\pi\gamma^3} \int_0^\gamma \frac{e}{8\pi\epsilon_0\gamma^3} (3\gamma^2 - r^2) r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0\gamma} = mc^2 \quad (3.9), \quad \gamma = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (3.10)$$

代入题目中给定的数据, 解得电子的经典半径为  $2.8 \times 10^{-15} \text{m}$ .

**3.5**

内球带电, 根据静电平衡条件和电荷守恒条件, 可以判断该体系达到平衡后外套内侧表面平均分布有  $-q$  的电荷, 而外侧所带电荷量对应应为  $q$ . 导体外套处处等势, 导致其内外侧所带电荷的静电能相互抵消. 系统总电能为内球自能. 具体来说,

$$A = \frac{1}{2} \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right] q \quad (3.11)$$

代入数据, 解得系统储存的电能  $A = 1.82 \times 10^{-4} \text{J}$ . 若用导线将内球与壳连接起来, 则正负电荷将发生中和. 由于内球和外壳等势, 腔内和导体内均无电场出现. 唯一可能的情形就是所有的电量  $q$  平均分布在外球面上. 此时系统的静电能

$$A = \frac{1}{2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_3} e \quad (3.12)$$

代入数据, 解得球壳联起时体系的静电能  $A = 8.10 \times 10^{-5} \text{J}$ .

**3.6**

依题意, 原子核中的总带电量  $q = ne$  平均分布在球体内, 情况与 3.4 题类似. 于是该原子核的静电势能

$$A = \frac{3n^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 r} \quad (3.13)$$

代入数据, 得到原子核的静电势能  $A = 1.27 \times 10^{-10} \text{J}$ . 原子核分裂为两个完全相同的等大的均匀带电球. 由电荷守恒条件和数学约束不难求得分裂后球体的半径和带电量, 并可代入以下的计算式. 考虑此后的体系的静电势能时, 认为两球相距无穷远, 即不考虑其间的相互作用能, 以保证该计算有意义. 类似地得到分裂后的总能

$$A' = 2 \cdot \left( \frac{ne}{2} \right)^2 \frac{3\sqrt{2}}{20\pi\epsilon_0 r} \quad (3.14)$$

在该过程中体系放出的能量即为上述两量之差, 即  $E = A' - A$  (3.15). 代入数据得到  $E = 4.71 \times 10^{-11} \text{J}$ .

记  $\mu$  为铀的摩尔质量. 则一千克铀裂变所放出的能量

$$\varrho = \frac{m}{\mu} NE \quad (3.16)$$

代入数据, 解得  $\varrho = 1.2 \times 10^{14} \text{J}$ .

**3.7**

此题情景属于典型的圆柱形电容器. 利用以前的结论直接写出场区的点位移矢量, 能量密度和电场总能量

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} \quad (3.17), \quad \omega = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 l^2 \epsilon} \quad (3.18), \quad A = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 l^2 \epsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz = \frac{Q^2}{4\pi l \epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (3.19)$$

该型电容器的电容可直接利用公式得到. 直接代入即可证明待证明的关系.

**3.8**

本题与上一题的情景完全相同. 要证明该命题, 只需改变体积分的积分区间即可:

$$A' = \int_a^{\sqrt{ab}} \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 l^2 \epsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz = \frac{Q^2}{8\pi l \epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (3.20)$$

与 3.7 题比较. 容易得到  $A = 2A'$ , 即证明了圆柱形电容器所储存的能量有一半是在半径  $\sqrt{ab}$  内的命题.

**3.9**

本题限定导体电荷线密度将导致讨论无意义. 实际上, 若记内导体圆柱电荷面密度  $\sigma$  恒定, 则可以作出较好的解析.

圆柱形电容器两极面之间的电势差可由公式得到. 为保证选取的  $R_1$  合适, 对其求偏并令其偏导为零.

$$U = \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (3.21), \quad \frac{\partial U}{\partial R_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[ \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right] = 0 \quad (3.22)$$

不难判断  $R_2 = eR_1$  的时候电容器两导体的电势差达到最大. 电容器的储能可参考 3.7 题. 作类似的处理, 即

$$W = \frac{\pi l R_1^2 \sigma^2}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (3.23), \quad \frac{\partial W}{\partial R_1} = \frac{\pi l R_1 \sigma^2}{\epsilon_0} \left[ 2 \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right] = 0 \quad (3.24)$$

不难判断  $R_2 = \sqrt{e}R_1$  的时候电容器储能达到最大. 另一方面, 为了保证电容器不被击穿, 其内部圆柱表面处的电荷密度有限, 且其大小由  $\sigma = E_b \epsilon_0$  给出. 将此处得到的结论带回前式, 并代入数据, 可得两种情况下分别有

$$U_1 = \frac{R_2 E_b}{e}, \quad U_2 = \frac{R_2 E_b}{\sqrt{e}} \quad (3.25)$$

代入数据, 可求得两种方案下电容器的极大电势差分别为  $1.1 \times 10^4 \text{V}$  和  $9.1 \times 10^3 \text{V}$ .

**3.10**

援引 3.4 题的结果. 两球壳各自的自能

$$A_1 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}, \quad A_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \quad (3.26)$$

而在计算互能时, 需要分别考虑一个对象在另一个对象处产生的电势. 具体来说,

$$A_* = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} (-Q) + \frac{1}{2} \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} Q = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R_2} \quad (3.27)$$



系统的总能量自然为两球壳各自的自能与两者的互能之和, 或

$$A = A_1 + A_2 + A_* = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (3.28)$$

#### 第四章

##### 4.1

在距转轴距离为  $r$  的点附近取一沿线速度方向的小圆柱体. 其底面积为  $dA$ , 而高为  $rd\theta$ .

在该体积内的所有电荷将在  $dt$  事件内流过截面  $dA$ . 则依定义, 可写

$$j = \frac{dq}{dt dA} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{rdS d\theta}{dS dt} = \frac{3Q\omega}{4\pi R^3} r \quad (4.1)$$

##### 4.2

设电子的宏观漂移速度为  $u$ , 则在  $dt$  时间内高为  $udt$  底面积为  $S$  的圆柱体内所有电子将流过  $S$ . 依题意, 每个铝原子有三个电子参与导电, 这样便可以间接通过铝的摩尔质量和密度  $\Omega$  得到电子的数密度, 即

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Sudt \Omega}{dt \mu} N \cdot 3e, u = \frac{I\mu}{3S\Omega N e} \quad (4.2)$$

代入数据, 求得  $u = 1.7 \times 10^{-7} \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . 电子热力学参量的推导过程可参考相关的热力学文献, 此处不再赘述而直接给出结论.

在计算平均自由程时需要用到电子热力学运动的平均速率, 此处直接以方均根速率代之. 有

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (4.3), \bar{\lambda} = \frac{2mnv}{\rho e^2} = \frac{2m\mu v}{3N\Omega\rho e^2} \quad (4.4), \tau = \frac{\bar{\lambda}}{v} = \frac{2m}{\rho e^2} \frac{\mu}{3N\Omega} \quad (4.5)$$

代入数据, 可求得方均根速率  $v = 1.2 \times 10^5 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 平均自由程  $\bar{\lambda} = 1.6 \times 10^{-9} \text{m}$  以及碰撞间隔  $\tau = 1.4 \times 10^{-14} \text{s}$ .

而电场强度与电流密度之间满足  $E = j\rho$ . 其中电流密度容易从电流强度得到. 代入数据, 求得  $E = 1.4 \times 10^{-4} \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

##### 4.3

将该圆台状导线视为若干电阻的串联. 由于导线在某处的截面积是该处到导线左端点的距离的线性函数, 则两者的关系容易得到. 处在  $x \sim x + dx$  处的电阻可当作高为  $dx$ , 半径为  $r$  的圆柱体. 这样, 每小段的电阻

$$R_* = \frac{dx}{\pi r^2 \sigma}, \text{ 其中 } r = a + \frac{x}{l}(b-a) \quad (4.6)$$

而按照前文的分析, 圆台状导线可作为上述小段电阻的串联, 不难通过数学处理得到

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\pi r^2 \sigma} \frac{l}{b-a} = \frac{l}{ab\pi\sigma} \quad (4.7)$$

##### 4.4

为计算等效电阻, 先在左右两节点处加上一电压.

