微分几何第一次习题课

黄天一

USTC

更新：2023 年 9 月 18 日

1 作业与补充习题

作业 1 设 $\boldsymbol{a}(t)$ 是向量值函数, 证明:

(1) $|\boldsymbol{a}| =$ 常数当且仅当 $\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t)\rangle = 0$.

(2) $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变当且仅当 $\boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t) = \boldsymbol{0}$.

证明. (1) 由于 $|\boldsymbol{a}|^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}|^2 = 2\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t)\rangle.$$

所以 $|\boldsymbol{a}| =$ 常数 $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t)\rangle = 0$.

(2) 只考虑 $\boldsymbol{a}(t) \neq \boldsymbol{0}$ 的情况. 设 $\boldsymbol{a}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$, 其中 $\lambda(t) = |\boldsymbol{a}(t)| > 0$, $\boldsymbol{e}(t)$ 为单位向量.

(i) 如果 $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变, 则 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{e}$ 为常向量. 这时 $\boldsymbol{a}'(t) = \lambda'(t)\boldsymbol{e}$, 所以 $\boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e} \wedge \lambda'(t)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$.

(ii) 反之, 如果 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{a}'(t) = \lambda'(t)\boldsymbol{e}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)$ 可得

$$\boldsymbol{0} = \lambda(t)\boldsymbol{e}(t) \wedge (\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)) = \lambda(t)^2\boldsymbol{e}(t) \wedge \boldsymbol{e}'(t).$$

这说明 $\boldsymbol{e}(t) \wedge \boldsymbol{e}'(t) = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{e}'(t)$ 和 $\boldsymbol{e}(t)$ 共线. 又因为 $\boldsymbol{e}(t)$ 的长度恒为 1, 根据 (1) 可得 $\langle \boldsymbol{e}(t), \boldsymbol{e}'(t)\rangle = 0$, 所以 $\boldsymbol{e}'(t)$ 恒为零, 所以 $\boldsymbol{e}(t)$ 恒为常向量, 即 $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变.

习题 1 如果 $\boldsymbol{a}(t)$ 与某固定方向垂直, 则 $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{a}''(t)) = 0$. 反之, 如果 $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{a}''(t)) = 0$, 且处处有 $\boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t) \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}(t)$ 必定与某一个固定的方向垂直.

证明. 如果 $\boldsymbol{a}(t)$ 与某个非零常向量 $\boldsymbol{e}$ 垂直, 则恒成立 $\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{e}\rangle = 0$. 求导可得

$$\langle \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{e}\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{a}''(t), \boldsymbol{e}\rangle = 0.$$

将 $\boldsymbol{e}$ 延拓为 $\mathbb{E}^3$ 的一组右手系的单位正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}\}$, 有

$$\boldsymbol{a}(t) = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{a}'(t) = \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{a}''(t) = \gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{e}_2.$$

其中 $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ 为关于 t 的光滑函数. 由此可得 $\boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t) = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\boldsymbol{e}_3$, 与 $\boldsymbol{a}''(t)$ 垂直, 所以 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') = 0$.

反之, 令 $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t)$, 则有 $\boldsymbol{b}'(t) = \boldsymbol{a}'(t) \wedge \boldsymbol{a}''(t)$. 根据二重外积公式计算可得

$$\boldsymbol{b}(t) \wedge \boldsymbol{b}'(t) = \langle \boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{a}''(t) \rangle \boldsymbol{a}'(t) - \langle \boldsymbol{a}(t) \wedge \boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{a}'(t) \rangle \boldsymbol{a}''(t) = \boldsymbol{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{b}(t)$ 的方向不变, 即 $\frac{\boldsymbol{b}(t)}{|\boldsymbol{b}(t)|}$ 为单位常向量 $\boldsymbol{e}$. 根据 $\boldsymbol{b}(t)$ 的定义即可得 $\boldsymbol{a}(t)$ 恒与 $\boldsymbol{e}$ 垂直.

作业 2 验证课本性质 1.1 和性质 1.2.

证明. (性质 1.1 证明) (1) 不妨设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3$ 都非零, 否则等式两端均为零, 从而成立. 我们取

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3|}.$$

则 $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是单位正交向量, 我们可以选取单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, 使得右手系 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 构成 $\mathbb{E}^3$ 的单位正交基. 在这组基下, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 的坐标可以表示为

$$\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \boldsymbol{v}_2 = (0, y_2, 0),\ \boldsymbol{v}_3 = (x_3, y_3, 0).$$

由此可得 $\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, -x_3 y_2)$, 所以

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = (-y_1 y_2 x_3, x_1 y_2 x_3, 0).$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_3 &= (0, (x_1 x_3 + y_1 y_3) y_2, 0) - (y_1 y_2 x_3, y_1 y_2 y_3, 0) \\ &= (-y_1 y_2 x_3, x_1 y_2 x_3, 0).\end{aligned}$$

由此即证. 这里变换 $\mathbb{E}^3$ 的单位正交基简化了坐标运算.

(2) 这里用一下第 (3) 问中混合积的性质. 结合 (1) 中的二重外积公式可得

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_4 \rangle = (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) &= (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) \\ &= \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \wedge (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) \rangle = \langle \boldsymbol{v}_3, \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_2 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle.\end{aligned}$$

(3) 设 $\boldsymbol{v}_i=(v_{i1},v_{i2},v_{i3})(i=1,2,3)$. 根据行列式的性质可得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13}\\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ v_{31} & v_{32} & v_{33}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ v_{31} & v_{32} & v_{33}\\ v_{11} & v_{12} & v_{13}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)\\
&=\begin{vmatrix} v_{31} & v_{32} & v_{33}\\ v_{11} & v_{12} & v_{13}\\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2).
\end{aligned}
$$

证明. (性质 1.2 证明) (1) 在二阶连续可微函数空间上, 计算可得

$$
\nabla\wedge\nabla=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\end{vmatrix}=(\partial_y\partial_z-\partial_z\partial_y,\partial_z\partial_x-\partial_x\partial_z,\partial_x\partial_y-\partial_y\partial_x)=\mathbf{0}.
$$

(2) 设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, 其中 P,Q,R 二阶连续可微, 则计算可得

$$
\langle\nabla,\nabla\wedge\boldsymbol{F}\rangle=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.
$$

作业 3 求下列曲线的弧长和曲率.

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(2) $\boldsymbol{r}(t)=(t,a\cosh\frac{t}{a})(a>0)$.

解答. (1) 椭圆的一个参数化为

$$
\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t,b\sin t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.
$$

由此可得弧长 $s=s(t)$ 为

$$
s=\int_0^t|\boldsymbol{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2\tau+b^2\cos^2\tau}\,\mathrm{d}\tau.
$$

这是第一类椭圆积分. 根据作业 4, 计算可得椭圆的曲率函数为

$$
\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.
$$

(2) 计算可得弧长为

$$
s=\int_0^t|\boldsymbol{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{\tau}{a}}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\cosh\frac{\tau}{a}\,\mathrm{d}\tau=a\sinh\frac{t}{a}.
$$

根据作业 4, 计算可得该曲线 (实际上为**悬链线**) 的曲率函数为

$$\kappa(t) = \frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\left(1+\sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\cosh^2\frac{t}{a}}.$$

作业 4 设曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, 证明它的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注 这是一个非常常用的曲率公式, 应该熟记方便计算一些实际的曲率 (至少应该能够熟练推导).

证明. 设曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长参数为 s, 则 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{-\frac{1}{2}}$. 计算单位切向量为

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}(x'(t), y'(t)).$$

将 $\boldsymbol{T}$ 逆时针旋转 90 度, 可以得到单位正法向量

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}(-y'(t), x'(t))$$

单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 关于 s 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{y'(t)(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2}, \frac{x'(t)(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2}\right).$$

根据 Frenet 运动方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{N}$, 将 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{N}$ 代入比较可得

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

作业 5 设平面曲线 C 的极坐标表示为 $r = f(\theta)$. 证明曲线 C 的曲率表示式为

$$\kappa(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta})^2 - f(\theta)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2}}{\left(f^2(\theta) + (\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

证明. 由已知可得曲线 C 的直角坐标表示为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

坐标分量分别记为 $x(\theta)$ 和 $y(\theta)$, 计算可得

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

$$x''(\theta) = f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta,$$

$$y''(\theta) = f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta.$$

根据作业 4 的公式可得

$$\kappa(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{(x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f(\theta)^2 + 2f'(\theta)^2 - f(\theta)f''(\theta)}{(f(\theta)^2 + f'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

作业 6 求下列曲线的曲率和挠率:

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (a\cosh t, a\sinh t, bt)(a > 0)$.

