

## 无机材料的脆性断裂和强度

### 脆性断裂现象

- 在外力作用下，无机材料首先出现可恢复的弹性形变。
- 在足够大的剪应力作用下(或环境温度较高时)，材料中的晶体部分将选择最易滑移的系统，出现晶内内部的位错滑移，宏观上表现为材料的塑性形变；无机材料中的晶界非晶相，以及玻璃、有机高分子材料等非晶态材料，则会产生粘性流动，宏观上表现为材料的粘性形变。这两种形变为不可恢复的永久形变。
- 当材料长期受载，尤其在高温环境中受载，上述塑性形变及粘性形变随时间而具有不同的速率，这就是材料的蠕变。蠕变的后期或是蠕变终止；或是导致蠕变断裂。
- 在外力作用下，在一些地方（比如缺陷或裂纹）产生应力集中，超过材料的临界拉应力值，将会产生裂纹或缺陷的扩展，导致脆性断裂。此时平均剪应力尚小于临界值，不足以产生明显的塑性变形或粘性流动。

## 脆性断裂现象

- 裂纹的存在及其扩展行为，决定了材料抵抗断裂的能力。断裂时，材料的实际平均应力尚低于材料的结合强度(或称理论结合强度)。
- 突发性断裂（瞬时断裂）：在较快速率持续增加的应力下发生断裂。在临界状态下，断裂源处的裂纹尖端所受的横向拉应力正好等于结合强度时，裂纹产生突发性扩展。一旦扩展，引起周围应力的再分配，导致裂纹的加速扩展，出现突发性断裂，这种断裂往往并无先兆。
- 延迟性断裂（或疲劳断裂）：在缓慢速率持续增加的应力，或承受恒定应力，或循环应力经过一段事件后发生的断裂。有时裂纹尖端处的横向拉应力尚不足以引起扩展，但在长期受应力的情况下，特别是同时处于高温环境中或特殊的环境侵蚀时，如存在 $O_2$ ， $H_2$ ， $SO_2$ ， $H_2O$ (汽)等的情况下时，会出现裂纹的缓慢生长，甚至导致一些材料（比如金属和玻璃）易出现缓慢开裂。

## 理论结合强度

- 固体材料断裂强度理论上可达到的最高值。
- 将预案子间结合力 $\sigma$ 与原子间的距离 $x$ 近似为正弦关系：

$$\sigma = \sigma_{th} \times \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

- 将材料拉断时，产生两个新表面，因此使单位面积的原子平面分开所作的功应等于产生两个单位面积的新表面所需的表面能。材料才能断裂。此时，分开单位面积原子平面所作的功为：

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \sigma_{th} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx \\ &= \frac{\lambda \sigma_{th}}{2\pi} \left[ -\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda \sigma_{th}}{\pi} \end{aligned}$$

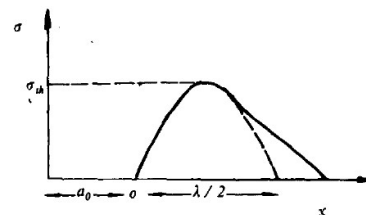


图 2-1 原子间约束力和距离的关系

## 理论结合强度

- 形成的表面的表面能为 $\gamma$ ，则 $v=2\gamma$

$$\frac{\lambda\sigma_{th}}{\pi} = 2\gamma$$

$$\sigma_{th} = \frac{2\pi\gamma}{\lambda}$$

- 在平衡位置附近

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{x}{a}E$$

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \approx \frac{2\pi x}{\lambda}$$

- 将上面最后的三个关系式代入

$$\sigma = \sigma_{th} \times \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

- 最后得到

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a}}$$

$E$ 为弹性模量， $a$ 为晶格常数。

## 理论结合强度

- 通常其况下， $\gamma$ 约为 $aE/100$ ，所以理论结合强度

$$\sigma_{th} = \frac{E}{10}$$

- 实际材料中只有一些极细的纤维和晶须其强度接近理论强度值。例如熔融石英纤维的强度约为 $E/4$ ，碳化硅晶须强度约为 $E/23$ ，氧化铝晶须强度为 $E/33$ 。尺寸较大的材料的实际强度比理论值低得多，约为 $E/100$ - $E/1000$ 。
- 实际材料的强度总在一定范围内波动，即使是用同样材料在相同的条件下制成的试件，强度值也有波动。一般试件尺寸大，实测强度低。
- 主要原因实际材料中存在着裂纹和缺陷—Griffith微裂纹理论，脆性断裂的理论基础。

## Griffith微裂纹理论

- 实际材料中总是存在许多细小的裂纹或缺陷，在外力作用下，这些裂纹和缺陷附近产生应力集中现象。当应力达到一定程度时，裂纹开始扩展而导致断裂。
- 对于一个具有孔洞的板的应力集中，孔洞端部的应力取决于孔洞的长度和端部的曲率半径：

$$\frac{\sigma_A}{\sigma} = 1 + 2 \frac{c}{a}, \quad \rho = \frac{a^2}{c}$$

$$\sigma_A = \sigma \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right]$$

$2c$ 为孔洞长度， $\sigma$ 为外加应力

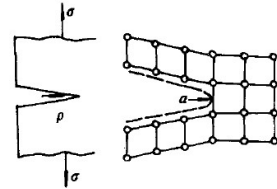


图 2.2 微裂纹端部的曲率  
对应于原子间距

## Griffith微裂纹理论

$$\sigma_A = \sigma \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \right]$$

- 如果  $c \gg \rho$ ，为扁平的锐裂纹，此时

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

- $\rho$  很小，可认为与原子间距数量级相同

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{c}{a}}$$

- 当  $\sigma_A$  达到理论结合强度的时，裂纹就被拉开而迅速扩展。裂纹扩展， $c$  增大， $\sigma_A$  又进一步增加。如此恶性循环，导致材料的断裂。临界应力条件为：

$$2\sigma \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a}} \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma}{4c}}$$

## Griffith微裂纹理论

- 从能量角度而言，物体内部储存的弹性应变能大于裂纹开裂形成的两个新表面所需的表面能，裂纹发生扩展，反之，裂纹不扩展
- 将以单位长度的薄板拉到 $l+\Delta l$ 并固定，储存的弹性能为

$$W_{e1} = 1/2(F \cdot \Delta l)$$

- 割出长度为 $2c$ 的裂纹，储存的弹性能变为

$$W_{e2} = 1/2(F - \Delta F) \cdot \Delta l$$

- 弹性能降低了

$$W_e = W_{e1} - W_{e2} = 1/2\Delta F \cdot \Delta l$$

可用于裂纹的扩展

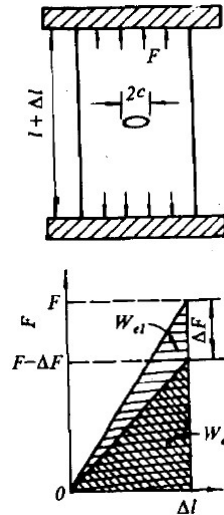


图 2.3 裂纹扩散临界条件的导出

## Griffith微裂纹理论

- 对于薄板（平面应力状态），

$$W_e = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E}$$

厚板（平面应变状态）

$$W_e = (1 - \mu^2) \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E}$$

- 产生长度为 $2c$ ，厚度为1的新的断面所需表面能为

$$W_s = 4c\gamma$$

- $\frac{dw_e}{2dc} < \frac{dw_s}{2dc}$ 时，裂纹不扩展； $\frac{dw_e}{2dc} > \frac{dw_s}{2dc}$ 时，裂纹扩展；临界状态

$$\frac{dw_e}{2dc} = \frac{dw_s}{2dc}$$

## Griffith微裂纹理论

- 在临界条件下

$$\frac{dw_s}{2dc} = \frac{d}{2dc} \left( \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E} \right) = \frac{\pi \sigma^2 c}{E}$$

$$\frac{dw_s}{2dc} = \frac{d}{2dc} (4c\gamma) = 2\gamma$$

$$\frac{\pi c \sigma_c^2}{E} = 2\gamma$$

- 平面应力状态  $\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi c}}$

平面应变状态  $\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{(1-\mu^2)\pi c}}$

## Griffith微裂纹理论

- 对比：

裂纹的扩展临界应力  $\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi c}}$

无机材料理论强度：  $\sigma_u = \sqrt{\frac{E\gamma}{a}}$

- 如果我们能控制裂纹长度和原子间距在同一数量级，就可使材料达到理论强度。
- 获得高强度的材料，需要E和γ大，而裂纹尺寸要小。

## Griffith微裂纹理论

- Griffith用刚拉制的玻璃棒测得的弯曲强度为6GPa，在空气中放置几小时后强度下降成0.4GPa。强度下降的原因是由于大气腐蚀形成表面裂纹。
- 用温水溶去氯化钠表面的缺陷，强度由5MPa提高到1.6 GPa。主要由于表面缺陷的影响。
- 把石英玻璃纤维分割成几段不同的长度，长度为12cm时，强度为275MPa，长度为0.6 cm时，强度可达760MPa。试件长，含有危险裂纹的机会就多（尺寸效应）。
- Griffith微裂纹理论能解释上述现象，证明理论的成功性。

## Griffith微裂纹理论

- 脆性材料可用上述公式计算临界应力，对于金属和聚合物，还需考虑塑性的影响：

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E(\gamma + \gamma_p)}{\pi c}}$$

- 其中 $\gamma_p$ 为扩展单位面积裂纹所需的塑性功。通常 $\gamma_p \gg \gamma$ 。比如高强度金属 $\gamma_p \approx 1000 \gamma$ ，普通强度钢 $\gamma_p \approx (10^4 - 10^6) \gamma$ 。
- 对比：
  - 一种陶瓷材料： $E = 3 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ， $\gamma = 1 \text{ J/cm}^2$ ，假设临界应力为 $4 \times 10^8 \text{ Pa}$ ，则临界裂纹长度约为 $1 \mu\text{m}$ 。
  - 一种金属材料： $E = 3 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ， $\gamma_p = 1000 \gamma = 1000 \text{ J/cm}^2$ ，假设临界应力为 $4 \times 10^8 \text{ Pa}$ ，则临界裂纹长度约为 $1.25 \text{ mm}$ 。
- 塑性的存在可增加临界裂纹的长度，有效阻止裂纹的扩展。

## Griffith微裂纹理论

- 一般情况下，断裂表面能要比自由表面能大，原因是形成的裂纹是，储存的弹性能除了用来形成新表面，而且还产生了部分的塑性应变、声能、热能等。这些能量也被归结到断裂表面能中去。
- 对于多晶材料，由于裂纹路径不规则，阻力较大，测得的断裂表面能比单晶大。