将诸电阻上的电压和电流分别记为列向量  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{I}$ , 而诸电阻记为准对角矩阵  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, R_3, R_4, r)$ .

不妨先设上端节点的电势高于下端. 在上下两节点处应用基尔霍夫第一定律, 得到  $\mathbf{BI} = \mathbf{0}$ , 而电阻约束  $\mathbf{U} = \mathbf{IR}$ .

分别取电阻 1-r-3 及 2-4-r 所在回路应用基尔霍夫第二定律, 得到方程  $\mathbf{DU} = \mathbf{0}$ . 联立以上诸式, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{DR} \end{bmatrix} \mathbf{I} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & r \\ 0 & -R_2 & 0 & R_4 & R_5 \end{bmatrix} \mathbf{I} \quad (4.8). \text{ 解得 } \mathbf{I} = \eta \begin{bmatrix} r(R_3 + R_4) + (R_2 + R_4)R_3 \\ r(R_3 + R_4) + (R_1 + R_3)R_4 \\ r(R_1 + R_2) + (R_2 + R_4)R_1 \\ r(R_1 + R_2) + (R_1 + R_3)R_2 \\ R_2R_3 - R_1R_4 \end{bmatrix} \quad (4.9).$$

设该网格电路的等效电阻为  $R_0$ , 则自然有  $I_1R_1 + I_2R_2 = R_0(I_1 + I_3)$  (4.10).

结合上述方程的解, 可写出该网格电路的等效电阻

$$R_0 = \frac{I_1R_1 + I_2R_2}{I_1 + I_3} = \frac{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)r + (R_1 + R_2)R_3R_4 + (R_3 + R_4)R_1R_2}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} \quad (4.11)$$

##### 4.5

分析该情景的拓扑学结构, 发现这个空腔球体可视为若干个长为  $dr$ , 截面积为  $4\pi r^2$  的电阻的串联. 则直接有

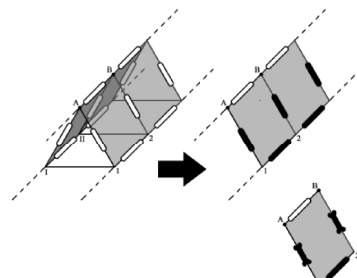
$$R = \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2 \sigma} = \frac{b-a}{4\pi ab\sigma} \quad (4.12)$$

##### 4.6

先将整个网格电路关于中轴折叠, 如右图所示. 由对称性可知图中 I-1 和 II-2 处等势, 则可以用导线将两点连接起来. 这样电路中出现了多对成简单并联关系的电阻, 并可以直接化为图中箭头所指的电路, 其中黑色电阻的阻值为  $r$  的一半, 记为  $r'$ .

设以 A-1 为节点的单向网格电路的阻值为  $r_*$ . 而由网格无限延伸的条件可得

$$\frac{1}{r_* + r' + r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{r_*} \quad (4.13)$$



经过上述化简处理后, 电路变为简单的有限网络. 如右图所示. 这样  $AB$  之间的等效电阻  $R$  应满足

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2r_* + r'} = \frac{1}{R} \quad (4.14). \text{ 联立以上诸方程, 可解得 } R = \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{21}} \right] r \quad (4.15).$$

#### 4.7

根据惠斯通电桥的特点, 知检流计的示数为零仅当接地点到检流计两端点的阻值相等. 具体来说, 有

$$(2d - x) \cdot 6\Omega \cdot \text{km}^{-1} = r + x \cdot 6\Omega \cdot \text{km}^{-1} \quad (4.16)$$

解得  $x = 20\text{km}$ . 即接地点到甲站的距离为  $20\text{km}$ .

#### 4.8

分析该电池的拓扑学结构, 发现这个电池的介质区可视为若干个截面积为  $2\pi rl$ , 长度为  $dr$  的电阻的串联. 而双同轴圆筒的电容可以直接利用公式计算. 具体来说, 有

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi rl} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a} \quad (4.17), \quad C = 2\pi\epsilon l \ln^{-1} \frac{b}{a} \quad (4.18)$$

电阻与电容之间的关系很容易得到. 即  $RC = \epsilon$  (4.19).

#### 4.9

取逆时针为正方向. 记  $E_3$ -3-2-4 路的电流为  $I_1$ , 以及 2- $E_2$ -1- $E_1$  路的电流为  $I_2$ , 应用基尔霍夫第二定律.

$$E_3 - R_3 I_1 - R_2 (I_1 - I_2) - R_4 I_1 = 0, \quad E_2 - R_1 I_2 - E_1 - R_2 (I_2 - I_1) = 0 \quad (4.20)$$

解得  $I_2 = -0.86\text{A}$ ,  $I_1 = 0.29\text{A}$ . 则通过  $R_2$  的电流  $I_1 - I_2 = 1.14\text{A}$ , 以及  $R_4$  上的电压  $I_1 R_4 = 1.71\text{V}$ .

#### 4.10

取顺时针为正方向. 记 1-2- $E_2$ - $E_1$  路的电流为  $I_1$ , 以及 2- $E_3$ -3- $E_2$  路的电流为  $I_2$ , 应用基尔霍夫第二定律.

$$E_1 - R_1 I_1 - R_2 (I_1 - I_2) - E_2 = 0, \quad E_3 - R_3 I_2 + E_2 - R_2 (I_2 - I_1) = 0 \quad (4.21)$$

解得  $I_1 = 1.58\text{A}$ ,  $I_2 = 2.02\text{A}$ . 则  $ab$  之间的电势差为  $I_1 R_1 - E_1 = -0.63\text{V}$ .

#### 4.11

该电路中实际上只存在一个回路. 以逆时针为正方向并设电流强度为  $I$ . 则由基尔霍夫第二定律, 有

$$I(R_1 + R_3 + R_4 + R_5 + r_1 + r_3) = E_1 - E_3 \quad (4.22)$$

可解得  $I = 0.4\text{A}$ . 而  $ab$  两点之间的电势差

$$U = -IR_3 - E_3 - Ir_3 - IR_4 + E_2 \quad (4.23)$$

代入数据得到  $U = 0$ . 由于这两点等势, 则在其间添加导线将不会影响电路中的电流分布. 电流仍为  $I = 0.4\text{A}$ .

#### 4.12

设通过  $R_i$  的电流为  $I_i$ . 以逆时针为正方向. 选取  $E_1$ -1- $E_2$ ,  $E_2$ -3- $E_3$  以及  $E_1$ -2- $E_3$  三个回路应用基尔霍夫第二定律, 有

$$E_1 - I_1 R_1 - E_2 = 0, \quad E_2 - I_3 R_3 - E_3 = 0, \quad E_1 - I_2 R_2 - E_3 = 0 \quad (4.24)$$

解得  $I_1 = 3\text{A}$ ,  $I_2 = 7\text{A}$  以及  $I_3 = 0.8\text{A}$ .

#### 4.13

此处可直接借用 4.8 题的结论. 即认为

$$C = \frac{\epsilon}{R\sigma} \quad (4.25)$$

代入数据, 解得这两个导体之间的电容  $C = 7.08 \times 10^{-11}\text{F}$ .

### 第五章

#### 5.1

取质子的质量  $m = 1.67262 \times 10^{-27}\text{kg}$ . 依题意, 该质子的能量全为动能.

由于质子的速度与磁感应强度垂直, 则其所受洛伦兹力的大小可直接写为

$$F = qvB = eB\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (5.1)$$

代入数据, 解得  $F = 7.4 \times 10^{-12}\text{N}$ .

#### 5.3

注意到部分导线段的延长线穿过  $P$  点, 以至于它们对该点磁感应强度的没有贡献.

只需考虑中间一段长为  $l$  的导线产生的磁感应强度. 对毕奥-萨法尔定律进行一定的数学处理, 得到

$$B = \int_{\Omega} \frac{\mu_0 I \cos \theta d\theta}{4\pi b} \text{ where } \Omega = \left[ -\arctan \frac{a}{b}, \arctan \frac{l-a}{b} \right] \quad (5.2).$$

可解得  $P$  点的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0}{4b\pi} \left[ \frac{l-a}{\sqrt{(l-a)^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] f \quad (5.3)$$

利用右手螺旋定则, 可判断该磁感应强度方向为垂直纸面向内.