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (a(1-\sin t), a(1-\cos t), bt)$.

解答. 本题的计算基于作业 7 中给出的公式.

(1) 求导计算可得

$$\boldsymbol{r}'(t) = (a\sinh t, a\cosh t, b),\ \boldsymbol{r}''(t) = (a\cosh t, a\sinh t, 0),\ \boldsymbol{r}'''(t) = (a\sinh t, a\cosh t, 0).$$

$$\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}'' = (-ab\sinh t, ab\cosh t, -a^2).$$

所以有

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2\cosh 2t}}{(a^2\cosh 2t + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}''|^2} = \frac{1}{a^2(a^2 + b^2\cosh 2t)}\begin{vmatrix} a\sinh t & a\cosh t & b \\ a\cosh t & a\sinh t & 0 \\ a\sinh t & a\cosh t & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{a^2 + b^2\cosh 2t}.$$

(2) 求导计算可得

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-a\cos t, a\sin t, b),\ \boldsymbol{r}''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0),\ \boldsymbol{r}'''(t) = (a\cos t, -a\sin t, 0).$$

$$\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}'' = (-ab\cos t, ab\sin t, -a^2).$$

计算可得

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}''|^2} = \frac{1}{a^2(a^2 + b^2)}\begin{vmatrix} -a\cos t & a\sin t & b \\ a\sin t & a\cos t & 0 \\ a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

作业 7 证明 $\mathbb{E}^3$ 的正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率和挠率分别为

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3},\ \tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|^2}.$$

注 这也是非常非常常用的公式, 同样地, 希望同学们能够牢记.

证明. 设曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长参数为 s, 则 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$. 由此计算可得单位切向量为

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

设 $\boldsymbol{n}$ 为单位主法向量. 上式关于 s 再次求导可得

$$\kappa\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\boldsymbol{r}'(t).$$

设 $\boldsymbol{b}$ 为单位副法向量, 上式两边与 $\boldsymbol{T}$ 作内积可得

$$\kappa\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}.$$

考虑两边向量的长度即可得 $\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$. 当 κ 不为零时, 可得

$$\boldsymbol{n}=\frac{|\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}''+\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}.$$

现在我们希望根据 $\tau=\langle\dot{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{b}\rangle$ 求出挠率. 注意到 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''$ 是共线的, 所以计算 $\dot{\boldsymbol{n}}$ 时, $\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$ 的系数我们是可以直接忽略不算的, 因为这两项与 $\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''$ 作内积只能是零. 这样, 可以大大减少我们的计算量. 根据 $\boldsymbol{n}$ 的表达式可得, 存在光滑函数 $f(t),g(t)$ 使得

$$\dot{\boldsymbol{n}}=f(t)\boldsymbol{r}'+g(t)\boldsymbol{r}''+\frac{1}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}'''.$$

所以曲线的挠率为

$$\tau=\langle\dot{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}\langle\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''\rangle=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|^2}.$$

作业 8 设平面正则曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)$ 不过 P_0 点, $\boldsymbol{r}(t_0)$ 是 C 与 P_0 距离最近的点. 证明: 向量 $\boldsymbol{r}(t_0)-\boldsymbol{p}_0$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 垂直.

注 本题应要求 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 位于曲线 C 的内部, 而非端点.

证明. 定义函数 $f(t)=|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{p}_0|^2:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为曲线 C 上的点 $\boldsymbol{r}(t)$ 到 $\boldsymbol{p}_0$ 的距离平方. 根据已知可得, $f(t)$ 在 $t=t_0\in(a,b)$ 处取得极小值, 所以

$$0=f'(t_0)=2\langle\boldsymbol{r}(t_0)-\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{r}'(t_0)\rangle.$$

即 $\boldsymbol{r}(t_0)-\boldsymbol{p}_0$ 与 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 垂直.

作业 9 (1) 设 $\mathbb{E}^3$ 的曲线 C 的所有切线过一个定点, 证明 C 是直线.
(2) 证明: 所有主法线过定点的曲线是圆.

证明. 设本题的曲线为 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 其中 s 为弧长参数.

(1) 由已知可得, 存在常向量 $\boldsymbol{a}$ 和不恒为零的光滑函数 $\lambda(s)$, 使得 $\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{a}$. 两边求导可得

$$(1+\dot{\lambda}(s))\boldsymbol{t}(s)+\lambda(s)\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}$ 是正交单位向量, 所以

$$1+\dot{\lambda}(s)=\lambda(s)\kappa(s)=0.$$

由此可得 $\kappa(s)$ 恒为零, 所以 C 是直线.

(2) 由已知可得, 存在常向量 $\boldsymbol{a}$ 和不恒为零的光滑函数 $\lambda(s)$, 使得 $\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{a}$. 两边求导可得

$$(1-\kappa(s)\lambda(s))\boldsymbol{t}(s)+\dot{\lambda}(s)\boldsymbol{n}(s)+\tau(s)\lambda(s)\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 是两两正交的单位向量, 所以

$$\dot{\lambda}(s)=\tau(s)\lambda(s)=0.$$

由第一式可得 $\lambda(s)$ 恒为非零常数 λ, 进而由第二式可得 τ 恒为零, 即 C 是平面曲线. 再由 $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{n}(s)|=|\lambda|$ 即可得 C 是圆周.

作业 10 给定曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 它的曲率和挠率分别为 κ,τ, $\boldsymbol{r}(s)$ 的单位切向量 $\boldsymbol{t}(s)$ 可以视作单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一条曲线, 称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切线像. 证明: 曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{t}(s)$ 的曲率、挠率分别为

$$\tilde{\kappa}=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2},\ \tilde{\tau}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{\tau}{\kappa})}{\kappa[1+(\frac{\tau}{\kappa})^2]}.$$

证明. 根据 Frenet 运动方程计算可得

$$\dot{\boldsymbol{t}}=\kappa\boldsymbol{n},\ \ddot{\boldsymbol{t}}=-\kappa^2\boldsymbol{t}+\dot{\kappa}\boldsymbol{n}+\kappa\tau\boldsymbol{b}.$$

由此可得

$$\dot{\boldsymbol{t}}\wedge\ddot{\boldsymbol{t}}=\kappa^3\boldsymbol{b}+\kappa^2\tau\boldsymbol{t}.$$

所以切线像的曲率为

$$\tilde{\kappa}=\frac{|\dot{\boldsymbol{t}}\wedge\ddot{\boldsymbol{t}}|}{|\dot{\boldsymbol{t}}|^3}=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}.$$

现在我们计算挠率. 由于 $\dot{\boldsymbol{t}}\wedge\ddot{\boldsymbol{t}}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是正交的, 所以要算出 $(\dot{\boldsymbol{t}},\ddot{\boldsymbol{t}},\dddot{\boldsymbol{t}})$, 只需算出 $\dddot{\boldsymbol{t}}$ 在 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{b}$ 上的分量. 根据 $\ddot{\boldsymbol{t}}$ 的表达式求导可得, 存在光滑函数 $f(s)$ 使得

$$\dddot{\boldsymbol{t}}=-3\kappa\dot{\kappa}\boldsymbol{t}+f(s)\boldsymbol{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\boldsymbol{b}.$$

由此计算可得

$$(\dot{\boldsymbol{t}}, \ddot{\boldsymbol{t}}, \dddot{\boldsymbol{t}}) = \langle \dot{\boldsymbol{t}} \wedge \ddot{\boldsymbol{t}}, \dddot{\boldsymbol{t}} \rangle = \kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau) = \kappa^5 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right).$$

因此切线像的挠率为

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{t}}, \ddot{\boldsymbol{t}}, \dddot{\boldsymbol{t}})}{|\dot{\boldsymbol{t}} \wedge \ddot{\boldsymbol{t}}|^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right).$$

作业 11 求曲率 $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}$($s$ 是弧长参数) 的平面曲线.

