3.3 原函数

定义2(P56)(原函数的定义):

如果在区域 D 内 $F'(z)=f(z)$ 处处成立,

则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

对区域D内的$f(z)$在什么条件下, 存在原函数$F(z)$?
原函数怎么样求? 有与数学分析中积分学基本定理类似的定理.

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

则$\forall z_0 \in D$, 变上限积分函数

$F(z)\equiv\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ 是在D内的单值函数, 在D 内解析, 且

$F'(z)=f(z)$, 即$F(z)$是$f(z)$在D内的原函数.

其中变上限积分的积分路径可以是D 内任一条从z_0 到z 的简单曲线.

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $\forall z_0 \in D$，

$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 是在D内的单值函数，在D 内 解 析,且

$F'(z) = f(z)$，即$F(z)$是$f(z)$在D内的原函数,

其中$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$的积分路径可以是$D$ 内任一条从z_0 到z 的简单曲线.

证明：1. 解析及可微定义+2.参数法积分+3.长大不等式.

$f(z)$在单连通区域D内解析，由柯西积分定理推论1, 2(P 55),

对D内任一闭曲线C，$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 不依赖积分路线,

故$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 是在D内的单值函数. 由解析和可微定义知,

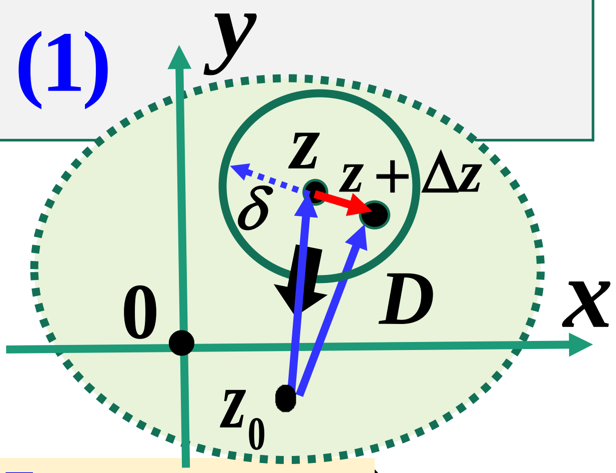
只需证：$\forall z \in D$，$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$. (1)

定理4(P56) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则$\forall z_0 \in D$,

$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$是在$D$内的单值解析函数, $F'(z) = f(z)$.

证明:由条件和推论1,2(P 55), $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$不依赖积分路线.

只需证: $\forall z \in D$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$. (1)



$\forall z \in D$(开), $\exists \delta > 0$,使得以z为中心、δ为半径的圆完全含在D 内.

在此圆内任取点 $z+\Delta z$, $\Delta z \neq 0$, $|\Delta z| < \delta$.

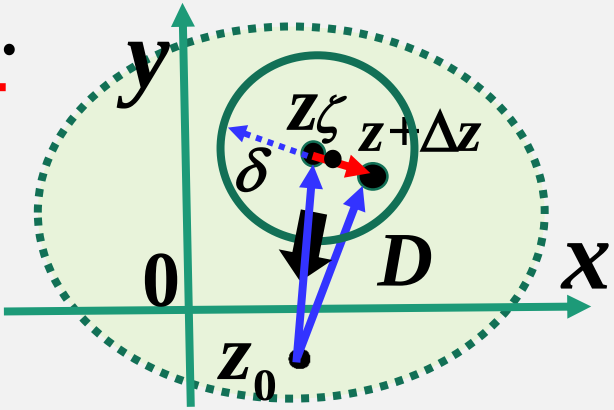
$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$+\int_{z}^{z_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \ (\to f(z), \text{当}\Delta z \to 0.)(\text{只需证})$$

因积分不依赖积分路线.

根据条件，$f(\zeta)$在D内从z_0到z的积分与路线无关.



$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\int_{z}^{z_0} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\ (\to f(z),\ \text{当}\Delta z\to 0.)(\text{只需证})$$

$1=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\,\mathrm{d}\zeta$, (可用参数法验证它), 故

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\ \text{直线}}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}\mathrm{d}\zeta\right|.$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

只需证：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z).$ (2)

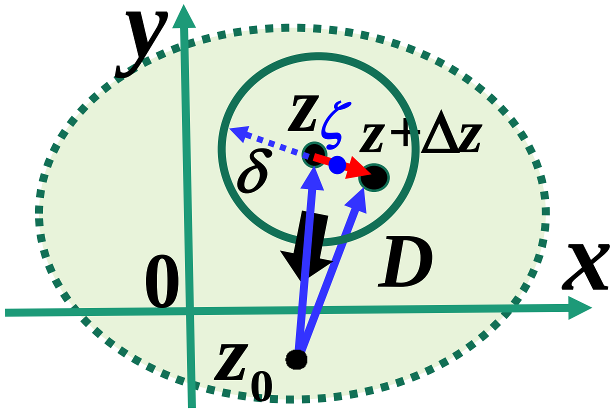
$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} 1\,d\zeta\right| \text{(由参数法)}$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}\,d\zeta\right|. \quad (3)$$

因$f(\zeta)$在D内解析故连续，故$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 当$0<|\Delta z|<\delta$，

ζ在从z到$z+\Delta z$的直线段上时，$|\zeta-z|\le|\Delta z|<\delta$，

$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$ 由长大不等式得



(3)右端$\le \dfrac{1}{\cancel{|\Delta z|}}\cdot\varepsilon\cdot\cancel{|(z+\Delta z)-z|}=\varepsilon.$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1}{\Delta z}\displaystyle\int_{z,\text{直线}}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)$，故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$

由z任意性得，$F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ 在D 内解析，$F'(z)=f(z)$. #

推论1(P 66定理8：莫雷拉(Morera)定理)：

若$f(z)$ 在区域 D 内连续，对D内任一闭曲线C有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$,

则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 在D 内解析, $F'(z) = f(z)$.

证明：根据条件,类似于P 55推论2的证明可证明：

在D内, $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$与积分路线无关.

用定理4(P56)证明的同样过程可以证明此推论中的结论. #

推论(P 58): 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

$H(z)$是$f(z)$的任一原函数, $z_0 \in D$,

则$\forall z \in D$, $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = H(z)\Big|_{z_0}^{z} = H(z) - H(z_0)$. (牛顿-莱布尼兹公式)

★★★

推论(P 58): 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,

$H(z)$是$f(z)$的任一原函数, $z_0\in D$, ★★★

则$\forall z\in D$, $F(z)\equiv\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = H(z)\Big|_{z_0}^{z} = H(z)-H(z_0)$. (牛顿-莱布尼兹公式)

证明: 由P 56定理4, $F'(z)=f(z)$. 由条件, $H'(z)=f(z)$.

故$\{F(z)-H(z)\}'=0$. 由P 47第8(1)题, 则$F(z)-H(z)=C$(复常数).

