实分析

中国科学技术大学 2024 年春季学期

参考教材: Real Analysis by E. M. Stein and R. Shakarchi

授课老师: 于树澄 yusc@ustc.edu.cn

1 第一讲

2 月 26 日

1.1 背景与动机

我们首先回忆 Riemann 积分的定义: 给定有界实值函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 以及区间 $[a,b]$ 的一个分划:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

令

$$S_\Delta(f) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s_\Delta(f) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

其中 M_i 和 m_i 分别为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的上确界及下确界. 令

$$S(f) := \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f), \quad s(f) := \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta(f),$$

其中 $|\Delta| := \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \le i \le n\}$. 若 $S(f) = s(f)$, 则称 f 是 **Riemann 可积**的, 并且定义此共同值为 f 的 Riemann 积分:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := S(f) = s(f).$$

大致来说, 为使函数 f Riemann 可积, 我们需要确保 f 在所有小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的取值振幅足够小.

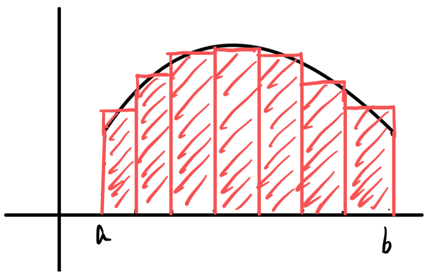

图 1: Riemann 积分: 对定义域作分划.

Riemann 积分是微积分的核心内容, 然而随着研究的深入, 人们逐渐发现它的一些局限性. 一个最直接的局限是一些简单的函数并不是 Riemann 可积的.

例如 $[0,1]$ 上有理数集的特征函数[1]

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q},\\ 0 & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

并不是 Riemann 可积的. 这是因为有理数集和无理数集均稠密, 对 $f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ 对任意分划 Δ 我们有 $S_\Delta(f)=1$, $s_\Delta(f)=0$, 从而

$$S(f)=1\neq 0=s(f).$$

此外, Riemann 积分还存在如下局限:

1. 积分与极限交换顺序问题:
   存在一列 Riemann 可积函数 f_n 使得 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}x$ 存在, f_n 逐点收敛致函数 f (简写为 $f_n\to f$), 但 f 不 Riemann 可积. 例如, 令 $r_1,r_2,\cdots$ 为 $[0,1]$ 上有理数的一个罗列. 对任意正整数 n, 定义 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$:

$$f_n(x):=\begin{cases}1 & x=r_1,\cdots,r_n,\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

   因为 f_n 仅有有限多个不连续点, 我们知道 f_n Riemann 可积且易计算 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$. 然而另一方面我们有 $f_n\to\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ Riemann 不可积. 对此类函数我们期望存在一个新的积分理论使得 f 可积且其积分满足等式:

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 关于微积分基本定理:
   微积分基本定理是数学分析中最重要的结论之一, 它告诉我们若 f 可微, 且导函数 f' Riemann 可积, 则对任意 $x\in[a,b]$,

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a).$$

   上述定理中 f' Riemann 可积的条件显然是必须的. 另一方面, 早在 1881 年 Volterra 便构造出了一个可微函数其导函数有界但不是 Riemann 可积. 对这类函数, 我们期望一个新的积分理论来推广微积分基本定理.

3. Riemann 可积函数空间不完备:
   令 $R=R([a,b])$ 为所有 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数所构成的集合. 我们

[1]对任意集合 E, χ_E 为其特征函数是指 $\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E,\\ 0 & x\notin E.\end{cases}$

可以在这个集合上引入“距离”使得 R 成为一个度量空间. 具体的, 对任意 $f, g \in R$, 定义:

$$d(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

可以证明 d 定义了 R 上的距离, 在此度量下 R 成为一个度量空间. 关于度量空间, 一个重要的问题是这个空间是否完备, 即此空间中的 Cauchy 列[2]在此空间中是否一定存在极限. 例如, 我们知道有理数集 $\mathbb{Q}$ 在绝对值度量下并不是完备的, 在 $\mathbb{Q}$ 中添加进所有 Cauchy 列的极限后我们便得到实数集, 这是实数集的一个构造方式. 然而空间 (R, d) 并不是完备的: 存在 R 中的一个 Cauchy 列 $\{f_n\}$ 使得对任意 $f \in R$, $d(f_n, f) \nrightarrow 0$. 我们需要对 R 补充一些新的函数使其变得完备. 这些新补充的函数不是 Riemann 可积的, 然而对这些函数我们也期望可以对其作积分.

4. 关于 Fourier 级数

   区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 可积函数 f 对应着一个 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx},$$

   其中

$$a_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x.$$

   f 与 $\{a_n\}$ 满足 Parseval 等式:

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

   显然 $\{a_n\}$ 由 f 决定. 相反的, 给定一个数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, 我们想知道是否存在 Riemann 可积函数 f 使得 $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$? 不幸的是, 这个问题的答案是否定的. 我们需要在一个更大的函数空间内寻找这样的函数. 对这些函数我们也期望可以对其作积分.

这些局限告诉人们我们需要一个覆盖 Riemann 积分且纳入更多函数的新积分理论. 这一积分理论便是我们这门课主要的研究对象, 即 Lebesgue 积分.

1.2 Lebesgue 积分简述

在定义 Riemann 积分时我们对函数 f 的定义域作分划. 为使 f 为 Riemann 可积，需要保证 f 在小区间内的取值振幅足够小. 相反的, 如果 f 不满足此条

[2]函数列 $\{f_n\}$ 是 R 中的一个 Cauchy 列是指 $\lim_{n,m\to\infty} d(f_n, f_m) = 0$.

件则 f 不 Riemann 可积. Lebesgue 的想法是我们直接对 f 的值域作分划以避免这一问题. 设 $J=[c,d]$ 为 f 的值域, 对 J 作分划

$$\Delta : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_n = d.$$

令

$$E_i := \{x : y_{i-1} \le f(x) < y_i\}, \quad 1 \le i \le n. \tag{1}$$

当分划 Δ 足够精细, f 在 E_i 上的取值振幅很小, 我们有

$$f \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\chi_{E_i},$$

其中 χ_{E_i} 为 E_i 的特征函数. 取越来越精细的分划 Δ, 若极限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i|$$

存在, 则定义此极限为 f 的 Lebesgue 积分. 这里 $|E_i|$ 是集合 E_i 的 "长度".

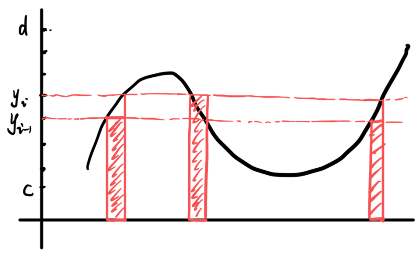

图 2: Lebesgue 积分: 对值域作分划.

然而这一定义引入了另外一个难点, 即集合 E_i 可能会相当复杂. 为定义 Lebesgue 积分, 我们需要一个相应测度理论来衡量这些复杂集合的长度. 若要定义 $\mathbb{R}$ 上的一个测度 m, 自然的我们期望它满足如下性质:

1. $m([a,b]) = b - a$.
2. 对任意 $E_1 \subset E_2$, $m(E_1) \le m(E_2)$.
3. (可数可加性) 对一列两两不交子集 $E_i \subset \mathbb{R}$, $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.
4. (平移不变性) 对任意子集 $E \subset \mathbb{R}$, 任意 $x \in \mathbb{R}$, $m(E + x) = m(E)$.

然而这四个条件不能同时成立! 例如令 $r_1, r_2, \cdots$ 为 $[-1,1]$ 上的有理数的一个罗列. 我们之后会构造一个集合 $E \subset [0,1]$ 满足

- $\{E+r_i\}_{i=1}^{\infty}$ 两两不相交.
- $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E+r_i \subset [-1,2]$.

由条件 1,2 以及上述第二个性质我们有

$$1 \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E+r_i\right) \leq 3. \tag{2}$$

再由 3,4 以及上述第一个性质我们知道

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E+r_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E+r_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E).$$

但是上式右端只能为 0 (当 $m(E)=0$) 或 ∞ (当 $m(E)>0$), 与 (2) 矛盾! 这个例子说明我们不能期望对所有 $\mathbb{R}$ 的子集定义长度 (测度). 退而求其次我们仅对部分子集定义测度. 令

$$\mathcal{L} := \{\text{可在其上定义测度的 } \mathbb{R} \text{ 的子集}\}.$$

称 $\mathcal{L}$ 中元素为**可测集**. 因为我们经常需要对这些可测集进行各种操作 (比如取补, 取并, 取交), 我们希望 $\mathcal{L}$ 具有好的结构: $\mathcal{L}$ 是一个 σ-代数. 大致而言, σ-代数是指对取补及可数交并封闭的集合族. 当有了可测集的概念后, 我们便可引入可测函数的概念. 大致而言, f 可测是指 f 使得所有的水平集 E_i(参见 (1)) 均可测. 我们只对可测函数考虑 Lebesgue 积分.

在处理 Lebesgue 理论时我们有如下 **Littlewood 三原则**:

1. 可测集几乎是区间的有限并.
2. 可测函数几乎是连续函数 (Lusin).
3. 函数列收敛几乎是一致收敛 (Egorov).

Littlewood 三原则告诉我们 Lebesgue 理论中的研究对象与我们所熟悉的对象相差并不遥远.

2 第二讲

2 月 28 日

2.1 一些点集拓扑

记号: $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{N}$ 分别为有理数集，实数集, 复数集以及正整数集.

我们首先来回顾一些集合论的基本知识.

定义 2.1. *令 X 为一非空集合. 设 $A,B\subset X$.*

1. *X 的**幂集***

$$\mathcal{P}(X):=\{E:E\subset X\}$$

   为 X 所有子集所构成的集合.

2. *$A\cup B:=\{x\in X:x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**.*

3. *$A\cap B:=\{x\in X:x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**.*

4. *$A\setminus B:=\{x\in X:x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**; $A^c:=X\setminus A$ 为 A 的**补集**.*

5. *$A\Delta B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**.*

6. *给定一族集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 定义其并集为:*

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x\in X:\exists\,\alpha\in I \text{ 使得 } x\in A_\alpha\},$$

   其交集为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x\in X:\forall\,\alpha\in I,\ x\in A_\alpha\}.$$

   注记 2.2. 这里 I 称为**指标集**. 若 $I=\{1,2,3,\cdots\}$, 则 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ 称为一个**集合列**.

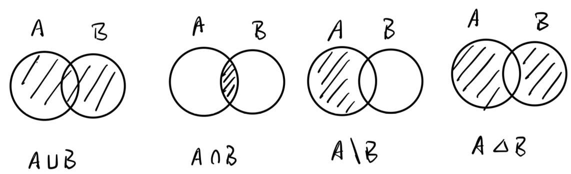

图 3: 从左至右分别为集合 A 与 B 的并集, 交集, 差集, 对称差集.

关于集合的运算我们有

命题 2.3 (De Morgan 律)**.** *令 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为一族集合. 则*

(a) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

(b) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

证明. 作业题. □

我们可以定义集列的极限.

定义 2.4. *1. 称集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是单调递减的 (记作 $A_n \searrow$) 是指*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots.$$

2. 称集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是单调递增的 (记作 $A_n \nearrow$) 是指

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots.$$

3. 若 $A_n \searrow$ 定义其极限集

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^\infty A_n.$$

相应的, 若 $A_n \nearrow$ 定义其极限集

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^\infty A_n.$$

例 2.5. *1. 若 $A_n = (\frac{1}{n}, 1)$ (或 $A_n = [\frac{1}{n}, 1)$), 则 $A_n \nearrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^\infty A_n = (0,1)$.*

2. 若 $A_n = (-\frac{1}{n}, 1)$ (或 $A_n = [-\frac{1}{n}, 1)$), 则 $A_n \searrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^\infty A_n = [0,1)$.

下面我们回顾一些点集拓扑的内容. 我们主要关注欧氏空间中的集合.

给定正整数 $d \geq 1$, 令

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, \cdots, x_d) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq d\}$$

为 d 维欧氏空间. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$,

$$B_r(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\right\}$$

为以 x 为圆心 r 半径的开圆球. 其中 $|x| := (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上**欧式范数**.

定义 2.6. 给定集合 $E \subset \mathbb{R}^d$.

1. $x \in E$ 称为 E 的**内点**若存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset E$.