我们这里考虑更一般的情形. 给定任意恒非零的光滑函数 $\kappa(s)$, 我们如何求出以 s 为弧长参数的正则曲线 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 使得 C 以 $\kappa(s)$ 为曲率函数? 这里先来做一些形式上的计算. 待定 C 的单位法向量 $\boldsymbol{t}$ 和单位正法向量 $\boldsymbol{n}$, 考虑 Frenet 运动方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\boldsymbol{n}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa(s)\boldsymbol{t}. \end{cases}$$

这是一个四阶的线性常微分方程组, 我们的目标就是求出 $\boldsymbol{t}(s)$, 进而积分得到曲线的方程. 为此, 固定一点 s_0, 令 $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,\mathrm{d}u$, 形式上我们不妨视其为一个局部的微分同胚. 这时有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{n}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{t}.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{n}.$$

所以 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ 的每个分量都满足常微分方程 $y'' + y = 0$. 求解可得局部成立

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{e}_1 \cos\theta(s) + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta(s), \ \boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{e}_2 \cos\theta(s) - \boldsymbol{e}_1 \sin\theta(s).$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ 是任意两个单位正交的向量. $\boldsymbol{t}(s)$ 的表达式两端关于积分就可以算出曲线 C 在 s_0 附近的表达式. 为了验证上述表达式在大范围内也是成立的, 我们要严格证明如下补充习题.

习题 2 (2018 刘世平班期中) 设 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [c, d] \subset (a, b)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的正则光滑曲线, 其中 s 为弧长参数. 记 $\boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, 并记 $\boldsymbol{n}(s)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上由 $\boldsymbol{t}(s)$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到的向量, $\kappa(s)$ 为平面曲线 C 的曲率. 定义函数

$$\theta(s) = \int_c^s \kappa(u)\,\mathrm{d}u(\text{称之为方向角}).$$

证明: 对任意 $s_0, s \in [c, d]$, 成立

$$(\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)) = (\boldsymbol{t}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0)) \begin{pmatrix} \cos(\theta(s) - \theta(s_0)) & -\sin(\theta(s) - \theta(s_0)) \\ \sin(\theta(s) - \theta(s_0)) & \cos(\theta(s) - \theta(s_0)) \end{pmatrix}.$$

证明. 回忆我们证明曲线论基本定理时, 为了证明唯一性, 曾采用了这样的方法: 验证满足要求的两条曲线是同一个常微分方程组初值问题的解, 从而根据 Picard 唯一性定理可得两条曲线是相同的. 对于这个问题, 也可以考虑类似的方法. 任意固定一点 $s_0 \in [c,d]$, 我们定义:

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{t}(s_0)\cos(\theta(s)-\theta(s_0)) + \boldsymbol{n}(s_0)\sin(\theta(s)-\theta(s_0)).$$

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{n}(s_0)\cos(\theta(s)-\theta(s_0)) - \boldsymbol{t}(s_0)\sin(\theta(s)-\theta(s_0)).$$

根据 $\theta(s)$ 的定义, 有 $\dot{\theta}(s) = \kappa(s)$. 因此成立

$$\dot{\boldsymbol{x}}(s) = \dot{\theta}(s)(\boldsymbol{n}(s_0)\cos(\theta(s)-\theta(s_0)) - \boldsymbol{t}(s_0)\sin(\theta(s)-\theta(s_0))) = \kappa(s)\boldsymbol{y}(s).$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}(s) = -\dot{\theta}(s)(\boldsymbol{t}(s_0)\cos(\theta(s)-\theta(s_0)) + \boldsymbol{n}(s_0)\sin(\theta(s)-\theta(s_0))) = -\kappa(s)\boldsymbol{x}(s).$$

根据 Frenet 运动方程, 向量值函数 $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)$ 满足同样的常微分方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{t}}(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \\ \dot{\boldsymbol{n}}(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s). \end{cases}$$

另一方面, 根据 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的定义可得 $\boldsymbol{x}(s_0) = \boldsymbol{t}(s_0), \boldsymbol{y}(s_0) = \boldsymbol{n}(s_0)$, 这说明对应的初值条件也相同, 所以根据 Picard 唯一性定理可得

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{n}(s).$$

由此即证.

解答. 现在回到作业 11 的计算. 计算可得曲线的方向角为

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^s \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{s}{a}.$$

所以符合要求的一个单位切向量为

$$\boldsymbol{t}(s) = \left(\cos\arcsin\frac{s}{a}, \frac{s}{a}\right) = \left(\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}, \frac{s}{a}\right).$$

由此积分可得符合要求的一个平面正则曲线为

$$\boldsymbol{r}(s) = \left(\int_0^s \sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}\,\mathrm{d}u, \int_0^s \frac{u}{a}\,\mathrm{d}u\right) = \left(\frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{s}{a}, \frac{s^2}{2a}\right)^{[1]}.$$

根据平面曲线的基本定理可得, 任一满足要求的平面曲线和上述曲线相差一个刚体运动.

[1] 这里详细给出 $x(s)$ 分量处积分的计算过程. 计算可得

$$\begin{aligned}\int_0^s \sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}\,\mathrm{d}u &\xlongequal{u=a\sin\theta} a\int_0^{\arcsin\frac{s}{a}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{2}\int_0^{\arcsin\frac{s}{a}} (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{s}{a}} = \frac{a}{2}\arcsin\frac{s}{a} + \frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}.\end{aligned}$$

在继续讲解其他作业题之前，我们站在上述补充题的基础上讨论一些更有意思的东西. 根据 $(\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s))$ 的表达式可得，在相差一个旋转的意义下，成立

$$\boldsymbol{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)),\ \boldsymbol{n}(s) = (-\sin\theta(s), cos\theta(s)).$$

这似乎是一个很显然的事情，因为 $\boldsymbol{t}$ 是一个单位向量值函数，我们总可以找到辐角 $\tilde{\theta}(s)$ 使得 $\boldsymbol{t}(s) = (\cos\tilde{\theta}(s), \sin\tilde{\theta}(s))$. 但是，这里辐角的取值范围是 $[0, 2\pi)$. 对于一条正则闭曲线，$\tilde{\theta}(s)$ 可能某点 s_0 处出现不连续的情况. 我们上述的讨论正说明了，存在光滑函数 $\theta(s)$，使得

$$\tilde{\theta}(s) = \theta(s)(\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

也就是将辐角函数 "连续化" 的过程.

现在，我们将方向角 $\theta(s)$ 视为 $\boldsymbol{t}(s)$ 连续版本的辐角函数. 如果曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), s \in [0, L]$ 是一个简单闭曲线，直观来看，当弧长参数 s 从 0 变化到 L 时，$\boldsymbol{t}(s)$ 辐角的变化量应当为 $\pm 2\pi$，对应成立 $\int_0^L \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \pm 2\pi$. 这其实是可以被严格证明的定理，称为**平面曲线的旋转指标定理**.

定理 1.1 定义正则闭曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), 0 \leqslant s \leqslant L$ 的旋转指标为

$$i_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\,\mathrm{d}s.$$

如果 C 是简单闭曲线，则 $i_C = \pm 1$.