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- Griffith理论提出后，被认为只适用于脆性材料。
- 上世纪40年代起，发生一系列重大的脆性断裂事故，这些事故与裂纹扩展导致的脆性断裂相关。人们意识到传统的方法难于对断裂进行分析，不能定量地处理问题并直接用于设计。
  - 1940—1945年第二次世界大战期间，美国近千艘全焊接“自由轮”[标准船)发生了1000多次脆性破坏事故。其中238艘完全破坏；
  - 1950年美国北极星导弹固体燃料发动机壳体在试验发射时发生爆炸；
  - 1952年ESSO公司的原油罐因脆性断裂倒塌。
- 上世纪50年代发展了新的力学分支—断裂力学或裂纹力学，主要研究含裂纹物体中的裂纹起源、扩展及其失稳规律的科学。
- 成为指导构件设计、合理选材、事故分析以及寿命分析的一个重要工具。



## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 裂纹的扩展主要有三种形式，其中第一种是主要的形式，也是理论和实验主要的研究对象：

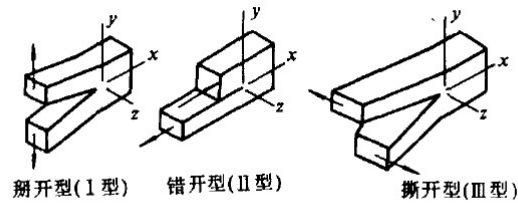


图 2.4 裂纹扩展的三种类型

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

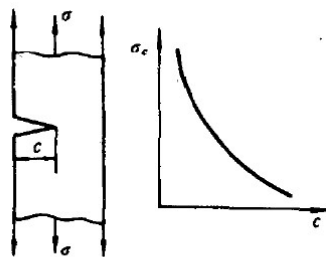


图 2.5 裂纹长度与断裂应力的关系

- 不同裂纹尺寸 $c$ 的试件做拉伸试验，测出断裂应力 $\sigma_c$ 与裂纹长度有如下关系：

$$\sigma_c = Kc^{-\frac{1}{2}}$$

$K$ 与材料、试件尺寸、形状、受力状态等有关的系数。

- 当 $\sigma = \sigma_c$ 或 $K = \sigma_c c^{1/2}$ 材料发生断裂。

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

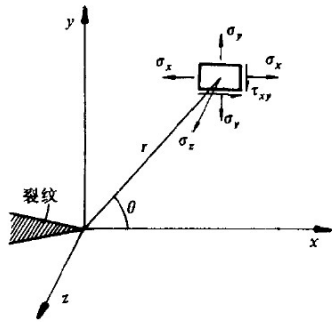


图 2.6 裂纹尖端附近的应力分布

- Irwin应用弹性力学的应力场理论对裂纹尖端附近的应力场进行了分析，对于I型扩展裂纹得到如下结果

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}$$

$K_I$ 为应力场强度因子，与外加应力 $\sigma$ ，裂纹长度 $c$ 和受力状态有关

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 在裂纹尖端处一点，即 $r \ll c$ ， $\theta \rightarrow 0$ 时

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

其中 $\sigma_{yy}$ 为裂纹扩展的动力

- 我们已经推得裂纹尖端应力：

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

- 可以得到

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_A = \frac{2}{\sqrt{\rho}} \sqrt{2\pi r} \sigma \sqrt{c} = Y \sigma \sqrt{c}$$

- $K_I$ 是反映裂纹尖端应力场强度的强度因子。 $Y$ 为几何形状因子，它和裂纹型式、试件几何形状有关。

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 求 $K_I$ 的关键在于求 $Y$ 。求不同条件下的 $Y$ 为断裂力学的内容， $Y$ 可通过试验得到。

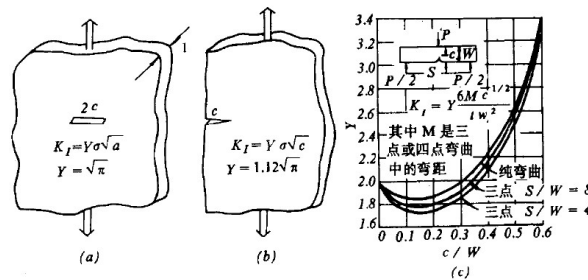


图 2.7 几种情况下的  $Y$  值

$$Y = [1.93 - 3.07(c/W) + 14.5(c/W)^2 - 25.07(c/W)^3 + 25.8(c/W)^4] \quad (\text{三点弯, } S/W=4)$$

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 经典强度理论，设计构件时

$$\sigma \leq [\sigma]$$

$$[\sigma] = \sigma_f / n \text{ 或 } \sigma_{ys} / n$$

其中 $\sigma_f$ 为断裂强度， $\sigma_{ys}$ 为屈服强度， $n$ 为安全系数

- 上述设计方法不能防止低应力下的脆性断裂。
- 根据断裂力学，采用一个新的表征材料特征的临界值—断裂韧性，它也是一个材料常数，即应力场强度因子小于或等于材料的断裂韧性 $K_{Ic}$

$$K_I = Y\sigma \sqrt{c} \leq K_{Ic}$$

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 一种构件，使用应力1.3GPa，可从下面两种材料选，判断一下是否可以安全使用

$$\text{甲钢: } \sigma_{ys} = 1.95\text{GPa}, K_{Ic} = 45\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{乙钢: } \sigma_{ys} = 1.56\text{GPa}, K_{Ic} = 75\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$$

- 经典强度理论，甲钢安全系数大，更为安全

$$\text{甲钢的安全系数: } n = \frac{\sigma_{ys}}{\sigma} = \frac{1.95\text{GPa}}{1.30\text{GPa}} = 1.5$$

$$\text{乙钢的安全系数: } n = \frac{1.56}{1.30} = 1.2$$

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 根据断裂力学的观点，可根据断裂韧性计算断裂应力。假设Y=1.5，最大裂纹尺寸1mm

$$\text{甲钢的断裂应力: } \sigma_c = \frac{45 \times 10^6}{1.5 \sqrt{0.001}} = 1.0\text{GPa}$$

$$\text{乙钢的断裂应力: } \sigma_c = \frac{75 \times 10^6}{1.5 \sqrt{0.001}} = 1.67\text{GPa}$$

- 从断裂力学判断，虽然甲钢具有较高的屈服强度，但是不安全的。

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 形成裂纹时，释放的弹性能

$$W_e = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E} \quad (\text{平面应力状态})$$

- 应变能释放率或裂纹扩展力

$$G = \frac{dW_e}{2dc} = \frac{\pi c \sigma^2}{E}$$

- 临界状态时

$$G_c = \frac{\pi c \sigma_c^2}{E} \quad K_{Ic} = \sqrt{\pi} \sigma_c \sqrt{c}$$

$$\frac{dw_e}{2dc} = \frac{d}{2dc}(4c\gamma) = 2\gamma$$

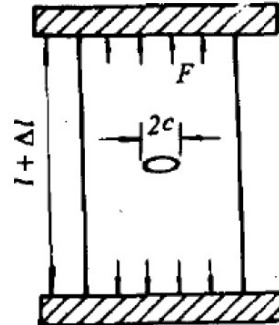
$$G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (\text{平面应力状态})$$

$$K_{Ic} = \sqrt{2E\gamma} \quad (\text{平面应力状态})$$

- 同样得到平面应变状态

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1-\mu^2}}$$

- $K_{Ic}$ 为材料参数，反映了阻止裂纹扩展的能力



## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 已知裂纹长度 $c$ 及断裂应力 $\sigma_c$ ，求该材料的断裂韧性 $K_{Ic}$ 其关键问题是求几何形状因子 $Y$ 。

- 利用不同切口深度 $(c/W)$ 的梁，进行弯曲实验，获得施加的力 $F$ 与试件变形 $\delta$ 的关系曲线，获得试件柔度

$$C = \delta / F$$

- 在缓慢加载下，裂纹扩展时的力为 $F_c$ ，则存储的弹性应变能

$$W_e = \frac{F_c \delta_c}{2} = \frac{1}{2} F_c^2 C$$

- 裂纹扩展动力为

$$G_c = \left( \frac{dW_e}{dA} \right)_c = \frac{1}{2} F_c^2 \left( \frac{dC}{dA} \right)_c = \frac{F_c^2}{2bW} \frac{dC}{d(c/W)}$$

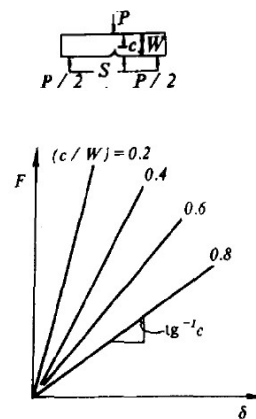


图 2.8 不同相对切口深度下的柔度量测曲线

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- $dC/d(c/W)$  可通过拟合  $C-c/W$  曲线获得。
- 我们已经推导出平面应变状态

$$G_c = \frac{(1 - \mu^2) K_{Ic}^2}{E}$$

- 根据下述关系

$$K_{Ic}^2 = \frac{EG_c}{(1 - \mu^2)}$$

$$K_{Ic}^2 = Y^2 \sigma_c^2 c = Y^2 \sigma_c^2 W \cdot (c/W)$$

- 进一步获得  $Y$  与  $c/W$  的关系规律。

$$\frac{EF_c^2}{(1 - \mu^2) b W} \frac{dC}{d(c/W)} = Y^2 \sigma_c^2 W (c/W)$$

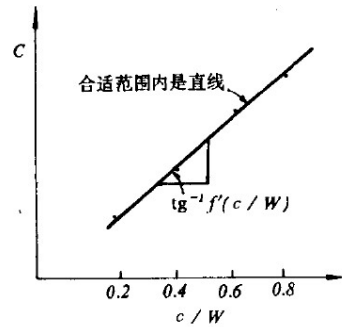
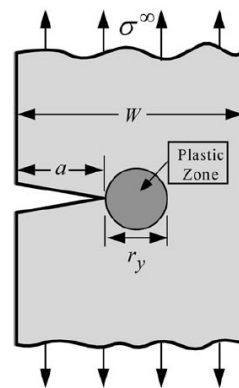


图 2.9  $C-(c/W)$  曲线

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 上面对断裂判据的计算，是由线弹性力学推导出来的。实际上在裂纹前沿附近，由于高度的应力集中，临近临界状态之前就已出现小区域的塑性形变，从而使此区域内的应力状态发生变化。如果此区域的大小与原有裂纹长度等尺寸相差不大，则很难将这种应力状态归结为线弹性的。因此，为了准确地引用由线弹性力学计算出的断裂判据，必须将可能出现的塑性小区域的大小限制在一定范围之内。主要的措施包括：裂纹长度必须超过一定的尺寸以及试样尺寸有一定的要求。



## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 根据Irwin的计算结果，裂纹附近的应力与 $r$ 和 $\theta$ 有关，当 $\theta=0$ 时

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

- 当 $r=r_0$ 时，材料达到屈服应力 $\sigma_y=\sigma_{ys}$ ，对于 $r<r_0$ 的区域为塑性变形区，其应力约为 $\sigma_{ys}$ 。 $r_0$ 可计算为

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

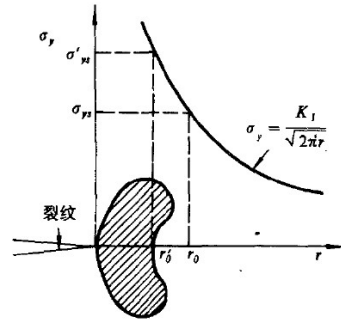


图 2.10 裂纹尖端的塑性变形区

- 对于平面应变状态，实际屈服应力会高一些

$$\sigma'_{ys} = \sqrt{2} \sqrt{2} \sigma_{ys} \quad r'_0 = \frac{1}{4 \sqrt{2} \pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

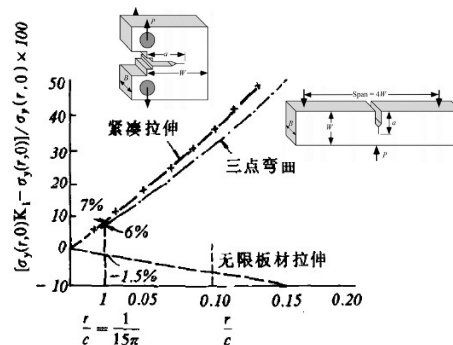


图 2.11 不同试样应力场的近似解与精确解的相对误差

- J. F. Knott计算裂纹附近 $\sigma_y$ 的精确解

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = c_1 f_1(\theta) r^{-1/2} + c_2 f_2(\theta) r^0 + c_3 f_3(\theta) r^{1/2} + c_4 f_4(\theta) r + c_5 f_5(\theta) r^{3/2} + \dots$$

并计算 $\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ ，获得 $\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} \times 100\%$  随 $r/c$ 变化的曲线。

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 当 $r/c < 1/15\pi$ ，精确解与近似解相对误差不大（<6-7%）。
- 如果限制塑性区尺寸，使得 $r/c < 1/15\pi$ ，那么利用近似解计算 $K_I$ 是可行的，所以可得裂纹长度

$$c \geq 15\pi \times (r'_0)_c = 15\pi \times \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

$$= 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

- 如果满足这个条件，则称为小范围塑性形变。制作测试 $K_{Ic}$ 样品时，裂纹的长度不能太短。
- 两个例子：

氧化铝：  $c \geq 2.5 \left( \frac{5}{350} \right)^2 = 0.51 \text{ (mm)}$

钢材  $c \geq 2.5 \left( \frac{120}{1600} \right)^2 = 14 \text{ (mm)}$

## 应力场强度因子和平面断裂韧性

- 对于薄的试样，只受 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ ，则为平面应力状态。在这种情况下，倾斜截面上的剪应力较大，所以发生塑性变形的可能性大，因而发生脆性断裂的倾向就小。这也是研究裂纹尖端塑性区尺寸时，平面应力状态的塑性区尺寸较大的原因。
- 一般试样有足够的厚度，在离试件表面一定距离的内部属于平面应变状态，而前后两个表面则是平面应力状态。表面上的较大的应力状态必然要影响到厚度中间的平面应变状态，因此试样需要足够的厚度和宽度：

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

$$(W - c) \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}} \right)^2$$



## 断裂韧性的测量方法

- 单边直通切口梁法(SENB法): 研究较成熟的一种方法。缺点是受切口钝化的影响, 对于细晶粒瓷, 用这种方法测得的断裂韧性往往偏大。结果受切口宽度的影响很大; 过份要求窄的切口, 切口技术及其效率尚不足以使之广为推行。
- 双扭法: 国际公认比较成熟的方法。裂纹的形状与自然断裂的裂纹一样, 不存在切口模拟问题; 在获得 $K_{Ic}$ 的表达式中, 不必测量临界裂纹长度, 获得的数值较准确。缺点是试件尺寸较大, 而且属于大裂纹, 与陶瓷具体常见的裂纹有差别。
- 山形切口法: 一个山形的切口取代直通切口,  $K_{Ic}$ 的表达式中不需测量临界裂纹长度, 获得的数值较准确。
- 压痕三点弯曲梁法: 压痕较接近于实际材料构件的表面尖锐裂纹,  $K_{Ic}$ 比较接近实际情况。缺点是压痕尺寸的测量受人为判断的影响。

## 单边(直通)切口梁法

- 样品要求: 矩形截面的长条状, 经切、磨、抛光。抛光后光洁度达到 $\nabla 7$ 。保证棱角互相垂直。边棱应纵向倒角 $R0.5$ 。 $B, W$ 尺寸在整个试件长度范围内的变化不应超过 $0.02\text{mm}$ 。用来切切口的金刚石锯片厚度不超过 $0.25\text{mm}$ 。

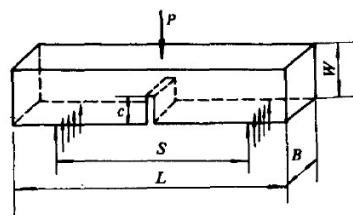


图 2.12 切口梁试件尺寸代号及受力简图

- 试件尺寸:  $c/W=0.4-0.6$ ,  
 $W/S=1/4$ ,  $B \approx 1/2W$
- 加载速率:  $0.05\text{ mm/min}$ 。
- 对于陶瓷, 适用于粗晶陶瓷  
( $20-40\text{微米}$ ), 如果是细晶( $<2-4\text{微米}$ ),  $K_{Ic}$ 偏大。

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{a} Y = \frac{P_c}{B} \frac{S}{W^{3/2}} f(c/W) \quad (\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2})$$

$$f(c/W) = 2.9(c/W)^{1/2} - 4.6(c/W)^{3/2} + 21.8(c/W)^{5/2} - 37.6(c/W)^{7/2} + 38.7(c/W)^{9/2}$$

## 双扭法

- 样品要求：薄片试件，截面长方形，在试件的底面，沿长度方向，在宽度的中点开一条槽，以保证裂纹沿着此槽向后扩展。槽深占厚度的1/3-1/2。
- 试件尺寸：2×24×30 — 2×24×40 (mm<sup>3</sup>)
- 加载：用固定在压头上的两个钢珠施加载荷于试件的前端。试件对称地支承在两条平行于长度方向的均一凸起棱上。加载速度为0.05mm/min。
- 为引导裂纹的出现位置，可在二施力点的中间，于试件边缘上刻一浅缺口，宽约0.3mm，深约为0.5mm。

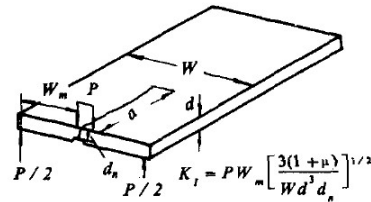


图 2.13 双扭试样

$$K_I = P W_m \left[ \frac{3(1+\mu)}{W d^3 d_n} \right]^{1/2}$$

## 山形切口劈裂试件法

- 试样：在圆棒上预制山形切口（短棒法），为避免避免裂纹出现时能量释放过度集中，常在山形尖端处，用废内圆锯片开一很小的锯口(水平方向)，这样可以避免突然开裂时荷载超过失稳断裂时的临界荷载。
- 加载：规定在拉力试验机上，以0.06 mm/min的加载速度加载，记录最大载荷。
- 其他测试方式：长方体试件（短杆法），预制山形切口，类似的测试，其 $K_{Ic}$ 表达式与短棒法类似。另外可在三点弯曲梁上用山形切口代替直通切口

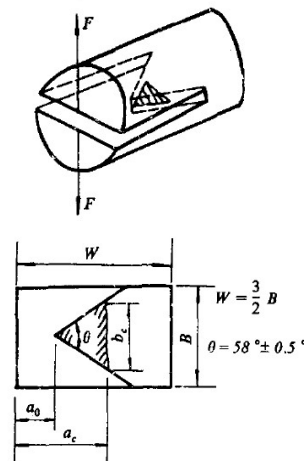


图 2.16 山形切口劈裂试件图

## 山形切口劈裂试件法

- 在加载后，塑性变形和应力集中在尖端，达到极限应力值时，出现裂纹。试件出现裂纹以后，试件总的变形量突增，荷载降低，山形尖端处的应力强度因子减小。小于临界值时，裂纹停止生长。只有荷载再增至新的临界值时，才继续开裂。这个过程(裂—止裂—裂)称为亚临界裂纹扩展。
- 初始开裂时，因为开裂面积的增长率大于裂纹长度的增长率，导致应力减少速率大于裂纹( $\sqrt{c}$ )扩展速率，使 $K_I$ 降低，进一步增加荷载，裂纹再度扩展，直至灾难性开裂。
- 临界应力场强度因子

$$K_{Ic} = \frac{F_c}{B^{3/2} \lg^{1/2}(\theta/2) (1 - \mu^2)^{1/2}} f(a_0/B)$$

$$f(a_0/B) = \frac{B^{3/2}}{2(a_c - a_0)^{1/2}} \left[ \frac{d(CE)}{da} \right]_{a=a_c}^{1/2}$$

$C=y/F$ ,  $y$ 为受力点的位移,  $f(a_0/B)$ 被称为无量纲形状因子,  $a_c$ 为极限裂纹长度, 与材料无关, 只与试件几何形状有关。

## 山形切口劈裂试件法

- 可在三点弯曲梁上用山形切口代替直通切口, 其 $K_{Ic}$ 可表达为

$$K_{Ic} = \frac{F_c}{2W^{3/2} (1 - \mu^2)^{1/2} \lg^{1/2} \frac{\theta}{2}} f(a_0/W)$$

$$f(a_0/W) = 17.959 + 20.807(a_0/W) + 179.543(a_0/W)^2$$

- 在构件或零件上, 利用维氏压头压成正方形的压痕, 当选择压制载荷较大时, 从压痕四角会有裂纹顺着正方形对角线延伸, 如延伸长度 $c$ 大于压痕对角线半长 $a$ 的2.5倍时, 此裂纹将通过压痕深处贯通, 成为相互正交的两条半饼状裂纹, 根据裂纹压痕尺寸, 可算材料的断裂韧性值。