## 5.4

选定垂直纸面向外为正方向. 直接利用毕奥-萨伐尔定律:

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{R} - \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{2R} = \frac{\mu_0 I}{8R} \quad (5.4)$$

## 5.5

援引例题 5.2 题的结论, 可以得到地球中心小环流在其轴线上  $r$  处的磁感应强度:

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}, \text{ 解得 } m = \frac{2\pi B r^3}{\mu_0} \quad (5.5)$$

代入数据, 可解得假想小环流的磁矩  $m = 8.64 \times 10^{22} \text{ m}^2 \cdot \text{A}$ .

## 5.7

认为诸匝导线中通过的电流平均分布在螺线管的表面上. 面电流密度  $j = In$ . 记螺线管的半轴长为  $l$ , 则其半径为  $4l$ .

例题 5.2 的讨论给出了载流线圈在其轴线上任意给定位置的磁感应强度. 直接套用该结论, 得到:

$$B_c = \int_{-l}^l \frac{\mu_0 (4l)^2 n I dz}{2[(4l)^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I n}{\sqrt{17}} \quad (5.6); \quad B_s = \int_0^{2l} \frac{\mu_0 (4l)^2 n I dz}{2[(4l)^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I n}{2\sqrt{5}} \quad (5.7)$$

代入数据, 可解得螺线管中心处的磁感应强度  $B_c = 6.1 \times 10^{-4} \text{ T}$ , 而一端中心处  $B_s = 5.6 \times 10^{-4} \text{ T}$ .

## 5.8

认为薄板上的电流强度平摊在整个板面上, 且面电荷密度  $j$  满足  $2aj = I$ . 做这样的处理之后, 可以认为  $P$  点处的磁感应强度为若干根无限长直导线的贡献之和. 对称性分析表明  $P$  点处的磁感应强度只可能沿  $x$  轴方向. 则

$$B = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 j du}{2\pi\sqrt{u^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{u^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \arctan \frac{u}{x} \Big|_{-a}^a = \frac{\mu_0 I}{2a\pi} \arctan \frac{a}{x} \quad (5.8)$$

## 5.10

内外两导体的中均有相同的电流密度, 则简单的数学运算即可得到半径为  $r$  的圆内的电流强度.

再利用环路定理即可求得对应区域内的磁感应强度. 易知电缆外空间的磁感应强度为零, 而

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} (r < a); \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (a < r < b); \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} (b < r < c) \quad (5.9)$$

## 5.11

假想在空心部分上同时通过正向和反向的电流, 其密度  $j$  满足  $j\pi(R_1^2 - R_2^2) = I$  以保证电流平均分布.

这样, 此空心导体管可视为两根无限长导体管的叠加. 其中, 只有小的导体管在圆柱轴线上有磁感应强度的贡献:

$$B_1 = \frac{\mu_0 j \pi R_2^2}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \quad (5.10)$$

而类似地, 计算空心部分轴线上的磁感应强度值只需考虑大导体管的作用, 即

$$B_2 = \frac{\mu_0 j \pi a^2}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{R_1^2 - R_2^2} \quad (5.11)$$

代入数据, 可求得圆柱轴线上的磁感应强度  $B_1 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ T}$ , 空心部分轴线处的磁感应强度  $B_2 = 2.0 \times 10^{-4} \text{ T}$ .

## 5.12

援引例题 5.7 的结论, 可直接得到无限大载流平板在其周围产生的磁感应强度  $B = \mu_0 I/2$  (5.12), 且其方向可由右手螺旋定则得到. 利用磁感应强度叠加原理, 可以判断在两块区域内磁感应强度相互叠加, 而在另两个区域内相互抵消. 数学地, 可写

$$\mathbf{B} = 0 \quad (yz > 0); \quad \mu_0 i \text{sgn}(z) \hat{\mathbf{e}} \quad (yz < 0) \quad (5.13)$$

其中  $\hat{\mathbf{e}}$  是指向  $x$  正方向的单位向量.

## 5.13

选取一以螺绕环心为圆心, 以  $r$  ( $d_1 < 2r < d_2$ ) 为半径并被螺绕环包围的圆. 不难判断穿过该圆的总电流强度为  $NI$ .

应用安培环路定理, 可求得环内磁感应强度及通过截面的磁通量

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\mathbf{e}} \quad (5.14), \quad \Phi = \int_{d_1/2}^{d_2/2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1} \quad (5.15)$$

**5.14**

质子与电子之间的相互作用力由库仑定理给出, 而中子星磁场对电子的作用即洛仑兹力:

$$F_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{N} \quad (5.16), \quad F_L = evB = 3.5 \times 10^{-5} \text{N} \quad (5.17)$$

作比可得  $F_L : F_C \approx 430p$ . 即磁力作用约为电力作用的 400 余倍.

**5.15**

不难判断磁场强度必定与  $y$  轴平行. 电子在  $xOz$  平面上投影的轨迹作线速度为  $v_0$  的匀速圆周运动, 且其向心力由洛仑兹力提供; 另一方面, 电子在  $y$  方向上作匀速直线运动, 则其速度  $v$  为一定值. 依两运动的规律, 应有

$$ev_0 B = mv_0 \frac{2\pi}{T} \quad (5.18), \quad v_0 T = 2\pi \quad (5.19), \quad v_y T = h \quad (5.20)$$

而电子的速度  $v$  为两分速度的合成:

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2 \quad (5.21). \quad \text{解得 } v = \frac{eB}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \quad (5.22)$$

代入数据, 解得  $v = 7.6 \times 10^6 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . 注意到电子带负电. 由右手螺旋定则可以判断磁感应强度之方向为  $y$  正方向.

**5.16**

本题并没有指出电势孰高孰低, 半导体的种类无法判断. 设载流子的浓度为  $\rho$ . 当载流子流过磁场区时, 将会受到洛仑兹力作用而向  $y$  负方向漂移以在两侧形成电势差, 该电势差在板中形成电场对载流子有负反馈作用. 当电势差积累到一定程度即洛仑兹力和电场力抵消时便不再积累而达到稳态. 由以上分析, 可得到力学平衡方程

$$qvB = \frac{U}{b}q \quad (5.23), \quad \text{或 } v = \frac{U}{Bb} \quad (5.24)$$

结合电流的微观定义  $I = \rho eabv$  (5.25), 可求得载流子浓度

$$\rho = \frac{IB}{eaU} = 2.9 \times 10^{20} \text{m}^{-3} \quad (5.26)$$

**5.17**

本题中的磁场随均匀分布但会随时间发生变化, 其产生的涡旋电场将对粒子做功. 考虑半径为  $r$  的圆, 有

$$U = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi r E \quad (5.27), \quad dv = \frac{Ee}{m} dt \quad (5.28)$$

消去  $dt$  和  $r$ . 将得到的式子关于整个变化过程积分, 可得到

$$\frac{1}{2} \ln \frac{B}{B_0} = \ln \frac{v}{v_0} \quad (5.29). \quad \text{以及 } v = v_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}} \quad (5.30), \quad r = \frac{mv_0}{e} \sqrt{\frac{1}{BB_0}} \quad (5.31)$$

**5.18**

由  $R_m \sin^2 \theta = 1$  (5.32) 可解出最大偏角  $30^\circ$ . 在粒子源发出的粒子中, 只有处于两侧  $30^\circ$  角度之内粒子会被捕获. 若视上述粒子构成一球体, 则所有被反射回来的粒子构成双锥. 这样, 从磁镜中逃逸的粒子所占比例即为上述双锥占球体的体积. 即

$$\omega = \frac{2}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.33)$$

**第六章****6.1**

记电流流向与向量  $t\hat{d} = (-1, 4, 3)$  平行, 则导线段矢对应记为  $l\hat{t}$ . 磁场作用于导线上的总力

$$\mathbf{F} = l\hat{t} \times \mathbf{B} = \frac{lI}{\|\hat{t}\|} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{26}}{260} (29, 11, -5) \text{N} \quad (6.1)$$

**6.2**

顺时针为诸段电流元编号为  $I_k \mathbf{l}_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). 其中电流均取从左向右为正方向, 向量按顺时针取向.

注意到检流计所在支路与磁感应强度方向平行, 故该路不受安培力作用. 电桥上的静力为以上诸段导线所受安培力之和.