这个定理的证明不在讲义里详述，可以参考教材第六章的定理 1.1(第一版 155 至 158 页). 比如，椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 是一条正则的简单闭曲线，我们在作业 3 里计算过，在参数化 $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, b\sin t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 下，椭圆周的曲率为

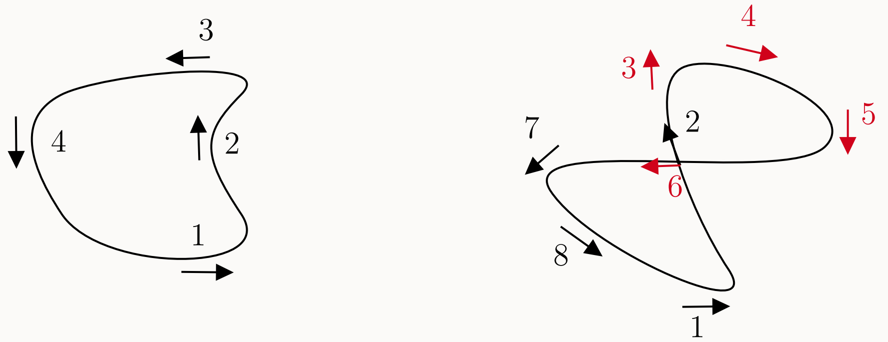
$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是椭圆周的旋转指标为

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2ab}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 + b^2\tan^2 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=\tan t} \frac{2ab}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{a^2 + b^2u^2} \\ &\xlongequal{v=\frac{bu}{a}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = 1. \end{aligned}$$

这与旋转指标定理是吻合的. 此外，我们也可以通过定性分析切向量随曲线的旋转角度来计算一些闭曲线的旋转指标，如下图所示.

可以看到，对于第二个闭曲线，我们从位置 1 开始追踪切向量，它先逆时针转到位置 2，又顺时针转到位置 6，最后又转过头来回到位置 1. 也就是说，整个过程中切向量并没有完整转满一个圆周，因此最终回到初始位置时方向角 $\theta(s)$ 增量为零，亦即 $i_C = 0$.



$i_C = 1$ $\qquad$ $i_C = 0$

上述过程也可以通过严格的计算说明, 例如八字形正则曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin 2t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 下图是利用 Mathematica 绘制的图像.

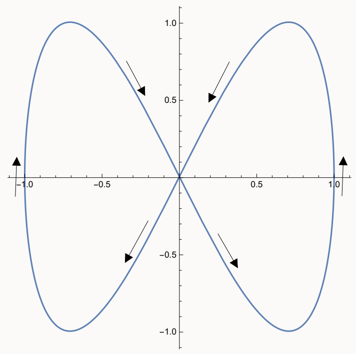


图 1: 八字形曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin 2t)$

计算可得该曲线的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{4\sin t\sin 2t + 2\cos t\cos 2t}{(\sin^2 t + 4\cos^2 2t)^{\frac{3}{2}}}.$$

不难验证该函数在任一区间 $[k\pi, k\pi+\pi](k \in \mathbb{Z})$ 上的积分为零, 所以八字形曲线的旋转指标为零. 这里我们所叙述的方向角 $\theta(s)$, 以及旋转指标定理在一些微分几何问题中有着广泛应用, 例如平面曲线的 Minkowski 定理和四顶点定理, 以及欧氏曲面的 Gauss-Bonnet 公式, 等等.

作业 12 证明: 满足条件

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2 = \text{常数}$$

的曲线, 或者是球面曲线, 或者 κ 是常数.

证明. 我们来证明一个更一般的结论: 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中曲率处处非零的正则弧长参数曲线, 曲率和挠率分别为 $\kappa(s),\tau(s)$, 且 κ 不恒为常数. 则 C 是球面曲线当且仅当

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=\text{常数}.$$

(1) 必要性: 如果 C 是球面曲线, 则存在点 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ 和常数 $R>0$, 使得 $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|^2=R^2$ 恒成立. 不妨设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 两边求导可得 $\langle\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle=0$. 再次求导可得

$$0=\langle\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle+\langle\boldsymbol{r}(s),\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\rangle=1+\kappa(s)\langle\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle.$$[2]

所以 $\langle\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle=-\frac{1}{\kappa(s)}$. 再次求导可得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)=\langle\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle+\langle\boldsymbol{r}(s),-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\rangle=\tau(s)\langle\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{b}(s)\rangle.$$

由此可得 $\langle\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{b}(s)\rangle=-\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$. 所以在 Frenet 标架下, 有

$$\boldsymbol{r}(s)=-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}(s)-\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{b}(s).$$

结合 $|\boldsymbol{r}(s)|^2=R^2$ 即可得

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=R^2.$$

(2) 充分性: 受必要性证明的启发, 我们只需证明

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s)+\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{b}(s)$$

是常向量, 从而 $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|$ 恒为常数, 即 C 是球面曲线. 求导计算可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{a}}&=\boldsymbol{t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{n}+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]\boldsymbol{b}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{n}\\&=\left[\frac{\tau}{\kappa}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\right]\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

式子 $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=$ 常数 两边对 s 求导可得

$$\frac{2}{\kappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)+\frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)=0.$$

代回 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 的计算式即可得 $\boldsymbol{a}$ 为常向量, 即证.

习题 3 (2018 刘世平班期中) 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中的正则曲线, 其中 s 为弧长参数, $\kappa(s)$ 为 C 的曲率. 假定 C 落在某个半径为 R 的球面上. 设 C 的挠率 $\tau(s)$ 处处非零, 证明: $\frac{\kappa}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right)$ 为常数, 并求出这个常数.

[2]根据该式可以看出, 球面正则曲线的曲率处处不为零

证明. 在作业题 12 的证明中, 我们知道了

$$\langle \boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle = -\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}.$$

两边求导可得

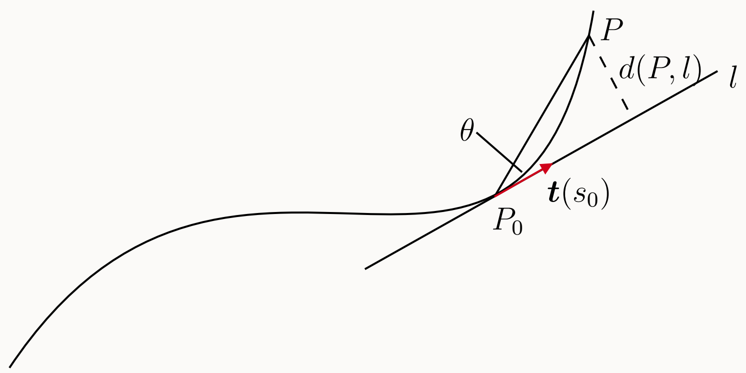
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right) = \langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle + \langle \boldsymbol{r}(s), -\tau\boldsymbol{n}(s)\rangle = \frac{\tau}{\kappa}.$$

所以 $\frac{\kappa}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s})$ 恒为 1.

作业 13 设 P_0 是 $\mathbb{E}^3$ 的曲线 C 上一点, P 是 C 上 P_0 的邻近点, l 是 P_0 处的切线; 证明:

$$\lim_{P\to P_0}\frac{2d(P,l)}{d(P_0,P)^2} = \kappa(P_0).$$

证明. 本题所述的几何图示如下.



根据几何关系可得

$$d(P,l) = d(P_0,P)\sin\theta = |(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0))\wedge\boldsymbol{t}(s_0)|.$$

现在我们分两种情况讨论.

(1) $\kappa(s_0)\neq 0$, 此时可以在 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 处建立曲线的 Frenet 标架. 记 $\Delta s = s - s_0$, 根据曲线的近似表示可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0) = \left(\Delta s - \frac{\kappa(s_0)^2\Delta s^3}{6}\right)\boldsymbol{t}(s_0) + \left(\frac{\kappa(s_0)\Delta s^2}{2} + \frac{\dot\kappa(s_0)\Delta s^3}{6}\right)\boldsymbol{n}(s_0)\\ + \frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)\Delta s^3}{6}\boldsymbol{b}(s_0) + \boldsymbol{\varepsilon}(s).\end{aligned}$$

其中余项 $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ 满足 $|\boldsymbol{\varepsilon}(s)| = o(\Delta s^3)$. 所以, 成立

$$d(P,l) = |(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0))\wedge\boldsymbol{t}(s_0)| = \frac{\kappa(s_0)}{2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2).$$

$$d(P_0,P)^2 = |\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)|^2 = \Delta s^2 + o(\Delta s^2).$$

根据上述两式即可得

$$\lim_{s\to s_0}\frac{2d(P,l)}{d(P_0,P)^2}=\kappa(s_0).$$

(2) $\kappa(s_0)=0$, 此时不能建立 Frenet 标架了, 但是根据定义可得 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)=0$, 所以这时曲线的近似展开为

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{t}(s_0)\Delta s+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s).$$

其中余项 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ 满足 $|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)|=o(\Delta s^2)$. 所以, 成立

$$d(P,l)=|(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0))\wedge\boldsymbol{t}(s_0)|=o(\Delta s^2).$$

$$d(P_0,P)^2=|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0)|^2=\Delta s^2+o(\Delta s^2).$$

根据上述两式即可得

$$\lim_{s\to s_0}\frac{2d(P,l)}{d(P_0,P)^2}=0=\kappa(s_0).$$

作业 14 设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是平面曲线, 曲率为 $\kappa(t)$, 求曲线 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{r}(-t)$ 的曲率.

