

2024 泛函分析期末考试（回忆版）*

刘聪文，陈杲，曲三太

2024 年 12 月 22 日

1. X 是完备度量空间, A 是 X 的子集. 证明: A 列紧当且仅当 \bar{A} 自列紧.
2. X 是 Banach 空间, $x \in X$. 证明: $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$.
3. 证明: 有限维赋范线性空间自反.
4. T_1, T_2 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子, 满足:

$$\langle T_1 x, y \rangle = \langle x, T_2 y \rangle, \forall x, y \in H.$$

证明: T_1, T_2 均为有界线性算子.

5. X 是 Banach 空间, $\{x_n\}$ 为 X 中点列, $x_n \rightharpoonup x$. 证明: $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
6. $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 定义如下:

$$(Au)(t) := \int_0^t u(s) ds, t \in [0, 1].$$

证明: (i) A 是紧算子. (ii) $\sigma(A) = 0$.

7. X, Y 是两个赋范线性空间, $T : X \rightarrow Y$ 是线性算子, 满足
(i) $\dim \text{Ran}(T) < \infty$.
(ii) $\text{Ker}(T)$ 是 X 的闭子空间.
证明: $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

*整理: KosmosX, kosmosx117@gmail.com, 侵权.