2022 年秋季学期《数理逻辑与图论》期末试卷

不愿（敢）透露姓名的同学

2023–12–17

1.（每题 3 分, 共 12 分） 选择题（多选题）

(a) 设 p, q, r 为命题, x, y 的论域均为整数集合, $F(\cdot), G(\cdot)$为谓词函数, 以下命题为永真式的是

- (A) $(\neg(p \leftrightarrow q) \to ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land q))) \lor r$
- (B) $p \to ((p \land q) \lor (p \land \neg q))$
- (C) $\forall x \forall y (F(x, y) \to F(y, x))$
- (D) $(\forall x F(x) \lor \exists y G(y)) \land (\neg \exists y G(y)) \to \forall x F(x)$

(b) 设 A, B, C, D 是任意集合, 则以下选项正确的是

- (A) $(A \times C) \bigcup (B \times D) = (A \bigcup B) \times (C \bigcup D)$
- (B) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- (C) $\overline{A - B} = \overline{B - A}$
- (D) 若 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, 则 $A \subseteq B$

(c) 设 R, S, T 是非空集合 A 上的非空二元关系, 则以下说法正确的是

- (A) $R \circ (S \bigcup T) = (R \circ S) \bigcup (R \circ T)$
- (B) $R \circ (S \bigcap T) \subseteq (R \circ S) \bigcap (R \circ T)$
- (C) 若 R_1 和 R_2 是自反的, 则 $R_2 \circ R_1$ 也是自反的
- (D) 若 R_1 和 R_2 是对称的, 则 $R_2 \circ R_1$ 也是对称的

(d) 以下序列可以作为包含 5 个顶点的简单图的顶点度数序列的是

- (A) 2, 1, 1, 1, 1
- (B) 3, 3, 2, 2, 1
- (C) 4, 4, 3, 2, 1
- (D) 4, 4, 3, 3, 2

2.（每题 3 分, 共 15 分） 填空题

(a) 将复合命题 $(p \to (q \land \neg p)) \land q \land r$ 转化成仅使用逻辑运算符 $\{\neg, \lor\}$ 的等价命题为: ___

(b) 设 A, B, C 为集合, 则 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ 的充要条件为: ________________

(c) 有 _____ 个十进制三位数的数字恰好有 1 个 8 和 1 个 9

(d) 设 A 为包含 n 个元素的非空集合, 则 A 上可以构造 ___ 个同时满足对称性和反对称性的二元关系

(e) 已知一棵树中有 2 个 2 度顶点, 1 个 3 度顶点, 3 个 4 度顶点, 其余都是树叶, 则共有 ___ 个树叶

3.（每题 3 分, 共 15 分）判断题（若判断为对, 简要说明或证明; 若判断为错, 简要说明或举出反例）

(a) 设 p, q, r 为任意命题, 若 $p \vee r \Longleftrightarrow q \vee r$, 则 $p \Longleftrightarrow q$

(b) 设函数 f 为集合 A 到集合 B 的函数, 函数 g 为集合 B 到集合 C 的函数, 若函数组合 $g \circ f$ 是一一对应函数, 则 f 是一对一函数, g 是映上函数

(c) 对任意集合 A, B, C, 若 $A \times B = A \times C$, 则 $B = C$

(d) 若 R, S 为非空集合 A 上的反对称关系, 则 $R \bigcap S$ 也是 A 上的反对称关系

(e) 图 G 的割点 v 在图 G 的补图 $\overline{G}$ 中一定不是割点

4.（6 分）

设 $F(x), G(x), R(x)$ 为命题函数, 论域均为集合 A. 请用逻辑等价规则和推理规则证明, 若前提 $\forall x(F(x) \longrightarrow (G(a) \wedge R(x))), \exists x F(x)$ 为真, 则结论 $\exists x(F(x) \wedge R(x))$ 也为真

5.（6 分）

设 A, B, C 为集合, 请使用集合恒等式证明

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

6.（10 分）

设 R, S 是集合 A 上的等价关系, 证明: $R \circ S$ 是 A 上的等价关系当且仅当 $R \circ S = S \circ R$

7.（10 分）

设 $f(n, k)$ 是从集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 中选出的不含两个连续整数的 k- 子集的个数 (k- 子集指包含 k 个元素的子集, $k \geq 0$)

- (a) 给出 $f(n, k)$ 的关于 n 的递推关系
- (b) 证明: $f(n, k) = \mathrm{C}(n - k - 1, k)$ (当 $n - k + 1 < k$ 时, 令 $\mathrm{C}(n - k + 1, k) = 0$)
- (c) (选做题，5 分)证明: 集合 $\{1, 2, ..., n\}$ 的不含两个连续整数的所有子集的个数是斐波那契数列 f_{n+1}

8.（8 分）

假设某天晚上张先生和张太太参加了一个聚会，参加的人还有另外三对夫妇，相互之间握了几次手。现在已知没有人自己和自己握手，夫妻之间没有握手，且没有两个人握手超过一次。当张先生问其他人的握手次数时，其他七人告诉张先生的握手次数均不相同。问：张先生和张太太分别握了几次手?

9.（8 分）

设 G 为简单平面图, 边连通度 $\lambda(G) \geq 2$, 且任意两个面的边界至多只有一条公共边. 证明: 图 G 中至少有两个面的次数相同

10.（10 分）

设 T 为正则二叉树, i 是 T 的内点的数目, I 是所有内点的层数之和, L 是所有树叶的层数之和, 证明: $L = I + 2i$