$F(z_0)=0$, 故$C=-H(z_0)$. 故 $F(z)=H(z)-H(z_0)$. #

牛顿-莱布尼兹公式可以用来计算解析函数的积分(比参数法方便).

例求 $\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz$.

解 z^2+1 在全平面解析,

故由(P58)牛顿-莱布尼兹公式得, ★★★

$$\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz=\left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Bigg|_{i}^{1-i}=\left\{\frac{(1-i)^3}{3}+(1-i)\right\}-\left(\frac{i^3}{3}+i\right)$$

$$=(1-i)\left\{\frac{(1-i)^2}{3}+1\right\}-\frac{i^3}{3}-i$$

$$\boxed{(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i}$$

$$\boxed{i^3=i^2\,i=-i}$$

$$=(1-i)\left(\frac{-2i}{3}+1\right)-\frac{-i}{3}-i=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)+\frac{i}{3}-i$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}i.\quad \#$$

例 求 $\int_0^i z\cos z dz.$

解 因 $z\cos z$ 在全平面解析，故

由(P58)牛顿-莱布尼兹公式也可得分部积分公式,

故 $\int_0^i z\cos z dz = \int_0^i z d(\sin z) = (z\sin z)\Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz$

$= (z\sin z)\Big|_0^i - (-\cos z)\Big|_0^i = (i\sin i - 0) - \{(-\cos i) - (-\cos 0)\}$

$= i\cdot i\sinh 1 - (-\cosh 1 + 1) = -\sinh 1 + \cosh 1 - 1$

$= -\frac{e-e^{-1}}{2} + \frac{e+e^{-1}}{2} - 1 = e^{-1} - 1.$ #

注意：在应用 牛-莱公式 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = H(z)\Big|_{z_0}^{z}$，

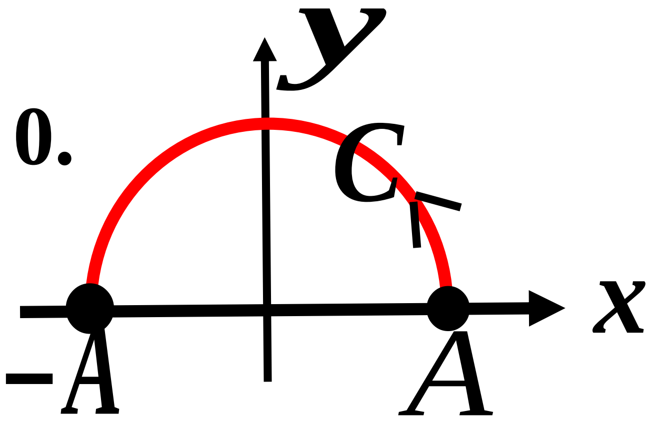
其中$H(z)$是$f(z)$在D内的任一原函数时，

须满足：$f(z)$ 在一个包含积分路径的单联通区域 D 内解析.

例3(P53) 证：$\left|\int_C \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| < \pi$, 设 C 为$|z|=A$上半圆周从A 到$-A$.

证2：因$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$处处处处解析, 且$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}}\right)'$, 由牛-莱公式(P56-58)知,

$$\int_C \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\mathrm{i}}\Big|_{A}^{-A} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}}{\mathrm{i}} = -2\sin A,\quad A>0.$$



故 $\left|\int_C \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| = 2|\sin A| \le 2 < \pi$. #

3.4　柯西积分公式

一、解析函数的柯西积分公式
(P59定理5)

二、解析函数的高阶导数的
柯西积分公式(P60定理6)

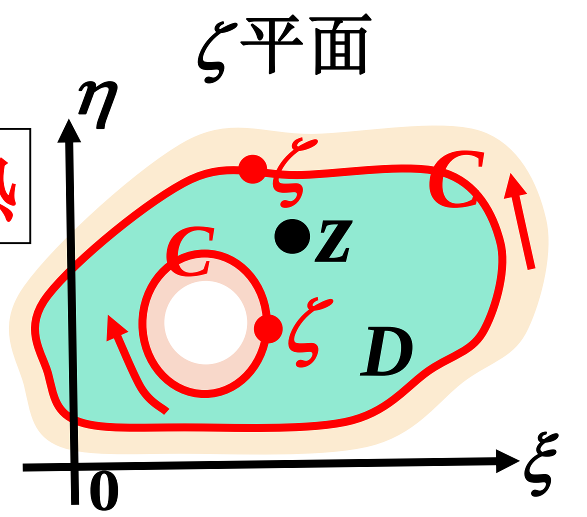
3.4 柯西积分公式

定理5(P59) 如果 $f(z)$ 在闭路(简单闭路或复闭路) C 及其所围区域 D 内处处解析，即 $f(z)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上处处解析，

则 $\forall z\in D$，有 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

背熟

(柯西积分公式) ★★★★★



- 柯西积分公式，开启了许多方法和定理，让解析函数理论能够单独脱离于实函数进行分析.

柯西积分定理(P 54定理2和P 55定理3): 设 D 是由简单闭路(或复闭路) C 围成的单连通(或多联通)区域，$f(z)$在闭域$\overline{D}=D+C$上解析，则 $\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=0.$

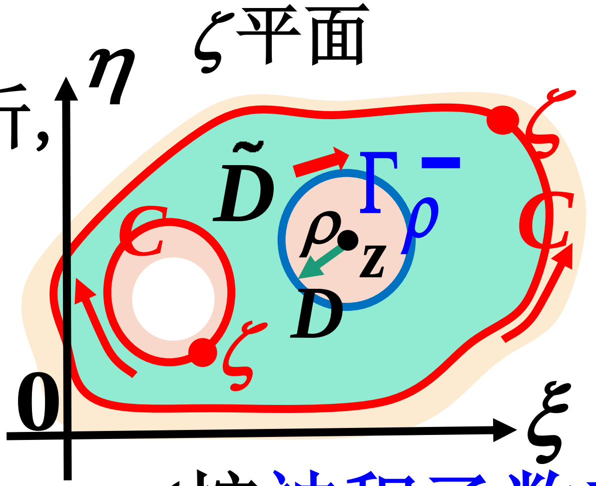
定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C 及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z\in D$, $f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$. (柯西积分公式)

证明: $\forall z\in D$, 被积函数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 关于ζ在D内不解析,

$\zeta=z$是它在$\overline{D}$上的唯一奇点.

(不可由柯西积分定理得$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=0.$)



(挖被积函数奇点.)

区域D是开集, $\forall z\in D$, 作z 的任意充分小领域$|\zeta-z|<\rho$, 使其全落在D 内.