2. $x \in \mathbb{R}^d$ 称为 E 的**聚点** (或**极限点**) 若对任意 $r > 0$, $B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, 或等价地, 存在一列 $\{x_n\} \subset E \setminus \{x\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$).

3. $x \in E$ 称为 E 的**孤立点**若存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$.

4. E 的内点全体称为 E 的**内部**, 记为 E°. E 的极限点全体称为 E 的**导集**, 记为 E'. $\overline{E} := E \cup E'$ 称为 E 的**闭包**. $\partial E := \overline{E} \setminus E^\circ$ 称为 E 的**边界**.

注记 2.7. 由定义 E 的内点, 孤立点均为 E 的子集, 而极限点则未必.

定义 2.8. 给定子集 $E \subset \mathbb{R}^d$.

1. E 为**开集**若 $E = E^\circ$, 即对任意 $x \in E$, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset E$.

2. E 为**闭集**若 E^c 为开集.

3. E 为**完全集**若 E 为闭集且 $E = E'$, 即 E 不存在孤立点.

注记 2.9. 一般我们用记号 $\mathcal{O}$ 指代开集, 用记号 F 指代闭集.

例 2.10.

- $\mathbb{R}$ 上闭区间都是完全集.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 不是完全集因为 $\mathbb{Q}$ 不是闭集.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 不是完全集. ($\mathbb{Z}$ 中任意一点都是孤立点.)

下面我们给出 σ-代数的定义. 如前所述, 最终我们会在一个 σ-代数上定义测度.

定义 2.11. 若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.

3. $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}, \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 **σ-代数**.

注记 2.12. *条件 2, 3 推出 “$A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$”. 这是因为若 $A_n \in \mathcal{A}$, 则由性质 2 我们有 $A_n^c \in \mathcal{A}$. 再由性质 2, 3 及 De Morgan 律我们有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathcal{A}$.*

例 2.13.

- *$\{\emptyset, X\}$ 是一个 (最小的) σ-代数.*
- *$\mathcal{P}(X)$ 是一个 (最大的) σ-代数.*
- *Borel σ-代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$:=$\mathbb{R}^d$ 中所有开集所生成的 σ-代数, 即包含 $\mathbb{R}^d$ 中所有开集的最小 σ-代数[3]. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 中元素称为 **Borel 集**. 由定义 Borel 集包括: 开集, 闭集, G_δ 集:= 开集的可数交, F_σ 集:= 闭集的可数并, $\cdots$.*

2.2 $\mathbb{R}^d$ 中开集结构定理

定义测度时我们遵循从特殊到一般的原则. 我们首先对一些标准集定义测度: 考虑方体 (定义见下) 并定义其测度为其体积. 进一步的, 我们可对开集定义测度. 这一过程由欧氏空间中的开集结构定理保证. 这便是我们这一节的主要内容.

定义 2.14.

1. *形如 $R = \prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^d$ 的集合称为 $\mathbb{R}^d$ 中的**一个闭矩体**. 其体积定义为*

$$|R| := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

2. *若矩体 Q 各边长相等, 即 $b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d$, 则称 Q 为**一个闭方体**.*
3. *我们称一列矩体 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ 是**几乎不交并**若这列矩体的内部两两不相交.*

注记 2.15. *相应的, $R = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^d$ 称为**一个开矩体**. 如果没有特别提及, 下文中提到的矩体或方体一般默认为闭矩体或闭方体.*

关于矩体我们有如下引理.

引理 2.16. *令 $R, R_1, \ldots, R_N \subset \mathbb{R}^d$ 为一列闭矩体.*

1. *若 R 是 $R_1, \ldots, R_N$ 的几乎不交并, 则*

$$|R| = \sum_{i=1}^{N} |R_i|.$$

[3] 最小是指若 σ-代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 包含 $\mathbb{R}^d$ 中所有开集, 则 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{A}$.

2. 若 $R \subset \bigcup_{i=1}^N R_i$, 则

$$|R| \le \sum_{i=1}^N |R_i|.$$

证明. 作业题. □

下面我们给出 $\mathbb{R}$ 上的开集结构定理.

定理 2.17. $\mathbb{R}$ 中开集均可唯一写成可数个开区间的不交并.

证明. 令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的一个开集. 对任意 $x \in \mathcal{O}$ 定义

$$L_x := \{a < x : (a, x) \subset \mathcal{O}\} \quad \text{及} \quad R_x := \{b > x : (x, b) \subset \mathcal{O}\}.$$

因为 $\mathcal{O}$ 为开集, L_x, R_x 均非空. 令

$$I_x := (a_x, b_x), \quad \text{其中 } a_x := \inf L_x, \quad b_x := \sup R_x.$$

注意到 $I_x \subset \mathcal{O}$. 这是因为对任意 $a \in (a_x, x)$, 由下确界定义, 因为 $a > a_x$, 存在 $a' \in (a_x, a)$ 使得 $a' \in L_x$, 即 $(a', x) \subset \mathcal{O}$. 从而 $a \in (a', x) \subset \mathcal{O}$, 得 $(a_x, x) \subset \mathcal{O}$. 类似的, 我们有 $(x, b_x) \subset \mathcal{O}$. 又因为 $x \in \mathcal{O}$, 因此 $I_x \subset \mathcal{O}$. 进一步的, 我们知道 I_x 是 $\mathcal{O}$ 中包含 x 的最大开区间: 对任意满足 $x \in I' \subset \mathcal{O}$ 的开区间 $I' = (a', b')$, 我们有 $I' \subset I_x$. 事实上, 因为 $(a', x) \subset \mathcal{O}$, 我们有 $a' \in L_x$, 从而 $a' \ge a_x = \inf L_x$. 因此 $(a', x) \subset (a_x, x) \subset I_x$. 类似的有 $(x, b_x) \subset I_x$. 从而 $I' \subset I_x$.

令 $\mathcal{J} := \{I_x\}_{x \in \mathcal{O}}$, 则 $\mathcal{O} = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I$. 首先我们证明 $\mathcal{J}$ 中元素两两不交. 等价的, 我们要证对任意 $I_x, I_y \in \mathcal{J}$, 若 $I_x \cap I_x \ne \emptyset$, 则 $I_x = I_y$. 因为 I_x, I_y 均为开区间, 当 $I_x \cap I_y$ 非空时, $I_x \cup I_y$ 为一开区间. 且 $I_x \cup I_y$ 满足 $x, y \in I_x \cup I_y \subset \mathcal{O}$. 由 I_x, I_y 的最大性, 我们有 $I_x \cup I_y \subset I_x \cap I_y$, 即 $I_x = I_y$. 从而 $\mathcal{O} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{J}} I$ 为开区间的不交并[4].

下面我们证此表示唯一. 假设存在另一个开区间集 $\mathcal{J}'$ 使得 $\mathcal{O} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{J}'} I$. 只需证 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$. 这是因为若 $\mathcal{J}'$ 为 $\mathcal{J}$ 真子集, 则 $\bigsqcup_{I \in \mathcal{J}'} I$ 也为 $\bigsqcup_{I \in \mathcal{J}} I$ 的真子集, 与 $\bigsqcup_{I \in \mathcal{J}'} I = \mathcal{O} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{J}} I$ 矛盾. 任取开区间 $I \in \mathcal{J}'$, 要证 $I \in \mathcal{J}$. 取 I 中某个元素 x. 则 I 满足 $x \in I \subset \mathcal{O}$. 由 I_x 最大性我们有 $I \subset I_x$. 若 $I \subsetneq I_x$, 则 I 的某个端点 a 必定落在 I_x 中. 特别的 $a \in \mathcal{O}$. 因为 $\mathcal{O} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{J}'} I$, 存在 $I' \in \mathcal{J}'$ 使得 $a \in I'$. 则 I 与 I' 必定不同且相交 (这是因为 a 为 I 的端点, 而为 I' 的內点), 与 $\mathcal{J}'$ 的假设矛盾. 从而 $I = I_x \in \mathcal{J}$, 即 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$. 唯一性得证.

---

[4]我们用记号 "$\bigsqcup$" 指代不交并.

最后我们证明 $\mathcal{J}$ 可数 (从而 $\mathcal{O}=\bigsqcup_{I\in\mathcal{J}} I$ 为可数并). 对任意 $I\in\mathcal{J}$, 取 I 中某有理数 r_I. 因为 $\mathcal{J}$ 中任意两个开区间不交, 映射 $\mathcal{J}\to\mathbb{Q}$, $I\mapsto r_I$ 为单射, 从而 $\mathcal{J}$ 可数. □

定理 2.17 告诉我们对 $\mathbb{R}$ 中开集 $\mathcal{O}=\bigsqcup_{I\subset\mathcal{J}} I$, 我们可以自然的定义其测度为

$$m(\mathcal{O}):=\sum_{I\in\mathcal{J}}|I|.$$

对一般维数欧式空间, 情况会复杂一些: 此时我们并不能将任意开集写作一列开方体的不交并. 相应的, 我们只能得到一个弱一些的开集结构定理. 首先我们需要引入如下定义.

定义 2.18. *1. 令 $k\in\mathbb{Z}$. 一个 (k-阶) 2 进方体是形如*

$$Q=2^{-k}([0,1]^d+m),\quad m\in\mathbb{Z}^d,$$

的方体. 令 Γ_k 为所有 k-阶 2 进闭方体所构成的集合. 这些方体形成 $\mathbb{R}^d$ 的一个密铺 (tiling).

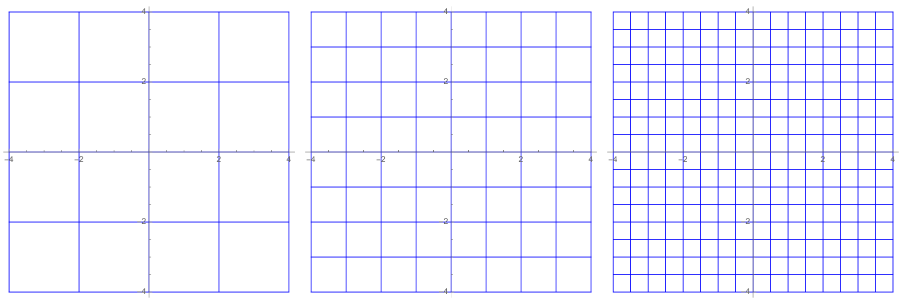

图 4: 从左至右分别为平面上 (部分) -1 阶, 0 阶, 1 阶 2 进方体

注记 2.19. *关于 2 进方体我们有如下两个观察:*

1. *任意两个 2 进方体之间要么具有包含关系要么几乎不交, 即内部不交.*
2. *对任意一个 k-阶方体 $Q\in\Gamma_k$, 对任意 $j\le k$, 存在唯一一个 j-阶 2 进方体包含 Q. 我们记 $\tilde{Q}\in\Gamma_{k-1}$ 为这个包含 Q 的 $(k-1)$-阶 2 进方体.*

定理 2.20. *$\mathbb{R}^d$ 中开集均可写成可数方体的几乎不交并.*

证明. 取定 $\mathbb{R}^d$ 中一个开集 $\mathcal{O}$. 令

$$\mathcal{F}_0:=\{Q\in\Gamma_0:Q\subset\mathcal{O}\}.$$

对任意正整数 k, 令

$$\mathcal{F}_k := \left\{ Q \in \Gamma_k : Q \subset \mathcal{O},\ \tilde{Q} \not\subset \mathcal{O} \right\}.$$

定义

$$G := \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_k} Q.$$

要证此定理我们只需证明 G 为方体的几乎不交并且 $G = \mathcal{O}$. 首先证 G 为方体的几乎不交并. 任取两个不同的 2 进方体 $Q_1 \in \mathcal{F}_{k_1}$, $Q_2 \in \mathcal{F}_{k_2}$, 要证 Q_1, Q_2 几乎不交. 因为注记 2.19 中 2 进方体的第一个性质, 我们只需排除包含关系. 不妨设 $k_1 \geq k_2$. 若 $k_1 = k_2$, 即 Q_1, Q_2 为同阶 2 进方体. 因为 $Q_1 \neq Q_2$, 显然 Q_1 与 Q_2 几乎不交. 若 $k_1 > k_2$, 则需证 $Q_1 \not\subset Q_2$ (不可能有 $Q_2 \subset Q_1$ 因为 Q_2 的边长大于 Q_1). 我们利用反证法. 假设 $Q_1 \subset Q_2$. 特别的, 因为 $k_2 > k_1$, 由注记 2.19 中 2 进方体的第二个性质我们有 $\tilde{Q}_1 \subset Q_2$. 另一方面, 由 $Q_1 \in \mathcal{F}_{k_1}$, $Q_2 \in \mathcal{F}_{k_2}$ 且 $k_1 > k_2 \geq 0$, 我们有 $Q_1, Q_2 \subset \mathcal{O}$ 但 $\tilde{Q}_1 \not\subset \mathcal{O}$. 这与 $\tilde{Q}_1 \subset Q_2$ 矛盾! 从而 $Q_1 \not\subset Q_2$.