解答. 我们往往称题干里定义的 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的逆. 根据定义, 逆曲线的坐标分量为 $\tilde{x}(t)=x(-t),\tilde{y}(t)=y(-t)$, 由作业 4 给出的公式可得

$$\tilde{\kappa}(t)=\frac{-x'(t)y''(-t)+x''(-t)y'(-t)}{(x'(-t)^2+y'(-t)^2)^{\frac{3}{2}}}=-\kappa(-t).$$

下面, 我补充一些微分几何中有关曲线理论的经典习题, 从这些题中, 同学们应该去体会在处理复杂的几何计算时, 朝什么方向去算、如何尽可能简洁地算.

习题 4 (2022 杨迪班期中) 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为正则弧长参数曲线, 曲率 $\kappa(s)$ 处处不为零. 证明: C 的挠率恒为 1 当且仅当存在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的正则弧长参数曲线 $\boldsymbol{g}(s)$, 使得 $(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})>0$ 恒成立, 且

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{g}(s)\wedge\dot{\boldsymbol{g}}(s).$$

证明. 先证充分性. 此时不妨设

$$\boldsymbol{r}(s)=\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{g}(\zeta)\wedge\dot{\boldsymbol{g}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 C 的单位切向量为 $\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{g}(s)\wedge\dot{\boldsymbol{g}}(s)$, 求导可得

$$\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{g}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{g}}(s)\Rightarrow\boldsymbol{n}(s)=\frac{\boldsymbol{g}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{g}}(s)}{\kappa(s)}.$$

利用二重外积公式可得, 单位副法向量为

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}(\boldsymbol{g}(s)\wedge\dot{\boldsymbol{g}}(s))\wedge(\boldsymbol{g}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{g}}(s))=\frac{(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})}{\kappa}\boldsymbol{g}.$$

两边取长度, 可以算出 $\kappa=(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})$. 现在我们希望求出 $\tau=-\langle\dot{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{n}\rangle$. 根据 $\boldsymbol{n}$ 的表达式可得 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 是正交的, 所以我们在计算 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 时不需要关注 $\boldsymbol{g}$ 前面的系数. 根据 $\boldsymbol{b}$ 的表达式可得

$$\dot{\boldsymbol{b}}=f(s)\boldsymbol{g}+\frac{(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}.$$

然后作内积可得

$$\tau=-\frac{(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})}{\kappa^2}\langle\dot{\boldsymbol{g}},\boldsymbol{g}\wedge\ddot{\boldsymbol{g}}\rangle=1.$$

反之, 如果 C 的挠率恒为 1, 我们取 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{b}$ 为 C 的单位副法向量. 此时 $\dot{\boldsymbol{g}}=-\tau\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n}$ 恒为单位向量, 所以 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}(s)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的正则弧长参数曲线. 再求导可得 $\ddot{\boldsymbol{g}}=\kappa\boldsymbol{t}-\tau\boldsymbol{b}$, 所以

$$(\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}},\ddot{\boldsymbol{g}})=(\boldsymbol{b},-\boldsymbol{n},\kappa\boldsymbol{t}-\tau\boldsymbol{b})=\kappa>0.$$

并且

$$\boldsymbol{g}\wedge\dot{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{b}\wedge(-\boldsymbol{n})=\boldsymbol{t}=\dot{\boldsymbol{r}},$$

由此即证.

习题 5 (2017 刘世平班期中) 如果一条曲线的切向量和固定的方向成定角, 则称该曲线为一般螺线.

(1) 证明: 一条曲率处处非零的正则参数曲线是一般螺线当且仅当这条曲线的挠率和曲率之比是常数.

(2) 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条弧长参数曲线, $\kappa(s),\tau(s)$ 为 C 的曲率和挠率. 设 $\kappa(s)$ 处处非零, $\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{b}(s)$ 为 C 的单位切向量和单位副法向量. 证明: C 是一般螺线当且仅当 $\boldsymbol{\sigma}(s)=\tau(s)\boldsymbol{t}(s)+\kappa(s)\boldsymbol{b}(s)$ 有固定的方向.

证明. (1) 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条曲率处处非零的正则弧长参数曲线. 若 C 是一般螺线, 则存在单位常向量 $\boldsymbol{a}$ 和常数 θ, 使得 $\langle\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{a}\rangle=\cos\theta$. 求导可得 $\langle\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{a}\rangle=0$. 在 Frenet 标架下, 有

$$\boldsymbol{a}=\cos\theta\boldsymbol{t}(s)\pm\sin\theta\boldsymbol{b}(s).$$

根据连续性可得, 上式中 $\pm$ 只能恒取正或恒取负. 不妨设取正. 如果 $\sin\theta=0$, 则 $\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{a}$ 为常向量, 这与曲率处处非零矛盾. 现在对 $\langle\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{a}\rangle=0$ 两边求导可得

$$0=\langle-\kappa\boldsymbol{t}(s)+\tau\boldsymbol{b}(s),\boldsymbol{a}\rangle=-\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta.$$

因此 $\frac{\tau}{\kappa}=\cot\theta$ 为常数.

反之, 如果 $\frac{\tau}{\kappa}$ 为常数, 则设 $\varphi \in (0,\pi)$ 使得 $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi$. 现在我们只需证明, 单位向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos\varphi \boldsymbol{t}(s) + \sin\varphi \boldsymbol{b}(s)$$

是常向量, 从而 $\boldsymbol{t}(s)$ 与该常向量成定角. 求导计算可得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \cos\varphi \cdot \kappa\boldsymbol{n} - \sin\varphi \cdot \tau\boldsymbol{n} = \kappa\left(\frac{\tau}{\kappa} - \cot\varphi\right)\boldsymbol{n} = 0,$$

由此即证.

(2) 根据作业 1 可得, 我们只需证明 C 是一般螺线当且仅当 $\boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 恒为零. 计算可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(s) \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}(s) &= (\tau(s)\boldsymbol{t}(s) + \kappa(s)\boldsymbol{b}(s)) \wedge (\dot{\tau}(s)\boldsymbol{t}(s) + \dot{\kappa}(s)\boldsymbol{b}(s)) \\ &= (\tau(s)\dot{\kappa}(s) - \tau(s)\dot{\kappa}(s))\boldsymbol{n}(s).\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = \frac{\tau\dot{\kappa} - \tau\dot{\kappa}}{\kappa^2},$$

根据第 (1) 问即可得

$$\boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa}\text{ 恒为常数} \Leftrightarrow C\text{ 是一般螺线.}$$

注 根据本题提出的充要判据, 可以看到圆柱螺线当然是一条一般螺线. 事实上, 根据 $\tau = c\kappa$, 可以利用 Frenet 运动方程, 仿照此前的作业 10 定义空间曲线的方向角, 进而算出任意一般螺线应满足的表达式 (教材习题二 17 题). 这也是一个很有意思的问题, 感兴趣的同学可以自己算一算.

习题 6 设 C 为一正则曲线, 存在另一条曲线 C', 使得 C 和 C' 可以建立一一对应, 并且在对应点处有相同的主法线, 则称它们为 Bertrand 曲线, 并且互为侣线. 证明:

(1) 任意一条平面正则曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) : [0, L] \to \mathbb{E}^2$ 都是 Bertrand 曲线.

(2) 两条互为侣线的空间 Bertrand 曲线对应点的距离恒为常数, 并且切线夹成定角.

(3) 若 $\kappa\tau \neq 0$, 则空间曲线为 Bertrand 曲线的充要条件是存在常数 $\lambda \neq 0$ 和 μ, 使得 $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$.