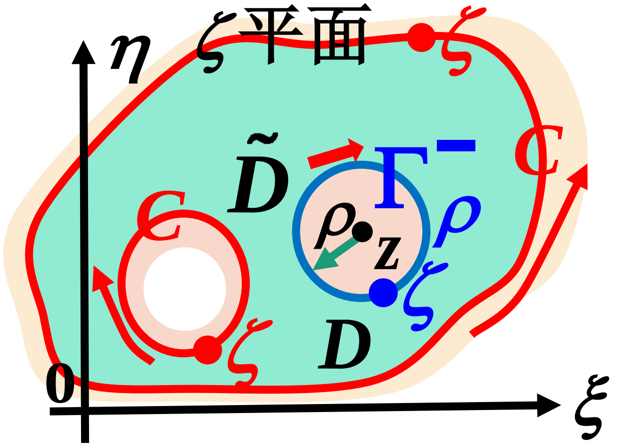
记Γ_ρ : $|\zeta-z|=\rho$, 取逆时针方向, 得复闭路$C=C+\Gamma_\rho^-$,

C 围成一个多连通区域, 记为D (图中浅绿色区域).

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$关于$\zeta$在闭域$\overline{D}$上处处解析, 由多连通区域柯西积分定理(P 55 定理3) 得,

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$关于$\zeta$在闭域$\overline{D}$上处处解析. 由多连通区域柯西积分定理(P 55 定理3) 得,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\int_{\Gamma_\rho^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=0.$$ 故



$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)+\{f(\zeta)-f(z)\}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

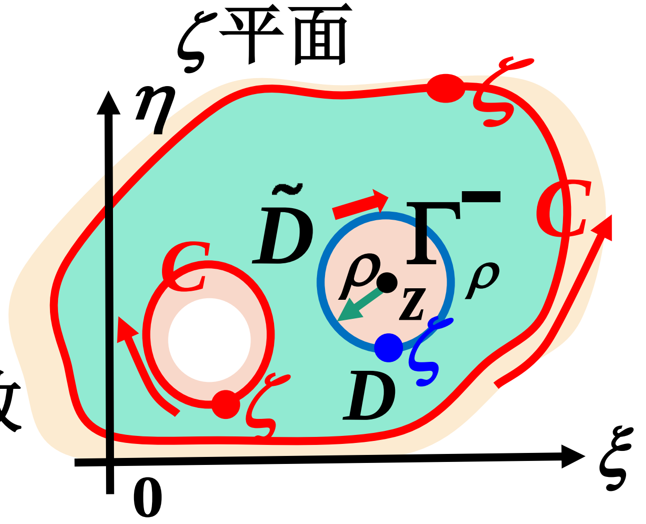
$$=f(z)\underbrace{\int_{\Gamma_\rho}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta}_{=2\pi\mathrm{i}}+\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\,f(z)+\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

$= 2\pi\mathrm{i}$ ⟸ $\boxed{\text{P 52例2}}$

故 $$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-2\pi\mathrm{i}\,f(z)=\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.\quad (*)$$

$\boxed{\text{目标:证明 } f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.}$ 只须证明: $\rho\to 0$时, $|(*)\text{右端}|\to 0.$

故 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$ (*) 只须证明: $\rho \to 0$ 时, $|(*)\text{右端}| \to 0.$



用长大不等式. 由于$f(\zeta)$在$\zeta = z$处解析从而连续,

故对任给$\varepsilon > 0$, 存在$\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当

$|\zeta - z| < \delta$时, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$

故当$0 < \rho < \delta$时, $\forall \zeta \in \Gamma_\rho$, $|\zeta - z| = \rho < \delta$, 故

$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}.$ $\left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot (\Gamma_\rho\text{周长}) = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$

代入(*)得 $\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, f(z)\right| \le 2\pi\varepsilon.$ 左端不依赖于ε.

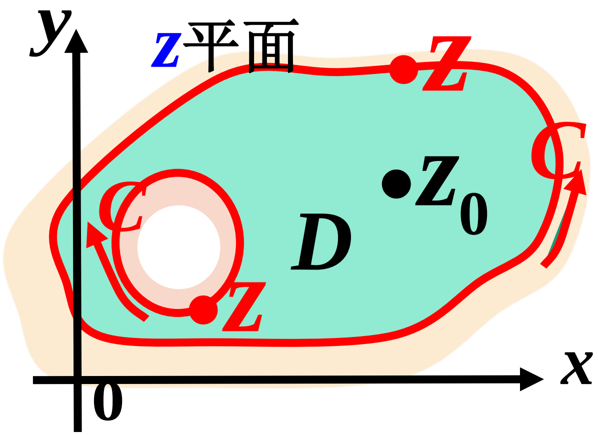
因此令$\varepsilon \to 0$, 得 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i\, f(z).$ #

定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z\in D$, $f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$

或, $\forall z_0\in D$, $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$

-----柯西积分公式

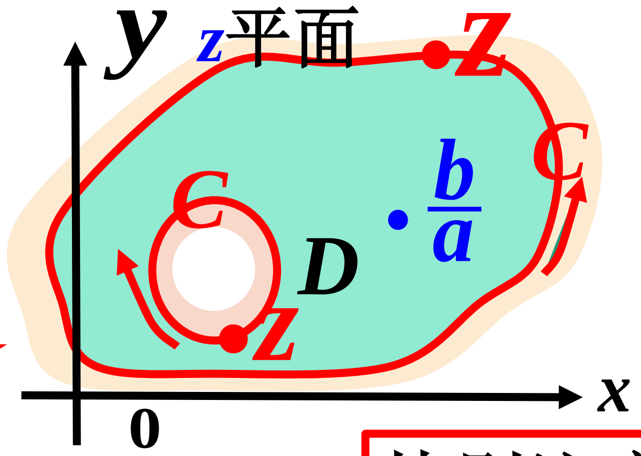


定理5′ 若 $f(z),g(z)$在(简单或复) 闭路C及所围区域 D 内处处解析,

$g(z)\neq 0,\forall z\in C\cup D$. 则$\forall a,b\in\mathbb{C}$, 若$a\neq 0$ 且 $\frac{b}{a}\in D$,

$$\int_C \frac{f(z)}{g(z)(az-b)}\mathrm{d}z=\int_C \frac{f(z)}{ag(z)\left(z-\frac{b}{a}\right)}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi \mathrm{i}\left.\frac{f(z)}{ag(z)}\right|_{z=\frac{b}{a}}=2\pi \mathrm{i}\cdot\frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{ag\left(\frac{b}{a}\right)}.$$



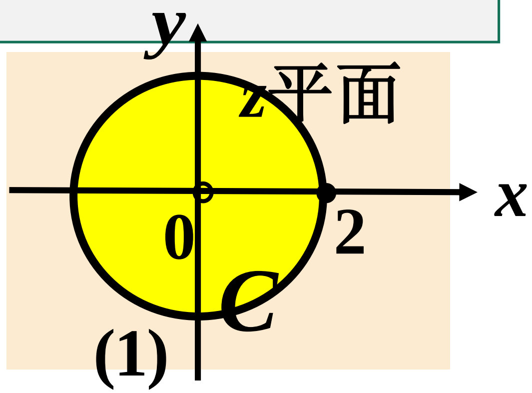
记下背熟

特别注意$a=-1$的情形.

