2020-2021学年复变函数A考试题

一.填空题（30）

1.设方程为$e^x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$，那么方程的全部根为:____________

2.若函数$f(x)=x^3-3\mathrm{xy}^2+i(\alpha x^2y-y^2-1)$是复平面上的解析函数，那么实常数$\alpha=$_______

3.设函数$f(x,y)=ax^3+bx^2y+c\mathrm{xy}^2+dy^3$是平面上的调和函数，其中ab cd为实数常数。那么实常数$abcd$应满足下面的条件：_______

4.$\int_0^{\pi+2i}\left(e^z-\cos\frac{z}{2}\right)dz=$ _______

5.设$f(z)=\frac{z^2e^{\frac{1}{z-1}}}{(e^{2z}-1)\sin z}$,给出$f(z)$的全体奇点（不包括$\infty$），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：____

6.$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z-1)^{2021}}\right),1\right)=$ ________

$\mathrm{Res}\left(z^2\sin\frac{1}{z-i},i\right)=$________

7.对函数$f(t)$,记$F(p)=L[f(t)]$为它的Laplace变换，并且记$f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

(1)设$f(t)$满足$f''(t)-f(t)=4\sin t+5\cos 2t$，$f(0)=-1,f'(0)=-2$,那么$F(p)=$_______

(2)$L^{-1}\left[\frac{3p+7}{p^2+2p+2}\right]=$__________

8.方程$z^5+13z^2+15=0$在圆环$1<|z|<2$和圆环$2<|z|<3$内的根的个数分别为___和___.

二.计算题（40）

1.求函数$f(z)=\frac{z}{e^z+1}$在$z=0$处泰勒展开前五项（展开到z^4项为止），并且标出所得幂级数的收敛半径.

2.将函数$f(z)=x^2\sin\left(\pi\frac{z+1}{z}\right)$在区域$\{z\in\boldsymbol{C}:0<|z|<\infty\}$内展开成罗朗级数.

3.计算积分$\int_{|z|=2}\frac{\sin(z-1)}{(z^2-z)\sin z}dz$.

4.计算积分$\int_{|z|=1}\frac{z(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}dz$.

5.计算积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2},(0<b<a)$.

6.计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin 2x}{x}dx$.

三.综合题（30）

1.设函数$f(x)$在游衔区域D内解析，在有界闭域$C+D$上连续，这里C为D的边界，证明：如果函数$f(x)$没有零点，并且对$z\in C$有$|f(z)|=M(M>0$为常数)，那么存在实数α使得$f(z)=\mathrm{M}e^{i\alpha}$.

2.计算积分$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z}$, $(|a|<R)$, 并且由此证明$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta=1$.

注：此题答案中并未考虑$a=0$的情况

3.函数$w=f(z)=\frac{3z-i}{3\mathrm{iz}-1}$把下半平面$\mathrm{Im}\,z<0$变成复平面中的什么区域?（给出答案以及论证过程）

4.设$f(z)=u(z)+iv(z)$在$|z|<1$内解析，$0<r<1$, 证明：

(1) $\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}=0$, $(n\geqslant 1)$.

(2) 设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, 则$a_n=\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=r}\frac{u(r)}{z^{n+1}}dz$, $(n\geqslant 1)$.

(3) $\overline{f(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz$, 其中$|z_0|<r$.

参考解答

一. 填空题

$$1.\ \ln \mathbf{2} + \mathbf{i}(\mathbf{2k}\pi + \frac{\pi}{\mathbf{4}}), \qquad 2.\ \mathbf{a = 3}$$

$$3.\ \mathbf{3a + c = 0},\ \ \mathbf{b + 3d = 0} \quad 4.\ -\mathbf{e}^{-\pi}(\cos \mathbf{2} - \mathbf{i} \sin \mathbf{2}) - \mathbf{2}\cosh \mathbf{1} + \mathbf{1}$$

5. $\mathbf{z = 1}$为本性奇点，$\mathbf{z = 0}$为可去奇点，$\mathbf{z = n}\pi$ 和$\mathbf{z = n}\pi\mathbf{i}$为1级极点($n$为非零整数)

$$6.\ \mathbf{1},\ \ -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}. \qquad . \qquad 7.\ -\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p^2 + 4}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{p^2 + 1}},\ \ \mathbf{3e^{-t}} \cos \mathbf{t} + \mathbf{4e^{-t}} \sin \mathbf{t}$$

8. **2**和**3** .