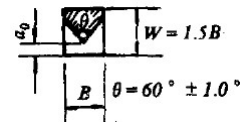
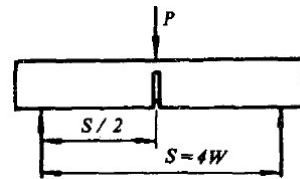


图 2.17 山形切口三点弯曲试件图

$$B:W:L=4:6:24$$

$$\theta=(60\pm 1)^{\circ}$$

$$a_0/W=0.10-0.15$$

## Knoop压痕三点弯曲梁法

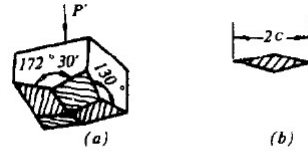


图 2.14 Knoop 压头及压痕形状

- 试样：简支梁试件受拉面的中部，用Knoop压头制造一人工的非贯穿尖锐裂纹。裂纹长度方向垂直于梁的纵轴。制备试样时，w0.5研磨膏在试件表面上抛光，用450—4600 g的压力缓慢地将Knoop压头压在试件表面加载持续30秒，在试件表面留下菱形压痕。
- 加载：三点弯曲。
- 适用于致密的玻璃和陶瓷。

## Knoop压痕三点弯曲梁法

- 应力强度因子：

$$K_I = M_e \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

- 其中 $M_e$ 为一修正因子，由裂纹深度 $a$ 与试件厚度 $t$ 比值计算。
- $Q$ 为裂纹形状因子：

$$Q = \varphi^2 - 0.212 \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2$$

其中 $\sigma_y$ 为屈服应力

$0.212 \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2$  为塑性修正因子，陶瓷约为0

$$\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2} d\theta$$

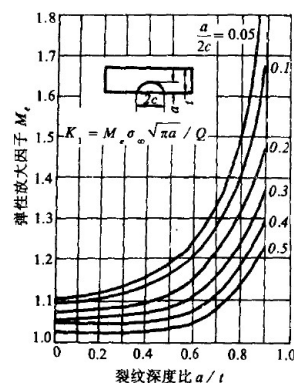


图 2.15 总的表面修正因子曲线

## Knoop压痕三点弯曲梁法

- 由于 $K_{Ic}$ 为常数， $\sigma_c$ 与 $a^{-1/2}$ 成正比
- 采用系列化的压痕载荷，得到一系列 $a$ 与 $c$ ，发现 $a/2c$ 是常数。
- 不同 $a$ 值的系列化试件，分别作三点弯曲试验，拟合 $\sigma_c$ 与 $a^{-1/2}$ 的关系，由斜率可获得 $K_{Ic}$

## 裂纹的起源

- 内部位错等缺陷的导致的裂纹
- 材料制备过程中引起的缺陷，包括气孔、夹杂、分层、烧结过程中各向异性的热膨胀和相变以及异常长大的晶粒
- 材料在运输、装配和使用过程中由于外力和环境作用而产生的缺陷，包括碰撞和接触形成的表面裂纹、使用过程中由于相变、蠕变、热冲击、腐蚀、氧化等原因产生的缺陷

## 裂纹的起源

- 由于晶体微观结构中存在缺陷，当受到外力作用时，在这些缺陷处就会引起应力集中，导致裂纹成核。

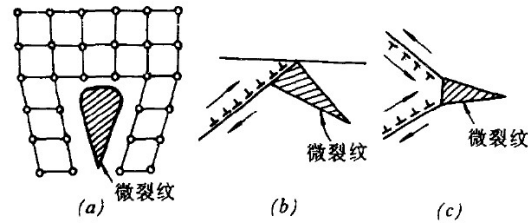


图 2.18 位错形成微裂纹示意图

- (a)位错组合形成的微裂纹；  
 (b)位错在晶界前塞积形成的微裂纹；  
 (c)位错交截形成的微裂纹。

## 裂纹的起源

- 无机材料在制备过程没有达到完全的致密化，产生气孔
- 可简化为椭球形孔洞，近似于球形，应力集中不明显，不是产生裂纹的主要原因
- 如果气孔附近有其他结构缺陷是，比如气孔处于三交晶界处时，由于晶界处结合力弱，应力集中可克服晶界结合力，产生更大裂纹。
- 克服的方法：减少气孔尺寸和保持球形

## 裂纹的起源

- 材料中的夹杂物是裂纹的另一个起源，夹杂物来源于粉体制备和成型以及高温炉炉膛的污染。
- 夹杂物和基体材料间存在热膨胀和弹性形变的失配，在两相界面间产生残余应力，可导致微开裂或者在使用过程中诱发微裂纹。
- 如果基体的热膨胀系数大于夹杂物的热膨胀系数，可能在基体产生微裂纹，陶瓷材料热膨胀系数一般很低，这种情况不多见。
- 如果基体的热膨胀系数小于夹杂物的热膨胀系数，导致两者间的应力，并与界面附近的缺陷相互作用，产生裂纹。极端情况下，夹杂物从基体中剥离，其作用类似于气孔。
- 另外有机增塑剂挥发产生的气孔、压制压力不均匀产生的以及晶粒异常长大，都可成为裂纹的来源

## 裂纹的起源

- 由于热应力形成裂纹。
  - 多晶陶瓷中晶粒取向不同和各向异性，以及多相材料中，会因膨胀系数的不同在晶界或相界导致热应力，产生裂纹。
  - 在制造使用过程中，由高温迅速冷却时，内部和表面的温度差别引起热应力，导致表面生成裂纹。
  - 温度变化时发生晶体结构变化可能因体积变化而引起裂纹。



图 2.19 由于热应力形成的裂纹

### 裂纹的起源

- 材料表面的机械损伤与化学腐蚀形成表面裂纹。裂纹的扩展常常由表面裂纹开始。
  - 有的材料用手触摸新制备的表面就可以将强度降低一个数量级。
  - 从几十厘米高度落下的一粒砂子就能在玻璃面上形成微裂纹。
  - 机械加工可产生径向和侧向裂纹（降低强度），也可产生塑性形变和压应力（对提高强度有利），通常总体效果是降低强度。

表 2.3 不同表面情况对玻璃强度的影响

表 面 情 况	强 度(MPa)
工厂刚制得	45.5
受砂子严重冲刷后	14.0
用酸腐蚀除去表面缺陷后	1750

### 裂纹的快速扩展

- 根据Griffith微裂纹理论，材料的断裂强度不是取决于裂纹的数量，而是决定于裂纹的大小，即由最危险的裂纹尺寸(临界裂纹尺寸)决定材料的断裂强度。
  - 裂纹扩展动力  $G=\pi c\sigma^2/E$  随着c增加增加
  - 阻碍裂纹扩展的阻力  $dW_s/dc=2\gamma$  为常数
  - 裂纹一旦达到临界尺寸开始扩展，c就愈来愈大于 $2\gamma$ 直到破坏。所以对于脆性材料，裂纹的起始扩展就是破坏过程的临界阶段。
- 释放出的多余的能量一方面使裂纹扩展加速(扩展的速度一般可达到材料中声速的40%—60%)，还能使裂纹增殖，产生分枝形成更多的新表面。或使断裂面形成复杂形状、不平整的表面，消耗更多的能量。

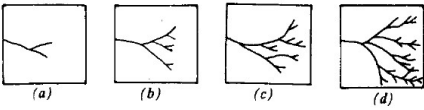


图 2.20 玻璃板在不同负荷下裂纹增殖示意图



## 裂纹的快速扩展

- 防止裂纹扩展的措施：
  - 作用应力不超过临界应力，这样裂纹就不会失稳扩展。
  - 在材料中设置吸收能量的机制也能阻止裂纹扩展。在陶瓷材料基体中加入塑性的粒子或纤维制成金属陶瓷和复合材料。
  - 人为地在材料中造成大量微细的裂纹(小于临界尺寸)也能吸收能量，阻止裂纹扩展。比如一种韧性陶瓷就是在氧化铝中加入氧化锆，利用氧化锆的相变产生体积变化，在基体上形成大量微裂纹或可观的挤压内应力，从而提高材料的韧性。

## 无机材料中裂纹的亚临界生长

- 在使用应力下，裂纹缓慢扩展。这种缓慢扩展也叫亚临界生长，或称为静态疲劳(材料在循环应力或渐增应力作用下的延时破坏叫做动态疲劳)。
- 裂纹尺寸逐渐加大，直至达到临界尺寸而失稳破坏。
- 后果：虽然材料在短时间内可以承受给定的使用应力而不断裂，但如果负荷时间足够长，仍然会在较低应力下破坏。
- 同样材料，负荷时间 $t_1 > t_2 > t_3$ ，测量到的强度 $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$
- 预测构件的寿命十分重要。

## 亚临界生长—应力腐蚀理论

- 裂纹开裂的条件：裂纹扩展动力与裂纹扩展阻力的比较。
- 应力腐蚀理论的出发点是考虑材料长期暴露在腐蚀性环境介质中。在裂纹尖端处的化学键受到破坏，吸附了表面活性物质( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{OH}^-$ 以及极性液体和气体)，使材料的自由表面能降低，减少裂纹扩展阻力，就会导致在低应力水平下的开裂。新的表面没有被腐蚀，阻力增大，裂纹止裂。开始下一个腐蚀-开裂循环。
- 一般陶瓷即使是放置在真空环境中，也会观察到亚临界裂纹生长现象。这种现象被解释是由于陶瓷中存在气孔、微裂纹等先天性缺陷。在试验之前这些缺陷中预先就吸附了水蒸汽、水溶液等介质，因此虽然在真空环境下受力，仍然存在应力腐蚀现象。

## 亚临界生长—应力腐蚀理论

- 由于裂纹的长度缓慢地增加，使得应力强度因子也跟着慢慢增大，一旦达到 $K_{Ic}$ 值，立即发生快速扩展而断裂。

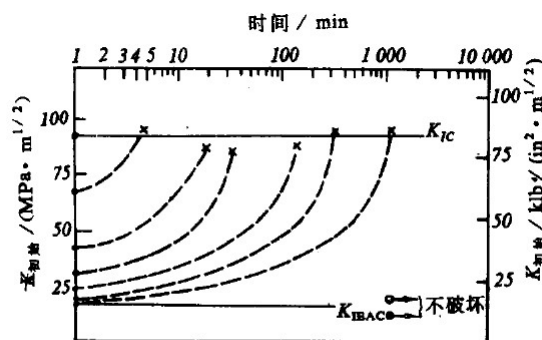


图 2.21  $K$  值随亚临界裂纹增长的变化

## 亚临界生长—应力空腔作用

- 多晶多相陶瓷在高温下长期受力作用时，晶界玻璃相的结构粘度下降，由于该处的应力集中，晶界处于甚高的局部拉应力状态，玻璃相则会发生蠕变或粘性流动，形变发生在气孔、夹杂、晶界层，甚至结构缺陷中。使以上这些缺陷逐渐长大，形成空腔。这些空腔进一步沿晶界方向长大、联通形成次裂纹，与主裂纹汇合就形成裂纹的缓慢扩展
- 用来解释高温下的裂纹扩展。

