中国科学技术大学

2020～2021 学年第二学期考试试卷

☑A 卷　　☐B 卷

课程名称：__热学 B__________ 课程代码：__PHYS1002B.11_____

开课院系：_物理学院_____ 考试形式：半开卷

姓　名：__________ 学　号：__________ 专　业：__________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

（装订线内不要答题）

注：共八道大题，请勿漏答。请在首页写上姓名和学号，并在每道题下方空白处答题，答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸，但不允许使用包括计算器在内的所有电子产品。

摩尔质量： 1 mol ^{12}C 原子的质量为 12 g；

理想气体方程 $PV=\nu RT=Nk_BT$

一般气体内能关系：

$$dU = C_V dT + \left(T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right)dV$$

范德瓦尔斯气体方程：

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

这里，V_m 为气体摩尔体积。

1.（12 分）已知一混合理想气体中几种主要成分体积比为：CO_2——60%，O_2——30%，H_2——10%，试求：

（1）该混合气体的平均摩尔质量；

（2）各组分的质量百分比；

（3）标准状态下各组分的分压强；

（4）标准状态下各组分的密度及混合气体的密度。

解：（1）对混合气体中第 i 种组分状态方程有

$$PV_i = \frac{M_i}{\mu_i}RT$$

对各组分求和可得

$$PV = \sum_i \frac{M_i}{\mu_i}RT = \frac{\sum_i M_i RT}{\sum_i \frac{V_i}{V}\mu_i} = \frac{MRT}{\sum_i \frac{V_i}{V}\mu_i}$$ （1 分）

与混合气体状态方程比较可得

$$PV = \frac{MRT}{\mu}$$

$$\mu = \sum_i \frac{V_i}{V}\mu_i = 36.2\left(\mathrm{g/mol}\right)$$ （1 分）

（2）由各组分气体状态方程和混合气体状态方程之比可得

$$\frac{M_i}{M} = \frac{V_i}{V}\cdot\frac{\mu_i}{\mu}$$

$$\frac{M_{CO_2}}{M} = 72.9\% \qquad \frac{M_{O_2}}{M} = 26.5\% \qquad \frac{M_{H_2}}{M} = 0.5\%$$ （3 分）

（3）由道尔顿分压定律

$$P_i V = \frac{M_i}{\mu_i}RT$$

$$P_i = \frac{V_i}{V}P$$

$$P_{CO_2} = 0.6\ \mathrm{atm} \qquad P_{O_2} = 0.3\ \mathrm{atm} \qquad P_{H_2} = 0.1\ \mathrm{atm}$$ （3 分）

（4）由理想气体状态方程变形可得

$$P_i V = \frac{M_i}{\mu_i}RT \Rightarrow \rho_i = \frac{M_i}{V} = \frac{P_i\mu_i}{RT}$$

$$\rho_{CO_2} = 1.175\ \mathrm{g/L} \quad \rho_{O_2} = 0.427\ \mathrm{g/L} \quad \rho_{H_2} = 0.009\ \mathrm{g/L}$$ （3 分）

$$\rho_{混合} = 1.611\ \mathrm{g/L}$$ （1 分）

2. （10 分）设理想气体的摩尔定容热容量 C_V 为常数，体积由 V_0 膨胀到 $4V_0$，膨胀过程中压强和体积满足 $PV^2 = C$(常数)，试求 1mol 理想气体在上述过程中：

（1）对外界做的功；

（2）内能的增量；

（3）熵的增量。

解：

（1）对外界做的功 $W = \int_{V_0}^{4V_0} PdV = \int_{V_0}^{4V_0} \frac{C}{V^2} dV = C(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{4V_0}) = \frac{3C}{4V_0}$ （3 分）

（2）理想气体状态方程 $PV = RT$，过程满足 $PV^2 = C$，联立两式得

$$T = \frac{C}{RV} \quad \Rightarrow \quad dT = -\frac{C}{RV^2} dV$$ （2 分）

因此内能的增量为

$$\Delta U = \int C_v dT = -\frac{CC_v}{R} \int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V^2} = \frac{CC_v}{R} (\frac{1}{4V_0} - \frac{1}{V_0}) = -\frac{3CC_v}{4RV_0}$$ （2 分）

（3）熵的增量为

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{C_v dT + pdV}{T} = R\int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V} - C_v \int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V} = (R - C_v) \ln 4$$ （3 分）

3.（10 分）一容器体积为 $2V$，隔板把它分成相等的两半。开始时，左边有压强为 p_0 的理想气体，右边为真空。在隔板上有一面积为 S 的小孔。求打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系。假定过程中左右两边温度相等且保持不变，设分子的平均速率为$\bar{v}$。