二

1. 设

$$f(z) = \frac{z}{e^z + 1} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

即

$$z = \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + ...+\right)\left(2 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right)$$

上式两边比较常数项系数显然$a_0 = 0$, 在比较z到z^4的系数，得到：

$$z:\ 2a_1 = 1, \quad z^2:\ a_1 + 2a_2 = 0, \quad z^3:\ \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_3 = 0 \quad z^4:\ \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{2} + a_3 + 2a_4 = 0$$

解得：

$$a_1 = \frac{1}{2},\ \ a_2 = -\frac{1}{4},\ \ a_3 = 0,\ \ a_4 = \frac{1}{48}$$

这样

$$f(z) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{z^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{48}}\mathbf{z^4} + ...$$

另外解方程$e^z + 1 = 0$, 得到距离$z = 0$最近的两个奇点$z = \pm i\pi$, 因此收敛半径$\mathbf{R} = \pi$

$$2)\ f(z) = z^2 \sin\left(\pi\frac{z+1}{z}\right) = z^2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{z}\right) = -z^2 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

$$= -z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n+1}} = -\pi\mathbf{z} - \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} \pi^{\mathbf{2n+1}}}{(\mathbf{2n+1})! \mathbf{z^{2n-1}}}$$

4. 围道内有2级极点$z=0$($z=1$为可去奇点)，因此

$$原积分 = 2\pi i Res[f(z),0],$$

其中$f(z)=\dfrac{\sin(z-1)}{(z^2-z)\sin z}$

$$Res[f(z),0]=\lim_{z\longrightarrow 0}(z^2 f(z))'=\lim_{z\longrightarrow 0}\left(\frac{z\sin(z-1)}{(z-1)\sin z}\right)'$$

$$=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{[\sin(z-1)+z\cos(z-1)]\,(z-1)\sin z-z\sin(z-1)\,[\sin z+(z-1)\cos z]}{(z-1)^2\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{[(z-1)\cos(z-1)-\sin(z-1)]\,z\sin z}{(z-1)^2\sin^2 z}+\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{[\sin z-z\cos z]\,(z-1)\sin(z-1)}{(z-1)^2\sin^2 z}$$

$$=-\cos 1+\sin 1$$

$$原积分 = 2\pi i(-\cos 1+\sin 1)=\mathbf{2\pi i(\sin 1-\cos 1)}$$

4. 围道内有一级极点$z=0$，因此

$$原积分 = 2\pi i Res[f(z),0],$$

其中$f(z)=\dfrac{z(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}$

$$Res[f(z),0]=\lim_{z\longrightarrow 0}zf(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{z^2(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}=\frac{2\times 3}{(-3)^5}=-\frac{2}{81}$$

$$原积分 = 2\pi i(-\frac{2}{81})=-\frac{4\pi i}{81}$$

5.

$$原积分 = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{b}{2}(z+\frac{1}{z})\right)^2}=\int_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left(bz^2+2az+b\right)^2}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{4zdz}{ib^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}=2\pi i Res\left[\frac{4z}{ib^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2},z_1\right] \tag{1}$$

其中$z_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $z_2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. 而

$$Res\left[\frac{4z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2},z_1\right]=\left(\frac{4z}{(z-z_2)^2}\right)'|_{z=z_1}=\frac{-4(z+z_2)}{(z-z_2)^3}\ |_{z=z_1}=\frac{b^2a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

再结合(1)式得到：

$$原积分=\frac{\mathbf{2\pi a}}{\mathbf{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

6.

$$原积分=\frac{1}{2}Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-1)e^{i2x}}{(x^2+1)x}dx\right]$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2-1)e^{i2x}}{(x^2+1)x}dx=2\pi iRes[F(z),i]+\pi iRes[F(z),0]$$

其中$F(z)=\dfrac{(z^2-1)e^{i2z}}{(z^2+1)z}$, 具体计算为：

$$Res[F(z),0]=\frac{(z^2-1)e^{i2z}}{z^2+1}\ |_{z=0}=-1$$

$$Res[F(z),i]=\frac{(z^2-1)e^{i2z}}{(z+i)z}\ |_{z=i}=e^{-2}$$

这样，综上有

$$原积分=\mathbf{e^{-2}}\pi-\frac{\pi}{2}$$

三. 综合题

1. **证明**：1)先证明$|f(z)|$在区域D为常数，事实上由最大模原理，$|f(z)|$ 只能在边界上取到最大值，而在边界上$|f(z)|=M$, 因此在区域内