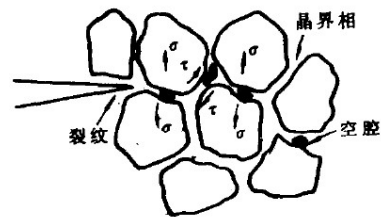


图 2.22 裂纹尖端附近空腔的形成

## 亚临界裂纹生长速率与应力强度因子的关系

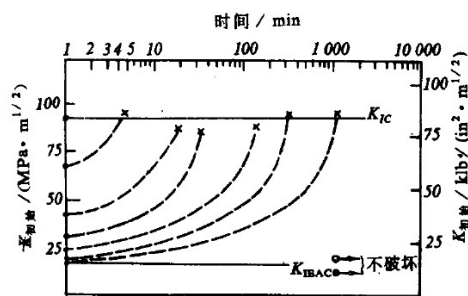


图 2.21  $K$  值随亚临界裂纹增长的变化

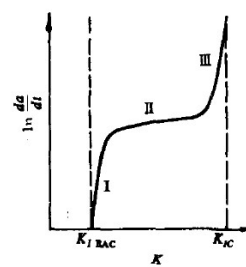


图 2.23 亚临界裂纹扩展的三个阶段示意图

- 裂纹生长速率

$$v = \frac{dc}{dt} = AK^n$$

或

$$\ln v = A + BK_1$$

## 亚临界裂纹生长速率与应力强度因子的关系

- $\ln v = A + BK_I$  可利用另一种方式表达为

$$v = v_0 \exp \left[ -\frac{Q^* - nK_I}{RT} \right]$$

- $V_0$ 为频率因子,  $Q^*$ 为断裂激活能, 与应力无关, 与环境 and 温度有关。
- I区:  $Q^*$ 因环境的影响而下降(应力腐蚀),  $nK_I$ 其主要作用。
- II区: 开裂的裂纹端部没有腐蚀介质,  $Q^*$ 增加, 两项抵消,  $v$ 近似为常数。
- III区:  $Q^*$ 增加后基本不变(近似于真空中裂纹扩展的 $Q^*$ 值)。V与 $nK_I$ 相关

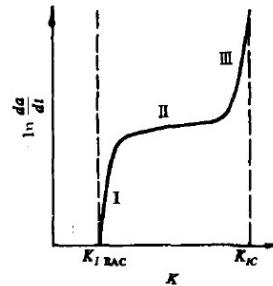


图 2.23 亚临界裂纹扩展的三个阶段示意图

## 亚临界裂纹生长速率与应力强度因子的关系

- 温度低于1200°C,  $n \approx 50$ , I区和III区几乎相连, II区很短, 属于应力腐蚀机理。激活能包括了离子扩散、化学反应以及断裂表面能等贡献。
- 1200-1350°C, 晶界玻璃相的粘度随温度的升高而锐减。玻璃相的粘滞流动其主要作用。在高度应力集中的裂纹尖端, 可引起该处附近空腔的生成, 并随之长大, 连通, 引起裂纹的缓慢扩展。 $K_I$ 的增加不会使 $v$ 增加很多,  $n=1$ 。 $K_I$ 进一步增加, 空腔的连通速度赶不上 $K_I$ 的增长, 属于应力腐蚀机理。
- 超过1350°C, 玻璃相粘度进一步降低, 空腔连通机理。

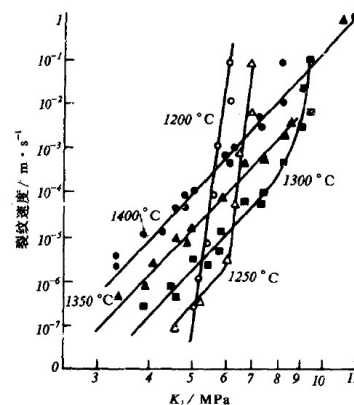


图 2.24  $\text{Si}_3\text{N}_4$  材料的  $v-K_I$  关系(双扭法)

## 亚临界裂纹生长速率与应力强度因子的关系

- 描述一种材料在特定温度下的亚临界裂纹生长特性的参数，一般以I区为准，A、n值。
- 测量方法：
  - 用双扭法、紧凑拉伸法试件测量不同时间的裂纹长度c值，获得v与 $K_I$ 值的对应关系，要求试件尺寸足够大，还需要具备在高温下直接观测试件表面开裂情况的技术。
  - 静态疲劳法（应力疲劳法）：测量受有不同弯曲应力 $\sigma_i$ 的试件的断裂时间 $t_i$ ，经拟合  $t_i = B\sigma_i^{-n}$  获得应力场强度指数n。有时在弯曲试件受拉区中点，用knoop压头制造一条人工裂纹以减少随机误差。
  - 动态疲劳法：在试件上，用不同的加载速率加载，然后测定各自的断裂应力 $\sigma_{fi}$ 。由公式  $\sigma_{fi} = B'\dot{\sigma}_i^{1/(n+1)}$  求出应力场强度指数n

## 亚临界裂纹扩展预测材料寿命

- 根据裂纹的生长速率  $v = \frac{dc}{dt}$

得到 
$$dt = \frac{dc}{v} = \frac{dc}{AK_I^n}$$

- 断裂时间为 
$$t = \int_{c_i}^{c_e} dt = \int_{c_i}^{c_e} \frac{dc}{AK_I^n}$$

- 可将  $K_I = Y\sigma_a c^{1/2}$  代入，得到

$$t = \int_{c_i}^{c_e} \frac{dc}{AY^n \sigma_a^n c^{n/2}} = \frac{2[K_{Ic}^{(2-n)} - K_{Ii}^{(2-n)}]}{(2-n)AY^2 \sigma_a^2}$$

- 一般而言，n比较大， $K_{Ii}^{(2-n)} \gg K_{Ic}^{(2-n)}$

- 得到 
$$t = \frac{2K_{Ii}^{(2-n)}}{(n-2)AY^2 \sigma_a^2}$$
 预测寿命的需要获得参数A和n

## 亚临界裂纹扩展预测材料寿命

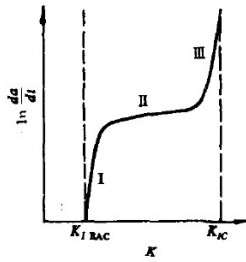


图 2.23 亚临界裂纹扩展的三个阶段示意图

- 根据不同 $K_{II}$ 下的裂纹扩展速率 $v$ ，可根据

$$v = \frac{dc}{dt} = AK^n$$

获得A 和n

## 亚临界裂纹扩展预测材料寿命

- 无损探伤法：利用 $\gamma$ 射线法或超声显微镜，测出样品的裂纹长度。淘汰那些裂纹尺寸显然大于允许长度 $c_{all}$ 的不合格制品。根据 $c_{all}$ 算出的 $K_{II}$ ，根据公式可以得到使用寿命。小于 $c_{all}$ 的试件，寿命更长。
- 问题：这些测试方法能够测出的最小裂纹长度 $c_0$ 要大于 $c_{all}$
- 可将

$$t = \frac{2K_{II}^{(2-n)}}{(n-2)AY^2\sigma_a^2}$$

$$\text{改写成} \quad t = \frac{2Y^{(2-n)}\sigma_a^{(2-n)}c_i^{(2-n)/2}}{(n-2)AY^2\sigma_a^2} = \frac{2Y^{(2-n)}}{A(n-2)}\sigma_a^{-n}c_i^{(2-n)/2}$$

可以得到不同 $c_i$ 下的t

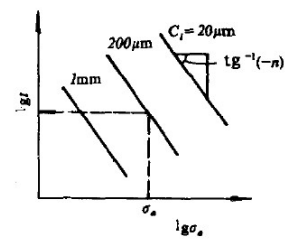


图 2.25 不同  $c_i$  下  $t$ - $\sigma_a$  关系图

## 亚临界裂纹扩展预测材料寿命

- 保证实验法: 每批制品中, 每个制品均按实际工作时的受力方式, 施加一个检验应力 $\sigma_p$ 。 $\sigma_p$ 应超过该制品实际要求的工作应力 $\sigma_a$ , 但不应达到临界应力 $\sigma_c$ 。淘汰那些已达临界状态以及明显出现裂纹亚临界扩展的制品。
- 原理:  $\sigma_a < \sigma_p < \sigma_c$

同样的 $c_i$ 和 $Y$ 情况下  $K_{Ii} < K_{Ip} < K_{Ic}$

由  $K_{Ip} = \sigma_p Y c_i^{1/2}$  和  $K_{Ic} = \sigma_c Y c_i^{1/2}$

得到  $K_{Ii} = \sigma_a \times \frac{K_{Ip}}{\sigma_p} < \frac{\sigma_a}{\sigma_p} \times K_{Ic}$

代入  $t = \frac{2K_{Ii}^{(2-n)}}{(n-2)AY^2\sigma_a^2}$

得到  $t_c = \frac{2K_{Ic}^{(2-n)} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_p} \right)^{(2-n)}}{(n-2)AY^2\sigma_a^2} < t$

$\sigma_p$  越大,  $t_c$  越大, 淘汰率也越大

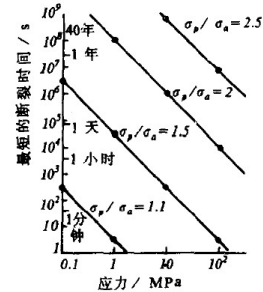


图 2.26 瓷器的保证试验图

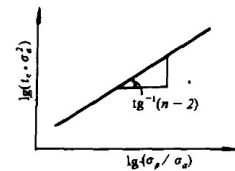


图 2.27 另一种保证试验图

## 蠕变断裂

- 多晶材料一般在高温环境中。在恒定应力作用下由于形变不断增加而断裂。这称为蠕变断裂。高温下主要的形变是晶界滑动, 因此蠕变断裂的主要形式是沿晶界断裂。
- 机理:
  - 高温下晶界玻璃相粘度降低, 在剪应力作用下发生粘性流动, 在晶界处应力集中, 如果使相邻晶粒发生塑性形变而滑移, 则将使应力弛豫, 宏观上表现为高温蠕变。如果不能使邻近晶粒发生塑性形变, 则应力集中产生裂纹。这种裂纹逐步扩展导致断裂。
  - 空位聚积理论: 在应力及热振动作用下, 受拉的晶界上空位浓度大大增加。空位大量聚积, 形成可观的真空空腔并发展成微裂纹。这种微裂纹逐步扩展连通就导致断裂。
- 影响因素: 温度愈低, 应力愈小, 蠕变断裂所需的时间愈长。是一种高温下, 较低应力水平的亚临界裂纹扩展。