下面我们证 $G = \mathcal{O}$. 包含关系 $G \subset \mathcal{O}$ 是平凡的. 只需证 $\mathcal{O} \subset G$. 任取 $x \in \mathcal{O}$, 由 G 定义需证存在某个 $j \geq 0$, $R \in \mathcal{F}_j$ 使得 $x \in R$. 对此 x, 因为 $\mathcal{O}$ 为开集, 我们可以找到充分小 (即 k 充分大) 的 2 进方体 $R_k \in \Gamma_k$ 满足 $x \in R_k \subset \mathcal{O}$. 对任意 $0 \leq j \leq k$ 令 $R_j \in \Gamma_j$ 为包含 R_k 的唯一 j-阶 2 进方体. 我们有嵌套关系

$$R_k \subset R_{k-1} \subset \cdots \subset R_0.$$

令

$$j_0 := \min \{0 \leq j \leq k : R_j \subset \mathcal{O}\}.$$

因为 $R_k \subset \mathcal{O}$, 上述集合为非空有限集, 最小值 j_0 可以取得. 若 $j_0 = 0$, 则有 $R_0 \subset \mathcal{O}$, 从而 $R_0 \in \mathcal{F}_0$. 若 $j_0 > 0$, 则由 j_0 的最小性我们有 $R_{j_0} \subset \mathcal{O}$, 但 $R_{j_0-1} \not\subset \mathcal{O}$, 从而 $R_{j_0} \in \mathcal{F}_{j_0}$. 在这两种情况下我们都有 $x \in R_k \subset R_{j_0} \in \mathcal{F}_{j_0}$. 从而得证 $\mathcal{O} \subset G$. $\square$

3 第三讲

3 月 4 日

3.1 外测度

上节课我们证明了 $\mathbb{R}^d$ 中的开集结构定理: 给定一个开集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, 我们可以将它表成可数个闭方体的几乎不交并. 从而我们可以将这些方体的体积和定义为 $\mathcal{O}$ 的 "测度". 对一般的集合我们没有这样的结构定理, 相应的, 我们利用方体覆盖**从外部逼近**这个集合. 由此我们引入如下外测度的定义.

定义 3.1. *给定集合 $E \subset \mathbb{R}^d$, 其***外测度***定义为*

$$m_*(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : \{Q_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ 为 } E \text{ 的一个方体覆盖}\right\}.$$

*这里 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 E 的一个***方体覆盖***是指每个 Q_j 均为闭方体且 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$.*

注记 3.2. *m_* 可以看成从 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 到 $[0,\infty]$ 的一个映射: 它给 $\mathbb{R}^d$ 的任意子集分配一个非负实数 (可能为 ∞) 用以衡量其大小.*

注记 3.3. *在外测度的定义中一个关键的条件是我们允许方体覆盖中有无穷多个方体. 事实上, 可以定义* ***Jordan 外容度***

$$J_*(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} |Q_j| : \{Q_j\}_{j=1}^{N} \text{ 为 } E \text{ 的一个有限方体覆盖}\right\}.$$

可以证明当 E 比较规则时 (比如 E 为一个矩体或者球体), $J_*(E) = m_*(E)$. 然而注意到 $\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ 总为闭集, 因而 $E \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ 可推出 $\overline{E} \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$. 因此如果 E 与它的闭包相差很远 (比如若 $E = \mathbb{Q}^d$, 其闭包为 $\mathbb{R}^d$), 那么 $\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ 不是对 E 的一个好的逼近. 这时 $J_*(E)$ 可能会远大于 $m_*(E)$, 因而无法很好地衡量 E 的大小.

注记 3.4. *给定子集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 由外测度定义我们知道*

- *对任意 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 我们有 $m_*(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.*
- *对任意 $\epsilon > 0$ 存在 E 的一个方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足[5]*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \le m_*(E) + \epsilon.$$

[5] 当 $m_*(E) = \infty$ 时, 这个不等式平凡成立. 事实上, $m_*(E) = \infty$ 说明 E 的任何方体覆盖均满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = \infty$.

给定某个常数 L, 之后我们经常会需要比较 L 与 $m_*(E)$ 的大小. 注意到

- 若要证 $L \le m_*(E)$, 则需证对 E 的任意方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 我们有 $L \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$.
- 若要证 $L \ge m_*(E)$, 则需证对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 满足 $\sum_{j=1}^\infty |Q_j| \le L + \epsilon$.

例 3.5. 我们可以计算下列简单集合的外测度.

1. 空集、单点集外测度为零.

   证明. 令 $E = \emptyset$ 或 $\{x\}$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在方体 Q 包含 E 且 $|Q| < \epsilon$. 从而 $m_*(E) \le |Q| < \epsilon$. 令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(E) = 0$. □

2. 可数集外测度为零. 特别的, $m_*(\mathbb{Q}^d) = 0$.

   证明. 设 $E = \{x_j\}_{j=1}^\infty$. 对任意 j, 存在方体 Q_j 满足 $x_j \in Q_j$ 且 $|Q_j| < \epsilon/2^j$. 则 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 为 E 的一个方体覆盖, 并且

   $$m_*(E) \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j| < \sum_{j=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon.$$

   令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(E) = 0$. □

3. 闭方体外测度等于其体积.

   证明. 令 $Q \subset \mathbb{R}^d$ 为一闭方体. 注意到 Q 为其本身的一个方体覆盖, 从而有 $m_*(Q) \le |Q|$. 因而只需证 $|Q| \le m_*(Q)$, 为此要证对任意 Q 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 有 $|Q| \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$. 任取 Q 的一个方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$. 对任意 Q_j, 存在开方体 $S_j \supset Q_j$ 满足 $|S_j| < |Q_j| + \epsilon/2^j$. 则 $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ 为紧集 Q 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理我们知道存在某个充分大的正整数 N 使得 $Q \subset \bigcup_{j=1}^N S_j \subset \bigcup_{j=1}^N \overline{S}_j$. 由引理 2.16 (2) 我们有

   $$|Q| \le \sum_{j=1}^N |\overline{S}_j| = \sum_{j=1}^N |S_j| < \sum_{j=1}^N \left(|Q_j| + \frac{\epsilon}{2^j}\right) < \sum_{j=1}^\infty |Q_j| + \epsilon.$$

   令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $|Q| \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$. 从而命题得证. □

4. 闭矩体外测度等于其体积.

证明. 令 $R \subset \mathbb{R}^d$ 为一闭矩体. 利用与上例几乎一样的证明我们可得 $|R| \leq m_*(R)$. 另一方向的不等式留作作业. □

下面我们证明外测度的一些性质.

命题 3.6. *外测度 m_* 满足如下性质:*

1. *(单调性) 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.*

   证明. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E_2 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E_2) + \epsilon$. 因为 $E_1 \subset E_2$, $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 也是 E_1 的一个开方体覆盖. 从而
   $$m_*(E_1) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E_2) + \epsilon.$$
   令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$. □

2. *(次可数可加性) 若 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则 $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.*

   证明. 只需证明对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \epsilon$. 对任意 $\epsilon > 0$ 任意 $j \in \mathbb{N}$, 存在 E_j 的一个方体覆盖 $\{Q_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足
   $$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{jk}| \leq m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$
   注意到 $\{Q_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ 是 E 的一个方体覆盖, 从而
   $$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{jk}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \epsilon.$$
   令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$. □

3. *(平移不变性) 对任意 $E \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $m_*(E + x) = m_*(E)$.*

   证明. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon$. 因为方体的平移仍为方体, $\{Q_j + x\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $E + x$ 的一个方体覆盖. 并且注意到对任意 Q_j, $|Q_j + x| = |Q_j|$. 从而
   $$m_*(E + x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j + x| = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon.$$
   令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(E + x) \leq m_*(E)$.

   另一方面, $m_*(E) = m_*(E + x - x) \leq m_*(E + x)$. 从而得 $m_*(E + x) = m_*(E)$. □

4. *(数乘作用下性质)* 对任意 $E \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $m_*(\lambda E) = \lambda^d m_*(E)$, 其中

$$\lambda E := \left\{\lambda x \in \mathbb{R}^d : x \in E\right\}.$$

证明. 留作作业. □

5. 若 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$, 其中

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1,\ y \in E_2\}.$$

证明. 由次可数可加性有 $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 只需证 $m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E)$. 取 $\delta > 0$ 满足 $d(E_1, E_2) > \delta$ (比如可取 $\delta = \frac{d(E_1,E_2)}{2}$). 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon$. 不妨设每个方体 Q_j 的直径[6]小于 δ. (若否, 可将 Q_j 划分为直径小于 δ 的几乎不交小方体并用这些小方体替代 Q_j.) 注意到因为 $\mathrm{diam}(Q_j) < \delta < d(E_1, E_2)$, Q_j 不能同时与 E_1, E_2 相交, 否则存在 $x \in Q_j \cap E_1$, $y \in Q_j \cap E_2$, 从而

$$\mathrm{diam}(Q_j) \geq d(x, y) \geq d(E_1, E_2) > \delta > \mathrm{diam}(Q_j).$$

矛盾! (这里第一个不等式用到 $x, y \in Q_j$, 第二个不等式用到 $x \in E_1, y \in E_2$.) 令

$$\mathcal{F}_i := \{Q_j : Q_j \cap E_i \neq \emptyset\}, \quad i = 1, 2.$$

注意到对 $i = 1, 2$, $\{Q_j\}_{Q_j \in \mathcal{F}_i}$ 为 E_i 的一个方体覆盖, 并且 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$. 从而我们有

$$\begin{aligned} m_*(E_1) + m_*(E_2) &\leq \sum_{Q_j \in \mathcal{F}_1} |Q_j| + \sum_{Q_j \in \mathcal{F}_2} |Q_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E)$. □

[6]对任意 $F \subset \mathbb{R}^d$, 其**直径**定义为 $\mathrm{diam}(F) := \sup\{|x - y| : x, y \in F\}$.

4 第四讲

3 月 6 日

接上次课的内容, 我们继续研究外测度所满足的一些性质.

命题 4.1. *1. (外正则性) 若 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则*

$$m_*(E) = \inf\{m_*(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \supset E \text{ 开集}\}. \tag{3}$$

证明. 令 $A = \inf\{m_*(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \supset E \text{ 开集}\}$. 由单调性有 $m_*(E) \leq A$. 只需证 $m_*(E) \geq A$. 不妨设 $m_*(E) < \infty$. 只需证对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $\mathcal{O} \supset E$ 满足 $m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(E) + \epsilon$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的方体覆盖 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 使得 $\sum_{j=1}^\infty |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon/2$. 对任意 Q_j, 选取开方体 S_j 包含 Q_j 且满足 $|S_j| \leq |Q_j| + \epsilon/2^{j+1}$. 令 $\mathcal{O} := \bigcup_{j=1}^\infty S_j$. 注意到 $\mathcal{O}$ 为包含 E 的开集. 并且

$$\begin{aligned} m_*(\mathcal{O}) &\leq \sum_{j=1}^\infty m_*(S_j) \leq \sum_{j=1}^\infty m_*(\overline{S}_j) = \sum_{j=1}^\infty |\overline{S}_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty (|Q_j| + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}) = \sum_{j=1}^\infty |Q_j| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

2. 若 $E = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ 为一列方体的几乎不交并, 则

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^\infty |Q_j|.$$

为证明此命题, 我们需要下面引理.

引理 4.2. *设 K 为紧集, F 为闭集. 若 $K \cap F = \emptyset$, 则 $d(K, F) > 0$.*

证明. 用反证法. 假设 $d(K, F) = 0$. 则存在点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ 及 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ 满足 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. 因为 K 为紧集, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 收敛至点 $x \in K$. 考虑点列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. 我们有

$$d(x, y_{n_k}) = |x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty.$$

从而 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 也收敛至 x. 因为 F 为闭集, $x \in F$. 从而 $x \in K \cap F$, 与 $K \cap F = \emptyset$ 矛盾! □

我们有如下直接的推论.