$$|f(z)|\le M.\quad (z\in D)\qquad (1)$$

又已知$f(z)$在D内没有零点，这样$g(z)=\frac{1}{f(z)}$也在D内解析，这样$g(z)$的最大模也只能在边界上取到，也就是$|f(z)|$的最小值也在边界C上取到，即

$$|f(z)|\ge M.\quad (z\in D)\qquad (2)$$

因此

$$|f(z)| = M. \quad (z \in D) \tag{3}$$

根据结论："$f(z)$在D内解析且模为常数，则$f(z)$在D内为常数"，因此$f(z)$为常数，而$|f(z)| = M$, 因此$f(z)$表示为

$$f(z) = Me^{i\alpha}$$

命题得证明。

2. 由留数定理：

$$\int_{|z|=R} \frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z} = 2\pi i \left\{ \left[Res\left[\frac{z+a}{z(z-a)}, 0\right] + Res\left[\frac{z+a}{z(z-a)}, a\right]\right\} = 2\pi i(-1+2) = 2\pi i$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z+a}{z-a}\frac{dz}{z} = 1. \tag{1}$$

在$|z| = R$上作参数替换$z = Re^{i\theta}$,这样上式(1)化为：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+a}{Re^{i\theta}-a}d\theta = 1. \tag{2}$$

分子分母同乘以分母的共轭复数得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta}+a)(Re^{-i\theta}-\overline{a})}{(Re^{i\theta}-a)(Re^{-i\theta}-\overline{a})}d\theta = 1. \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-|a|^2}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{aRe^{-i\theta}-R\overline{a}e^{i\theta}}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta = 1. \tag{4}$$

由于互为共轭的复数相减为纯虚数，故可设$aRe^{-i\theta} - R\overline{a}e^{i\theta} = ig(\theta)$,因此上式(4)可改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-|a|^2}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta = 1. \tag{5}$$

比较实部就得到所证明结论：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|Re^{i\theta}-a|^2}d\theta=1.$$

4.答：此变换把下半平面变为单位圆外部 $|\omega|>\mathbf{1}$. 理由如下：

(1)取$z=x$时，

$$|\omega(x)|=\frac{|3x-i|}{|3ix-1|}=\frac{|3x-i|}{|3ix+i^2|}=\frac{|3x-i|}{|3x+i|\,|i|}=\frac{|3x-i|}{|3x+i|}=1$$

因此，此变换把上半平面的边界x轴变为单位圆边界$|\omega|=1$

(2) 取下半平面点$z=-i$

$$|\omega(-i)|=\frac{|-3i-i|}{|3i(-i)-1|}=\frac{|-4i|}{2}=2$$

因此把$z=-i$变换到单位圆$|\omega|=1$的外部。

综合以上(1),(2)以及考虑到保形变换的边界对应。因此变换把下半平面$Imz<0$变为单位圆外部$|\omega|>\mathbf{1}$.

4.证明：(1)在$|z|=r$时，$\overline{f(z)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{a_k}\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{a_k}\frac{r^{2k}}{z^k}$, 所以

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}dz=\int_{|z|=r}\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{a_k}\frac{r^{2k}}{z^k}}{z^{n+1}}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|z|=r}\frac{\overline{a_k}r^{2k}}{z^{n+k+1}}dz, \tag{1}$$

由于$n\geq 1$, 则$n+k+1\geq 2$, 则$\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^{n+k+1}}=0$. 此结果代入上式(1), 即证明了：

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}dz=0,\ (n\geq 1).$$

(2), 由幂级数系数的确定公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

又由上一问结论：

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}dz=0,\ (n\geq 1).$$

这样

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}dz,\quad (n\geq 1)$$

(3) 在$|z|=r$时，$\overline{f(z)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{a_k}\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{a_k}\frac{r^{2k}}{z^k}$,所以

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz=\int_{|z|=r}\frac{\overline{a_0}}{z-z_0}dz+\sum_{k=1}^{+\infty}\overline{a_k}r^{2k}\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}\,dz,\tag{1}$$

由于$|z_0|<r$, 所以对于任意$R>r$都有：

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}\,dz=\int_{|z|=R}\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}\,dz,\tag{2}$$

而$k\geq 1$时有：$\lim\limits_{z\to\infty}z\,\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}=0$,, 由引理1有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|z|=R}\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}\,dz=0,$$

因此在(2)中必有：

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-z_0)\,z^k}\,dz=0$$

此结论代入(1)就有

$$\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz=\int_{|z|=r}\frac{\overline{a_0}}{z-z_0}dz=2\pi i\,\overline{a_0}$$

也就是

$$\overline{f(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz$$