然后证充分性. 如果已知存在常数 $\lambda \neq 0$ 和 μ, 使得 $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ 恒成立,

证明. (1) 设 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ 是 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的 Frenet 标架, $\kappa(s)$ 为 C 的曲率. 首先, 直线显然是 Bertrand 曲线, 所以不妨设 κ 不恒为零. 任取非零常数 λ, 使得

$$|\lambda| < \left(\max_{0\leqslant s\leqslant L}|\kappa(s)|\right)^{-1}.$$

考虑平面曲线 $C' : \tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda \boldsymbol{n}(s)$, 则 C' 的切向量 (不一定单位) 为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(s) = (1 - \lambda\kappa(s))\boldsymbol{t}(s).$$

根据 λ 的选取可得 C' 是一条正则曲线, 并且切向量和 C 的切向量平行, 从而 C 和 C' 的法向量平行. 另一方面, 根据 C' 的定义可得, C' 在 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的法线经过 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$, 所以 C 和 C' 的主法线实际上是相同的, 进而互为 Bertrand 侣线.

(2) 设 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $C' : \tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}(\rho)$ 互为 Bertrand 侣线, 其中 s, ρ 为对应曲线的弧长参数, 存在一一对应 $\rho = \rho(s)$. C 和 C' 的单位切向量、主法向量、副法向量分别为 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$. 根据已知可得存在光滑函数 $\lambda(s)$, 使得

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(\rho(s)) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s),\ \boldsymbol{N}(\rho(s)) = \pm\boldsymbol{n}(s).$$

可以看到 $|\lambda(s)|$ 即为 C 和 C' 对应点之间的距离. 上面第一式两边关于 s 求导可得

$$\boldsymbol{T}(\rho(s))\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\boldsymbol{n}(s) + \lambda(s)\dot{\boldsymbol{n}}(s).$$

上式两边与 $\boldsymbol{n}(s)$ 作内积, 由于 $\boldsymbol{N}(\rho(s)) = \pm\boldsymbol{n}(s)$, 所以 $\langle \boldsymbol{T}(\rho(s)), \boldsymbol{n}(s)\rangle = 0$. 所以我们得到 $\dot{\lambda}(s) \equiv 0$, 故 $\lambda(s) = \lambda$ 恒为常数. 因此 C 和 C' 对应点的距离恒为常数. 为了证明第二个结论, 设 C' 的曲率为 $\tilde{\kappa}(\rho(s))$. 考察 $\langle \boldsymbol{T}(\rho(s)), \boldsymbol{t}(s)\rangle$, 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \boldsymbol{T}(\rho(s)), \boldsymbol{t}(s)\rangle = \left\langle \tilde{\kappa}(\rho(s))\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{N}(\rho(s)), \boldsymbol{t}(s)\right\rangle + \langle \boldsymbol{T}(\rho(s)), \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\rangle = 0.$$

故 $\langle \boldsymbol{T}(\rho(s)), \boldsymbol{t}(s)\rangle$ 为常数, 从而 C 和 C' 的切线夹成定角.

(3) 先证必要性, 我们沿用 (2) 中的记号. 根据 (2) 的结论可得, 存在常数 θ, 使得

$$\boldsymbol{T}(\rho(s)) = \cos\theta\boldsymbol{t}(s) + \sin\theta\boldsymbol{b}(s).$$

另一方面, 由 $\lambda(s) = \lambda$ 为常数整理可得

$$\boldsymbol{T}(\rho(s))\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = (1 - \lambda\kappa(s))\boldsymbol{t}(s) + \lambda\tau(s)\boldsymbol{b}(s).$$

综合上述两式, 由 τ 非零可得 $\sin\theta$ 非零, 并且

$$\frac{1 - \lambda\kappa(s)}{\cos\theta} = \frac{\lambda\tau(s)}{\sin\theta}.$$

这样整理可得 $\lambda\kappa + \lambda\cot\theta\tau = 1$, 取常数 $\mu = \lambda\cot\theta$ 即可.

反之, 如果已知存在常数 $\lambda \neq 0$ 和 μ 使得 $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ 恒成立, 我们来构造 C 的 Bertrand 侣线. 与 (1) 类似, 我们考虑曲线

$$C' : \tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}(\rho) = \boldsymbol{r}(s(\rho)) + \lambda\boldsymbol{n}(s(\rho)).$$

这里 ρ 是 C' 的弧长参数, $s(\rho)$ 是待定的一一参数变换. 首先计算可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\rho}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}((1-\lambda\kappa(s))\boldsymbol{t}(s)+\lambda\tau(s)\boldsymbol{b}(s))=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}\tau(s)(\mu\boldsymbol{t}(s)+\lambda\boldsymbol{b}(s)),$$

由 τ 恒不为零可得 C' 是正则曲线. 比较模长可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}\right)^2\tau(s)^2(\lambda^2+\mu^2)=1.$$

故我们选取的参数变换为

$$\rho(s)=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\int_0^s\frac{\mathrm{d}y}{\tau(y)}.$$

这时, 成立

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\rho}=\frac{\mu\boldsymbol{t}(s)+\lambda\boldsymbol{b}(s)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

设 C' 的主法向量为 $\boldsymbol{N}$, 再求一次导可得

$$\boldsymbol{N}(\rho)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mu\kappa-\lambda\tau}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\boldsymbol{n}(s).$$

这说明对应点处 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是平行的. 根据 C' 的定义可得, $\boldsymbol{r}(s)$ 处的主法线经过点 $\tilde{\boldsymbol{r}}(\rho(s))$, 所以 C 和 C' 对应点的主法线是相同的, 即证.

习题 7 (2018 杨迪班期末) 设 $C:\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_0(s), s\geqslant 0$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一条以 s 为弧长参数的正则光滑闭曲线, 满足 $\boldsymbol{r}_0(s)=\boldsymbol{r}_0(s+L), \forall s\geqslant 0$. 这里, L 是一个正的常数. 考虑由如下偏微分方程初值问题给出的 C 在 $\mathbb{R}^3$ 中的运动:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s}\wedge\dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s^2}, & s,t\geqslant 0,\\ \boldsymbol{r}(s,0)=\boldsymbol{r}_0(s), & s\geqslant 0,\\ \boldsymbol{r}(s,t)=\boldsymbol{r}(s+L,t), & s\geqslant 0, t>0.\end{cases}$$

假定上述初值问题在 $0\leqslant t<M$, $s\geqslant 0$ 时有光滑解 $\boldsymbol{r}(s,t)$, M 是某个正数. 记 $\kappa(s,t)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 在 t 时刻的曲率, 假定 $\kappa(s,t)>0, \forall s\geqslant 0, t\in[0,M)$. 记 $\tau(s,t)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 在 t 时刻的挠率. 试证明:

(1) 对任意给定的 $t\in[0,M)$, s 是曲线 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 的弧长参数.

(2) $\kappa=\kappa(s,t)$ 满足运动方程

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=-2\tau\frac{\partial\kappa}{\partial s}-\kappa\frac{\partial\tau}{\partial s}.$$

(3) 积分 $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L\kappa(s,t)^2\,\mathrm{d}s$ 是与 t 无关的常数.

(4) 积分 $\int_0^L\tau(s,t)\,\mathrm{d}s$ 和 $\int_0^L\kappa(s,t)^2\tau(s,t)\,\mathrm{d}s$ 均是与 t 无关的常数.

证明. (1) 由于 s 是 $\boldsymbol{r}_0$ 的弧长参数, 所以 $|\partial_s \boldsymbol{r}(s,0)| = 1$. 因此, 要证明 s 是 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 的弧长参数, 只需证明 $\partial_t |\boldsymbol{r}_s(s,t)|^2 = 0$. 计算可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s}\right|^2 = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\wedge\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial s^3}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right\rangle = 0.$$

由此即证.