解：设小孔未打开时，左边容器内的分子数为 N_0，打开小孔 t 秒后，左边容器的分子数为 N，则此时右边容器内的分子数为 N_0-N。单位时间内撞击容器壁上单位面积的分子数为$\frac{1}{4}n\bar{v}$，在 t~t+dt 时间内从容器左边进入到右边的分子数为

$$\mathrm{dN_1} = \frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}Sdt \qquad \text{（1 分）}$$

从容器右边进入到左边的分子数为

$$\mathrm{dN_2} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{N_0}-N}{V}\bar{v}Sdt \qquad \text{（1 分）}$$

这样 dt 时间内容器左边分子数净减少为

$$-\mathrm{dN} = \mathrm{dN_1} - \mathrm{dN_2} = \frac{1}{4}\frac{2N-\mathrm{N_0}}{V}\bar{v}Sdt = \frac{1}{4}\frac{\bar{v}S}{kT}(2p-\mathrm{p_0})dt \qquad \text{（2 分）}$$

由 p=nkT，温度不变时，可得

$$\mathrm{dp} = \mathrm{kT}dn = \mathrm{kT}\frac{\mathrm{dN}}{V} = -\frac{\bar{v}S}{4V}(2p-\mathrm{p_0})dt \qquad \text{（3 分）}$$

上式整理，然后积分，可得

$$\mathrm{p} = \frac{p_0}{2}e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t} + \mathrm{C} \qquad \text{（2 分）}$$

当 t=0 时，$p=p_0$，可得

$$\mathrm{C} = \frac{p_0}{2}$$

因此打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系为

$$\mathrm{p} = \frac{p_0}{2}\left(e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t} + 1\right) \qquad \text{（1 分）}$$

4.（18 分）两个完全相同的物体，热容量都为 C，初始温度都为 T_i，如果有一个制冷机工作在这两个物体之间，使物体 1 的温度降低到 T_2，另一个物体 2 的温度升高 。

（1）至少要对制冷机做多少功?

（2）如果第（1）问中的功由ν mol 范德瓦尔斯气体的准静态等温膨胀过程提供，且该过程气体对外所做的功完全提供给制冷机，当气体由 V_i 膨胀至 V_f，计算该过程中需要保持气体的温度 T 为多少？（结果用范德瓦尔斯气体的 a,b 系数表示）

（3）在第（2）问的过程中，范德瓦尔斯气体前后的熵变是多少?

解：（1）暂时假设物体 2 的温度升高到 T_3，由题意知制冷机从物体 1 吸收的热量是：

$Q_2=C(T_i-T_2)$

释放到物体 2 中的热量为 $Q_1=C(T_3-T_i)$

制冷机需要做功 $W=Q_1-Q_2=C(T_3+T_2-2T_i)$ （2 分）

当制冷机可逆时，需要做功最少，对于整个系统而言是一个可逆孤立系统，则前后总熵变为 0。

另一方面，物体 1 温度降低，其熵变为：

$$\Delta S_1=\int_{T_i}^{T_2}\frac{CdT}{T}=C\ln\left(\frac{T_2}{T_i}\right)$$

物体 2 温度升高了，其熵变为：

$$\Delta S_2=\int_{T_i}^{T_3}\frac{CdT}{T}=C\ln\left(\frac{T_3}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_1+\Delta S_2=0\Rightarrow T_3=\frac{T_i^2}{T_2}$$ （2 分）

所以最小功应该等于$W_{min}=C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)$。 （2 分）

（2）由第（1）步的计算知该过程范德瓦尔斯气体需要对外做功：

$$W'=W_{min}=C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)。$$

外界需对范德瓦尔斯气体做功：$W=-W'=-C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)=-\int pdV$ （1 分）

而范德瓦尔斯气体

$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2}$ （1 分）

$$\Rightarrow W=-\int_{V_i}^{V_f}\left(\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2}\right)dV=-[\nu RT\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)-a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)]$$

$$\Rightarrow -C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)=-[\nu RT\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)-a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)]$$

$$T=\frac{a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)+C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)}{\nu R\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)}$$ （3 分）

（3）由熵的定义可知：

$dS=\frac{đQ}{T}=\frac{dU+pdV}{T}$ （1 分）

其中$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV+\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$

等温过程 dT=0，$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV=\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v-p\right]dV$ （1 分）