利用  $I_2 + I_3 = I_1 + I_4 = I$  (6.2) 化简上式, 并舍去其中与磁感应强度平行的电流元分量. 整理可得

$$\mathbf{F} = \sqrt{2} a I B \hat{\mathbf{e}} \quad (6.3)$$

其中  $\hat{\mathbf{e}}$  是垂直指向纸面外的单位向量. 可以看到, 此处得到的结论与电桥是否平衡无关.

**6.3**

圆形回路上一电流元  $R I d\theta \hat{\theta} l$  所受的安培力作用  $\mathbf{F} = R I d\theta \hat{\theta} \times \mathbf{B} = R I B d\theta \hat{\mathbf{r}}$  (6.4). 记导线内部的张力为  $T$ , 则上述电流元在安培力和张力作用下达到平衡, 可从几何学上说明  $\mathbf{F} = T d\theta = R I B d\theta$  (6.5), 即  $T = R I B$  (6.6). 代入数据解得  $T = 0.35 \text{N}$ .

**6.4**

导线段在脱离水银槽后成为断路而做纯粹的上抛运动. 在脱离水银槽前, 导线因受安培力而满足

$$F = m \frac{dv}{dt} = Bl \frac{dq}{dt} \quad (6.7)$$

由于水银槽很浅, 则可以认为导线段在可以忽略的位移内加速至  $v_0$  并以该速度为初速度完成了以后的上抛运动. 由能量守恒条件, 应有  $v_0^2 = 2gh$  (6.8). 消去 (6.7) 两端的  $dt$ , 并对其两端关于整个上抛过程积分, 并联合 (6.7) 从而消去  $v_0$ , 得到

$$Q = \frac{m}{Bl} \sqrt{2gh} \quad (6.9)$$

代入数据, 解得通过导线的电量  $Q = 3.2C$ .

**6.5**

问题在于找到该木质圆柱受重力矩而平衡时的临界条件. 选取圆柱与斜面的切交线为轴线, 则重力与安培力相对于该轴线的力矩之和应该为零. 利用叉乘规则判断出诸力力矩的指向. 以正右方向为正方向, 通过几何操作建立力学平衡方程:

$$M = R(\sin \theta + \cos \theta)nBLI - R(\cos \theta - \sin \theta)nBLI - mgR \sin \theta \quad (6.10)$$

整理上式, 得到临界电流  $I$  所满足的条件  $mg = 2nBLI$  (6.11). 代入数据, 解得  $I = 2.5A$ .

**6.6**

建立极坐标系并考虑位于  $r$  处的一小面元  $rdrd\theta$ . 由于盘有转动速度, 该小面元上的电荷  $rdrd\theta\sigma$  将以  $r\omega$  的速度定向移动, 即应受沿转轴的洛仑兹力作用. 另选与磁感应强度方向垂直的直径为轴, 则上述洛仑兹力之力臂为  $r \cos \theta$ . 不妨先设圆盘沿顺时针方向转动, 这样, 小盘所受的合力矩

$$L = \int_{\Omega} B \cdot r dr d\theta \sigma \cdot r \omega \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) \cdot r \cos \theta = B\omega \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4 B \quad (6.12)$$

其中积分区域  $\Omega$  即为整个圆面.

**6.8**

$$\eta = \frac{kT}{m_B B} = \frac{4\pi m_e kT}{ehB} \quad (6.13)$$

代入数据, 求得  $\eta \approx 420$ . 即  $kT$  约为  $m_B B$  的 420 倍.

**6.9**

导线截面上有均匀的电流密度. 选取半径为  $r$  的圆, 则在导线内穿过该圆的电流强度是  $r$  的函数, 而其外为常值.

在该圆的周线上应用安培环路定理, 可以求出距轴  $r$  处的磁场强度:

$$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} (r < R_1); \frac{I}{2\pi r} (r > R_1) \quad (6.14)$$

在不同的介质中代入不同的磁导率, 可得到空间中各处的磁感应强度:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} (r < R_1); \frac{\mu I}{2\pi r} (R_1 < r < R_2); \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r > R_2) \quad (6.15)$$

利用定义计算介质内外表面的磁化面电流密度:

$$i'_i = \chi H_{R_1} = \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 R_1}; i'_o = -\chi H_{R_2} = \frac{(\mu_0 - \mu)I}{2\pi\mu_0 R_2} \quad (6.16)$$

**6.10**

由于小球半径之尺度比其与圆环的距离小很多, 则认为小球上任意位置有与球心处相同的磁场强度是合理的近似.

记  $\hat{e}_z$  是沿轴线的单位向量. 援引例题 5.2 的结论, 可写出题目中半径为  $R$  载流  $I$  的线圈在其轴线上  $l$  处产生的磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{IR^2}{2(R^2 + l^2)^{1.5}} \hat{e}_z \quad (6.17)$$

小球内所有分子小环流磁矩之和  $\boldsymbol{\mu} = \chi_m \mathbf{H} V$  (6.18). 这样, 线圈所产生的磁场在小球上的作用力

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mu_0 \mathbf{H} = \frac{m}{\rho} \chi_m \mu_0 \mathbf{H} \left( \frac{\partial H}{\partial l} \right) = -\frac{3m\mu_0 \chi_m I^2}{4\rho} \frac{R^4 l}{(R^2 + l^2)^4} \hat{e}_z \quad (6.19)$$

代入数据, 解得  $F = 1.09 \times 10^{-12} N$ . 该力由线圈指向小球, 即为斥力.

**6.11**

记螺绕环的周长为  $c$ . 沿该轴长应用安培环路定理得到  $cH = nI$  (6.20). 代入数据, 解得  $H = 2 \times 10^4 A \cdot m^{-1}$ .

而由磁介质性能方程  $B = \mu_0 \mu_r H$  (6.21) 得到相对磁导率  $\mu_r = 39.8$ , 则磁化率  $\chi_m = \mu_r - 1 = 38.8$  (6.22).

磁化强度  $M = \chi_m H = 7.8 \times 10^4 A \cdot m^{-1}$  (6.23), 而磁化面电流  $i = M = 7.8 \times 10^4 A \cdot m^{-1}$  (6.24).

**6.12**

选取半径为  $r$  ( $r < a$ ) 的圆应用安培环路定理, 可得到

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (6.25), B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (6.26) \text{ 以及 } i = \chi_m H|_{r=a} = \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 a} \quad (6.27)$$

**6.13**

约定以下所有带撇的物理量均用于描述软铁介质. 磁场强度的切向分量连续, 则有  $H \sin \theta = H' \sin \theta'$  (6.28);

而磁感应强度的法向分量在界面两端连续, 则有  $\mu_r H \cos \theta = \mu'_r H' \cos \theta'$  (6.29). 两式作比并整理, 得到

$$\theta = \arctan \left( \frac{\mu_r}{\mu'_r} \tan \theta' \right) \quad (6.30)$$

代入数据, 解得  $\theta = 0.096^\circ = 5'36.8''$ .

**6.17**

直接应用磁路定理

$$\frac{NI}{\Phi} = \frac{4l-d}{A\mu} + \frac{d}{A\mu_0} \quad (6.31), \text{ 解得 } B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu\mu_0 NI}{d(\mu - \mu_0) + 4\mu_0 l} \quad (6.32)$$

**6.18**

磁路的形状可任取, 但磁铁应有较好对称性以防止一系列计算的复杂化. 设铁芯轴长为  $c$ , 气隙的尺寸为  $d$ .

设磁铁的截面积处处为  $A$ , 截面周长处处为  $b$ . 若记铜导线之总长度为  $l$ , 截面积为  $S$ , 则由磁路定理, 得到

$$jS \frac{l}{b} = BA \left( \frac{d}{A\mu_0} + \frac{c-d}{A\mu} \right) \quad (6.33)$$

其中  $j$  是最大电流密度. 由于  $\mu \gg \mu_0$ , 故舍去上式中的第二项是较为合理的近似. 记所用铜的质量为  $m$ , 则有

$$m = \rho l S = \frac{bdB\rho}{j\mu_0} \quad (6.34). \text{ 代入数据, 解得所需铜的质量 } m = 382\text{kg}.$$

由于该体系中的磁能不存在转化问题, 所谓消耗的功率就是热功率. 由焦耳定律得到

$$P = j^2 \Omega \frac{m}{\rho} = \frac{B}{\mu_0} bd \Omega j \quad (6.35). \text{ 式中 } \Omega \text{ 为电阻率. 代入数据, 解得功率 } P = 9.5 \times 10^4 \text{W}.$$

为了计算空隙中两极之间的相互作用力, 须做一系列假设. 认为气隙中的磁场全部由磁荷产生. 这样, 两极面处的极化磁荷面密度  $\sigma = B$  (6.36). 注意到  $A \gg d^2$ , 可将两面上磁荷之间的相互作用近似为两无限大带磁荷平板之间的相互作用. 类比两带电极板之间的相互作用, 可写出两面之间的相互作用力

$$F = \frac{\sigma^2 A}{2\mu_0} \quad (6.37)$$

代入数据, 解得  $F = 8.0 \times 10^5 \text{N}$ .

