

关于如何判断 VARMA 是否弱平稳、存在协整及如何求协整向量的一道例题：

ex2: VARMA 是否弱平稳, 是否存在协整, 求协整向量.

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 2 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \\ a_{3,t-1} \end{pmatrix}$$

$|\lambda I - \phi| = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 0.9) = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0.9 \quad \lambda_3 = 1$

是否弱平稳: 看所有 λ 是否小于 1 \rightarrow 不是 \times

是否存在协整: 看单位根个数是否小于 $k(3)$ \rightarrow 是 \checkmark

03002184 传真: 0551-63631760 邮编: 230026 Http://www.ustc.edu.cn

$\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0.9$: $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1$: $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = u^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 协整向量: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)'$ $(0, 0, 1)'$

$L\phi L^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0.9 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 协整向量行.