推论 4.3. *令 $F_1, \cdots, F_N \subset \mathbb{R}^d$ 为两两不交的紧集. 则*

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) = \sum_{j=1}^N m_*(F_j). \tag{4}$$

证明. 将 $\bigcup_{j=1}^N F_j$ 写成 $F_1 \bigcup \left(\bigcup_{j=2}^N F_j\right)$. 注意到这两个集合均为紧集且不交. 从而由引理 4.2 及命题 3.6 (5) 我们有

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) = m_*(F_1) + m_*\left(\bigcup_{j=2}^N F_j\right).$$

重复此证明 N 次即得 (4). □

命题 4.1 (2) 的证明. 由次可数可加性有 $m_*(E) \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$. 只需证另一方向不等式. 对任意 $\epsilon > 0$, 对任意闭方体 Q_j 可以找到一个真闭子方体 $\tilde{Q}_j \subsetneq Q_j$ 满足 $|Q_j| \le |\tilde{Q}_j| + \epsilon/2^j$. 注意到因为 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 两两几乎不交, $\{\tilde{Q}_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交. 从而由推论 4.3 可知对任意正整数 N 有

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^N \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^N m_*(\tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^N |\tilde{Q}_j|.$$

又因为 $\bigcup_{j=1}^N \tilde{Q}_j \subset E$ 从而

$$m_*(E) \ge m_*\left(\bigcup_{j=1}^N \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^N |\tilde{Q}_j| \ge \sum_{j=1}^N \left(|Q_j| - \frac{\epsilon}{2^j}\right).$$

因为此不等式对任意 $N \in \mathbb{N}$ 都成立, 令 $N \to \infty$ 即得

$$m_*(E) \ge \sum_{j=1}^\infty \left(|Q_j| - \frac{\epsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^\infty |Q_j| - \epsilon.$$

再令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $m_*(E) \ge \sum_{j=1}^\infty |Q_j|$. □

有了上述性质, 我们可以计算更多集合的外测度.

例 4.4. *1. 开矩体外测度等于其体积.*

证明. 令 $R \subset \mathbb{R}^d$ 为一开矩体. 由单调性有 $m_*(R) \le m_*(\overline{R}) = |\overline{R}| = |R|$. 另一方面, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭矩体 $\tilde{R} \subset R$ 使得 $|\tilde{R}| > |R| - \epsilon$. 再由单调性我们有 $m_*(R) \ge m_*(\tilde{R}) = |\tilde{R}| > |R| - \epsilon$. 令 $\epsilon \to 0^+$ 得 $m_*(R) \ge |R|$, 从而 $m_*(R) = |R|$. □

2. $m_*(\mathbb{R}^d) = \infty$.

证明. 对任意正整数 $k \geq 1$, 考虑方体 $Q_k = [-k, k]^d$. 注意到 $m_*(\mathbb{R}^d) \geq m_*(Q_k) = |Q_k| = (2k)^d$. 因为此不等式对任意 k 都成立, 可得 $m_*(\mathbb{R}^d) = \infty$. □

4.1 一个重要例子: Cantor 三分集

Cantor 三分集 (或简称 Cantor 集) 由法国数学家 Cantor 于 1883 年构造, 它所具有的性质以及它的构造方式[7]均对分析学的发展起到了非常重要的作用.

下面我们给出 Cantor 集的构造方法. 令 $C_0 = [0, 1]$. 将 C_0 三等分并挖去居中的开中间得到 $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. 对 C_1 的两个子区间重复此操作得到 $C_2 = [0, \frac{1}{0}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. 重复此操作我们得到一列单调递减的闭集列:

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \cdots.$$

注意到 C_k 是 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间的不交并集. **Cantor 三分集**便是这列闭集的交集:

$$\mathcal{C} := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

命题 4.5. *Cantor 三分集具有如下性质:*

1. *$\mathcal{C}$ 为非空闭集.*

证明. $\mathcal{C}$ 为一列闭集的可数交, 所以为闭集. $\mathcal{C}$ 非空是因为可以观察到 $0, 1 \in \mathcal{C}$. □

注记 4.6. *事实上, 同样的观察告诉我们对任意 $k \geq 0$, C_k 的所有端点均包含在 $\mathcal{C}$ 中. 进一步的, 令*

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, \cdots) : \text{对任意 } i \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0, 2\}\}.$$

我们可以构造一个从 $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ 到 $\mathcal{C}$ 的一一映射. 具体而言给定一个无穷序列 $(a_1, a_2, \cdots) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, 我们可以构造一条区间 $[0, 1]$ 上通向 Cantor 集中某点的 "路径": 假设小明站在区间 $[0, 1]$ 的中点, 将 $[0, 1]$ 区间的三等分小区间从左至右依次标号 $0, 1, 2$. 我们规定若 $a_1 = i$, $(i = 0, 2)$, 则小明走

[7] 这一构造方式称为**迭代函数系统** (iterated function system), 它是一种非常重要的构造分形 (fractals) 的方式. 另一个著名的由此方式构造的分形是 Sierpinski 三角形; 参见教材 p. 330-334.

至第 i 个子区间的中点, 且记该子区间为 J_1. 再将 J_1 分成三等分并类似标号. 我们规定若 $a_2 = i$, $(i = 0, 2)$, 则小明走至 J_1 的第 i 个子区间的中点, 并记此区间为 J_2. 重复此过程, 最终我们得到一列单调递减的闭子区间 $J_1 \supset J_2 \supset \cdots$. 注意到当 $k \to \infty$, $|J_k| = 3^{-k} \to 0$. 从而由闭区间套定理我们有 $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k = \{x\}$ 为单点集. 这一点便是小明沿着由 $(a_1, a_2, \cdots)$ 决定的这条路径所走向的“终点”. 因为 $J_k \subset C_k$, 我们知道 $x \in \mathcal{C}$. 另一方面, 给定 $x \in \mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$. 因为 C_k 单调递减, 且 C_k 为 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭子区间的不交并, x 也唯一决定了一列单调递减的闭子区间 $J_1 \supset J_2 \supset \cdots$. 这里 J_k 为 C_k 的 2^k 个闭子区间中包含 x 的那个子区间, 从而 $|J_k| = 3^{-k}$. 这一列闭子区间 $\{J_k\}$ 也自然地决定了 $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ 中的一个无穷序列.

2. $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

证明. 对任意 $k \in \mathbb{N}, \mathcal{C} \subset C_k$. 从而

$$m_*(\mathcal{C}) \le m_*(C_k) \le 2^k \times \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty.$$

这里第二个不等式成立是因为次可数可加性以及 C_k 是 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间的不交并. □

3. $\mathcal{C}$ 不含内点, 即不包含任何开区间.

4. $\mathcal{C}$ 为完全集, 即不含孤立点.

5. $\mathcal{C}$ 具有连续统基数, 即存在从 $\mathcal{C}$ 到 $[0,1]$ 的连续满射. 特别的, $\mathcal{C}$ 不可数.

性质 3-5 留作作业.

4.2 Lebesgue 可测集及 Lebesgue 测度

下面我们开始讨论 Lebesgue 可测集以及 Lebesgue 测度.

定义 4.7. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$.

1. 若对任意 $\epsilon > 0$ 存在包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 满足

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) < \epsilon,$$

则 E 称为 ***(Lebesgue)* 可测集**. 记 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 为所有可测集构成的集合.

2. 若 $E \in \mathcal{L}$(即 E 可测), 则定义

$$m(E) := m_*(E)$$

为 E 的 ***(Lebesgue)* 测度**.

注记 4.8. 1. 外测度 m_* 可看成从 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 到 $[0, \infty]$ 上的一个映射. 而 *Lebesgue* 测度便是 m_* 在 $\mathcal{L}$ 上的限制, 即 $m = m_*|_{\mathcal{L}}$. 因此 *Lebesgue* 测度满足所有外测度的性质, 但前提是相关讨论里所出现的集合均是可测集.

2. 我们可以将可测性与外正则性作比较. 对任意集合 $E \subset \mathbb{R}^d$, 外正则性告诉我们若 $m_*(E) < \infty$, 则存在包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 满足

$$0 \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(E) \leq \epsilon.$$

注意到这并不能推出差集 $\mathcal{O} \setminus E$ 的外测度很小. 而可测集正是可以满足 $m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \epsilon$ 的那些集合.

3. 可以证明 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测等价于如下 *Carathéodory* 条件:

$$\text{对任意子集 } A \subset \mathbb{R}^d,\ \ m_*(E \cap A) + m_*(E^c \cap A) = m_*(A).$$

今后在学习抽象测度时我们会用到这一条件.

4.3 Lebesgue 测度的性质

命题 4.9. 可测集满足如下性质:

1. 开集均可测. (特别的, 开方体, 开矩体, 开球 $\cdots$ 均可测.)

证明. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为开集. 对任意 $\epsilon > 0$, 可取开集 $\mathcal{O} = E$, 则 $\mathcal{O}$ 包含 E 且满足

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) = m_*(\emptyset) = 0 < \epsilon.$$

从而 E 可测. □

2. 若 $m_*(E) = 0$, 则 E 可测, 即零测集[8]可测. (特别的, 空集, 可数点列, *Cantor* 三分集均可测.)

证明. 由外正则性对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $\mathcal{O}$ 满足 $E \subset \mathcal{O}$ 且 $m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(E) + \epsilon = \epsilon$. 从而 $m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq m_*(\mathcal{O}) \leq \epsilon$. 即证 E 可测. □

[8]此处“零测集”是指外测度为零的集合. 因为此命题, 我们知道所有外测度为零的集合均可测. 所以此时外测度与测度相同, 以后我们提到零测集时即指测度为零的集合.

5 第五讲

3 月 11 日

5.1 Lebesgue 测度的性质: 继续

命题 5.1. *1. 可测集的可数并可测: 若 $\{E_j\} \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 则 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ 可测.*

证明. 令 $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. 对任意 $j \geq 1$, 因为 E_j 可测, 由定义对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $\mathcal{O}_j$ 包含 E_j 且满足 $m_*(\mathcal{O}_j \setminus E_j) \leq \epsilon/2^j$. 令 $\mathcal{O} := \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{O}_j$. 则 $\mathcal{O}$ 为开集且包含 E. 并且注意到

$$\mathcal{O} \setminus E \subset \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{O}_j \setminus E_j.$$

这是因为对任意 $x \in \mathcal{O} \setminus E$, 由 $\mathcal{O}$ 与 E 的定义可知存在某个 j_0 使得 $x \in \mathcal{O}_{j_0}$ 并且对任意 $j \geq 1$, $x \notin E_j$. 特别的, $x \notin E_{j_0}$. 从而 $x \in \mathcal{O}_{j_0} \setminus E_{j_0} \subset \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{O}_j \setminus E_j$. 从而由外测度的单调性及次可数可加性我们有

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq m_*\left(\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{O}_j \setminus E_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty m_*(\mathcal{O}_j \setminus E_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon.$$

因此 E 可测. □

2. 闭集均可测.

证明. 令 $F \subset \mathbb{R}^d$ 为一闭集. 首先假设 F 紧. 特别的 $m_*(F) < \infty$. 由外正则性对任意 $\epsilon > 0$ 存在开集 $\mathcal{O}$ 包含 F 且满足 $m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(F) + \epsilon$. 我们要证 $m_*(\mathcal{O} \setminus F) \leq \epsilon$. 注意到 $\mathcal{O} \setminus F$ 为开集, 从而由开集结构定理 (定理 2.20) 可以将 $\mathcal{O} \setminus F$ 写成一列闭方体的几乎不交并: $\mathcal{O} \setminus F = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$. 由命题 4.1 (2) 我们有

$$m_*(\mathcal{O} \setminus F) = \sum_{j=1}^\infty |Q_j|.$$

另一方面, 对任意正整数 N, $K := \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 为紧集且满足 $K \cap F = \emptyset$. 从而由推论 4.3 (并且注意到 $K \cup F \subset \mathcal{O}$) 我们有

$$m_*(\mathcal{O}) \geq m_*(K \cup F) = m_*(K) + m_*(F) = \sum_{j=1}^N |Q_j| + m_*(F).$$

令 $N \to \infty$ 即得

$$m_*(\mathcal{O} \setminus F) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(F) \leq \epsilon.$$

从而命题得证.