定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则 $\forall z_0 \in D$, $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$ (柯西积分公式)

例. 求(1)$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin(z+2)}{z}dz$, (2)$\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{\sin(z+2)}{z}dz.$



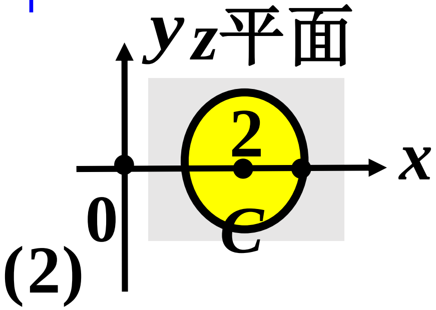
解. (1)奇点 $z=0$在圆$|z|<2$内,

$\sin(z+2)$处处解析，故由柯西积分公式(P54),

$$\int_{|z|=2}\frac{\sin(z+2)}{z}dz=2\pi i\cdot \sin(z+2)\big|_{z=0}=2\pi i\sin 2.$$

(2) $\dfrac{\sin(z+2)}{z}$的唯一奇点 $z=0$不在圆$|z-2|=1$上及其内部, 故

$$\int_{|z-2|=1}\frac{\sin(z+2)}{z}dz=0. \quad \#$$

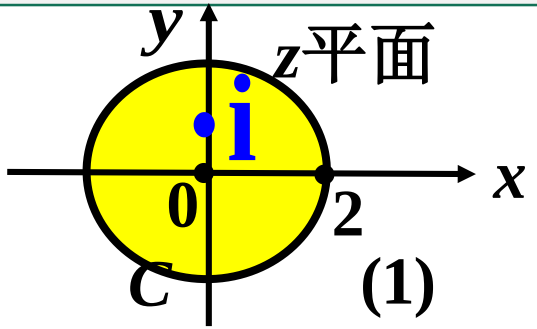


定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域D 内处处解析，
$g(z)\neq 0,\forall z\in C\cup D$，则$\forall a,b\in\mathbb{C}$，若$a\neq 0$且$\frac{b}{a}\in D$，有

$$\int_C \frac{f(z)}{g(z)(az-b)}\mathrm{d}z=\int_C \frac{f(z)}{ag(z)\left(z-\frac{b}{a}\right)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{ag\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

★★★

例. 求(1)$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2}{\mathrm{i}-z}\mathrm{d}z$; (2)$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{\mathrm{i}-z}\mathrm{d}z$.



解. (1)唯一奇点 $z=\mathrm{i}$ 在圆$|z|<2$内，

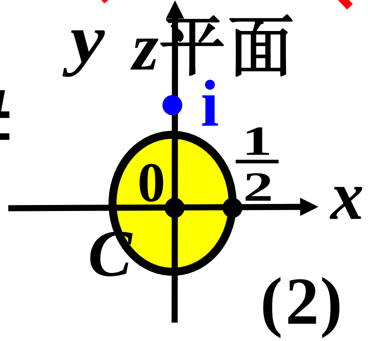
故由柯西积分公式得

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2}{\mathrm{i}-z}\mathrm{d}z=\int_{|z|=2}\frac{z^2}{(-1)(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(-z^2\right)\Big|_{z=\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}.\quad \cancel{=2\pi\mathrm{i}\left(z^2\Big|_{z=\mathrm{i}}\right)}$$

★★★

(2) 奇点 $z=\mathrm{i}$不在$|z|\leq\frac{1}{2}$上，$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{\mathrm{i}-z}\mathrm{d}z=0$. #

★★★



例6(P 62). 求$\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)}dz$, C是以2i为中心、1 为半径的正向圆周.

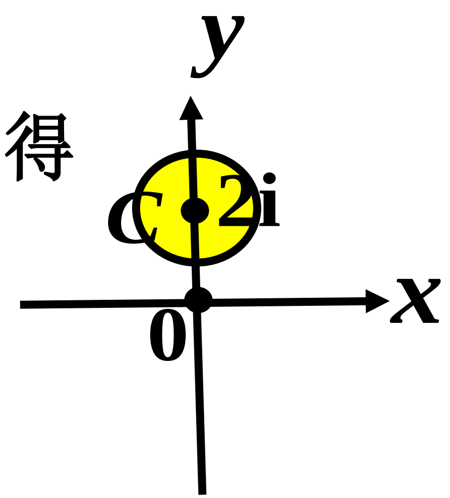
(教材中此处半径为2是印刷错误.)

先找出积分路径内所有奇点.

解 (1) 由$z(z-2i)=0$得 $z_1=0,\ z_2=2i.$

只有奇点2i在C 的内部，0不在C及其内部.

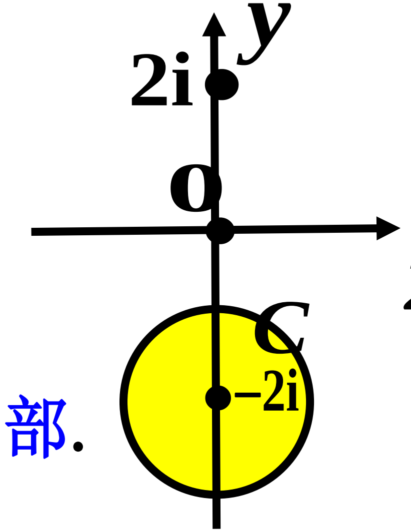
e^z 处处解析. 故由柯西积分公式(P 59 定理5) 得



$$\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = \int_C \frac{e^z/z}{z-2i}dz = 2\pi i\cdot \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i}$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{e^{2i}}{2i} = \pi e^{2i} = \pi(\cos 2 + i\sin 2).\ \#$$

例. 求积分 $\displaystyle\oint_{|z+2i|=1} \frac{e^z}{z(z^2+4)}\,dz$.



解 (1) 由 $z(z^2+4)=0$得 $z_1=0,\ z_2=2i,\ z_3=-2i.$

只有$(-2i)$在$|z+2i|<1$ 内，$0,\ 2i$都不在$|z+2i|=1$及其内部.

e^z 处处解析. 故由柯西积分公式(P54)得

$$\oint_{|z+2i|=1} \frac{e^z}{z(z^2+4)}\,dz = \oint_{|z+2i|=1} \frac{\frac{e^z}{z(z-2i)}}{(z+2i)}\,dz$$

$$= 2\pi i\cdot \left.\frac{e^z}{z(z-2i)}\right|_{z=-2i} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-2i}}{-2i(-2i-2i)} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-2i}}{-8}$$

$$= -\frac{\pi}{4} i e^{-2i} = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{\pi}{2} i} e^{-2i} = \frac{\pi}{4} e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\right) i} \left(= \frac{\pi}{4}(-\sin 2 - i\cos 2)\right). \#$$

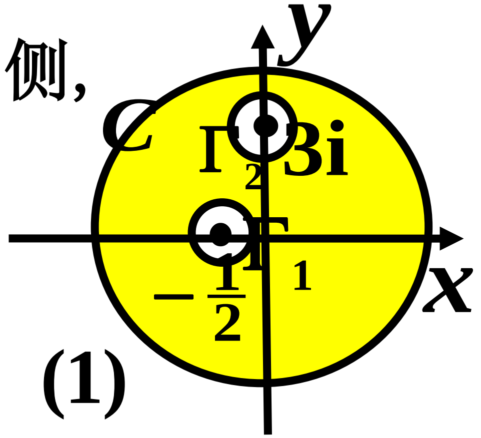
例. 求下列积分(1) $\oint_{|z|=3.5} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$; (2) $\oint_{|z|=2} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$.