**6.19**

忽略磁漏磁滞等一切可能提升计算复杂性的物理因素而直接应用磁路定理:

$$\frac{E_m}{\Phi} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \quad (6.38). \text{ 式中 } R_1 = \frac{3L}{\mu A}, R_2 = \frac{3L - L_g}{\mu A} + \frac{L_g}{\mu_0 A}, r = \frac{L}{\mu A} \quad (6.39)$$

气隙所在支路的磁通量为路端磁通与该支路磁阻的比. 则通过气隙的磁感应强度

$$B = \frac{E_m - \Phi r}{R_2 A} = \frac{3E_m \mu_0 \mu_r}{15L - 4L_g + 4L_g \mu_r} \quad (6.40).$$

代入数据解得  $B = 0.1 \text{T}$ .

**第七章****7.1**

利用右手螺旋定则可判断出感应电动势沿顺时针方向. 其大小  $\mathcal{E} = avB$  (7.1).

线圈所受力与线框速度反向. 取  $\mathbf{a}$  为指向左而长度为  $a$  的向量, 则可写  $\mathbf{F} = I \mathbf{a} \times \mathbf{B} = -a^2 v B^2 / R$ . (7.2)

由安培环路定理可得距导线  $r$  的点的磁感应强度大小  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ . 故线圈中的感应电动势大小

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{vt}^{vt+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = -\frac{\mu_0 I}{2t\pi} \frac{ab}{v+bt} \quad (7.3)$$

**7.2**

小磁体在其周围产生磁场: 相对于圆线圈中心位矢为  $\mathbf{r}$  处一点  $P$  的磁感应强度  $\mathbf{B} = (3\boldsymbol{\mu} \cdot \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu})\mu_0 / 4\pi r^3$  (7.4),

且  $P$  处相对于轴心的转动速度  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  (7.5). 题述导线段上的感应电动势可作为诸线圈段上电动势之和, 或

$$\mathcal{E} = \int_P^C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu\mu_0\omega}{4\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta = -\frac{\mu\mu_0\omega}{4\pi R} \quad (7.6)$$

负号指明电动势的方向从  $C$  指向  $P$ .

**7.3**

线圈上距转轴距矢为  $\mathbf{r}$  的点之转动速率  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . 磁场均匀. 则  $AC$  与  $BC$  段上有等大同向的电动势

$$\varepsilon = \int_l \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \omega B \sin\theta \cos 60^\circ \int_l l \sin 60^\circ dl = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 \omega B \sin\theta \quad (7.7)$$

式中  $\theta$  是线圈平面转过的角度. 顺时针为正方向. 由全电路欧姆定律得到  $Ri = 2\varepsilon$  (7.8). 则可解得

$$U_{BA} = \frac{1}{3}Ri = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\omega B \sin\theta; U_{AC} = U_{CB} = \varepsilon - \frac{1}{3}Ri = -\frac{\sqrt{3}}{24}a^2\omega B \sin\theta \quad (7.9)$$

## 7.4

此情形中四根辐条上均产生等大的电动势:

$$\mathcal{E} = \int_0^a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B\omega \int_0^a r dr = \frac{1}{2}Ba^2\omega \quad (7.10)$$

轮子可等价于电动势为  $E$ , 内电阻为  $r/4$  的电源. 则电路中有恒流  $I = 4\mathcal{E}/(r + 4R)$  (7.11), 故

$$P = I^2R = \frac{16\mathcal{E}^2R}{(r + 4R)^2} \leq \frac{\mathcal{E}^2}{r} = \frac{B^2a^4\omega^2}{4r} \quad (7.12)$$

其等号成立的条件为  $r = 4R$  (7.13).

## 7.5

闷罐车底面上将产生与其速度垂直的感应电动势  $\mathcal{E} = BLv = 2.6 \times 10^{-3}\text{V}$  (7.14).

注意到车壁上任意点元的电动势  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \equiv 0$ . 分析可知, 该车两墙壁均分别为等势面, 且电势差  $U = \mathcal{E}$ .

而车壁上积累的电荷会在车中产生电场  $E = vB = 1.0 \times 10^{-3}\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$  (7.15). 面电荷密度  $\sigma = \varepsilon_0 E = 9.1 \times 10^{-15}\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$  (7.16).

## 7.6

本题情景存在一维对称性. 选取半径为  $\rho$  的同心圆计算涡旋电场:

$$2\pi\rho\mathbf{E} = -\frac{dB_0}{dt}\pi\rho^2\hat{z} \quad (0 < \rho < R); 2\pi\rho\mathbf{E} = -\frac{dB_0}{dt}\pi R^2\hat{z} \quad (\rho > R) \quad (7.17)$$

而电流密度  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$  (7.18), 其中电场强度  $\mathbf{E}$  不难循上式得到. 盘上诸点处的功率密度  $p = \sigma E^2$  (7.19), 则盘耗散的总功率

$$P = \int_0^R \left(-\frac{dB_0}{dt}\frac{\rho}{2}\right)^2 \sigma \delta \cdot 2\pi\rho d\rho + \int_R^a \left(-\frac{dB_0}{dt}\frac{R^2}{2\rho}\right)^2 \sigma \delta \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi}{8}\delta\sigma R^4 \left(\frac{dB_0}{dt}\right)^2 \left(1 + 4\ln\frac{a}{R}\right) \quad (7.20)$$

## 7.8

循已有结论, 可得大线圈在其中心产生的磁场强度大小  $B = \mu_0 NI/2R$ . (7.21)

近似认为小线圈处的磁场均与大线圈中心处相等. 依题意该磁场随时间变化, 则小线圈上将产生感生电动势

$$\mathcal{E} = -n\frac{d}{dt}\frac{\mu_0 NI}{2R}S = -\frac{\mu_0 nNS}{2R}\frac{dI}{dt} \quad (7.22). \text{ 代入数据得 } \mathcal{E} = 94.2\text{V}.$$

而后, 电流强度不再是时间的函数. 记大线圈转过小线圈平面的角度为  $\omega t$ , 则

$$\mathcal{E} = -n\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 NI}{2R}S\cos\omega t\right) = \frac{\mu_0 nNIS\omega}{2R}\sin\omega t \quad (7.23).$$

代入数据得  $\mathcal{E} = 0.8\sin 210t\text{V}$ , 式中  $t$  单位取秒.

## 7.9

假想为线圈通入  $I$  的电流, 则全磁通  $\Psi = N\Phi = LI$  (7.24). 依 5.13 题的结论, 知通过线圈的横截面的磁通量

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R-a} \quad (7.25), \text{ 以及线圈的自感系数 } L = \frac{N}{I}\Phi = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R-a} \quad (7.26)$$

为长直导线中通入  $I$  的电流, 则由环路定理可求得距其  $r$  处的磁感应强度  $B = \mu_0 I/2\pi r$  (7.27). 则环形螺线管的全磁通

$$\Psi = N \int_{R-a}^{R+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 h NI}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R-a} = MI \quad (7.28); \text{ 解得互感系数 } M = \frac{\mu_0 h N}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R-a} \quad (7.29)$$

## 7.10

该圆形铁环磁势  $\mathcal{E} = NI$  (7.30). 忽略漏磁, 依磁路定理可得通过横截面的磁通量  $\Phi$  满足

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NI\mu_0\mu_r S}{2\pi r - d + d\mu_r} \quad (7.31). \text{ 则磁感应强度 } B = \frac{\Phi}{S} = \frac{NI\mu_0\mu_r}{2\pi r - d + d\mu_r} \quad (7.32).$$

代入数据得  $B = 0.80\text{T}$ .