对一般的闭集 F, 对任意整数 $k \geq 1$, 令 $F_k = F \cap Q_k$, 其中 $Q_k = [-k, k]^d$. 注意到 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 且每个 F_k 均为紧集. 从而 F_k 均可测. 再由命题 (1) 可知 F 也可测. □

注记 5.2. *(1) (2) 说明 F_σ 集 (闭集的可数并) 均可测.*

3. *可测集的补集可测: E 可测 $\Rightarrow E^c$ 可测.*

证明. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 由作业 2b 第三题可知存在一个 G_δ 集 $G \supset E$ 满足 $m_*(G \setminus E) = 0$. 因为 $G \setminus E$ 为零测集, 从而其可测. 另一方面, G^c 为一 F_σ 集, 从而 G^c 也可测. 注意到 $E^c = G^c \sqcup (G \setminus E)$. 再由命题 (1) 可知 E^c 可测. □

4. *可测集的可数交可测: $\{E_j\}$ 可测 $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ 可测.*

证明. 注意到 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\right)^c$. 由于可测集的可数并及补集均可测, 可知 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ 也可测. □

5. *可测集的差集可测: E, F 可测 $\Rightarrow E \setminus F$ 可测.*

证明. 这是因为 $E \setminus F = E \cap F^c$. □

5.2 可测集与 Borel 集的关系

由命题 4.9 (1) 及命题 5.1 (1), (3) 我们有如下直接的推论.

推论 5.3. *$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ 为一个 σ-代数, 且包含所有 Borel 集, 即 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$.*

注记 5.4. *事实上 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$: 可以证明存在非 Borel 的零测集 (作业).*

另一方面, 可测集与 Borel 集也仅仅相差这些零测集.

定理 5.5. *集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测当且仅当*

1. *存在 G_δ 集 $G \supset E$ 满足 $m_*(G \setminus E) = 0$.*

2. 存在 F_σ 集 $F \subset E$ 满足 $m_*(E \setminus F) = 0$.

证明. 命题 (1) 的 "$\Rightarrow$" 方向为作业 2b 第三题. 另一方向成立是平凡的. (因为 $E = G \setminus (G \setminus E)$.)

对命题 (2), "$\Leftarrow$" 方向也是平凡的. 对另一方向, 因为 E^c 可测, 存在 G_δ 集 G 包含 E^c 且满足 $m_*(G \setminus E^c) = 0$. 令 $F = G^c$. 注意到 F 为一 F_σ 集且 $E \setminus F = G \setminus E^c$. 从而 $m_*(E \setminus F) = m_*(G \setminus E^c) = 0$. □

定理 5.5 说明我们可以将任意可测集写成一个 Borel 集与一个零测集 (可测但未必是 Borel 集) 的差集或并集.

5.3 可数可加性

下面我们讨论 Lebesgue 测度与外测度的一个最主要差别: Lebesgue 测度满足**可数可加性**:

定理 5.6 (可数可加性). 设 $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 其中 $E_1, E_2, \ldots,$ 为一列两两不相交的可测集, 则

$$m(E) = \sum_{j=1}^\infty m(E_j). \tag{5}$$

这里定理的证明与命题 4.1 (2) 的证明类似. 关键点在于可以找到 E_j 的子集 F_j 使得差集 $E_j \setminus F_j$ 的外测度很小. 当 E_j 为方体时 (即命题 4.1 (2) 中的情形), 这一要求很容易满足. 当 E_j 可测时, 我们有如下引理.

引理 5.7. $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$ 满足 $m_*(E \setminus F) \le \epsilon$.

证明. 证明与命题 5.5 (2) 的证明类似 (利用 E^c 的可测性). □

下面我们给出定理 5.6 的证明.

证明. 首先假设 E_j 均有界. 对任意 $\epsilon > 0$, 由引理 5.7 可知对任意 E_j, 存在闭集 $F_j \subset E_j$ 满足 $m_*(E_j \setminus F_j) \le \epsilon/2^j$. 因为 E_j 有界且两两不交, F_j 为一列两两不交的紧集. 对任意 $N \ge 1$, 由推论 4.3 我们有

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) = \sum_{j=1}^N m_*(F_j).$$

因为 $E_j = F_j \cup (E_j \setminus F_j)$, 由次可数可加性我们有

$$m_*(E_j) \leq m_*(F_j) + m_*(E_j \setminus F_j) \leq m_*(F_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

再由单调性有

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{N} m_*(F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} \left(m_*(E_j) - \frac{\epsilon}{2^j} \right).$$

令 $N \to \infty$ 即得

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(m_*(E_j) - \frac{\epsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) - \epsilon.$$

再令 $\epsilon \to 0^+$ 并且注意到 $\{E_j\}$, E 均可测 (从而可以将 m_* 替换成 m) 即得 (5).

对一般的 $\{E_j\}$, 令 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的一列不交并, 即 $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 并且 B_k 均有界. (例如令 $Q_k = [-k, k]^d$, 可取 $B_1 = Q_1$, $B_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$ $(k \geq 2)$.) 对任意 $j, k \geq 1$, 令 $E_{jk} = E_j \cap B_k$. 注意到 E_{jk} 均有界且对任意 j, $E_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_{jk}$ 以及 $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_{jk}$. 从而由有界情形可知

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

命题得证. □

6 第六讲

3 月 13 日

下面我们讨论可数可加性的一些推论. 首先我们有如下一个非常简单但很常用的推论.

推论 6.1. 设 $F \subset E$ 均可测且 $m(F) < \infty$. 则 $m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$.

证明. 将 E 写成 $E = F \sqcup (E \setminus F)$. 由可数可加性可知 $m(E) = m(F) + m(E \setminus F)$. 因为 $m(F) < \infty$, 可将此项移至等式的左端即得 $m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$. □

注记 6.2. 在此推论中我们允许 $m(E) = \infty$. 此时此推论告诉我们差集 $E \setminus F$ 的测度也为 ∞.

下面我们讨论一些更加重要的推论.

定理 6.3 (单调集列的测度连续性)**.** 设 $\{E_j\}, E \subset \mathbb{R}^d$ 可测.

1. 若 $E_j \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$.
2. 若 $E_j \searrow E$ 且对某个 E_k 有 $m(E_k) < \infty$, 则 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$.

注记 6.4. 命题 (1) 的等式两端允许 $+\infty$. 命题 (2) 中的 $m(E_k) < \infty$ 的假设是必须的: 取 $E_j = (j, \infty) \subset \mathbb{R}$. 注意到 $E_j \searrow E = \emptyset$, 但 $\infty = \lim_{j\to\infty} m(E_j) \neq m(E) = 0$.

证明. 对 (1), 令 $G_1 = E_1, G_k = E_k \setminus E_{k-1}$ $(k \geq 2)$. 则

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad \text{且对任意 } N \geq 1,\ E_N = \bigsqcup_{k=1}^{N} G_k$$

由可数可加性有

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

对 (2), 注意到对任意 $k \geq 1$,

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j.$$

从而不妨设 $m(E_1) < \infty$ (否则我们可以将 $E_1, \cdots, E_{k-1}$ 从这个集列中删去, 这不改变极限集 E 以及极限 $\lim_{N\to\infty} m(E_N)$). 对任意 $k \geq 1$, 令 $G_k = E_k \setminus E_{k+1}$. 注意到

$$E_1 = E \bigsqcup \bigsqcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

这是因为对任意 $x \in E_1$, 要么对任意 $k \geq 1$, $x \in E_k$ (即 $x \in E$), 要么存在唯一的 $k \geq 1$ 使得 $x \in E_k$ 但 $x \notin E_{k+1}$ (即 $x \in G_k$). 从而由可数可加性我们有

$$m(E_1) = m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k).$$

因为 $m(E_1) < \infty$, 无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) < \infty$ (绝对收敛). 可在上式中两端减去 $\sum_{k=1}^{\infty} m(G_k)$ 得

$$m(E) = m(E_1) - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} \left(m(E_1) - \sum_{k=1}^{N} m(G_k) \right).$$

注意到

$$m(E_1) - \sum_{k=1}^{N} m(G_k) = m(E_1) - \sum_{k=1}^{N} (m(E_k) - m(E_{k+1})) = m(E_{N+1}).$$

从而有

$$m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_{N+1}) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

命题得证. □

由可数可加性我们也可以证明 Littlewood 三原则中的第一条原则: 可测集几乎是方体 (当 $d = 1$ 时即为区间) 的有限并.

定理 6.5. *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测且 $m(E) < \infty$. 对任意 $\epsilon > 0$,*

1. *存在紧集 $K \subset E$ 满足 $m(E \setminus K) \leq \epsilon$.*
2. *存在闭方体的有限并 $F = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ 满足 $m(E \Delta F) \leq \epsilon$. 其中回忆 $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ 为 E 与 F 对称差集.*

证明. 若 E 有界, 则 (1) 等价于引理 5.7. 对一般的 E, 令 $E_k = E \cap Q_k$, 其中 $Q_k = [-k, k]^d$. 注意到 E_k 有界且 $E_k \nearrow E$. 从而由定理 6.3 (1) 有 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$. 因为 $m(E) < \infty$, 我们可以找到充分大的正整数 N 满足 $m(E) \leq m(E_N) + \frac{\epsilon}{2}$. 由推论 6.1 我们有

$$m(E \setminus E_N) = m(E) - m(E_N) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

并且因为 E_N 有界, 存在紧集 $K \subset E_N$ 满足 $m(E_N \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{2}$. 则 $K \subset E_N \subset E$, 且

$$m(E \setminus K) = m((E \setminus E_N) \sqcup (E_N \setminus K)) = m(E \setminus E_N) + m(E_N \setminus K) \leq \epsilon.$$

命题 (1) 得证.

对命题 (2), 因为 E 可测, 存在开集 $\mathcal{O}$ 包含 E 满足 $m(\mathcal{O}\setminus E)\le\frac{\epsilon}{2}$. 由开集结构定理可将 $\mathcal{O}$ 写为一列方体的几乎不交并: $\mathcal{O}=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$. 注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|=m(\mathcal{O})=m(E)+m(\mathcal{O}\setminus E)<\infty,$$

从而存在 N 充分大使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty}|Q_j|\le\frac{\epsilon}{2}$. 令 $F=\bigcup_{j=1}^{N}Q_j$. 注意到

$$E\Delta F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)\subset(\mathcal{O}\setminus F)\cup(\mathcal{O}\setminus E)\subset\left(\cup_{j=N+1}^{\infty}Q_j\right)\cup(\mathcal{O}\setminus E).$$

从而

$$m(E\Delta F)\le\sum_{j=N+1}^{\infty}|Q_j|+m(\mathcal{O}\setminus E)\le\epsilon.$$

命题得证. □

注记 6.6. *从定理 6.5 (2) 的证明可以看到其中选取的闭方体的有限并可以为几乎不交并.*

6.1 Lebesgue 不可测集

我们之前提到 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\subset\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, 并且第一个包含关系是真包含关系, 即存在可测的非 Borel 集. 现在我们来证明第二个包含关系也是真包含关系.

定理 6.7 (Vitali, 1905)**.** *$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\subsetneq\mathcal{P}(\mathbb{R})$, 即存在 $\mathbb{R}$ 上的不可测集.*

为证明此定理, 我们引入如下 $[0,1]$ 区间上的等价关系: 对任意 $x,y\in[0,1]$, 我们称 x,y 是等价的 (记为 $x\sim y$) 若 $x-y\in\mathbb{Q}$. 可以验证 $\sim$ 满足等价关系的条件:

- (自反性) $\forall\, x\in[0,1],\ x\sim x$.
- (对称性) $\forall\, x,y\in[0,1]:\quad x\sim y\quad\Longrightarrow\quad y\sim x$.
- (传递性) $\forall\, x,y,z\in[0,1]:\quad x\sim y,\ y\sim z\quad\Longrightarrow\quad x\sim z$.

对任意 $\alpha\in[0,1]$ 令

$$E_\alpha:=\{x\in[0,1]:x\sim\alpha\}$$

为 α 所在的等价类. 注意到

$$\text{对任意 }\alpha,\beta\in[0,1],\text{ 要么 }E_\alpha\cap E_\beta=\emptyset,\text{ 要么 }E_\alpha=E_\beta.$$

这是因为若 $E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset$, 则存在 $x \in E_\alpha \cap E_\beta$. 从而 $x \sim \alpha$, $x \sim \beta$. 由传递性有 $\alpha \sim \beta$. 由此易知 $E_\alpha = E_\beta$.