解：由$(2z+1)(3i-z)=0$, 得被积函数奇点 $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=3i$.

(1) 奇点$-\frac{1}{2}$, $3i$都在$C:|z|=3.5$所围区域内部. 挖奇点.

作圆周Γ_1: $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho$, Γ_2: $|z-3i|=\rho$, 取$\rho>0$充分小使得

Γ_1, Γ_2都在$C:|z|=3.5$ 内部, Γ_1在Γ_2外侧, Γ_2在Γ_1外侧,



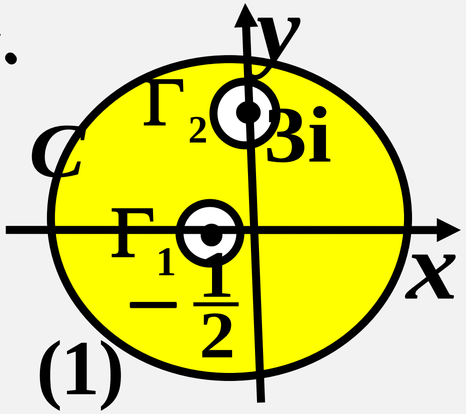
则得复闭路 $C=C+\Gamma_1^-+\Gamma_2^-$.

由多连通区域柯西积分定理(P 53 定理2),

$$\oint_{|z|=3.5} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz = \oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz + \oint_{|z-3i|=\rho} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$$

★★★

例. 求下列积分(1) $\oint_{|z|=3.5} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$; (2) $\oint_{|z|=2} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$.



解 奇点$z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=3i$都在$C:|z|=3.5$所围区域内部.

(1) 作Γ_1: $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho$, Γ_2: $|z-3i|=\rho$, $\rho>0$充分小(如图所示).

由多连通区域柯西积分定理(P 55 定理3)得

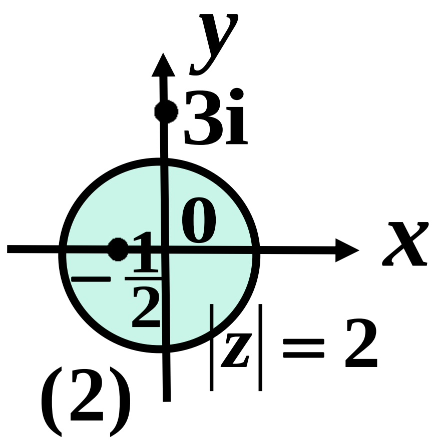
$$\oint_{|z|=3.5} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho} \frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$$

$$=\oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho} \frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{2(3i-z)}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho} \frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{(-1)(2z+1)}}{(z-3i)}dz \quad ★★★$$

$$=2\pi i\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2(3i-z)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}+2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{(-1)(2z+1)}\right|_{z=3i}=2\pi i\left\{\frac{-\frac{7}{2}e^{-1}}{6i+1}-\frac{(9i-2)e^{6i}}{6i+1}\right\}$$

$=\cdots$(通分, 分母实数化, 化简)(参见此PPT第22页). #

例. 求下列积分(1) $\displaystyle\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$.



解：由$(2z+1)(3i-z)=0$, 得被积函数只有两个奇点$-\frac{1}{2}$和$3i$.

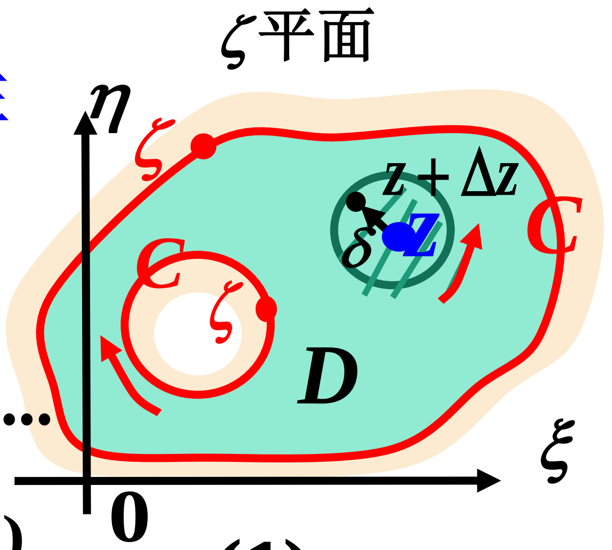
(2) $-\frac{1}{2}$在$|z|<2$ 内，$3i$不在$|z|<2$ 内.

故由柯西积分公式(P 59定理5) 得

$$\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)(3i-z)}dz=2\pi i\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2(3i-z)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{-\frac{7}{2}e^{-1}}{6i+1}\cdot\frac{-6i+1}{-6i+1}=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}\left(21i-\frac{7}{2}\right)}{37}=-\frac{42}{37}\pi e^{-1}-\frac{7}{37}\pi e^{-1}i.\quad\#$$

解析函数的高阶导数积分公式



定理6(P60) 在定理5(P59)的条件下, 即设 $f(z)$在(简单或复) 闭路C及其所围区域D 内处处解析, 则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\ldots$$

证明: 1) $n=1$时, 需证$f'(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}\mathrm{d}\zeta$. (1)

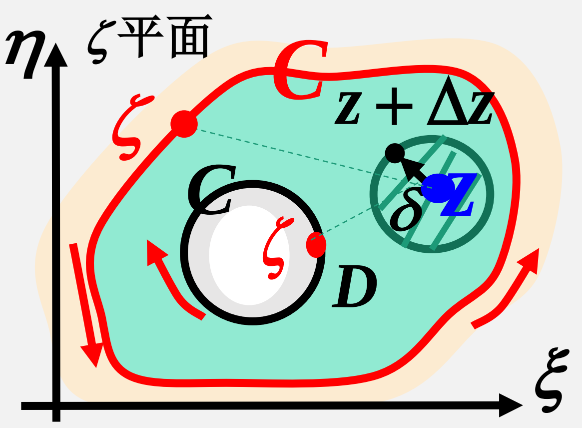
由定理5(P59)得$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$. 据此用导数定义证明(1).

