7.1.2 正项级数的收敛性

定义 1 当通项 $a_n \geqslant 0$ 时, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

正项级数的部分和 $\{S_n\}$ 是单调增加的: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$.

(1) 基本结论

(i) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

(ii) 正项级数如果发散, 一定发散到无穷.

(iii) 收敛的正项级数, 任意调换求和次序后所得到的级数也收敛, 并且其和不变.

例 1 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

证明 这是一个正项级数, 所以只须证明它的部分和有界. 事实上, 我们有

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}\\
&\leqslant 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\
&= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&= 3-\frac{1}{n}<3.
\end{aligned}
$$

因此, 级数是收敛的. 后面将证明的收敛的值是 e.

例 2 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也收敛.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

特别有, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证明 因为 $S_{k-1} < S_k$, 所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^2} &< \frac{a_1}{S_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k S_{k-1}} \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) \\
&= \frac{2}{a_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{a_1},
\end{aligned}
$$

由此知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 S_n 单调递增且 $S_n \to +\infty$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_n} = \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

对于 $k_1 \geqslant 1$, 存在 $k_2 > k_1$ 使得 $\frac{S_{k_1}}{S_{k_2}} < \frac{1}{2}$,

对上面的 k_2, 存在 $k_3 > k_2$ 使得 $\frac{S_{k_2}}{S_{k_3}} < \frac{1}{2}$,

$\cdots\cdots$

对 k_i 存在 $k_{i+1} > k_i$ 使得 $\frac{S_{k_i}}{S_{k_{i+1}}} < \frac{1}{2}$,

$\cdots\cdots$

总之, 存在递增自然数列 $\{k_i\}$ 使得 $\frac{S_{k_i}}{S_{k_{i+1}}} < \frac{1}{2}$,.

因而

$$\sum_{n=k_i+1}^{k_{i+1}} \frac{a_n}{S_n} > \frac{1}{S_{k_{i+1}}} \sum_{n=k_i+1}^{k_{i+1}} a_n = \frac{1}{S_{k_{i+1}}}(S_{k_{i+1}} - S_{k_i})$$
$$= 1 - \frac{S_{k_i}}{S_{k_{i+1}}} > \frac{1}{2}.$$

由此,

$$\sum_{n=1}^{k_m} \frac{a_n}{S_n} = \sum_{n=1}^{k_1} \frac{a_n}{S_n} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2} \frac{a_n}{S_n} + \cdots + \sum_{n=k_{m-1}+1}^{k_m} \frac{a_n}{S_n}$$
$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{m}{2} \to +\infty,\ (m \to \infty),$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散. 证毕

问题 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$ 的收敛性如何?

(2) 正项级数收敛判别法

定理 1 (**比较判别法**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 从某项开始有 $a_n \leqslant b_n$, 则

1° $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明 不妨假定 $a_n \leqslant b_n$ 对所有的 n 都成立. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 有界, 因而 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 也有界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 无界, 因而 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 无界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. 证毕.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数, 讨论它的敛散性.

解 当 $p \leqslant 1$时, 因为

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

故在此情况下, p 级数发散.

当 $p > 1$时, 命 $\alpha = p - 1$, 则 $\alpha > 0$. 对函数 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ 利用微分中值定理可得

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{\alpha}{(n-\theta)^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{n^p},$$

其中 $0 < \theta < 1$, 由于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1,$$

故由比较判别法可知, 当 $p > 1$ 时, p 级数收敛.

推论 1 (**比较判别法的极限形式**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数, $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$. 则

1° 若 $0 < A < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

2° 若 $A = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

3° 若 $A = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例 4 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 收敛.

证明 由

$$\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

的收敛性, 可知原级数收敛.

例 5 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}. \tag{1}$$

证明 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \cdot \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right).$$

因此, 有

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

两边求和, 得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\
&=4\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&<2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&=2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\
&<2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}.
\end{aligned}
$$

于是 (1) 成立.

例 6 (Hardy-Landau **不等式**) 设 $p>1$, $\{a_n\}$ 是非负数列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^p$ 收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^p \leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p .$$

系数 $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳的, 且等式只有当所有 a_n 都为零时才成立.

证明 记 $A_0=0$, $A_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. 根据 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} A_n^{p-1} A_{n-1} &=\left(A_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(A_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leqslant \frac{p-1}{p} A_n^p+\frac{1}{p} A_{n-1}^p . \end{aligned}$$

即,

$$p A_n^{p-1} A_{n-1} \leqslant(p-1) A_n^p+A_{n-1}^p .$$

因此

$$
\begin{aligned}
A_n^p - \frac{p}{p-1}A_n^{p-1}a_n &= A_n^p - \frac{p}{p-1}\Big(nA_n - (n-1)A_{n-1}\Big)A_n^{-1}A_n^p \\
&= A_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1}pA_n^{p-1}A_{n-1} \\
&\leqslant A_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1}\big((p-1)A_n^p + A_{n-1}^p\big) \\
&= \frac{1}{p-1}\big((n-1)A_{n-1}^p - nA_n^p\big).
\end{aligned}
$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^m A_n^p < \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^m A_n^{p-1}a_n.$$

由 Hölder 不等式, 得

$$\sum_{n=1}^m A_n^{p-1}a_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^m a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^m A_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

结合这两个不等式即得所证.