因为上述性质, 我们可以将 $[0,1]$ 划分成所有等价类的不交并:

$$[0,1] = \bigsqcup_\alpha E_\alpha.$$

从每个等价类 E_α 内选取出一个元素 x_α, 将这些元素组成一个集合, 记为 $\mathcal{N} = \{x_\alpha\}$. 定理 22.7 是下述命题的一个显然推论.

命题 6.8. *$\mathcal{N} \subset [0,1]$ 不可测.*

证明. 令 $r_1, r_2, \cdots$ 为 $[-1,1]$ 上的所有有理数的一个罗列. 我们断言 $\mathcal{N}$ 满足下述性质

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N} + r_j \subset [-1,2]. \tag{6}$$

若此断言成立, 则由第一讲的证明 (见 p. 5-6) 可推出 $\mathcal{N}$ 不可测.

下面我们证明 (6). 注意到 (6) 中的第二个包含关系是平凡的. 只需证

(a) 对任意 $r_i \neq r_j$, $(\mathcal{N} + r_i) \cap (\mathcal{N} + r_j) = \emptyset$.

(b) $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N} + r_j$.

若 (a) 不成立, 则存在 $r_i \neq r_j$ 使得 $(\mathcal{N} + r_i) \cap (\mathcal{N} + r_j) \neq \emptyset$. 从而存在 $x \in (\mathcal{N} + r_i) \cap (\mathcal{N} + r_j)$. 即存在 $x_\alpha, x_\beta \in \mathcal{N}$ 使得

$$x = x_\alpha + r_i = x_\beta + r_j.$$

因为 $r_i \neq r_j$, 我们有 $x_\alpha \neq x_\beta$. 另一方面, 因为 r_i, r_j 均为有理数, 我们有 $x \sim x_\alpha$, $x \sim x_\beta$. 从而 $x_\alpha \sim x_\beta$. 因为每个等价类在 $\mathcal{N}$ 中仅有一个元素且 x_α, $x_\beta \in \mathcal{N}$, 我们有 $x_\alpha = x_\beta$. 矛盾! 从而命题 (a) 得证.

对 (b), 任取 $x \in [0,1]$. 由 $\mathcal{N}$ 定义存在 $x_\alpha \in \mathcal{N}$ 使得 $x \sim x_\alpha$, 即 $x - x_\alpha \in \mathbb{Q}$. 并且因为 $x, x_\alpha \in [0,1]$, $x - x_\alpha \in [-1,1]$. 从而存在某个 r_j 使得 $x - x_\alpha = r_j$, 即 $x = x_\alpha + r_j \in \mathcal{N} + r_j \subset \bigcup_j \mathcal{N} + r_j$. 命题 (b) 得证. □

推论 6.9 (作业)**.** *对任意 $d \geq 1$, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

6.1.1 Banach-Tarski 悖论

一个更加有意思的 $\mathbb{R}^d$ 中的不可测集来自于著名的 Banach-Tarski 悖论[9]. 他们证明了如下事实.

定理 6.10 (Banach-Tarski paradox)**.** *设 $d \geq 3$. 对任意 $\mathbb{R}^d$ 中的两个有界集 A, B, 存在有限划分*

$$A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k, \quad B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_k,$$

使得每个 B_i 均可从 A_i 通过平移旋转得到.

若我们取 A 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个单位球, B 为两个同样大小的不交单位球. 则 Banach-Tarski 悖论告诉我们我们可以将第一个单位球分割成有限多块, 然后再通过平移旋转可以将这些小块拼接成同样的两个单位球! 这是非常反直觉的, 然而它与 Lebesgue 测度理论并不矛盾. 这是因为上述划分中的集合 A_i, B_j 均为不可测集.

6.1.2 选择公理

定理 22.7 的证明中当我们从每个等价类中选取出一个元素时我们并没有一个明确的选择策略. 并且因为指标集是不可数的[10], 我们无法逐一从每个等价类中选取出元素. 事实上, 在此我们不自觉的应用了**选择公理 (Axiom of choice)**[11]:

令 E 为一非空集合, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset E$ 为一族非空子集. 则存在一个"选择"函数 $\alpha \in I \mapsto x_\alpha \in E$ 使得对任意 $\alpha \in I$, $x_\alpha \in E_\alpha$.

选择公理是现代集合论 ZFC 公理体系的一部分. ZFC 中的 ZF 是指 Zermelo–Fraenkel 公理体系, 它包含八条公理, 而这里的 C (choice) 则是指选择公理. 选择公理与 ZF 公理体系中的公理是相互独立的, 即假设 ZF 公理体系我们并不能证明或证否选择公理. 现代数学中许多重要的结论皆依赖于选择公理. 在此我们不作更多讨论 (事实上我也不甚了解), 在我们的课程中我们假设选择公理.

[9]参见 Wagon, Stan (1994). The Banach–Tarski Paradox. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-45704-1.

[10]这是因为每个等价类中的元素是可数的 (对任意 $x \in \mathbb{R}$, x 所代表的等价类为 $x + \mathbb{Q}$.), 若等价类数可数, 则我们可推出 $\mathbb{R}$ 可数, 而这是错误的.

[11]事实上, Banach-Tarski 悖论的证明中也应用了选择公理.

7 第七讲

3 月 18 日

7.1 可测函数

给定可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 令 f 为 E 上的一个实值函数. 在实分析中我们允许函数取 $\pm\infty$. 这样的函数我们称为*广义实值函数*. 为作区分, 若 f 不取 $\pm\infty$, 我们称 f 为*有限值函数*.

我们对涉及 $\pm\infty$ 的运算作如下约定: 对任意 $a \in \mathbb{R}$,

- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad a + (\pm\infty) = \pm\infty.$
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, \quad a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} 0 & \text{若 } a = 0, \\ \pm\infty & \text{若 } a > 0, \\ \mp\infty & \text{若 } a < 0. \end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0.$
- $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 无意义.

今天的讨论中我们均假设 f 为可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的一个实值函数. 若非特别指出, 一般默认 f 为广义实值函数.

定义 7.1. *称函数 f* **可测** *若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合 $\{x \in E : -\infty \le f(x) < a\}$ 均可测.*

因为在今天的讨论中我们会多次出现类似 $\{x \in E : -\infty \le f(x) < a\}$ 的集合. 我们引入如下简便记号: 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 对任意子集 $I \subset [-\infty, +\infty]$ 我们记

$$\{f \in I\} = \{x \in E : f(x) \in I\}.$$

特别的, 我们有

- $\{f < a\} = \{x \in E : -\infty \le f(x) < a\}.$
- $\{f \le a\} = \{x \in E : -\infty \le f(x) \le a\}.$
- $\{f > a\} = \{x \in E : a < f(x) \le +\infty\}.$
- $\{f \ge a\} = \{x \in E : a \le f(x) \le +\infty\}.$

我们有如下函数可测性的等价刻画.

命题 7.2. *以下条件等价:*

(i) 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\}$ 可测 ($\Leftrightarrow f$ 可测).

(ii) 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{f \le a\}$ 可测.

(iii) 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\}$ 可测.

(iv) 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{f \ge a\}$ 可测.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 假设 (i) 成立. 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 有

$$\{f \le a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{f < a + \tfrac{1}{k}\right\}.$$

由 (i) 上式右端集合均可测. 从而 $\{f \le a\}$(作为可测集的可数交) 也可测.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 这是因为对任意 $a \in \mathbb{R}$ 有 $\{f > a\} = E \setminus \{f \le a\}$. 由 (ii) 可知 $\{f \le a\}$ 可测, 并且由假设 E 可测, 从而 $\{f > a\}$ 可测.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): 证明与 "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" 情形类似. 只需注意到对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\{f \ge a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > a - \tfrac{1}{k}\}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i): 证明与 "(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" 情形类似. 只需注意到对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{f \ge a\} = E \setminus \{f < a\}$. □

注记 7.3. *注意到 f 可测蕴含了集合 $f^{-1}(a)$, 对任意 $-\infty \le a \le +\infty$ 均可测. 这是因为若 $a \in \mathbb{R}$,*

$$f^{-1}(a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{a - \tfrac{1}{k} < f < a + \tfrac{1}{k}\right\},$$

若 $a = \pm\infty$,

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\}, \quad f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\}.$$

例 7.4. *设 $F \subset E$ 为 E 的一个子集. 我们之前定义过其特征函数 (或称示性函数) 为*

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in F, \\ 0 & 若\ x \in E \setminus F. \end{cases}$$

由 χ_F 定义, 容易验证

$$\text{对任意 } a\in\mathbb{R},\ \{\chi_F<a\}=\begin{cases} E & \text{若 } a>1,\\ E\setminus F & \text{若 } 0<a\le 1,\\ \emptyset & \text{若 } a\le 0.\end{cases}$$

由此可知

$$\chi_F \text{ 可测} \quad\Longleftrightarrow\quad F \text{ 可测}. \tag{7}$$

命题 7.5. *函数 f 可测当且仅当 $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty)$ 均可测且对任意 $a,b\in\mathbb{R}, a<b$, $\{a<f<b\}$ 可测.*

证明. 首先证明 “$\Rightarrow$”: 由注记 7.3 只需证对任意实数 $a<b$, 集合 $\{a<f<b\}$ 均可测. 为此注意到 $\{a<f<b\}=\{f>a\}\cap\{f<b\}$. 由命题 7.2 可知 $\{f>a\}$ 及 $\{f<b\}$ 均可测, 从而 $\{a<f<b\}$ 可测.

对另一方向, 由定义需证对任意 $b\in\mathbb{R}$, 集合 $\{f<b\}$ 可测. 注意到

$$\{f<b\}=f^{-1}(-\infty)\bigcup\bigcup_{k=1}^{\infty}\{b-k<f<b\}.$$

由假设上述等式右端的集合均可测, 从而 $\{f<b\}$ 可测. □

注记 7.6. *若 f 为有限实函数, 则上述命题可简化为 f 可测当且仅当对任意实数 $a<b$, $\{a<f<b\}$ 可测.*

命题 7.7. *设 f 为有限值函数. 则以下条件等价:*

(i) f 可测.

(ii) 对任意开集 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 可测.

(iii) 对任意闭集 $F\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ 可测.

(iv) 对任意 *Borel* 集 $G\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(G)$ 可测.

证明. 留作作业. □

命题 7.7 有如下直接推论.

推论 7.8. *连续函数可测.*

证明. 设 $f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 对任意开集 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 为开集, 从而可测. □

下面我们讨论可测性在一些函数运算下是否保持. 首先我们考虑两个函数之间的复合.

命题 7.9. *设 $f: E \to \mathbb{R}$ 可测, $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续. 则复合函数 $\Phi \circ f$ 也可测.*

证明. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 注意到

$$\{\Phi \circ f < a\} = (\Phi \circ f)^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}(\Phi^{-1}((-\infty, a))).$$

因为 Φ 连续, $(-\infty, a)$ 为开集, 从而 $\mathcal{O} := \Phi^{-1}((-\infty, a))$ 为开集. 从而由命题 7.7 (ii) 可知 $\{\Phi \circ f < a\} = f^{-1}(\mathcal{O})$ 也可测. □

注记 7.10. *命题 7.9 可以由下列图表表达:*

$$E \xrightarrow[\text{可测}]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{连续}]{\Phi} \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \Phi \circ f \text{ 可测}.$$

但若我们将对 f 与 Φ 的假设对调, 即假设 f 连续, Φ 可测, 则此时无法推出 $\Phi \circ f$ 可测. 即

$$E \xrightarrow[\text{连续}]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{可测}]{\Phi} \mathbb{R} \quad \not\Rightarrow \quad \Phi \circ f \text{ 可测}.$$

事实上, 令 $\hat{\mathcal{C}}_1, \hat{\mathcal{C}}_2 \subset [0,1]$ 为两个类 Cantor 集. 其中 $m(\hat{\mathcal{C}}_1) > 0$, $m(\hat{\mathcal{C}}_2) = 0$. 由第三次作业我们知道

- *存在连续双射 $f: \hat{\mathcal{C}}_1 \to \hat{\mathcal{C}}_2$.*
- *$\hat{\mathcal{C}}_1$ 中存在不可测子集 N(因为 $m(\hat{\mathcal{C}}_1) > 0$).*

定义 $\Phi(x) = \chi_{f(N)}(x)$. 因为 $f(N) \subset \hat{\mathcal{C}}_2$ 且 $\hat{\mathcal{C}}_2$ 为零测集, 我们知道 $f(N)$ 可测. 从而由 (7) 可知 Φ 可测. 并且我们还知道 f 连续. 另一方面, 由 f 为双射可知 $\Phi \circ f = \chi_N$. 因为 N 不可测, 从而再由 (7) 可知 $\Phi \circ f$ 不可测.