D开, 故$\forall z\in D$, 存在充分小的$\delta>0$,使得当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.

$$I\triangleq\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{2}}\mathrm{d}\zeta\right|$$

由定理5(P59)得 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$



D开, $\forall z\in D, \exists\delta>0$, 当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.

$$I \triangleq \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right\}f(\zeta)\,d\zeta\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta\right|.$$

故$\forall\zeta\in C$, $|\zeta-z|\geq\delta$, $|\zeta-z-\Delta z|\geq|\zeta-z|-|\Delta z|\geq\delta-|\Delta z|$,

因$f(\zeta)$在C上连续, 存在与Δz无关的常数$M>0$, 使得$|f(\zeta)|\leq M$, $\forall\zeta\in C$.

$I\leq\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{|\Delta z|M}{\delta^2(\delta-|\Delta z|)}l_C\to 0$, 当$|\Delta z|\to 0$ 时. 故 $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$

故 $n=1$ 时公式得证. 2) 当 $n>1$ 时用归纳法证明.

归纳法. 假设 $f^{(n-1)}(z)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta$成立.

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{(n-1)!}{\Delta z}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right\}-\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}\right\}f(\zeta)d\zeta\right|\to 0,\ \text{当}|\Delta z|\to 0\text{时}.$$

参见此PPT的P37.

故 $f^{(n-1)}(z)$可导, 且 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$.

由归纳法得, 对于一般的n 结论公式成立. #

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析, 则

则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

($n=0$对应P59定理5.)

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

($n=0$对应P54定理1.)

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z_0\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=0,1,2,\cdots$$

在同样条件下, $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, 若 $\frac{b}{a}\in D$, 则

$$\int_C\frac{f(z)}{(az-b)^n}dz=\int_C\frac{f(z)}{a^n\left(z-\frac{b}{a}\right)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!a^n}f^{(n-1)}\left(\frac{b}{a}\right).$$

$\boxed{\text{熟背}}$

定理6(P60) ➡ 解析函数可以求任意阶导数,即解析函数的任意阶导数解析.

★★★

作业

P 67-68

6(要求大家必须用牛顿–莱布尼茨公式算)

10,12,13(1),15(根据题目后面的提示)

补：求 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(3-z)(i-z)} \mathrm{d}z.$

思考题：P 68第17题, 暂时不做.

1.背第2章中C-R方程(柯西-黎曼方程)及求导公式(2.7)(P 28-29).
以及各种初等函数的定义和性质；

2.熟练掌握参数积分法和长大不等式；

3.熟记柯西积分定理(P 54-55定理2及其推论1,2和定理3)及其应用；

4.熟记柯西积分公式(P 59定理5)及其应用.

柯西积分公式的意义:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

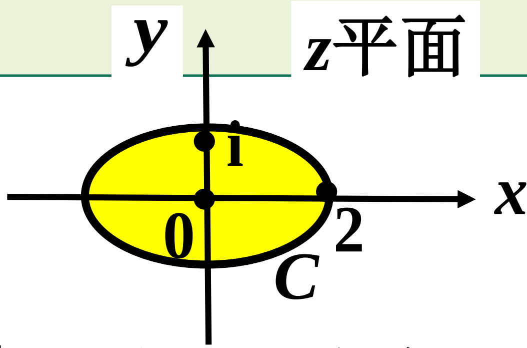
(1) 函数在区域内部任一点的值可用它在边界上的值表示. 从而解析函数在区域内部任一点的值, 完全可由它在区域边界上的值确定. 如果两解析函数在区域边界上处处相等, 则它们在区域内处处相等. (这是解析函数的一个重要特征.)

(2) 公式给出了一种用积分表达式表示解析函数的方法. (这是研究解析函数各种性质的有力工具.)

(3) 公式提供了一种计算积分的方法.

定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z_0 \in D$, $\quad f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$ (柯西积分公式)



例. 求(1)$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$, (2)$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z.$

解. (1) $z=\mathrm{i}$在圆$|z|<2$内, z^2在闭圆$|z|\le 2$上处处解析,

故由柯西积分公式即定理5 得

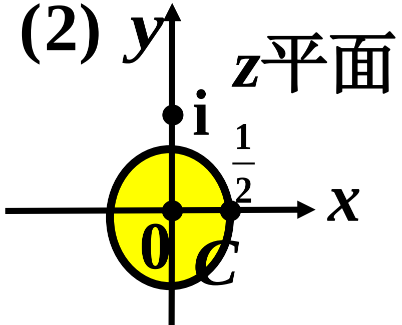
$$\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(z^2\Big|_{z=\mathrm{i}}\right)=-2\pi\mathrm{i}.$$

(2) $z=\mathrm{i}$不在圆$|z|<\frac{1}{2}$内及其边界圆周上, 故$\dfrac{z^2}{z-\mathrm{i}}$在闭域$|z|\le\frac{1}{2}$上处处解析.

故由柯西积分定理即定理2(P54) 得

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z = 0.$$

(2)



例 计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz,\quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2).$

解：需根据 r 的大小讨论. 由 $z(z+1)(z-2)^2=0$ 解得奇点 $0,-1,2.$

(1) 当 $0<r<1$ 时，

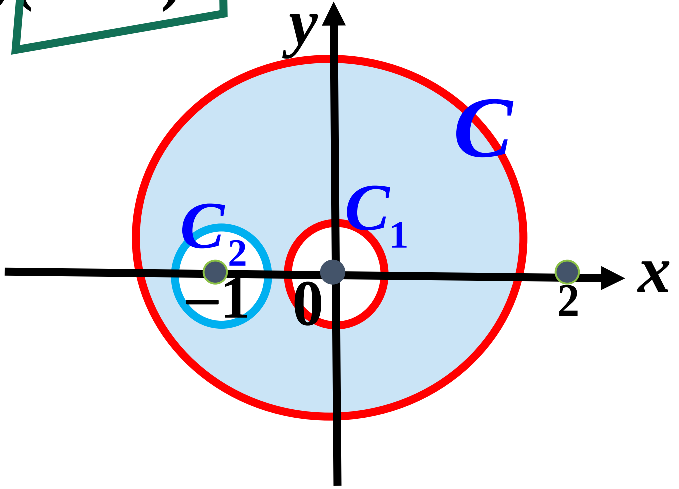
$$I=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}\right|_{z=0}=\frac{1}{2}\pi i.$$

(2) 当 $1<r<2$ 时， 根据多连通区域柯西积分定理(P55定理3)得

$$I=\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z+1|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz\ (\rho>0\text{充分小})$$

$$=\left.\frac{2\pi i e^z}{(z+1)(z-2)^2}\right|_{z=0}+\left.\frac{2\pi i e^z}{z(z-2)^2}\right|_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{-9e}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i.$$