(2) 首先我们来整理 $\boldsymbol{r}$ 所满足的方程. 设曲线 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 的单位切向量为 $\boldsymbol{T}(s,t)$, 单位主法向量为 $\boldsymbol{n}(s,t)$, 单位副法向量为 $\boldsymbol{b}(s,t)$. 则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t} = \boldsymbol{T}(s,t)\wedge(\kappa(s,t)\boldsymbol{n}(s,t)) = \kappa(s,t)\boldsymbol{b}(s,t).$$

这其实说明了曲线流 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 沿着副法向量的方向变化, 变化速率为 $\kappa(s,t)$. 由此可得

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial s^2}\right| = \frac{1}{\kappa}\left\langle \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial t\partial s^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial s^2}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\kappa\boldsymbol{b}), \boldsymbol{n}\right\rangle.$$

我们只需求出 $\partial_s^2(\kappa\boldsymbol{b})$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的分量. 计算可得

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\kappa\boldsymbol{b}) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\boldsymbol{b} - \kappa\tau\boldsymbol{n}\right) = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}\boldsymbol{b} - \left(\tau\frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}(\kappa\tau)\right)\boldsymbol{n} - \kappa\tau\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial s}.$$

根据上式即可得

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\tau\frac{\partial \kappa}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}(\kappa\tau) = -2\tau\frac{\partial \kappa}{\partial s} - \kappa\frac{\partial \tau}{\partial s}.$$

(3) 求导, 并利用第 (2) 问的结论可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_0^L \kappa\kappa_t\,\mathrm{d}s = -\int_0^L \kappa(2\tau\kappa_s + \kappa\tau_s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\kappa^2\tau)\,\mathrm{d}s = -\kappa(\cdot,t)^2\tau(\cdot,t)\Big|_0^L.$$

根据边值条件 $\boldsymbol{r}(s,t) = \boldsymbol{r}(s+L,t)$ 即可得 $\kappa(0,t) = \kappa(L,t)$, $\tau(0,t) = \tau(L,t)$ 对任意 t 都成立. 因此 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$, 即 $E(t)$ 是与 t 无关的常数.

(4) 第一想法当然是复刻 (3) 的过程, 通过求导验证两个积分守恒. 为此, 我们需要求出 τ 的演化方程. 从原偏微分方程出发是比较困难的, 但我们可以转而考虑求出 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 所满足的演化方程. 首先计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\wedge\frac{\partial^3 \boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s^3} = \boldsymbol{T}\wedge\frac{\partial}{\partial s}(\kappa\boldsymbol{n}) \\ &= \boldsymbol{T}\wedge\left(-\kappa^2\boldsymbol{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\boldsymbol{n} + \kappa\tau\boldsymbol{b}\right) = -\kappa\tau\boldsymbol{n} + \frac{\partial \kappa}{\partial s}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

上式再关于 s 求一次导, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\kappa\boldsymbol{n}) &= -\frac{\partial(\kappa\tau)}{\partial s}\boldsymbol{n} - \kappa\tau(-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{b}) + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2}\boldsymbol{b} - \frac{\partial \kappa}{\partial s}\tau\boldsymbol{n} \\ &= \kappa^2\tau\boldsymbol{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}\boldsymbol{n} + \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} - \kappa\tau^2\right)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

左边展开可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} = \kappa\tau\boldsymbol{T} + \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\right)\boldsymbol{b}.$$

由 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{n}$ 可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{T} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} = -\frac{\partial \kappa}{\partial s}\boldsymbol{T} - \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\right)\boldsymbol{n}.$$

由 Frenet 运动方程可得 $\tau = \langle \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial s}, \boldsymbol{b}\rangle$, 求导可得

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t}, \boldsymbol{b}\right\rangle + \left\langle -\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{b}, \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\right).$$

然后, 我们对积分求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \tau(s,t)\,\mathrm{d}s = \int_0^L \frac{\partial \tau}{\partial t}(s,t)\,\mathrm{d}s = \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\right)\bigg|_0^L = 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \kappa(s,t)^2\tau(s,t)\,\mathrm{d}s &= \int_0^L \left(\kappa^2\frac{\partial \tau}{\partial t} + 2\kappa\tau\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^L \left[-\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\right)2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial s} - 2\kappa\tau\frac{\partial(\kappa\tau)}{\partial s} - 2\kappa\tau^2\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right]\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^L \frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)^2 + \frac{\kappa^4}{4} + \kappa^2\tau^2\right)\mathrm{d}s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

由此即证.

注 我的一些注记: 这是一个非常有意思的练习题, 它的背景是欧氏空间内曲线的演化, 又称为曲线流, 是几何分析方向的一个重要研究对象. 更前沿的外蕴几何流, 诸如平均曲率流、Gauss 曲率流等都可以看作曲线流的推广. 在研究一些几何流时, 我们往往关心这个演化过程能持续多久 (解的存在与爆破问题)、这个演化过程中几何特性是否存在变化 (长度、面积、凸性等). 由于课程所限, 以及时间问题, 我不能在习题课上拓展更多, 但是可以在这个注记里给大家介绍经典的曲线收缩流 (curve shortening flow), 并且留一些习题给感兴趣的同学自己完成. 实际上, 如果学过微分方程引论这门课, 这些问题都是可以尝试去回答的.

在经典的几何理论中, 曲线收缩流占据着毋庸置疑的地位. 我们考虑一个光滑的单参数平面简单闭曲线族 $\{C_t : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t,s) : 0 \leqslant t < T\}$, 这里 s 为弧长参数. 设 $\boldsymbol{n}(t,s)$ 和 $\kappa(t,s)$ 分别为曲线 C_t 在 $\boldsymbol{r}(t,s)$ 处的单位主法向量和曲率, 初始时刻 C_0 是一条凸曲线 (也就是说曲率处处恒正). 称 $\{C_t\}$ 为一个曲线收缩流, 是指它满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(t,s) = \kappa(t,s)\boldsymbol{n}(t,s).$$

(1) 推导曲率的演化方程.

(2) 证明对任意 $0 < t < T$, 曲线 C_t 都是凸的.

(3) 讨论曲线流的长度 $L(t)$ 和围成区域面积 $A(t)$ 随时间的演化规律. 如果给定 C_0 围成的面积 A_0, 指出曲线流最大存在时间 T 的范围 ("收缩流" 名称的由来).

(4) (较难) 证明曲线收缩流的曲率梯度估计: 如果 $\kappa(t,s)$ 不发生爆破, 即 $\sup_{0\leqslant t<T}\sup_{C_t}\kappa$ 有限, 则一致成立 $|\partial_s^\alpha\kappa(t,s)| = O(t^{-\frac{|\alpha|}{2}})$.

在更进一步的几何课程, 例如科大开设的几何分析/几何分析选讲里, 可以学到更现代的几何流理论.

2 补充内容: 等周不等式

等周不等式是一个非常悠久的数学问题. 在古代, 人们就会思考: 如果我们有固定量的木材, 如何搭建一个封闭的围栏, 使得我们围起来的地盘最多? 翻译成数学语言即为: 固定平面闭曲线的周长, 对于何种形状的曲线, 围成区域的面积最大? 在古希腊时期, 人们就已经大致知道了这个待求的曲线就是圆周, 并且尝试给出了一些初等的证明. 但这些证明都缺乏严谨性.

历史上第一个突破等周问题的是瑞士数学家 Steiner(1838). 他用直观的方法证明了: 除了圆以外, 其余曲线都不可能是等周问题的解. 但是 teiner 本人并没有证明圆确实是所要求的极大元. 直到 1870 年, 这个问题终于由 Weierstrass 用变分法给出了严格的答案. 此后, 微分几何证法层出不迭, 讲义后文会介绍两种微分几何证法, 分别由 Hurwitz(1902 年) 和 Schimdt(1939 年) 给出.

在平面情形的等周问题被彻底证明后, 数学家们开始尝试把这条美妙的性质推广到更一般的情形. 首先, 他们想到的是把这个问题推广到 n 维的欧氏空间里的光滑凸曲面, 这个过程是顺利的 (Schmidt(1949), Baebler(1957), Hadwiger(1957)). 然而, 对于曲面不光滑的情形, 微分几何手法就很难奏效了. 这时, **几何测度论**这门学科绽放异彩. Federer(1969) 和 Osserman(1978) 用 Brunn-Minkowski 不等式证明了一般欧氏空间下最一般的等周不等式. 此后, 等周问题还在不断延伸, 从欧氏空间到更一般的低维 Cartan-Hadamard 流形, 等等.