$\Rightarrow dS=\frac{dU+pdV}{T}=\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV}{T}=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$ （2 分）

代入范氏气体的压强$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2}$，

得：$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{\nu R}{V-\nu b}$ （1 分）

$$\Rightarrow dS=\frac{\nu R}{V-\nu b}dV$$

积分，得：$\Delta S=\int dS=\int_{V_i}^{V_f}\frac{\nu R}{V-\nu b}dV=\nu R\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)$ （2 分）

5. （1）（6 分）考虑温度足够高的情况，计算单原子分子和双原子分子理想气体的等压比热容 C_p 和等体比热容 C_v 的比值。

（2）（7 分）考虑温度为 T，质量为 m，数密度为 n，速度分布满足麦克斯韦分布，相互碰撞截面为σ的气体分子，求分子间平均碰撞率和平均自由程的表达式。

解：（1）根据能量均分定理，系统内能 U=(t+r+2v)kT/2。这里，t、r、v 分别为平动、转动和振动自由度。

对单原子分子，t=3，r=0, v=0, U=3kT/2 （1 分）

分子的等容摩尔热容为 $C_{V,m}=3\ N_A k_B/2=3R/2$，等压摩尔热容为 $C_P=C_V+R=5R/2$ （1 分）

$C_P/C_V=5/3$。（1 分）

对单原子分子，t=3，r=2, v=1, U=7kT/2 （1 分）

分子等容摩尔热容为 $C_{V,m}=7\ N_A k_B/2=7R/2$，等压摩尔热容为 $C_P=C_V+R=9R/2$ （1 分）

$C_P/C_V=9/7$ （1 分）

（2）设分子间平均运动速度为 v_{rms}，则其平均相对运动速度为 $2^{1/2}v_{rms}$

则在 t 时间内平均碰撞次数为：$N=2^{1/2}n\sigma v_{rms}t$

t 时间内的分子的平均运动路程为：$L= v_{rms}t$

所以，分子间的平均碰撞率为 $\Gamma=N/t=2^{1/2}n\sigma v_{rms}$ （3 分）

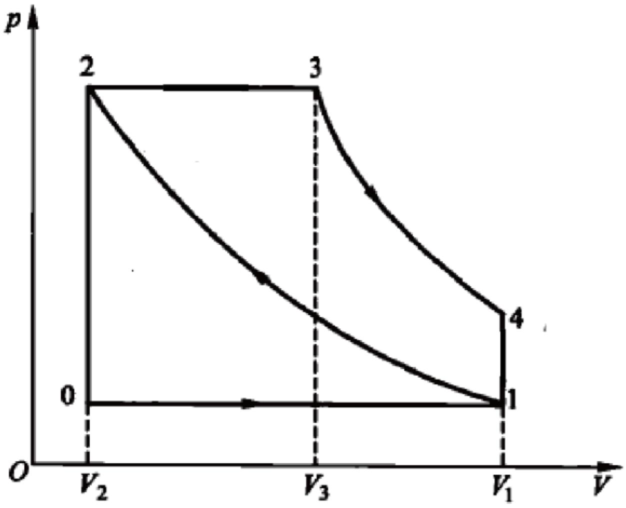
其中，

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

（2 分）

平均自由程 $\lambda=L/N=1/(2^{1/2}n\sigma)$ （2 分）

6. （12 分）如图示，狄赛尔循环由两个绝热过程（1-2，3-4）、一个等压过程（2-3）和一个等体过程（4-1）组成。设一理想气体的等压与等体热容比为 $C_p/C_V=\gamma$，基于此气体的狄赛尔循环的压缩比 $V_1/V_2=K$，$V_3/V_2=\rho$，求基于该气体狄赛尔循环的热机效率，结果用ρ 、K 和γ表示。



解：绝热过程系统与外界没有热量交换。

2-3 过程，气体压强不变，体积增加，温度增加，气体对外作功，同时吸收外部热量

$\Delta Q_1=\nu C_{P,m}(T_3-T_2)$ （1 分）

4-1 过程，气体压强减小，体积不变，温度减小，气体不对外作功，同时对外部放出热量ΔQ_2

$\Delta Q_2=\nu C_{V,m}(T_4-T_1)$ （1 分）

热机效率为$\eta=1-\Delta Q_2/\Delta Q_1=1-C_{V,m}(T_4-T_1)/C_{P,m}(T_3-T_2)=1-(T_4-T_1)/\gamma(T_3-T_2)$（2 分）

由绝热过程性质知 $T_1V_1^{(\gamma-1)}=T_2V_2^{(\gamma-1)}$，$T_3V_3^{(\gamma-1)}=T_4V_1^{(\gamma-1)}$