## 显微结构对脆性断裂的影响

- 晶粒尺寸：越小强度越高
  - 晶界比晶粒内部弱，比如 $\text{Al}_2\text{O}_3$ 陶瓷晶粒的断裂表面能 $\gamma_{\text{cry}}=46 \text{ J/cm}^2$ ， $\gamma_{\text{int}}=18 \text{ J/cm}^2$ ，所以多晶材料破坏多是沿晶界断裂。细晶材料晶界比例大，沿晶界破坏时，裂纹的扩展要走迂回曲折的道路。
  - 晶粒尺寸限制了初始裂纹尺寸，晶粒越细，初始裂纹尺寸越小。
- 实验发现，多晶材料断裂强度 $\sigma_f$ 与晶粒尺寸 $d$ 可以用以下关系式表达

$$\sigma_f = \sigma_0 + K_1 d^{-1/2}$$

- 如果起始裂纹受晶粒限制，其尺度与晶粒度相当，强度 $\sigma_f$ 与晶粒尺寸 $d$ 关系可表达为

$$\sigma_f = k_2 d^{-1/2}$$

表 2.4 几种无机材料的断裂强度

材 料	晶粒尺寸 ( $\mu\text{m}$ )	气孔率 (%)	强度 (MPa)
高铝砖(99.2% $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	—	24	13.5
烧结 $\text{Al}_2\text{O}_3$ (99.8% $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	48	~0	266
热压 $\text{Al}_2\text{O}_3$ (99.9% $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	3	<0.15	500
热压 $\text{Al}_2\text{O}_3$ (99.9% $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	<1	~0	900
单晶 $\text{Al}_2\text{O}_3$ (99.9% $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	—	0	2000
烧结 MgO	20	1.1	70
热压 MgO	<1	~0	340
单晶 MgO	—	0	1300



## 显微结构对脆性断裂的影响

- 气孔：气孔减小了负荷面积，在气孔邻近区域应力集中，减弱材料的负荷能力，使得无机材料的弹性模量和强度都有所降低。
- 断裂强度 $\sigma_f$ 与气孔率关系：

$$\sigma_f = \sigma_0 \exp(-nP)$$

$n=4-7$ ， $\sigma_0$ 与是没有气孔的情况下的强度

- 如果将晶粒和气孔结合考虑，可表示为

$$\sigma_f = (\sigma_0 + k_1 d^{-1/2}) e^{-nP}$$

- 气孔的形状及分布也很重要。通常气孔多存在于晶界上，这是特别有害的，它往往成为开裂源。
- 在存在高的应力梯度时(例如由热震引起的应力)，气孔能起到容纳变形，阻止裂纹扩展的作用。
- 存在杂质和弹性模量较低的第二相的，也会使强度降低。

## 无机材料强度的统计分析

- 根据Griffith裂纹理论，

$$K_{Ic} = Y\sigma_c \sqrt{c}$$

临界应力 $\sigma_c$ 与最长的裂纹 $c$ 相关。

- 裂纹的长度在材料内的分布是随机的，有大有小，导致临界应力 $\sigma_c$ 也有大有小，具有分散的统计性。
- 试件中具有一定长度 $c$ 的裂纹几率与体积有关，因此强度还与试件的体积有关—尺寸效应。
- 材料强度还和裂纹的分布函数有关。裂纹的大小、疏密使得有的地方 $\sigma_c$ 大，有的地方 $\sigma_c$ 小。
- 应力分布还与受力方式有关，例如，同一种材料，抗弯强度比抗拉强度高。这是因为前者的应力分布不均匀，提高了断裂强度。

## 无机材料强度的统计分析

- 将一个体积为V的试件分成若干个体积为 $\Delta V$ 的体积元，其断裂强度分别为 $\sigma_{c0}, \sigma_{c1} \dots \sigma_{cn}$ ，得到强度分布曲线。
- 发生断裂的几率

$$P_{\Delta V} = \Delta V n(\sigma)$$

- 不断裂几率

$$1 - P_{\Delta V} = 1 - [\Delta V n(\sigma)] = Q_{\Delta V}$$

$$Q_V = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{-Vn(\sigma)}{r} \right]^r = e^{-Vn(\sigma)}$$

- N个试件，将断裂强度，从大到小排列（ $\sigma_1 \dots \sigma_n$ ），获得小于 $\sigma_n$ 的断裂几率S（即 $P_V$ ）为

$$S = \frac{n - 0.5}{N} \left( \text{或 } S = \frac{n}{N + 1} \right)$$

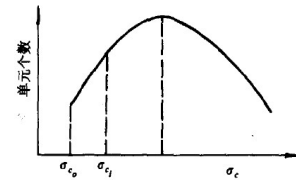


图 2.29 断裂强度分布图

## 无机材料强度的统计分析

- 应力分布函数和韦伯分布

$$P_V = S = 1 - Q_V = 1 - e^{-Vn(\sigma)}$$

$$1 - S = e^{-Vn(\sigma)}$$

$$\frac{1}{1 - S} = e^{Vn(\sigma)}$$

$$\ln \frac{1}{1 - S} = Vn(\sigma)$$

所以

$$n(\sigma) = \frac{1}{V} \ln \frac{1}{1 - S}$$

- 对于 $n(\sigma)$ ，韦伯提出的半经验公式

$$n(\sigma) = \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \right)^m$$

$\sigma_0$ 为最小断裂强度， $m$ 为韦伯模数，越大，强度的分散性越小， $\sigma_0$ 为经验常数

## 无机材料强度的统计分析

- 获得 $m$ 和 $\sigma_0$

$$\ln \frac{1}{1-S} = Vn(\sigma) = V \times \frac{(\sigma - \sigma_*)^m}{\sigma_0^m}$$

$$\lg \lg \frac{1}{1-S} = \lg 0.4343 + \lg V + m \lg(\sigma - \sigma_*) - m \lg \sigma_0$$

$$1-S = 1 - \frac{n}{N+1} = \frac{N+1-n}{N+1}$$

$$\lg \lg \left( \frac{N+1}{N+1-n} \right) = \lg 0.4343 + \lg V + m \lg(\sigma - \sigma_*) - m \lg \sigma_0$$

- 根据实验的 $N$ ,  $n$ ,  $\sigma_i$ , 选定合适的 $\sigma_u$ , 画

$$\lg(\sigma - \sigma_*) - \lg \lg \left( \frac{N+1}{N+1-n} \right)$$

关系曲线, 得到直线, 斜率为 $m$ , 截距为  $\lg 0.4343 + \lg V - m \lg \sigma_0$

- 断裂几率为  $S = 1 - e^{-\frac{V(\sigma - \sigma_*)^m}{\sigma_0^m}}$

## 无机材料强度的统计分析

- $V$ 为有效体积, 是指试件中可能开裂的那部分体积。比如点弯曲试件, 真正可能出现开裂的体积仅指位于跨度中点, 且占很小部分的受拉应力区域。
- $V$ 还与材料的韦伯模数 $m$ 有关。当然在实际计算时, 所选用的 $m$ 值只是估计值, 待整个问题解决之后, 再用求得的 $m$ 值加以修正。
- 三点弯试件  $V = \frac{V_T}{2(m+1)^2}$

$$\text{四点弯试件 } V = \frac{V_T(m+2)}{4(m+1)^2}$$

$V_T$ 为整个试件体积

## 韦伯统计应用实例

- 下表组热压 $\text{Al}_2\text{O}_3$ 瓷的断裂强度（通过三点弯测量）的数据。试件的体积为 $5\text{cm}^3$ ，问经过统计处理后如果保证率(不断裂的几率)为95%，选用的断裂强度是多少？

表 2.5 韦伯模数计算表

顺序号 $n$	断裂几率 $S = \frac{n}{N+1}$	断裂强度 $\sigma \times 10^{-8}$ (Pa)	$\frac{N+1}{N+1-n}$	$\lg \lg \frac{N+1}{N+1-n}$ $u$	$(\sigma - \sigma_u)$ $\times 10^{-8}$ (Pa)	$\lg(\sigma - \sigma_u)$
1	0.125	4.5	1.14	-1.2366	0.5	-0.3010
2	0.25	4.7	1.33	-0.9033	0.7	-0.1549
3	0.375	4.8	1.60	-0.6901	0.8	-0.097
4	0.5	5.0	2.00	-0.5214	1.0	0
5	0.625	5.2	2.67	-0.3706	1.2	0.0790
6	0.75	5.2	4.00	-0.2204	1.2	0.0790
7	0.875	5.6	8.00	-0.0443	1.6	0.2040

$N=7$ , 选得  $\sigma_u = 4.0 \times 10^8 \text{Pa}$

## 韦伯统计应用实例

- 过程:
- 首先分别计算  $\lg \lg \frac{N+1}{N+1-n}$  和  $\lg(\sigma - \sigma_u)$   
画出两者的关系图。适当调整 $\sigma_u$ ，使两者尽量保持直线关系。获得斜率 $m=2.432$ ，截距 $-0.505$
- 利用获得的截距计算 $\sigma_0$   
 $-0.505 = \lg 0.4343 + \lg V - 2.432 \lg \sigma_0$   
其中

$$V = \frac{5}{2(2.5+1)^2} = 0.204$$

获得  $\sigma_0 = 0.5954$

- 最后得到  $S = 1 - e^{-0.204 \times \left( \frac{\sigma - 4.0}{0.5954} \right)^{2.432}}$
- 将 $S=0.05$ 代入上式，得到 $\sigma=433.7$  MPa