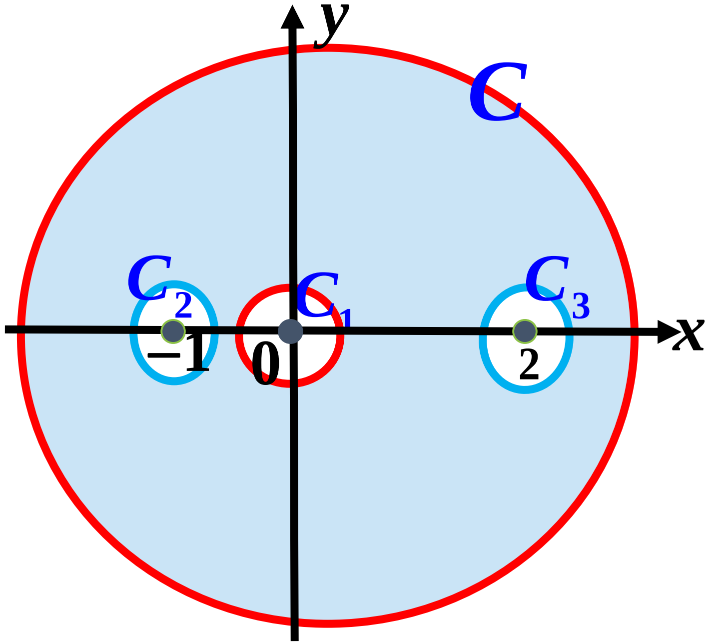
(3) 当$r>2$时， 根据多连通区域柯西积分定理(P55定理3)得

$$I=\left(\oint_{|z|=\rho}+\oint_{|z+1|=\rho}\right)\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z-2|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{z(z+1)}\right\}'\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+2\pi i\frac{e^z z(z+1)-e^z(2z+1)}{z^2(z+1)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}+\frac{e^2}{18}\right)\pi i.\quad \#$$



(2) 当$1<r<2$时，

$$I=\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z+1|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz\quad(\rho>0\text{充分小})$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{e^z}{z(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{-9e}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i.$$

$$\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\oint_{|z+\frac{1}{2}|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z+\frac{1}{2}|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(3i-z)}dz+(-1)\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(z-3i)}dz$$

★★★

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{3i-z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}-2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2z+1}\right|_{z=3i}$$

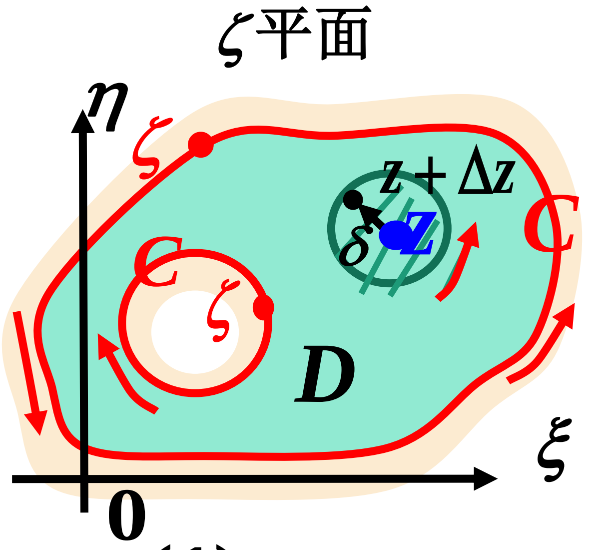
$$=2\pi i\left\{\frac{-7e^{-1}}{12i+2}-\frac{(9i-2)e^{6i}}{6i+1}\right\}=2\pi i\frac{-7e^{-1}-(18i-4)(\cos 6+i\sin 6)}{12i+2}$$

$$=\pi\frac{(18\cos 6+4\sin 6)+i(-7e^{-1}+4\cos 6+18\sin 6)}{6i+1}\cdot\frac{-6i+1}{-6i+1}$$

$$=\frac{\pi(42\cos 6+112\sin 6)-42\pi e^{-1}}{37}-i\frac{\pi\left(104\cos 6+6\sin 6+7e^{-1}\right)}{37}.\ \#$$

解析函数的高阶导数积分公式

定理6(P60) 在定理5(P59)的条件下, 即设 $f(z)$在(简单或复) 闭路C及其所围区域D 内处处解析, 则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数, 且



$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=1,2,\ldots$$

证明: 1) $n=1$时, 需证$f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$. (1)

由定理5(P59)得 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. 据此用导数定义证明(1).

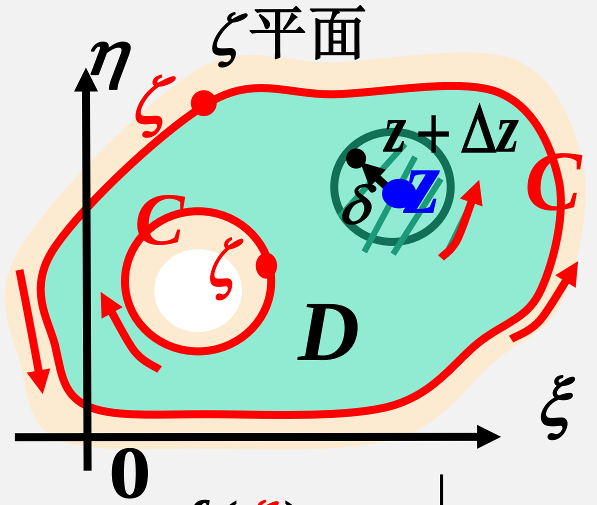
D开, 故$\forall z\in D$, 存在充分小的$\delta>0$,使得当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.

$$I\triangleq\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

由定理5(P59)得 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$

D开, $\forall z\in D, \exists\delta>0$, 当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.



$$I\triangleq\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right\}f(\zeta)d\zeta\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\right|.$$

故$\forall\zeta\in C$, $|\zeta-z|\ge\delta$, $|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|\ge\delta-|\Delta z|$,

因$f(\zeta)$在C上连续, 存在与Δz无关的常数$M>0$, 使得$|f(\zeta)|\le M$, $\forall\zeta\in C$.

$$I\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|\Delta z|M}{\delta^2(\delta-|\Delta z|)}l_C\to 0,\ \text{当}|\Delta z|\to 0\ \text{时}.\ \text{故}\ f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

故 $n=1$ 时公式得证. 2) 当 $n>1$ 时用归纳法证明.

定理6(P60) 在定理5(P59)的条件下, 即设 $f(z)$在 (简单或复) 闭路C及其所围区域D 内处处解析,

则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数，且 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，$n=1,2,\ldots$

1) 前面已证当$n=1$ 时, $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$ (1)

2) 当 $n>1$ 时用归纳法证明.

归纳法. 假设 $f^{(n-1)}(z)=\dfrac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\mathrm{d}\zeta$成立.