全磁通  $\Psi = N\Phi = LI$  (7.33). 可以得到线圈的自感系数

$$L = \frac{N}{I}\Phi = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{2\pi r - d + d\mu_r} \quad (7.34).$$

代入数据解得  $L = 1.15\text{H}$ .

## 7.11

将整个元件视为由一组平行铜片和一螺线管并联而成. 向铜片中通入由  $A$  流向  $B$  的电流  $I$ , 则由安培环路定理不难说明该电流在螺线管元件内部和两近似无限大平面空间中产生处处等大的磁场  $B = \mu_0 I/l$  (7.35). 这样, 全磁通

$$\Psi = B(\pi R^2 + da) = \frac{\mu_0 I}{l}(\pi R^2 + da) = LI \quad (7.36). \text{ 得 } L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{l}(\pi R^2 + da) \quad (7.37).$$

另一方面, 螺线管部分的电容值显然为零, 而平行铜片可视为平行板电容器, 且利用公式可得其  $C = \varepsilon_0 al/d$  (7.38).

这样, 该构件的最低共振频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{(\pi R^2 + ad)a}}. \text{ 式中 } c \text{ 为光速. 代入数据, 解得 } \omega = 3.67 \times 10^9 \text{ Hz. (7.39)}$$

频率远小于共振频率时, 电感器由 (7.37) 给出. 代入数据得到  $L = 1.68 \times 10^{-8} \text{ H}$ .

### 7.12

向  $A$  线圈中通入  $I$  的电流, 则磁势  $\mathcal{E} = n_A I$  (7.40). 整个变压器的磁路如右图所示.

按定义可以计算出诸段磁导体的磁阻:

$$R = \frac{a}{\mu_0 \mu_r S}; R_A = \frac{b}{\mu_0 \mu_r S_A}; R_B = \frac{b}{\mu_0 \mu_r S_B}; R_C = \frac{b}{\mu_0 \mu_r S_C} \quad (7.41)$$

记干路磁通量为  $\Phi$ , 则由磁路定理可得

$$\frac{\mathcal{E}}{\Phi} = \frac{(R + R + R_C)R_B}{R + R + R_C + R_B} + R + R + R_A \quad (7.42)$$

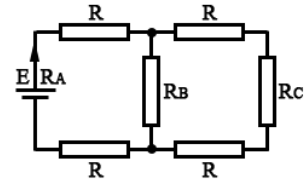
设通过  $B, C$  两路的总磁通分别为  $\Psi_B$  和  $\Psi_C$ . 则两者应满足

$$\Psi_B = n_B \frac{R + R + R_C}{R + R + R_C + R_B} \Phi = M_B I \quad (7.43), \text{ 以及 } \Psi_C = n_C \frac{R_B}{R + R + R_C + R_B} \Phi = M_C I \quad (7.44)$$

联立以上诸式整理并代入数据, 可解得

$$M_B = n_A n_B \mu_0 \mu_r \frac{2a S S_A S_B S_C + b S^2 S_A S_B}{(2a S_C + b S) b S_A S + (2a S_A + b S) (2a S_B S_C + b S S_C + b S S_B)} = 16.8 \text{ H} \quad (7.45)$$

$$M_C = n_A n_C \mu_0 \mu_r \frac{b S^2 S_A S_C}{(2a S_C + b S) b S_A S + (2a S_A + b S) (2a S_B S_C + b S S_C + b S S_B)} = 2.1 \text{ H} \quad (7.46)$$



### 7.13

记导线中的电流为  $I$ . 欧姆定理给出  $V = IR_e$  (7.47), 而磁路定理给出  $\mathcal{E} = NI = \Phi R_m$  (7.48). 其中

$$R_e = \frac{2\pi a \rho N}{\pi r^2} \quad (7.49), \quad R_m = \frac{2\pi b}{\mu_0 \pi a^2} + \frac{\omega}{\mu_0 \pi a^2} \quad (7.50)$$

气隙中的稳定磁场  $B$  满足  $B\pi a^2 = \Phi$  (7.51). 联立以上诸式可得

$$B = \frac{V r^2 \mu_0}{2a \rho (2\pi b \mu_0 + \omega \mu)} \quad (7.52)$$

稳态时认为磁能不泄漏, 从而消耗的功率即为导线的热功率  $P = V^2 R_e^{-1} = r^2 V^2 / 2a \rho N$  (7.53).

由线圈部分的全磁通  $\Psi = N\Phi = LI$  (7.54) 可求得铁圈的自感系数及电路的时间常数

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{2\pi b \mu_0 + \omega \mu} \quad (7.55); \quad \tau = \frac{L}{R_e} = \frac{\mu_0 a N \pi r^2}{4\pi b \mu_0 \rho + 2\omega \mu \rho} \quad (7.56)$$

### 7.15

向空心螺线管中通入电流  $I_0$ , 则其内诸位置将产生近似均匀磁场  $B = \mu_0 N I_0 / l$  (7.57).

全磁通  $\Psi_0 = NBS = L I_0$  (7.58). 解得  $lL = \mu_0 N^2 S$  (7.59). 代入数据, 得到  $L = 2.5 \times 10^{-4} \text{ H}$ .

副线圈的全磁通  $\Psi'_0 = N'BS = M I_0$  (7.60), 解得  $lM = \mu_0 N N' S$  (7.61). 代入数据, 得到  $M = 2.5 \times 10^{-5} \text{ H}$ .

若向副线圈中通过  $i$  的电流, 则主线圈与负载电阻构成典型的  $R$ - $L$  电路. 此时, 主线圈的

$$\text{全磁通 } \Psi = Mi \quad (7.62), \text{ 感应电流 } i' = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{M}{R} \frac{di}{dt} \quad (7.63)$$

改写 (7.63), 得到  $Rdq = -Mdi$ . 两边关于整个放电过程求积分, 得

$$Q = -\frac{M}{R} I. \text{ 其中 } I \text{ 为原稳恒电流强度. (7.64)}$$

代入数据, 解得流过电阻的电荷量  $Q = 2.5 \times 10^{-8} \text{ C}$ .

### 7.17

承已有结论, 可写出该回路的基尔霍夫方程及其充电电流随时间变化的函数:

$$iR + \frac{1}{C} \int idt = \mathcal{E} \quad (7.65). \text{ 解得 } i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ 以及 } q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (7.66)$$

电容器上电荷增加的速率即为电流  $i|_{t=1\text{s}} = 9.6 \times 10^{-7} \text{ A}$ . 而电容器上储存能量的速率

$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2C} = \frac{q}{C} i \quad (7.67).$$

代入数据, 解得  $P_C|_{t=1\text{s}} = 1.1 \times 10^{-6} \text{ W}$ . 由焦耳定律得电阻上产生的热功率  $P_R = i^2 R$  (7.68). 代入数据解得

$P_R|_{t=1\text{s}} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ W}$ . 电源提供的功率  $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}i$  (7.69). 易得  $P_{\mathcal{E}}|_{t=1\text{s}} = 3.8 \times 10^{-6} \text{ W}$ .



## 第八章

## 8.1

易得线圈电阻  $R = N\pi dR_0$  (8.1), 式中  $R_0$  为漆包线单位长度之阻值. 代入数据解得  $R = 7.8\Omega$ .

假想为线圈通入强度为  $I$  的电流, 则线圈内部将产生处处等大的磁场  $B$ . 而由全磁通  $\Psi = NBS = LI$  (8.2), 可得

$$L = \frac{N\pi d^2 \mu_0 N I}{4I} = \frac{\mu_0 \pi N^2 d^2}{4l} \quad (8.3)$$

代入数据得自感系数  $L = 9.9 \times 10^{-4} \text{H}$ .

该螺绕线圈与蓄电池所构成回路为典型的  $R$ - $L$  电路, 据此可写出电路的基尔霍夫方程

$$iR + L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} \quad (8.4) \text{ 及其解 } i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (8.5).$$

起始电流增长率由式 (8.4) 给出, 稳定电流  $I_0$  由式 (8.5) 给出

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0s} = \frac{\mathcal{E}}{L} = 2.0 \times 10^3 \text{A}\cdot\text{s}^{-1}. \quad i|_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.26 \text{A}.$$

时间常数  $\tau = L/R = 1.3 \times 10^{-4} \text{s}$ . 设  $t_h$  时刻电流达到稳定值的一半, 由 (8.5) 易得  $t_h = \tau \ln 2 = 9.0 \times 10^{-5} \text{s}$ .