回到我们的讨论话题. 首先, 我们给出平面等周不等式的严格叙述.

定理 2.1 设平面 C^1 简单闭曲线 Γ 的长度为 L, Γ 围成的区域面积为 A[3], 则成立

$$L^2 \geqslant 4\pi A.$$

等号成立当且仅当 Γ 是圆周.

[3]这里其实偷偷用了非常著名的 Jordan 曲线定理: 平面上的简单闭曲线的补集由两个连通分支组成, 其中一个分支有界, 另一个分支无界.

Hurwitz 的证明. 这是一个非常 "分析" 的证明. 这个证明基于如下的 Wirtinger 不等式:

引理 2.2 设 $f \in C^1[0,2\pi]$, 满足 $f(0)=f(2\pi)$, 并且 $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. 则成立

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

并且等号成立当且仅当 $f(t) = a\cos t + b\sin t$.

证明. 将 f 展开为 Fourier 级数:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt).$$

逐项积分可得

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = a_0\pi \Rightarrow a_0 = 0.$$

求导可得 $f'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos nt - a_n\sin nt)$. 根据 Parseval 等式可得

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\quad \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2).$$

由此即证 Wirtinger 不等式. 若等号成立, 根据上式可得当 $n \geqslant 2$ 时恒成立 $a_n = b_n = 0$, 所以 $f(t) = a_1\cos t + b_1\sin t$.

证明. (等周不等式的第一个证明) 设简单闭曲线 Γ 的一个弧长参数化为 $(x_0(s), y_0(s))$, $s \in [0,L]$. 不妨设 $\int_0^L x_0(s)\,\mathrm{d}s = 0$[4]. 为了将函数归化为 Wirtinger 不等式的情形, 作参数变换 $t = \frac{2\pi s}{L}$, 曲线化为

$$\Gamma: x = x_0\left(\frac{Lt}{2\pi}\right) \triangleq x(t),\ y = y_0\left(\frac{Lt}{2\pi}\right) \triangleq y(t).$$

根据 Green 公式, 我们可以得到

$$A = \int_\Gamma x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 s 是弧长参数, 所以成立

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

[4]如若不然, 我们可以平移坐标系, 新的参数化为

$$\left(x_0(s) - \frac{1}{L}\int_0^L x_0(s)\,\mathrm{d}s, y_0(s)\right),$$

这样就化为了我们想要的情况.

因此

$$\frac{L^2}{4\pi} - A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2 - 2x(t)y'(t))\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x'(t)^2 - x(t)^2)\,\mathrm{d}t.$$

其中最后一步用均值不等式得到. 由 Γ 是闭曲线可得 $x(0) = x(2\pi)$, 结合 $x(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的积分为零, 应用 Wirtinger 不等式即可得 $L^2 \geqslant 4\pi A$.

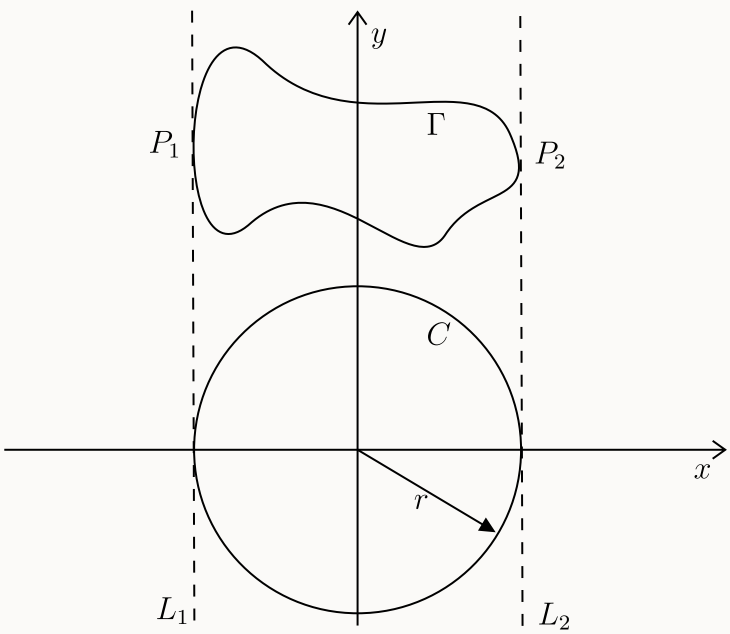
最后我们讨论等号成立的条件. 首先, 根据 Wirtinger 不等式的取等条件可得 $x(t) = a\cos t + b\sin t$. 另一方面, 由均值不等式的取等条件可得 $y'(t) = x(t)$, 由此可得 $y(t) = b\cos t - a\sin t + c$. 因此

$$x(t)^2 + (y(t) - c)^2 = a^2 + b^2.$$

所以 Γ 是一个圆周.

Schimdt 的证明　这是一个很有趣味的证明, 所使用的手段比 Hurwitz 的证明还要初等.

证明. (等周不等式的第二个证明) 设简单闭曲线 Γ 的弧长参数化为 $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$. 由于 $\boldsymbol{r}(s)$ 的像是平面中的紧集, 所以我们可以选取曲线 Γ 上的点 $P_1 = \boldsymbol{r}(s_1)$ 和 $P_2 = \boldsymbol{r}(s_2)$, 使得在曲线像集中, P_1 的 x 坐标取得最小值, 而 P_2 的 x 坐标取得最大值, 不妨设 $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$. 经过 P_1 和 P_2, 分别作平行于 y 轴的直线 L_1 和 L_2, 这时 Γ 恰好内切于 L_1, L_2 围成的带状域 S. 我们作 S 的内切圆周 C, 使得其圆心落在 x 轴上, 不妨设为原点. 设该内切圆的半径为 $r > 0$.



我们给定圆周 C 的一个分段光滑的参数化为 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = (x(s), z(s))$(注意此时 s 不再为

弧长参数), 其中 $z(s), 0 \leqslant s \leqslant L$ 定义为

$$z(s)=\begin{cases}\sqrt{r^2-x(s)^2}, & s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\\ -\sqrt{r^2-x(s)^2}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据 Green 公式可得

$$A=\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y=\int_0^L x(s)\dot{y}(s)\,\mathrm{d}s,\ \pi r^2=-\int_C z\,\mathrm{d}x=-\int_0^L z(s)\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s.$$

两式相加, 并应用 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}A+\pi r^2&=\int_0^L (x(s)\dot{y}(s)-z(s)\dot{x}(s))\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_0^L \sqrt{x(s)^2+z(s)^2}\cdot\sqrt{\dot{y}(s)^2+\dot{x}(s)^2}\,\mathrm{d}s\\ &=\int_0^L r\cdot 1\,\mathrm{d}s=Lr.\end{aligned}$$

再用一次均值不等式即可得

$$A=r(L-\pi r)\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi r+L-\pi r}{2}\right)^2=\frac{L^2}{4\pi}.$$

等周不等式即证.

下面我们讨论取等条件. 如果等号成立, 首先从均值不等式的取等条件可得 $r=\frac{L}{2\pi}$. 其次, 从 Cauchy 不等式的取等条件可得存在函数 $\lambda(s)$, 使得

$$(x(s),-z(s))=\lambda(s)(\dot{y}(s),\dot{x}(s)).$$

由此计算可得

$$|\lambda(s)|=\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{\dot{y}^2+\dot{x}^2}}=\frac{L}{2\pi}.$$

这说明 $\lambda\equiv\pm\frac{L}{2\pi}$ 恒为常数, 即 $x=\pm\frac{L}{2\pi}\dot{y}$. 另一方面, 我们也可以将 Γ 视为两条平行于 x 轴的直线围成带状域的内切曲线, 对应地可以构造圆周 $C':\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=(w(s),y(s))$. 然后重复之前的过程可以得到 $y=\pm\frac{L}{2\pi}\dot{x}$. 所以此时成立

$$x(s)^2+y(s)^2\equiv\frac{L^2}{4\pi^2}.$$

这就说明了 Γ 是一个圆周.