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\left\{\frac{(n-1)!}{\Delta z}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right\}-\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}\right\}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right|.$$

接着灵活运用等式：

$$\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^m}-\frac{1}{(\zeta-z)^m}=\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-1}}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-2}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z)^{m-1}}\right)$$

$$=\frac{\Delta z}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-1}}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-2}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z)^{m-1}}\right)\longrightarrow 0,\text{ 当}|\Delta z|\to 0\text{时.}$$

故可以证明：$\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\longrightarrow 0$，当$|\Delta z|\to 0$时.

故 $f^{(n-1)}(z)$可导，且 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$.

由归纳法得，对于一般的n 结论成立. #

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

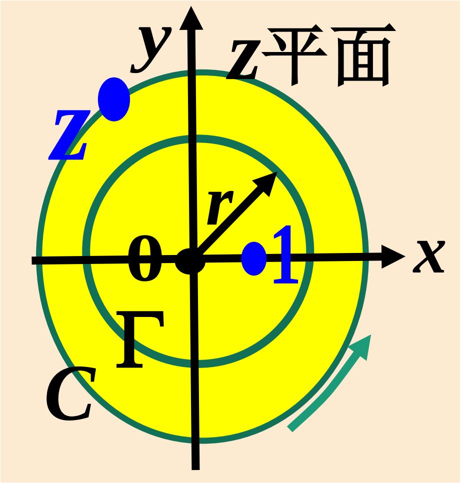
($n=0$对应P59定理5.)

例 计算下列积分，其中 C 为包含正向圆周 Γ：$|z|=r>1$ 的任意简单封闭曲线.

$$(1)\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z; \qquad (2)\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$$

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos\pi z}{(z-1)^3}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，但 $\cos\pi z$ 在 C 内处处解析，

根据定理6(P60)，得



$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(3-1)!}(\cos\pi z)^{(3-1)}\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\cdot(\cos\pi z)''\Big|_{z=1} = \pi i(-\pi\sin\pi z)'\Big|_{z=1}$$

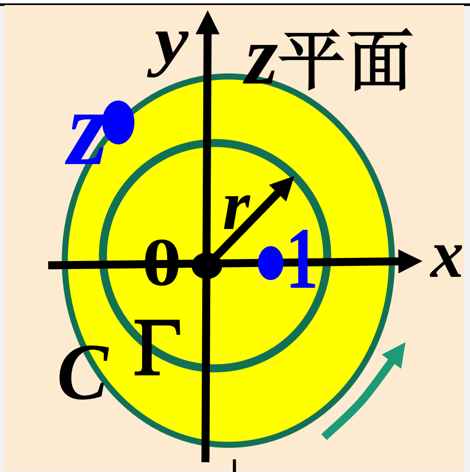
$$=\pi i(-\pi^2\cos\pi z)\Big|_{z=1} = \pi^3 i.$$

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在闭路(简单闭路或复闭路) C 及其所围区域 D 内处处解析，则对于 D 内任一点 z， $f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad n=0,1,2,\cdots$$

($n=0$ 对应 P54 定理1.)

例 计算下列积分，其中 C 为包含正向圆周 Γ：$|z|=r>1$ 的任意简单封闭曲线.

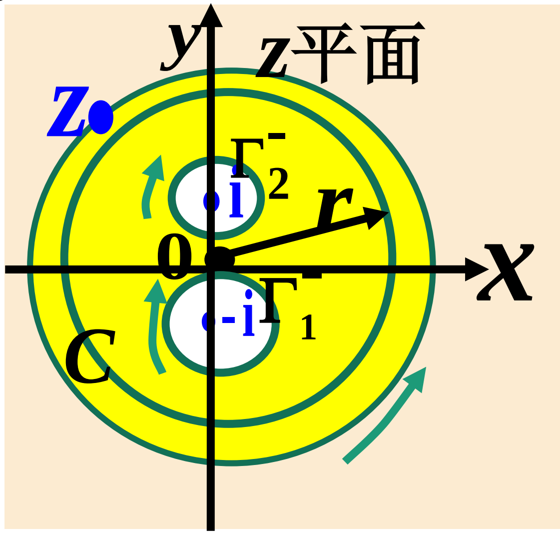


(1) $\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}dz$;　　(2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$.

解 (1) 函数 $\frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，根据定理6(P60)，得

$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{(3-1)!}(\cos\pi z)^{(3-1)}\Big|_{z=1}=\frac{2\pi i}{2!}\cdot(\cos\pi z)''\Big|_{z=1}=\pi i(-\pi^2\cos\pi z)\Big|_{z=1}=\pi^3 i.$$

(2) 被积函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=\pm i$ 处不解析，i 和 $-i$ 都在 C 内，故都在 C 内.



作圆周 Γ_1: $|z+i|=\rho$, Γ_2: $|z-i|=\rho$, 取 $\rho>0$ 充分小使得

Γ_1,Γ_2 都在 $C:|z|=r$ 内部，Γ_1 在 Γ_2 外侧，Γ_2 在 Γ_1 外侧，

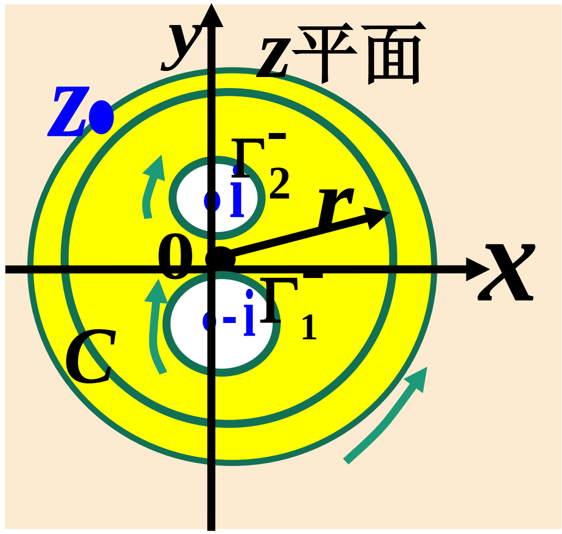
被积函数在由复闭路 $C=C+\Gamma_1^-+\Gamma_2^-$ 围成的多连通区域内解析.

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{\Gamma_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz+\oint_{\Gamma_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

根据定理3(P55)

$$(2)\ \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

根据定理3(P55)



$$\oint_{\Gamma_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz$$

根据定理6(P60)

在C_1及其内部解析

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{(z+i)^2}\right\}'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^z(z+i)^2 - 2(z+i)e^z}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \frac{e^z(z+i-2)}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^i(2i-2)}{8i^3} = \frac{1}{2}\pi e^i(1-i).$$

同理, $\oint_{\Gamma_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{(z-i)^2}\right\}'\Bigg|_{z=-i} = -\frac{1}{2}\pi e^{-i}(1+i).$

根据定理6(P60)

故 $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \frac{1}{2}\pi\left\{e^i(1-i) - e^{-i}(1+i)\right\} = \pi(\sin 1 - \cos 1)i.$ #