电流稳定后线圈中所储存的磁能  $A = 0.5LI_0^2 = 3.3 \times 10^{-5} \text{J}$ . 磁能密度  $\omega = A/V = 4.2 \text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ .

## 8.2

利用磁场的环路定理, 易求得强度为  $B$  磁场只存在于两面空隙之中. 这样, 单位长度传输线中所具有的磁能

$$A = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} LI^2 \quad (8.6). \text{ 解得 } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (8.7)$$

若外圆柱的半径加倍, 可同理由式 (8.6) 得到末磁能

$$A' = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{2b}{a} \quad (8.8). \text{ 则应有 } \Delta = A' - A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln 2 \quad (8.9).$$

单位长度传输线中磁场所做的功  $W = \Delta$ .

电池提供的能量为上述两项能量之和:  $E = W + \Delta = 2\Delta$ . 其中  $\Delta$  由 (8.9) 给出.

## 8.3

令长直导线中通入强度为  $I$  的电流, 则周围空间中产生的磁场  $B = \mu_0 I / 2\pi r$  (8.10). 而线圈中全磁通

$$\Psi = \int_S B d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R \cos \theta \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + R \sin \theta)} R \cos \theta d\theta = \mu_0 I (\sqrt{d^2 - R^2} - d) = MI \quad (8.11)$$

由上式可求得两对象之间的互感  $M$ . 据此, 可得相互作用能

$$A = MI_1 I_2 = \mu_0 I_1 I_2 (\sqrt{d^2 - R^2} - d) \quad (8.12)$$

## 8.4

由于导体具有零电阻, 则磁偶极子向环移动时在环中激发的电流将不会衰减而一直累加.

设某一时刻磁偶极子  $m$  距环心距离为  $u$ , 则承已有结论可得到磁偶极子在圆环中心处产生的磁场大小

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi(b^2 + u^2)^{1.5}} \quad (8.13)$$

认为圆环内部诸位置均与环心有相同的磁感应强度, 则全磁通  $\Psi = B\pi b^2$  (8.14) 或  $d\Psi = \pi b^2 dB$  (8.15).

磁偶极子移动时, 有  $d\Psi = L di$  (8.16). 整理以上三式并对整个平移过程积分, 得到

$$I = \frac{\pi b^2}{L} (B_z - B_\infty) = \frac{b^2 \mu_0 m}{2L(b^2 + z^2)^{1.5}} \quad (8.17)$$

记终了位置处线圈的全磁通为  $\Psi_0$ . 相互作用能

$$A = -\Psi_0 I = -\frac{b^2 \mu_0^2 m^2}{4L(b^2 + z^2)^3} \quad (8.18)$$

式中取负号, 是因为通过右手螺旋定则判断出的磁偶极子在圆环上激发的电流方向与  $I$  相反.

## 8.5

实心圆柱体内有处处相等的电流密度  $i$ . 选取半径为  $r$  的圆应用安培环路定理.

由环路定理知该圆上处处磁场强度

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2a^2 \pi} (r < a); \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (a < r < b) \quad (8.19).$$

上述两区域外任意位置无磁场存在. 单位长度上的磁能  $A$ :

$$A = \int_0^a \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I r}{2a^2 \pi} \right)^2 2\pi r dr + \int_a^b \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} LI^2 \quad (8.20)$$

可解出单位长度的自感系数

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (8.21).$$

## 第九章

## 9.1

电感之阻抗  $Z_L = 2\pi\nu L$  (9.1). 分别将诸频率值代入, 得到感抗分别为  $3.1\text{k}\Omega$ ,  $3.8\text{k}\Omega$ ,  $38\text{k}\Omega$ .

而容抗  $Z_C = 1/2\pi\nu C$  (9.2). 代入数据, 得到容抗分别为  $0.32\text{k}\Omega$ ,  $0.27\text{k}\Omega$ ,  $27\Omega$ .

令由 (9.1) 与 (9.2) 给出的感抗  $Z_L$  与容抗  $Z_C$  均等于  $100\Omega$ , 并取  $\nu = 60\text{Hz}$ . 解得  $L = 0.27\text{H}$ ,  $C = 26.5\mu\text{F}$ .

## 9.2

自感线圈的感抗由 (9.1) 给出. 通过线圈的电流  $iZ_L = u$  (9.3). 代入数据得到  $Z_L = 10.0\Omega$  以及  $i = 22.0\text{A}$ .

电容的阻抗由 (9.2) 给出. 通过电容的电流  $iZ_C = u$  (9.4). 代入数据得到  $Z_C = 40.0\Omega$  以及  $i = 5.5\text{A}$ .

## 9.3

电路的复阻抗包括电阻抗, 电容阻抗和电感阻抗三部分. 其复阻抗  $\dot{Z}$  的表达式

$$\dot{Z} = R + j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \text{ where } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (9.5)$$

代入数据, 得到则该电路的阻抗  $\|Z\| = 51.4\Omega$ . 阻抗幅角  $\arg \dot{Z} = -0.68\text{rad}$ .

每个组件两端的电压峰值可由电流峰值与对应阻抗相乘得到:

$$\mathcal{E}_{mC} = \frac{1}{\omega C} \frac{V_m}{\|Z\|}; \mathcal{E}_{mL} = \omega L \frac{V_m}{\|Z\|}; \mathcal{E}_{mR} = R \frac{V_m}{\|Z\|} \quad (9.6)$$

代入数据, 得到电容, 电感和电阻上电压的峰值分别为  $1.42\text{V}$ ,  $0.61\text{V}$ ,  $0.78\text{V}$ .

## 9.4

将电感和电容均转化为对应的阻抗后, 此滤波电路即可以当作一般的阻抗电路看待.

为保证题述要求成立, 须使  $Z_C : Z_L = 1 : 9$ , 即  $\omega^2 LC = 9$  (9.7). 代入数据, 解得扼流圈的自感  $L = 2.3\text{H}$ .

## 9.5

本题的情形和数据与习题 9.3 完全一致. 直接借用得到功率因子  $\cos \arg \dot{Z} = 0.78$ .

记电路电流的最大值为  $I_m$ , 则应有  $ZI_m = \sqrt{2}V$  (9.8). 代入数据得到  $I_m = 2.8\text{A}$ . 功率损失

$$P = \frac{V^2}{Z} \cos \arg \dot{Z} = 151.8\text{W} \quad (9.9)$$

## 9.6

为保证本题中的讨论有意义, 取电容  $C = 2.0\mu\text{F}$ . 由式 (9.5) 可得阻抗分别为  $626\Omega$  和  $500\Omega$ , 共振角频率  $\omega_0 = 745\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

电源频率与共振频率相同时振幅达到极大. 这样, 电源频率在降至  $\omega_0 = 745\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  之前电源振幅增加, 随后减少.

令  $\omega = 500\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  并代入式 (9.5), 求得相位角  $\arg Z = -1.07\text{rad}$ .

共振频率  $\nu$  满足关系式  $2\pi\nu = \omega_0$  (9.10). 易得  $\nu = 118.6\text{Hz}$ . 共振时电流电压同相位, 功率因子  $\cos 0 = 1$ .

电阻大小与电路共振频率无关. 共振时, 电路中唯一有效阻抗为电阻. 这样, 电流有效值  $I = \sqrt{2}V/2R = 0.354\text{A}$  (9.11).

## 9.7

此并联谐振电路复阻抗的表达式

$$\dot{Z} = \frac{R\omega^2 L^2 + jR^2\omega L(1 - \omega^2/\omega_0^2)}{\omega^2 L^2 + R^2(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2} \text{ where } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (9.12)$$

代入数据, 解得共振角频率  $\omega_0 = 10^4\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . 再由 (9.10) 得到共振频率  $\nu = 1592\text{Hz}$ .

共振时, 由 (9.12) 得到总阻抗  $Z = R$ . 通过该电路的最大总电流  $I = V/Z = 1\text{A}$ . 此值也是共振时通过电阻的最大电流  $I_R$ .

将共振频率代入 (9.1) 可求得感抗  $Z_L = 1000\Omega$ , 则通过电感的最大电流  $I_L = V/Z_L = 0.1\text{A}$ .

实际上, 在共振频率下通过电感和电容的电流相互抵消. 以至于总电流中没有直接体现电感和电容的贡献.