下面我们考虑可测性在极限运算下是否保持.

命题 7.11. *令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列可测函数. 则*

(i) *下列函数*

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x), \qquad \inf_{n \geq 1} f_n(x), \qquad \limsup_{n \to \infty} f_n(x), \qquad \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

均可测.

(ii) *若对任意 $x \in E$, 极限 $\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$ 均存在, 则 f 可测.*

证明. 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\left\{\sup_{n\geq 1} f_n(x)>a\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_n>a\}.$$

上式右端集合均可测, 从而左端集合也可测, 即知 $\sup_{n\geq 1} f_n(x)$ 可测. 类似的, $\inf_{n\geq 1} f_n(x)$ 的可测性可由下式得出:

$$\left\{\inf_{n\geq 1} f_n(x)<a\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_n<a\},\quad \forall\, a\in\mathbb{R}.$$

上下极限函数的可测性可由上下确界函数的可测性以及下式得出:

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x)=\inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k} f_n(x),\qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x)=\sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k} f_n(x).$$

□

最后我们考虑可测函数在一些常见运算 (加减乘除) 下是否保持.

命题 7.12. 设 f,g 可测. 则

(i) 下列函数

$$cf\,(\forall\, c\in\mathbb{R}),\qquad f^k\,(\forall\, k\in\mathbb{N}),\qquad \max(f,g),\min(f,g),$$

均可测. 其中

$$\max(f,g)(x):=\begin{cases} f(x) & 若\ f(x)\geq g(x),\\ g(x) & 若\ f(x)<g(x),\end{cases}$$

$\min(f,g)(x):=-\max(-f,-g)$.

(ii) 若 f,g 为有限值函数, 则

$$f+g,\qquad fg,\qquad \frac{f}{g}\,(假设\ \forall\, x\in E,\ g(x)\neq 0)$$

均可测.

证明. 首先考虑函数 cf. 若 $c=0$, 则 $cf=0=\chi_\emptyset$ 可测. 若 $c\neq 0$, 则对任意 $a\in\mathbb{R}$,

$$\{cf<a\}=\begin{cases}\{f<\frac{a}{c}\} & 若\ c>0,\\ \{f>\frac{a}{c}\} & 若\ c<0.\end{cases}$$

由 f 的可测性, 上述等式右端的两个集合均可测, 从而 $\{cf<a\}$ 可测, 即证 cf 可测.

对函数 f^k, 若 k 为奇数, 则对任意 $a\in\mathbb{R}$, $\{f^k<a\}=\{f<a^{1/k}\}$ 可测[12], 从而 f^k 可测. 若 k 为偶数, 则

$$\{f^k<a\}=\begin{cases}\emptyset & \text{若 } a\le 0,\\ \{-a^{1/k}<f<a^{1/k}\} & \text{若 } a>0.\end{cases}$$

类似的, 上述等式右端的两个集合也均可测 (见命题 7.5). 从而此时 f^k 也可测.

对较大值函数 $\max(f,g)$, 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 注意到

$$\{\max(f,g)<a\}=\{f<a\}\cap\{g<a\}.$$

由 f,g 的可测性即得 $\{\max(f,g)<a\}$ 可测, 从而 $\max(f,g)$ 可测. 较小值函数的可测性由较大值函数的可测性以及关系 $\min(f,g)(x)=-\max(-f,-g)$ 得出.

对 (ii), 假设 f,g 均为有限值函数. 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 对任意 $x\in E$, 注意到

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)>a \Leftrightarrow{}& g(x)>a-f(x)\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } r\in\mathbb{Q} \text{ 使得 } a-f(x)<r<g(x)\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } r\in\mathbb{Q} \text{ 使得 } f(x)>a-r \text{ 且 } g(x)>r.\end{aligned}$$

由上述等价条件[13]即知

$$\{f+g>a\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{f>a-r\}\cap\{g>r\}.$$

由 f,g 的可测性可知上式右端集合均可测且因为 $\mathbb{Q}$ 为可数集, 从而 $\{f+g>a\}$ 也可测. 即得 $f+g$ 可测. (此命题也可推出 $f-g$ 可测, 因为 $f-g=f+(-1)g$ 为两个可测函数的和.)

对函数 fg, 我们有如下等式

$$fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right).$$

再由前证性质可知上式右端为可测函数, 从而 fg 也可测.

最后考虑函数 $\frac{f}{g}$. 这里假设对任意 $x\in E$, $g(x)\neq 0$. 因为 $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$. 只需证 $\frac{1}{g}$ 可测. 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 注意到

$$\left\{\frac{1}{g}<a\right\}=\begin{cases}\{g<0\} & \text{若 } a=0,\\ \{\frac{1}{a}<g<0\} & \text{若 } a<0,\\ \{g<0\}\cup\{g>\frac{1}{a}\}. & \text{若 } a>0.\end{cases}$$

[12]这里 $a^{1/k}$ 是方程 $x^k=a$ 的唯一实根. 当 $k\ge 1$ 为奇数时, 函数 $y=x^k$ 严格单调递增且值域为 $\mathbb{R}$. 从而方程 $x^k=a$ 有唯一实根.

[13]注意到这里等价关系成立是因为我们假设了 f,g 均为有限值函数.

由 g 的可测性易知上式右端的三个集合均可测. 从而 $\{\frac{1}{g} < a\}$ 可测, 即 $\frac{1}{g}$ 可测. □

下面我们来看一个例子.

定义 7.13. *(i) 形如*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{M} c_i \chi_{F_i}(x), \text{ 其中 } c_i \in \mathbb{R}, F_i \subset E \text{ 可测}$$

*的函数称为 E 上的**简单函数**.*

*(ii) 若 (i) 中 F_i 均为矩体, 则 φ 称为 E 上的**阶梯函数**.*

注意到简单函数的表示并不唯一, 比如若 $F = F_1 \sqcup F_2$, 则函数 χ_F 也可以表示为 $\chi_{F_1} + \chi_{F_2}$. 但是简单函数均存在如下的标准表示.

命题 7.14. *设 φ 为一简单函数. 则 φ 可测且其存在如下标准表示:*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i},$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$, $E_i \subset E$ 满足

$$\text{对任意 } 1 \le i \ne j \le N, a_i \ne a_j, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ 且 } E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i. \tag{8}$$

证明. 由定义, (7) 及命题 7.12 易知 φ 可测, 并且其值域为有限集. 令

$$\text{Range}(\varphi) = \{a_1, \cdots, a_N\}$$

为 φ 的值域. 对每个 $1 \le i \le N$, 令 $E_i := \{x \in E : \varphi(x) = a_i\}$. 由定义可知 a_i, E_i 满足性质 (8). 并且我们断言

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}. \tag{9}$$

这是因为对任意 $x \in E$, 因为 $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i$, 必定存在唯一一个 $1 \le j \le N$ 使得 $x \in E_j$. 由 E_j 定义可知 $\varphi(x) = a_j$. 另一方面, 将 x 带入上式右端, 因为 $\{E_i\}$ 两两不交, 从而

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}(x) = a_j \chi_{E_j}(x) = a_j.$$

即得 (9). □

7.2 几乎处处

在实分析中因为零测集均可测, 在研究一些关于可测的性质时我们经常会忽略一个零测集. 为此我们引入如下定义:

定义 7.15. 对任意 $x \in E$, 设 $P(x)$ 是一个与 x 有关的性质. 若

$$m\left(\{x \in E : P(x) \text{ 不成立}\}\right) = 0,$$

则我们称性质 P 在 E **上几乎处处成立**, 记为 $P(x), a.e.$[14]$x \in E$.

例 7.16. *(a)* $-\infty < f < +\infty$, *a.e.* $x \in E$ 是指 $m(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = 0$, 称 f 几乎处处有限值.

(b) $f = g$, *a.e.* $x \in E$ 是指 $m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, 称 f 与 g 几乎处处相等.

(c) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *a.e.* $x \in E$ 是指 $m(\{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$, 称 f_n 几乎处处收敛至 f. 有时也记为 $f_n \to f$, *a.e.* $x \in E$.

[14]这里 "a.e." 是英文 "almost every" 的简称. 有时你可能也会见到 "a.a.", 这是英文 "almost all" 的简称.

8 第八讲

3 月 20 日

我们继续上一讲的讨论. 利用零测集的可测性, 我们可以很容易地推出函数可测性在几乎处处相等条件下是稳定的.

命题 8.1. 设 f, g 为两个实值函数. 若 $f = g$, *a.e.* $x \in E$, 则 f 可测当且仅当 g 可测.

证明. 留作作业. □

推论 8.2. 设 f, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的一列可测函数. 若 $f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \ a.e.\ x \in E,$$

则 f 可测.

证明. 令

$$F := \left\{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}.$$

由假设 F 为零测集. 定义函数

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & 若\ x \notin F, \\ 0 & 若\ x \in F, \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & 若\ x \notin F, \\ 0 & 若\ x \in F. \end{cases}$$

因为 F 为零测集, 我们有 $f_n = \tilde{f}_n$, $f = \tilde{f}$ a.e. $x \in E$. 从而由命题 8.1 可知因为 f_n 可测, $\tilde{f}_n$ 也可测. 另一方面由定义易见对任意 $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)$. 从而命题 7.11 (ii) 说明 $\tilde{f}$ 可测. 最后因为 $\tilde{f} = f$ a.e. $x \in E$, 再由命题 8.1 可知 f 可测. □

定义 8.3. 给定实值函数 f, 其正部及负部函数分别定义为

$$f^+(x) := \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0), \qquad \forall x \in E.$$

注意到 $f^{\pm}$ 均为非负函数. $f^{\pm}$ 与 f 的关系由以下命题给出.

命题 8.4. 给定实值函数 f, 我们有

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-. \tag{10}$$

并且

$$f\ 可测 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{\pm}\ 可测 \quad \Longrightarrow \quad |f|\ 可测.$$

证明. 对任意 $x \in E$, 易见若 $f(x) \geq 0$, 则 $f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$; 若 $f(x) < 0$, 则 $f^+(x) = 0$, $f^-(x) = -f(x)$. 在这两种情况下均容易验证 (10) 中的等式成立.

由命题 7.12 (i) 可知 f 可测可推出 $f^\pm$ 可测. 另一方面由 (10) 中等式及命题 7.12 可知 $f^\pm$ 可测可推出 $f, |f|$ 可测. □

注记 8.5. *注意到 f^+ 与 f^- 不同时为正. 另一方面 $|f|$ 可测并不能推出 f 可测 (作业).*

8.1 简单函数逼近定理

在之后定义 Lebesgue 积分时, 我们将先考虑简单函数的情形. 对一般的可测函数 f, 为定义其积分, 我们需要用简单函数来逼近 f. 这一节我们证明为此所需要的逼近定理. 首先我们对非负可测函数作逼近.

定理 8.6. *设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数.*

1. *则存在一列非负简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 单调递增逐点收敛至 f (记为 $\varphi_k \nearrow f$), 即对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 数列 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ 单调递增且 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$.*
2. *若 f 有界, 则 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 一致收敛[15]到 f, (记为 $\varphi_k \rightrightarrows f$).*

证明. 对任意 $k \geq 1$, 令

$$F_k := \left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq k\right\},$$

且

$$E_{k,j} := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\right\}, \quad \forall 1 \leq j \leq k2^k.$$

定义

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} k & 若\ x \in F_k, \\ \frac{j-1}{2^k} & 若\ x \in E_{k,j},\ 1 \leq j \leq k2^k. \end{cases}$$

注意到 φ_k 满足如下性质:

(1) $\varphi_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + k\chi_{F_k}$ 为简单函数, 且此表示为 φ_k 的标准表示, 即

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j=1}^{k2^k} E_{k,j} \bigsqcup F_k.$$

[15] 回忆 $\{f_k\}$ 一致收敛到 f 是指对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$ 使得对任意 $k \geq N$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_k(x) - f(x)| < \epsilon$.

(2) 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \le \varphi_k(x) \le \min(f(x), k)$.

(3) 对任意 $x \notin F_k$, $0 \le f(x) - \varphi_k(x) \le \frac{1}{2^k}$.