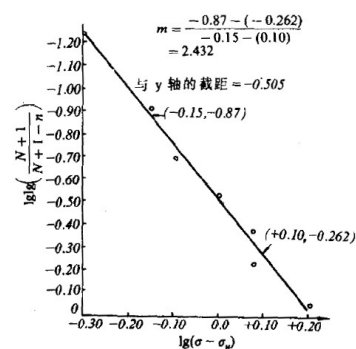


图 2.31 韦伯断裂几率图

## 两参数韦伯分布和应用

- 如果将下式中的 $\sigma_u$ 设为0

$$S = 1 - e^{-\frac{V(\sigma - \sigma_u)^n}{\sigma_0^n}}$$

得到两参数韦伯分布

$$S = 1 - e^{-v\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m}$$

这种情况下获得的 $m$ 值会偏大。

- 有时利用 $\lg \lg(1/(1-S)) \sim \lg \sigma$ 关系拟合曲线，可以得到多段直线，可解释为不同缺陷机理对强度的影响。

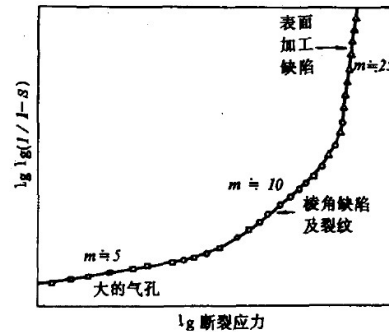


图 2.33 不同缺陷在韦伯分布上的表现

## 提高无机材料强度和改进材料韧性的途径

- 在晶体结构稳定的情况下，控制强度的主要参数有三个，即弹性模量 $E$ 、断裂功(断裂表面能) $\gamma$ 和裂纹尺寸 $c$ 。

$$K_{Ic} = \sqrt{2E\gamma}$$

$$K_I = \sqrt{\pi \sigma} \sqrt{c}$$

- $E$ 是非结构敏感的。 $\gamma$ 与微观结构有关，但单相材料的微观结构对 $\gamma$ 的影响不大。唯一可以控制的是材料中的微裂纹，可以把微裂纹理解为各种缺陷的总和。

### 提高无机材料强度和改进材料韧性的途径

- 微晶、高致密度与高纯度
  - 提高晶体的完整性，细、密、匀、纯是当前陶瓷发展的一个重要方面，可以减少缺陷。近年来出现了许多微晶、高致密度、高纯度陶瓷，例如用热压工艺制造的 $\text{Si}_3\text{N}_4$ 陶瓷，密度接近理论值，几乎没有气孔。
  - 将块体材料制成纤维，强度大约可提高一个数量级，制成晶须则提高两个数量级，与理论强度的大小同数量级。晶须提高强度的主要原因之一就是提高了晶体的完整性

表 2.8 几种无机材料的块体、纤维及晶须的抗拉强度比较

材 料	抗 拉 强 度 (GPa)		
	块 体	纤 维	晶 须
$\text{Al}_2\text{O}_3$	0.28	2.1	21
BeO	0.14(稳定态)	—	13.3
$\text{ZrO}_2$	0.14(稳定态)	2.1	—
$\text{Si}_3\text{N}_4$	0.12~0.14 (反应烧结)	—	14

### 提高无机材料强度和改进材料韧性的途径

- 提高抗裂能力与预加应力
  - 脆性断裂通常是在拉应力作用下，从表面开始断裂。如果在表面造成一层残余压应力层，则在材料使用过程中，表面受到拉伸破坏之前首先要克服表面上残余压应力，则会提高抗拉强度。
  - 通过加热、冷却，在表面层中人为地引入残余压应力过程叫做热钢化。主要用玻璃玻璃增韧，近年也用于陶瓷材料。将 $\text{Al}_2\text{O}_3$ 在 $1700^\circ\text{C}$ 下于硅油中淬冷，强度就会提高。淬冷不仅在表面造成压应力，而且还可使晶粒细化。
  - 过程：将玻璃加热到转变温度以上，熔点以下，然后淬冷。

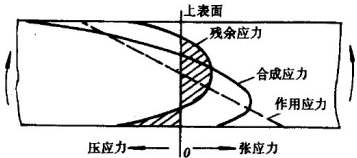


图 2.34 热钢化玻璃板受横向弯曲荷载时，残余应力、作用应力及合成应力的分布

## 提高无机材料强度和改进材料韧性的途径

- 化学强化（离子交换）法

- 这种技术是通过改变表面化学的组成，使表面的摩尔体积比内部的大。由于表面体积膨大，受到内部材料的限制，就产生压应力。可以认为这种表面压力和体积变化的关系近似服从虎克定律

$$\sigma = K \times \frac{\Delta V}{V} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \times \frac{\Delta V}{V}$$

- 通常是用一种大的离子置换小的离子。由于受扩散限制及受带电离子的影响，压力层厚度被限制在数百微米内。化学强化的应力分布，通常不是抛物线，而是在内部存在一个小的接近平直的拉应力区，到化学强化区突然变为压应力。表面压应力与内部拉应力之比可达数百倍。
- 将表面抛光及化学处理以消除表面缺陷也能提高强度。

## 提高无机材料强度和改进材料韧性的途径

- 相变增韧

- 利用多晶多相陶瓷中某些相成分在不同温度的相变，从而增韧的效果，这统称为相变增韧。ZrO<sub>2</sub>由四方相转变为单斜相，可吸收能量，起到增韧效果。
- 如部分稳定ZrO<sub>2</sub>(PSZ)，四方ZrO<sub>2</sub>多晶陶瓷(TZP)，ZrO<sub>2</sub>增韧Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>陶瓷(ZTA)，ZrO<sub>2</sub>增韧莫来石陶瓷(ZTA)，ZrO<sub>2</sub>增韧尖晶石陶瓷，ZrO<sub>2</sub>增韧钛酸铝陶瓷，ZrO<sub>2</sub>增韧Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>陶瓷，增韧SiC以及增韧SiAlON等。可获得很高的K<sub>IC</sub>，但温度升高，增韧失效。

- 弥散增韧

- 在基体中加入金属微细粉，利用其塑性变形，来吸收弹性应变能的释放，从而增加了断裂表面能，改善了韧性。
- 亦可加入非金属颗粒，在烧结或热压时，多半存在于晶界相中，以其高弹性模量和高温强度增加了整体的断裂表面能，特别是高温断裂韧性。
- 粉体弥散相和基体之间需要好的化学相容性和物理润湿性，在烧结后成为完整的整体，不产生有害的第三种物质。

- 添加纤维提高强度

## 复合材料

- 在一种基本材料中加入另一种粉体材料或纤维材料制成复合材料是提高强度和改善脆性的有效措施。
  - 在陶瓷中加入金属粉末制成金属陶瓷，通过金属的塑性形变吸收一部分能量达到强化的目的。
  - 在陶瓷中加入高弹性模量的纤维，纤维均布于陶瓷中。受力时，由于纤维的强度及弹性模量高，大部分应力由纤维承受，减轻了陶瓷的负担。
  - 纤维还可以阻止裂纹扩展。
- 钨芯碳化硅纤维强化氮化硅，断裂功从 $1\text{J/m}^2$ 提高到 $9 \times 10^2\text{J/m}^2$ ；用碳纤维增强石英玻璃，抗弯强度为纯石英玻璃的12倍，抗冲击强度提高40倍，断裂功提高2—3个数量级。

## 复合材料

- 设计复合材料，达到强化作用的原则：
  - 应选用强度及弹性模量比基体高的纤维。因为在受力情况下两者应变相同时，纤维与基体所受的应力之比等于二者弹性模量之比，使纤维尽可能多地承担外加负荷。
  - 二者的结合强度适当，两者结合强度太弱甚至为零，这时纤维毫无作用，如基体中存在大量气孔群一样，强度反而降低；如果结合太强，虽可分担大部分应力，但在断裂过程中没有纤维自基体拔出这种吸收能量的作用，材料发生脆性断裂。
  - 纤维在基体中的排列是一个重要因素。应力作用的方向应与纤维平行，才能发挥纤维的作用，排列方式可以是单向、十字交叉或按一定角度交错以及三维空间编织。
  - 纤维与基体的热膨胀系数匹配，最好是纤维的热膨胀系数略大于基体的。这样，复合材料在烧成、冷却后纤维处于受拉状态而基体处于受压状态，起到预加应力的作用。
  - 高温下的化学相容性好。必须保证高温下不发生纤维性能降低的化学反应。



## 连续纤维单向强化复合材料的强度

- 基体和纤维的应变相同，复合材料的弹性模量 $E_c$ 和强度 $\sigma_c$ 分别为（上限值）

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m$$

$$V_f + V_m = 1$$

$E_f$ 、 $\sigma_f$ 、 $V_f$ 分别为纤维的弹性模量、强度和体积分数； $E_m$ 、 $\sigma_m$ 、 $V_m$ 分别为基体的弹性模量、强度和体积分数

- 当基体的应变决定了复合材料的应变时，可得复合材料强度的下限

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_f}{E_f}$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left[ 1 + V_f \left( \frac{E_f}{E_m} - 1 \right) \right]$$

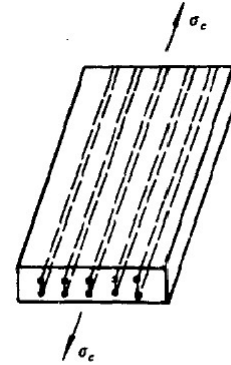


图2.35 连续纤维单向强化复合材料的纤维排列及受力情况

## 连续纤维单向强化复合材料的强度

- 脆性材料纤维增强延性材料基体的复合材料， $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ ，复合材料的应力-应变曲线可分为两个区

- I区（弹性区）：

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{mr}$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m$$

- II区：

$$E_c(\varepsilon) = E_f V_f + \left[ \frac{d\sigma_m(\varepsilon)}{d\varepsilon_m} \right] V_m$$

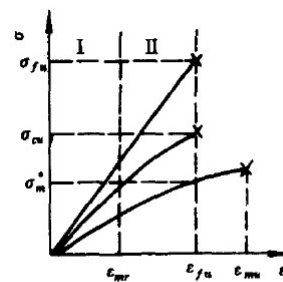


图 2.36 纤维、基体及复合材料的应力应变曲线

## 连续纤维单向强化复合材料的强度

- 在第II区末尾，材料发生破坏此时决定了复合材料的强度

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + \sigma_m^* V_m = \sigma_{fu} V_f + \sigma_m^* (1 - V_f)$$