共振时储存在电感和电容里的最大能量

$$E_L = \frac{1}{2}LI_L^2 \quad (9.13); \quad E_C = \frac{1}{2}CV_m^2 \quad (9.14)$$

代入数据, 求得电感中的最大能量  $E_L = 5 \times 10^{-4}\text{J}$ , 以及电容中的最大能量  $E_C = 5 \times 10^{-4}\text{J}$ .

## 9.8

线圈的匝数与其上的电压成正比关系, 即有

$$\frac{V}{N} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} = \frac{V_3}{N_3} = t \quad (9.15)$$

解得三个副线圈的匝数:  $N_1 = 5$ ,  $N_2 \approx 20$  以及  $N_3 = 1050$ .

理想变压器的输出功率与输入功率相等. 而总输出功率  $P = V_1I_1 + V_2I_2 + V_3I_3 = VI_0$ , 易求得  $I_0 = 0.13\text{A}$ .

**9.9**

类似于习题 9.8, 可写出

$$\frac{V_p}{N_p} = \frac{V}{N} = \frac{V_s}{N_s} = t \quad (9.16)$$

将题给数据代入, 容易解得主线圈的匝数  $N_p = 200$ , 副线圈的匝数  $N_s = 600$ .

**第十章****10.1**

场区中的总位移电流强度

$$I_d = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = C \frac{dU}{dt} \quad (10.1). \text{ 代入数据, 解得 } I_d = 2\text{mA}.$$

极板的电势差作为时间的函数:  $U_t = 1000\text{V}\cdot\text{s}^{-1} \cdot t$ . 漏电电流  $I_t = U_t/\Omega$ . 令其与  $I_d$  相等, 可解得  $t = 1.0\text{s}$ .

记  $R$  为电容器半径. 另取半径为  $r = 20\text{cm}$  的圆应用安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( j_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (10.2). \text{ 解得 } B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \left( \frac{U_t}{\Omega} + I_d \right) \quad (10.3)$$

分别令  $t = 0\text{s}, 1.0\text{s}, 2.0\text{s}$  代入 (10.3) 式, 可得极板之间的磁场强度分别为  $8.9 \times 10^{-10}\text{T}, 1.7 \times 10^{-9}\text{T}, 2.7 \times 10^{-9}\text{T}$ .

**10.2**

导线中的传导电流  $i = I_m \sin \omega t$ . 易求得导线截面上的电流密度  $j$  均匀, 而  $D = (\epsilon/\sigma)j$  (10.4) 沿电流方向.

这样, 位移电流大小可由麦克斯韦方程组得到:

$$I_d = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon}{\sigma} I_m \omega \cos \omega t \quad (10.5)$$

在上式中取传导电流的最大值与位移电流的最大值作比, 得到比例系数为  $\sigma/\epsilon\omega$ .

将铜导线的的数据代入, 求得两比值分别为  $2.1 \times 10^{16}, 3.5 \times 10^6$ .

**10.3**

平行板电容器内部有均匀的电位移矢量  $D = Q/\pi a^2$  (10.6).

注意到极板之间不存在传导电流, 则由安培环路定理可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.7)$$

选取半径为  $r$  的圆代入上式并化简, 得到

$$H = \frac{Q_0 \omega}{2\pi r} \cos \omega t (r < a); \frac{Q_0 \omega r}{2\pi a^2} \cos \omega t (r > a) \quad (10.8)$$

**10.4**

由于交界面上无自由电荷和传导电流, 则由介质界面连续条件, 可得

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2, \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2; H_1 \sin \varphi_1 = H_2 \sin \varphi_2, \mu_1 H_1 \cos \varphi_1 = \mu_1 H_2 \cos \varphi_2 \quad (10.9)$$

对应式作比并整理即可得到待证明式.

**10.5**

传播速度  $v = (\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r)^{-1/2} = 1.9 \times 10^8 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  (10.10). 波长  $\lambda = v/f = 38\text{mm}$  (10.11).

电场强度的振幅  $E$  与磁场强度的振幅  $H$  满足的关系式为  $\epsilon E^2 = \mu H^2$  (10.12). 代入数据, 求得  $H = 4.42\mu\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**10.6**

借用 10.5 题的结论, 可求得该处的磁场强度振幅  $H = 40\mu\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ .

波数  $k = 2\pi\nu/c = 1.7\text{m}^{-1}$  (10.13). 波长  $\lambda = 2\pi/k = 3.8\text{m}$  (10.14). 发射机的发射功率

$$P = \frac{\epsilon c E^2}{2} \cdot 4\pi R^2 = 38\text{kW} \quad (10.15)$$

**10.7**

沿电流流向建立柱坐标系. 记导线截面上的电流密度为  $j$ , 则应有  $\pi a^2 j = I$  (10.16). 由  $\mathbf{j}\rho = \mathbf{E}$  (10.17) 可得电场强度.

选取半径为  $r$  ( $r < a$ ) 的圆应用安培环路定理, 可得  $2\pi r H = \pi r^2 j$  (10.18). 显然电场强度方向为电流方向, 而利用右手螺旋定则可知磁场沿切向. 坡印廷矢量作为两者的叉积. 将以上的结论写在一起, 可得

$$\mathbf{E} = \frac{\rho I}{\pi a^2} \hat{z} \quad (10.19); \mathbf{H} = \frac{rI}{2\pi a^2} \hat{\theta} \quad (10.20); \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{I^2 r \rho}{2\pi^2 a^4} \hat{r} \quad (10.21)$$

单位体积内的能量耗散由焦耳定律给出. 则题述导体体积内能量的耗散率容易得到. 与以上坡印廷矢量比较, 有

$$P = \int \mathbf{l} \cdot \mathbf{S} = -2\pi r I S \quad (10.22)$$

**10.8**

对穿过以太阳为球心的球面而言, 辐射通量是一恒定量. 取太阳半径为  $r$ , 地日距离为  $d$ , 则应有

$$4\pi d^2 \bar{S} = 4\pi r^2 \bar{S}' = \Psi \quad (10.23)$$

代入数据即得到太阳表面处太阳辐射的平均强度的大小  $\bar{S}' = 62\text{MW}\cdot\text{m}^{-2}$ .

由能流密度与能量密度的关系  $\bar{S}' = \varepsilon c E^2 = \nu c H^2$  (10.24), 可导出太阳表面处电场强度和磁场强度有效值的表达式:

$$E = \left[ \frac{\bar{S}'}{\varepsilon c} \right]^{0.5} \quad (10.25); \quad H = \left[ \frac{\bar{S}'}{\nu c} \right]^{0.5} \quad (10.26)$$

代入数据, 可求得  $E = 153\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$  以及  $H = 406\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**10.9**

不妨先认为光完全被反射. 沿镜面取一截面积为  $A$ , 长度为  $ct$  的小柱.

考虑入射角度, 可知上述小体积中动量能射向镜面的有  $Actg \cos \theta$ , 而考虑镜面的有效接受面积只有  $A$  的  $\cos \theta$ . 故总动量变化

$$2Actg \cos^2 \theta = pAt \quad (10.27), \quad \text{解得 } p = \frac{2S}{c} \cos^2 \theta \quad (10.28)$$

若有部分入射光被吸收, 则总动量的变化

$$Actg \cos^2 \theta - [-Actg(1-a) \cos^2 \theta] = p'At \quad (10.29), \quad \text{解得 } p' = \frac{(2-a)S}{c} \cos^2 \theta \quad (10.30)$$

**10.10**

建立球坐标系. 令磁感应强度与  $\theta = 0$  平行以便于计算. 利用磁场的高斯定理, 不难求出球形电容器内各处的电位移矢量.

而对称性保证了总角动量只可能沿  $\theta = 0$  方向. 这样, 总角动量

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV = 2 \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q}{4\pi r^2} \sin^3 \theta \mathbf{B} r d\theta = \frac{Q(r_2^2 - r_1^2)}{3} \mathbf{B} \quad (10.31)$$

由角动量与转动速度的关系  $\mathbf{G} = I\boldsymbol{\omega}$  (10.32) 可推得球转动的角速度的表达式.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{Q(r_2^2 - r_1^2)}{3I} \mathbf{B} \quad (10.33)$$

利用右手螺旋定则可判断旋转的方向: 沿磁感应强度看去, 球沿逆时针转动.