数理逻辑直接证明思路

By Shu

2024.7.16

1. 基本思路

如果把人关在考场，不给参考资料，盯着一个公式使劲想直接证明，那大概率一天也做不出来，因为从 L 三条公理一步步推出复杂公式的跨度实在太大了。

但值得庆幸的是，数理逻辑基础课程是开卷考试，也就是说，我们可以在参考资料（见附录）获得许多二级结论的直接证明形式————诸如 HS、否定肯定律、双重否定律...... **在运用这些二级结论证明到我们想要的结果后，我们可以借用参考资料中这些结论的直接证明，将结论中的 p，q，r 替换为我们需要的形式，照着直接证明的步骤写一遍，这样就可以得到我们想要的二级结论的对应形式，进而辅助完成直接证明。**

示例：HS 版本二 $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$ 的直接证明如下:

1.	$p \to q$	已知
2.	$q \to r$	已知
3.	$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$	L1
4.	$p \to (q \to r)$	2,3,MP
5.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	L2
6.	$(p \to q) \to (p \to r)$	4,5,MP
7.	$p \to r$	1,6,MP

如果我们需要运用 HS 证明

$$\{(\neg p \to p) \to p, p \to (q \to p)\} \vdash (\neg p \to p) \to (q \to p)$$

我们只需要将 HS 直接证明中的 p 替换为 $\neg p \to p$，q 替换为 p，r 替换为 $q \to p$，照着上述直接证明重新写一遍，就得到了我们想要的

$$\{(\neg p \to p) \to p, p \to (q \to p)\} \vdash (\neg p \to p) \to (q \to p)$$

也就是说，在开卷的框架下，直接证明可以等价于“不能使用演绎定理、反证律、归谬律的间接证明”，也可以理解为在不改变结论形式的情况下，运用一切所学定律、公理进行证明。

于是乎，直接证明的难点变成了**如何根据题干假设和条公理，运用各种定律构造出所需式子**。一种思路是将要证明的式子从最外层开始拆成几项，观察项之间的联系（比如前件是否相同），和所学定律之间的联系，然后发掘关联推出证明。

在链接的两份学长资料中，共有以下几条定律的直接证明形式：

(1) HS 版本一:

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

(2) HS 版本二:

$$\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$$

(3) 双重否定律:

$$p \to \neg\neg p$$

(4) 第二双重否定律:

$$\neg\neg p \to p$$

(5) 同一律:

$$p \to p$$

(6) 否定肯定律:

$$(\neg p \to p) \to p$$

(7) 否定前件律:

$$\neg q \to (q \to p)$$

(8) 书上习题 3-3.4◦

$$\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$$

再加上 L 的三条公理:

(9) L1:

$$p \to (q \to p)$$

(9) L2:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

(10) L3:

$$(\neg p \to \neg q) \to (p \to q)$$

2. 构造方法

0.1 L1 使用

L1 可以用于引入前件。如果有 p 成立，而要证明的式子是 $q \to p$ 的形式（q 为任意前件），就可以引入 L1 进行构造:

(1) 假设

$$p$$

(2)L1

$$p \to (q \to p)$$

(1)(2)MP

$$q \to p$$

0.2 L2 使用

可以发现，L2 涉及 3 个变量 $p \to (q \to r)$, $p \to q$, $p \to r$，且三个变量享有相同前件 p, 所以观察要证明式子中多项含相同前件时可以使用 L2“合并前件”。

示例：

（2024 春）直接证明：

$$\vdash (p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$$

答：

我们先观察式子结构，将 $(p \to q)$ 看成 P , $(p \to (q \to r))$ 看成 Q , $(p \to r)$ 看成 R , 那么式子最外层的结构就是 $P \to (Q \to R)$。再看 P,Q,R 之间的关系，可以发现 P,Q,R 都享有相同的前件 p, 而 L2 就是拥有相同前件的式子，观察其与 L2 的关系，可以发现 L2 就是 $Q \to (P \to R)$。

也就是说我们可以从 L2 入手，证明 $\{Q \to (P \to R)\} \vdash P \to (Q \to R)$。这和资料中的 (8) 式形式一致。所以我们将 P,Q,R 替换为原来的式子，带入 (8) 式的直接证明中，即可完成证明。

0.3 L3 使用

在要证明式子中有 ¬ 时，可能会用到 L3，这时可能会有一些难度。

3. 例题

（2023 春）直接证明：

$$\vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$$

答：

这个式子和公式 (8) 很像，区别在于这题把 $(p \to (q \to r))$ 作为结论的前件，公式 (8) 把 $(p \to (q \to r))$ 作为已知假设。

所以我们仿照公式 (8) 的证明即可。

(1) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(2) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)

(3) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)

(4) $q \to (p \to q)$ (L1)

(5) ~~(1)(2) HS~~, $(p \to (q \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (1)(2) HS

(6) $\underbrace{(p \to (q \to r))}_{P} \to ((\underbrace{q \to (p \to q)}_{Q}) \to (\underbrace{q \to (p \to r)}_{R}))$ (3)(5) HS

书3-3.4°：

$(\{P \to (Q \to R)\} \vdash Q \to (P \to R))$

(7) 利用书例题 3-3.4°(即公式(8))，将上述式子变为

$\underbrace{(q \to (p \to q))}_{Q} \to ((\underbrace{p \to (q \to r)}_{P}) \to (\underbrace{q \to (p \to r)}_{R}))$

(8) $p \to (q \to r) \to (q \to (p \to r))$ (4)(7) MP.