所以，有 $T_2/T_1=K^{(\gamma-1)}$，$T_3/T_4=(K/\rho)^{(\gamma-1)}$ （2 分）

再根据 2-3 的等压过程有：$T_3/T_2=\rho$，（2分）

综合可得：$\eta=1-(\rho^{\gamma}-1)/\gamma K^{\gamma-1}(\rho-1)$ （4分）

7. （10 分）考虑有速度梯度分布的层流运动，层与层之间的粘滞力 F 与粘滞系数η之间关系满足：

$$F = -\eta \left(\frac{du}{dz}\right)_{Z_0} \Delta S$$

其中，u 为层流速度，du/dz 为速度梯度，ΔS 为层之间的接触面积。请简述粘滞系数的实验测量方法。

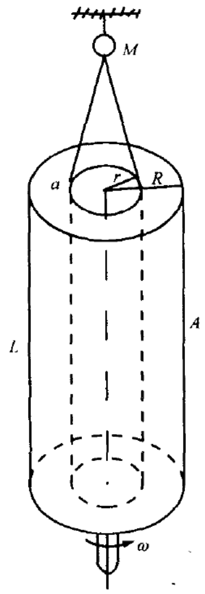
解：实验测量装置如下图示。外筒 A 半径为 R，以固定的角速度 w 转动。内筒 a 半径为 r，受黏滞力和悬丝上的扭矩两种作用，处于稳态。（图+文字，6 分）

当 R 与 r 很接近时：

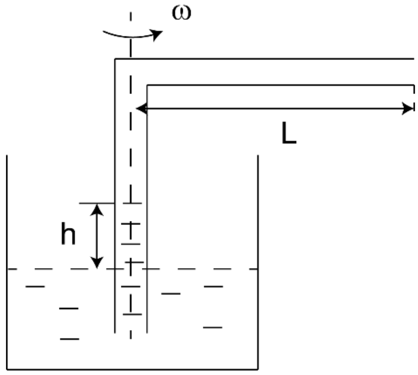
$$\frac{du}{dz} = \frac{u_A - u_a}{R - r} = \frac{\omega R}{\delta} \qquad （2 分）$$

悬丝的扭矩 T 可以通过实验测量，这样可以利用下面的式子求出η

$$T = fr = \eta\frac{\omega R}{\delta}2\pi rL \cdot r \approx \eta 2\pi L\frac{\omega R^3}{\delta} \qquad （2 分）$$

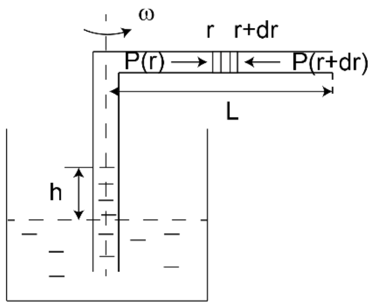


8.（15 分）如图所示，将两端开口、水平长度为 L 的弯管插入密度为ρ的液体中。使弯管绕其竖直部分的中心以角速度为ω转动。设环境温度为 T，大气压为 P_0，空气分子质量为 m_0，求管内液体相对于容器内的液体的高度 h。



解：如图示，考虑 r-r+dr 段的空气受力，在平衡态下有：

$$P(r)S+m\omega^2 r=P(r+dr)S \quad （3 分）$$



设气体密度为ρ_g，有：

$$dP(r)=\rho_g\omega^2 r dr$$

考虑到 $P=nk_BT=\rho_g k_BT/m_0$，有：

$$\frac{dP(r)}{P(r)}=\frac{\rho_g\omega^2 r}{P(r)}dr=\frac{m_0\omega^2 r}{k_BT}dr \quad （5 分）$$

积分，并考虑到 $P(L)=P_0$，有：

$$P(r)=P(0)e^{\frac{m_0\omega^2 r^2}{2k_BT}}=P_0 e^{\frac{m_0\omega^2(r^2-L^2)}{2k_BT}} \quad （4 分）$$

所以，$P(0)=P_0 e^{-\frac{m_0\omega^2 L^2}{2k_BT}}$，弯管竖直部分气压小于外界大气压，从而有：

$$\rho gh=P_0-P(0)=\left(1-e^{-\frac{m_0\omega^2 L^2}{2k_BT}}\right)P_0$$

$$h=\left(1-e^{-\frac{m_0\omega^2 L^2}{2k_BT}}\right)P_0/\rho g \quad （3 分）$$