- 当 $\sigma_{cu} = \sigma_{mu}$ 时，为临界点，B点被称为等破坏点

$$\sigma_{mu} = \sigma_{fu} V_{f\text{临界}} + \sigma_m^* V_m$$

$$V_{f\text{临界}} = \frac{\sigma_{mu} - \sigma_m^*}{\sigma_{fu} - \sigma_m^*}$$

只有当 $V_f > V_{f\text{临界}}$ 时，才能起到增强作用。

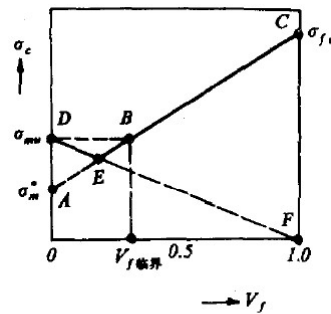


图 2.37  $\sigma_{cu}$  与  $V_f$  的关系

## 连续纤维单向强化复合材料的强度

- 当基体是脆性材料 $\varepsilon_{mu} < \varepsilon_{fu}$ ， $\varepsilon_c = \varepsilon_{mu}$ 时，复合材料断裂，纤维承担了所有的应力，增加的应力为

$$\Delta\sigma_f = \frac{\sigma_{mu} V_m}{V_f}$$

- 如果 $\Delta\sigma_f < \sigma_{fu} - \sigma_f'$ ，时，纤维没有断裂，复合材料仍未完全断裂

$$\Delta\sigma_f = \frac{\sigma_{mu}(1 - V_f)}{V_f}$$

$$V_f = \frac{\sigma_{mu}}{\sigma_{mu} + \Delta\sigma_f}$$

- 临界时  $\Delta\sigma_f = \sigma_{fu} - \sigma_f'$

$$V_{f\text{临界}} = \frac{\sigma_{mu}}{\sigma_{mu} + \sigma_{fu} - \sigma_f'}$$

- 如果  $\sigma_{fu} \gg \sigma_f' \gg \sigma_{mu}$ ，则  $V_{f\text{临界}} \approx \frac{\sigma_{mu}}{\sigma_{fu}}$

## 短纤维单向强化复合材料的强度

- 与连续纤维不同，短纤维的长度需要达到临界长度 $l_c$ 才可以起到强化效果。
- 力学平衡条件：表面受的剪切力与截面受到的拉力平衡。
- 临界情况：

$$\tau_{my} \pi d \frac{l_c}{2} = \sigma_{fy} \times \frac{\pi d^2}{4}$$

$$l_c = \frac{\sigma_{fy}}{2\tau_{my}} \times d$$

其中 $\tau_{my}$ 为界面结合强度或屈服强度  
 $\sigma_{fy}$ 为纤维屈服强度。

- $l=10 l_c$ ，可达到连续纤维强化效果95%

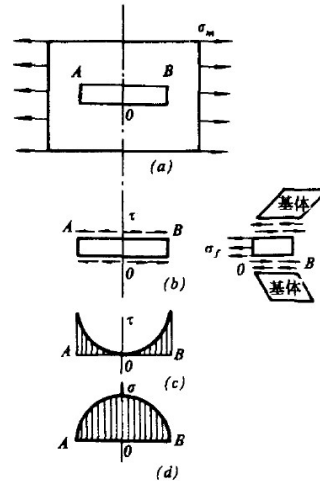


图 2.38 纤维与基体的共同作用

## 无机材料的硬度

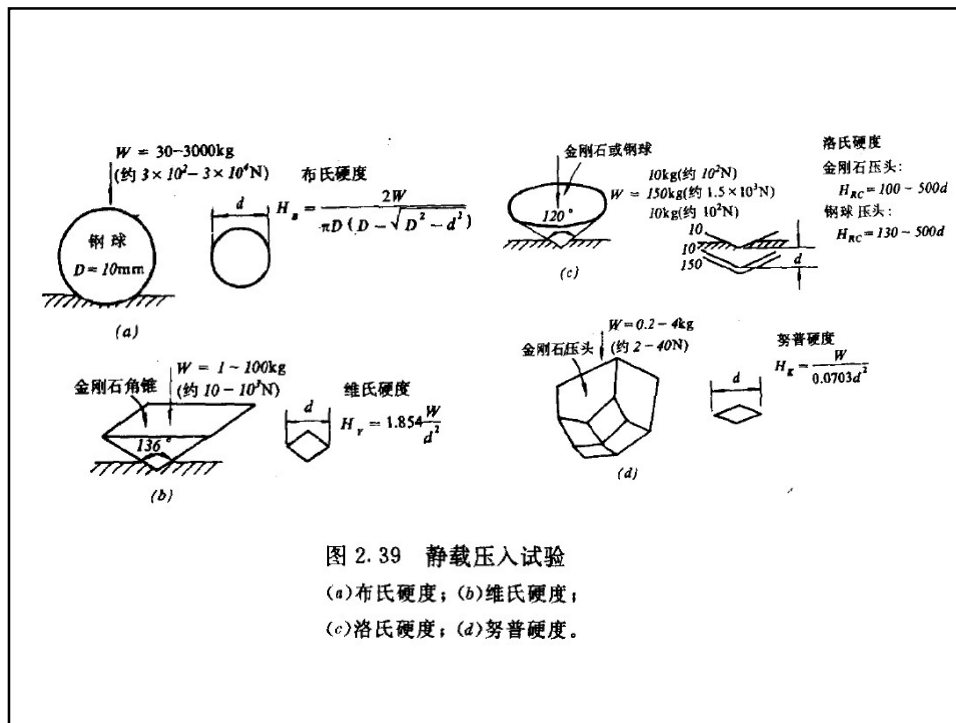
- 局部抵抗硬物压入其表面的能力。在实际应用中，由于测量方法不同，硬度所代表的材料性能也各异。
  - 金属材料常用的硬度测量方法是在静荷载下将一个硬的物体压入材料，硬度主要仅反映材料抵抗塑性形变的能力。
  - 陶瓷、矿物材料使用的压痕硬度反映材料抵抗破坏的能力。
  - 各种硬度测试方法单位不同，彼此间没有固定的换算关系。
- 陶瓷及矿物材料常用的划痕硬度叫做莫氏硬度，它只表示硬度由小到大的顺序。不表示软硬的程度。后面的矿物可划破前面的矿物表面。共10级或15级。
- 矿物、晶体和陶瓷材料的硬度取决于其组成和结构。离子半径越小，电价愈高，配位数越小，结合能就越大，抵抗外力摩擦、刻划和压入的能力也就愈强，所以硬度就较大。陶瓷材料的显微结构、裂纹、杂质等都对硬度有影响。温度升高，硬度下降。

表 2.9 莫氏硬度顺序

顺 序	材 料	顺 序	材 料
1	滑石	1	滑石
2	石膏	2	石膏
3	方解石	3	方解石
4	萤石	4	萤石
5	磷灰石	5	磷灰石
6	正长石	6	正长石
7	石英	7	SiO <sub>2</sub> 玻璃
8	黄玉	8	石英
9	刚玉	9	黄玉
10	金刚石	10	石榴石
		11	熔融氧化锆
		12	刚玉
		13	碳化硅
		14	碳化硼
		15	金刚石

# 无机材料的硬度

- 硬度可以通过静载压入的方法测量，常用包括布氏硬度、维氏硬度、洛氏以及努普硬度法。这些方法的原理都是在静压下将一硬的物体压入被测物体表面。以表面压入凹面单位面积上的荷载或者压入的深度表示被测物体的硬度。
  - 布氏硬度法主要用于金属材料中较软及中等硬度的材料，很少用于陶瓷。
  - 维氏硬度法及努普硬度法都适用于较硬的材料，也用于测量陶瓷的硬度
  - 洛氏硬度法的适用范围较广，采用不同的压头和负荷可以得到15种标准洛氏硬度。
  - 显微硬度法测量。其原理和维氏硬度法一样，但其荷载只有1—200克，其d值只有几个微米，适用于测量脆性材料。
- 肖氏硬度：测试原理是将冲头从固定的高度落在试样的表面上，冲头将回弹一定的高度，根据弹起高度计算肖氏硬度。



## Vicker压痕法测定无机材料的断裂韧性

- 用Vicker压头，在抛光的陶瓷材料试件表面上压出压痕。由于陶瓷性脆，在正方形压痕的四角，沿辐射方向出现裂纹，压痕对角线方向的剖面接近半圆形，需要 $c \geq 2.5a$ 。
- 根据不同荷载下 $c$ 与 $a$ 的关系，并应用直接法测得的 $K_{Ic}$ 值，可拟合出适用于这类材料的Vicker压痕法计算公式。并可以利用测出的 $c$ 和 $a$ 值，获得相关材料的 $K_{Ic}$ 。

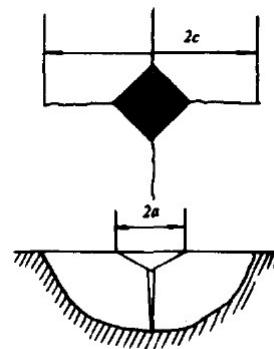


图 2.40 Vicker 压痕及裂纹示意

## Vicker压痕法测定无机材料的断裂韧性

- 1976年，A. G. Evans和E. A. Charles首先提出了c与a的关系式

$$K_{Ic}\Phi/H \sqrt{a} = F_1(c/a)F_2(\nu, \mu, R_g/a)$$

$K_{Ic}$ 为断裂韧性，H为材料的维氏硬度； $\nu$ 为泊松比， $R_g$ 为塑性变形区半径， $\mu$ 为压头与材料间的摩擦系数， $\Phi$ 约束因子（ $\approx 3$ ）， $F_1$ 和 $F_2$ 为实验确定的函数。

- Evans关系式，用于陶瓷的离散性比较大

$$K_{Ic}\Phi/H \sqrt{a} = 0.15k(c/a)^{-3/2}$$

k是 $F_2$ 与有关的修正系数，约为3.2

- J. Lankford提出的改进后的Evans关系式

$$(H/E\Phi)^{0.4}(K_{Ic}\Phi/H \sqrt{a}) = 0.129(c/a)^{-3/2}$$

- 减少压痕法的误差除了准确测量a，c值外，关键是对不同材料应选择各自适用的关系式。

## Vicker压痕法测定无机材料的断裂韧性

- 应用Vicker压痕法的具体步骤：
  - 选择与构件的成分工艺相同的材料制备直接法 $K_{Ic}$ 值的试件。测得这类材料的 $K_{Ic}$ ，E，H等值。
  - 在试件抛光(到0.5微米)的表面上，在2—50Kg 不等的荷载下(选择较小的荷载时，要能保证 $c/a > 2.5$ 的要求)，在维氏硬度试验机上求出一系列的c，a 值。
  - 在同一荷载下，除去反常数据，至少应有6—7组数值，求其平均值。按下式

$$(K_{Ic}\Phi/H \sqrt{a})(H/E\Phi)^{0.4} = u(c/a)^v$$

根据lna和lnc的关系进行拟合，获得u、v等值。

- 在同类材料上，根据关系式和测量得到c、a值，可获得 $K_{Ic}$