上述过程中使用的 HS 和套用公式 (8) 的过程请用直接证明的形式严谨还原。

（2022 春）直接证明:

$$\vdash p \to ((p \to q) \to q)$$

答:

观察一共有三项 p,$p \to q$, q, 如果我们将 p 和 $p \to q$ 调换一下位置，即可得到

$$\vdash (p \to q) \to (p \to q)$$

由同一律上式可证。

所以一种证明方式是:

(1) 由同一律直接证明得到 $(p \to q) \to (p \to q)$

(2) 利用公式 (8) 的直接证明形式得到 $p \to ((p \to q) \to q)$。

三、直接证明:

16

(1) $(p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q))$ (L1)

(2) $((p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q)))\to(((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q)))$. (L2)

(3) $((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q))$ (1), (2), MP

(4) $(p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q))$ ~~(3), (4), MP~~ (L1)

(5) $(p\to q)\to(p\to q)$ (3), (4), MP.

~~(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to((p\to q)\to(p\to q)))$ (L1)~~

~~(7) $p\to((p\to q)\to(p\to q))$. (5), (6), MP~~

~~(8) $(p\to((p\to q)\to(p\to q)))\to$~~

(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$ (L2)

(7) $((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$ (5), (6), MP

(8) $(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))\to(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))$ (L1)

(9) $p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))$ (7), (8), MP

(10) $(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))\to((p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q)))$

(11) $(p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q))$ (9), (10), MP

(12) $p\to((p\to q)\to p)$ (L1)

(13) $p\to((p\to q)\to q)$ (11), (12), MP.

（2020 春期末）直接证明:

$$\vdash (\neg p \to p) \to (q \to p)$$

答:

观察一共有两项 $\neg p \to p$, $q \to p$, 前者也是否定肯定律的前件，我们不妨引入否定肯定律（公式 6），也就是有

$$(\neg p \to p) \to p$$

根据 HS，我们只要证到

$$p \to (q \to p)$$

即可证得

$$(\neg p \to p) \to (q \to p)$$

而要证的式子就是 L1 了。也就是说，先证到否定肯定律，再引入 L1，根据 HS 即可得证。

（2020 春期中）直接证明：

$$\vdash \neg\neg p \to p$$

答：

第二双重否定律, 即公式 (4) 的直接证明，资料中有。

（2018 春）直接证明：

$$\vdash p \to \neg\neg p$$

答：

双重否定律, 即公式 (3) 的直接证明，资料中有。

（2017 春）直接证明：

$$\{p \to (q \to r)\} \vdash (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$$

答：

观察右侧式子最外侧一共有两项 $((q \to p) \to q) \to (q \to p)$, $((q \to p) \to q) \to r$ 。

可以发现，这两项是由相同的前件的，不妨运用 L2，我们只需证到

$$((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)$$

即可证明到原式成立。

而上式中前后两项又有相同前件 $(q \to p) \to q)$ ，我们不妨再用 L2 合并前件，即证

$$(q \to p) \to (q \to r)$$

而上式中前后两项又有相同前件 q ，我们不妨再用 L2 合并前件，即证

$$q \to (p \to r)$$

上式可由公式 (8) 和题目中的已知假设得到，最后书写的时候反着书写即可。

- 直接证明

1) $p \to (q \to r)$ (已知)
2) $(((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)) \to (((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$ (L2)
3) $(((q \to p) \to (q \to r)) \to (((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r))$ (L2)
4) $(q \to (p \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r))$ (L2)
5) $q \to (p \to q)$ (L1)
6) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)
7) $(p \to q) \to (p \to r)$ (MP 1, 6)
8) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)
9) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (MP 7,8)
10) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)
11) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (MP 9, 10)
12) $q \to (p \to r)$ (MP 5, 11)
13) $(q \to p) \to (q \to r)$ (MP 12, 4)
14) $((q \to p) \to q) \to ((q \to p) \to r)$ (MP 13, 3)
15) $(((q \to p) \to q) \to (q \to p)) \to (((q \to p) \to q) \to r)$ (MP 14, 2)

参考链接:

评课社区链接, 这里有一位学长的 rar 分享包，在其中的"复习"文件夹中，有很多定理的直接证明形式。

***github* 链接**，这里是另一位学长总结的资料，含直接证明公式。

注：上述内容中可能有多处用语不符合数理逻辑用词规范。