(4) $\mathrm{Range}(\varphi_k) = \left\{\frac{j}{2^k} : 0 \le j \le k2^k\right\}$ 满足

- $\mathrm{Range}(\varphi_k) \subset \mathrm{Range}(\varphi_{k+1})$;
- 对任意 $L \in \mathrm{Range}(\varphi_k)$, 若 $f(x) \ge L$, 则也有 $\varphi_k(x) \ge L$.

下面我们证 $\{\varphi_k\}$ 满足此定理所要求的条件. 首先证 $\varphi_k \to f$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 若 $f(x) < +\infty$, 则对任意 $k > f(x)$, 我们有 $x \notin F_k$. 由性质 (3) 知 $0 \le f(x) - \varphi_k(x) \le \frac{1}{2^k}$. 由此即得 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$. 若 $f(x) = +\infty$. 则对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有 $f(x) > k$, 即 $x \in F_k$, 从而 $\varphi_k(x) = k$. 因此 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} k = +\infty$.

下面证 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递增. 只需证对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 对任意 $k \ge 1$, $\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x)$. 假设 $\varphi_k(x) = L$. 注意到由性质 (4), $L \in \mathrm{Range}(\varphi_k) \subset \mathrm{Range}(\varphi_{k+1})$. 另一方面, 由性质 (2), $f(x) \ge \varphi_k(x) = L$. 再由性质 (4) 可知 $\varphi_{k+1}(x) \ge L = \varphi_k(x)$. 此命题即证.

对命题 (2), 假设 f 有界, 即存在 $M > 0$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \le f(x) < M$. 则对任意 $k > M$, 我们有 $F_k = \emptyset$. 从而由上述性质 (3), 我们有对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \le f(x) - \varphi_k(x) \le \frac{1}{2^k}$. 由此易见 $\varphi_k \rightrightarrows f$. □

对一般的可测函数 (未必非负), 我们依然可以用简单函数来逼近, 但此时所得的简单函数列不再具有单调性.

定理 8.7. *设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数. 则存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 逐点收敛至 f (记为 $\varphi_k \to f$) 且 $|\varphi_k| \nearrow |f|$.*

证明. 令 f^+ 和 f^- 分别为 f 的正部及负部函数. 注意到 $f^\pm \ge 0$ 并且由 (10) 我们有 $f = f^+ - f^-$. 由定理 8.6 存在非负简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}\}$, $\{\varphi_k^{(2)}\}$ 使得 $\varphi_k^{(1)} \nearrow f^+$, $\varphi_k^{(2)} \nearrow f^-$. 令 $\varphi_k = \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}$. 注意到 φ_k 也为简单函数. 并且因为 $\varphi_k^{(1)} \nearrow f^+$, $\varphi_k^{(2)} \nearrow f^-$, 我们有

$$\varphi_k = \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)} \to f^+ - f^- = f.$$

从而只需证 $|\varphi_k| \nearrow |f|$. 因为 $f^\pm$ 不同时为正, 并且

$$0 \le \varphi_k^{(1)} \le f^+, \quad 0 \le \varphi_k^{(2)} \le f^-.$$

从而 $\varphi_k^{(1)}$ 与 $\varphi_k^{(2)}$ 也不能同时为正. 由此可知 $|\varphi_k| = \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)}$. 从而

$$|\varphi_k| = \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)} \nearrow f^+ + f^- = |f|.$$

定理得证. □

事实上, 我们可对定理 8.7 中的简单函数列假设一个额外条件. 为叙述此定理, 我们引入如下定义.

定义 8.8. 对任意实值函数 f, 称集合

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

为 f 的**支撑集**. 若 $\operatorname{supp}(f)$ 为紧集, 则称 f 具有紧支集.

推论 8.9. 定理 8.7 中可额外假设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 具有紧支集.

证明. 定理 8.7 告诉我们存在一列简单函数 $\{\tilde{\varphi}_k\}$ 满足定理 8.7 中条件. 特别的, $\tilde{\varphi}_k \to f$. 对任意正整数 k, 令 $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k \chi_{B_k}$, 其中 $B_k = [-k, k]^d$. 注意到 φ_k 具有紧支撑. (这是因为 $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset B_k$.) 并且若 $\varphi = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$, 则 $\varphi \chi_{B_k} = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j \cap B_k}$. 从而 φ_k 依然为简单函数. 另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 存在 N 足够大使得对任意 $k > N$, 我们有 $x \in B_k$, 或等价的 $\chi_{B_k}(x) = 1$. 从而

$$\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x) \chi_{B_k}(x) = \tilde{\varphi}_k(x).$$

类似的, 对任意 $k > N$,

$$|\varphi_k(x)| = |\tilde{\varphi}_k(x)| \chi_{B_k}(x) = |\tilde{\varphi}_k(x)|.$$

由此即得

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\varphi}_k(x) = f(x),$$

以及

$$\lim_{k \to \infty} |\varphi_k(x)| = \lim_{k \to \infty} |\tilde{\varphi}_k(x)| = |f(x)|.$$

$\{|\varphi_k|\}_{k=1}^\infty$ 单调递增是因为对任意 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\varphi_k(x)| = |\tilde{\varphi}_k(x)| \chi_{B_k}(x) \leq |\tilde{\varphi}_{k+1}(x)| \chi_{B_{k+1}}(x) = |\varphi_{k+1}(x)|.$$

□

事实上, 我们可以利用更加简单的函数, 即阶梯函数, 来逼近可测函数. 但此时我们只能做到几乎处处收敛.

定理 8.10. *设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数. 则存在一列阶梯函数 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 ψ_k 几乎处处收敛至 f.*

为证明此定理, 我们需要如下引理.

引理 8.11. *对任意具有紧支集的简单函数 φ, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在阶梯函数 ψ 满足*

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) \neq \varphi(x)\right\}\right) < \epsilon.$$

证明. 首先我们假设 $\varphi = \chi_E$ 为可测集 E 的特征函数. 因为 φ 具有紧支集, $m(E) < \infty$. 由定理 6.5 (2) (Littlewood 三原则之一) 可知对任意 $\epsilon > 0$, 存在有限个方体 $\{\tilde{Q}_j\}_{j=1}^N$ 使得 $\tilde{F} := \bigcup_{j=1}^N \tilde{Q}_j$ 满足 $m(E\Delta\tilde{F}) < \frac{\epsilon}{2}$. 事实上由定理 6.5 (2) 的证明我们知道 $\tilde{F}$ 是 $\tilde{Q}_j$ 的几乎不交并[16]. 对每个 $\tilde{Q}_j$, 我们可以选取 $\tilde{Q}_j$ 中足够大的方体 Q_j 使得 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 两两不交, 且满足 $m(E\Delta F) < \epsilon$. 其中 $F := \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$. 令 $\psi = \chi_F$. 因为 F 是方体 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ 的不交并, 我们有

$$\psi = \chi_F = \sum_{j=1}^N \chi_{Q_j}.$$

从而 ψ 是一个阶梯函数. 另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 注意到 $\psi(x) \neq \varphi(x)$ 当且仅当 $x \in E\Delta F$. 从而

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) \neq \varphi(x)\}) = m(E\Delta F) < \epsilon.$$

从而对此特殊情形 $\varphi = \chi_E$ 引理得证. 对一般的具有紧支集的简单函数, 我们可以将证明归结到此特殊情形 (作业). □

定理 8.10 的证明. 首先由推论 8.9, 存在一列具有紧支集的简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 逐点收敛至 f. 对任意 φ_k, 由引理 8.11, 存在阶梯函数 ψ_k 使得 $m(E_k) < 2^{-k}$, 其中

$$E_k := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \psi_k(x) \neq \varphi_k(x)\right\}.$$

考虑上极限集 $E_\infty := \limsup_{k\to\infty} E_k$. 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理 (见作业 3a 第二题) 可知 E_∞ 为零测集. 我们断言:

$$\text{对任意 } x \notin E_\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x).$$

[16] 在定理 6.5 (2) 的证明中我们先找到一个开集, 然后利用结构定理将此开集写成一列方体的几乎不交并. 这些 $\tilde{Q}_j$ 便是来自于这列几乎不交的方体.

注意到因为 E_∞ 为零测集, 该断言蕴含了此定理. 下面我们证明此断言. 注意到

$$E_\infty = \limsup_{k\to\infty} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ 无穷多次}\}.$$

从而 $x \notin E_\infty$ 等价于 $x \in E_k$ 仅发生有限多次. 从而存在正整数 N 使得对任意 $k \geq N$, $x \notin E_k$. 由 E_k 定义, 这说明对任意 $k \geq N$, $\psi_k(x) = \varphi_k(x)$. 从而对任意 $x \notin E_\infty$ 我们有

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

断言得证. □

9 第九讲

3 月 25 日

9.1 Littlewood 三原则

回忆 Littlewood 三原则是指如下三个关于 Lebesgue 测度的 (非严格表述的) 命题.

1. 可测集几乎是区间的有限并.
2. 可测函数几乎是连续函数 (Lusin).
3. 函数列收敛几乎是一致收敛 (Egorov).

这里第一条之前已经证明; 见定理 6.5 (2). 利用之前证明的简单函数逼近定理, 我们今天来证明 Littlewood 三原则的另外两条.

首先我们叙述并证明 Littlewood 第二原则, 即 Lusin 定理.

定理 9.1 (Lusin). *设集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, f 为 E 上的可测函数, 且 f 几乎处处有限. 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$ 满足 $m(E \setminus F) < \infty$ 且 $f|_F$ 连续.*

注记 9.2. *这是 $f|_F$ 连续是指 f 作为限制在 F 上的函数连续. 具体而言, 是指*

$$\forall x \in F,\ \{x_n\} \subset F, \quad x_n \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x).$$

注意这一条件与 f (作为 E 上的函数) 在 F 上所有点连续并不相同[17].

下面我们给出两个例子.

例 9.3. *(i) 函数 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的函数处处不连续, 但 $f|_{\mathbb{Q}}$ (恒等于 1), $f|_{\mathbb{Q}^c}$ (恒等于 0) 均连续.*

(ii) $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{F_i}$ 其中 $F_i \subset E$ 为闭集, $\{F_i\}$ 两两不交. 令 $F = \bigsqcup_{i=1}^N F_j$, 则 $f|_F$ 连续.

证明. 设 $x \in F$, $\{x_n\} \subset F$ 满足 $x_n \to x$, 要证 $f(x_n) \to f(x)$. 因为 $F = \bigsqcup_{i=1}^N F_i$, 存在唯一一个 $1 \le j \le N$ 使得 $x \in F_j$. 因为 $x_n \to x$, 我们断言存在 $L \ge 1$ 足够大使得对任意 $n \ge L$, $x_n \in F_j$. 若否, 则存在无穷子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 存在 $l \in \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, N\}$ 使得 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset F_l$.

[17]这一条件是指对任意 $x \in F$, $\{x_n\} \subset E$, $\quad x_n \to x \ \Rightarrow \ f(x_n) \to f(x)$.

由于 F_l 为闭集, $x=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\in F_l$. 因此 $x\in F_l\cap F_j$. 这与 F_l,F_j 不交矛盾! 从而断言得证. 因此

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{\substack{n\geq L\\ n\to\infty}}f(x_n)=a_j=f(x).$$

命题得证. □

在证明 Lusin 定理前我们还需要如下微积分中的一个引理.

引理 9.4. *设 $F\subset\mathbb{R}^d$ 可测, $\{f_n\}$ 为 F 上的一列连续函数. 若 f_n 在 F 上一致收敛到某个函数 f, 则 f 在 F 上也连续.*

证明. 留作作业. □

Lusin 定理证明. 首先假设 f 为简单函数. 将 f 写成其标准形式 (见命题 7.14):

$$f=\sum_{i=1}^{N}a_i\chi_{E_i},$$

特别的, $E=\bigsqcup_{i=1}^{N}E_i$. 由引理 5.7 对任意 $\epsilon>0$, 对任意 E_i, 存在闭集 $F_i\subset E_i$ 满足 $m(E_i\setminus F_i)<\epsilon/N$. 因为 $\{E_i\}$ 两两不交, $\{F_i\}$ 也两两不交. 令 $F=\bigsqcup_{i=1}^{N}F_i$. 注意到

$$m(E\setminus F)=\sum_{i=1}^{N}m(E_i\setminus F_i)<\sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon}{N}=\epsilon,$$

并且

$$f|_F=\Big(\sum_{i=1}^{N}a_i\chi_{F_i}\Big)\Big|_F.$$

由上例 (ii) 可知 $f|_F$ 连续.

下面我们考虑一般可测函数 f. 我们首先假设 f 处处有限. 我们构造如下辅助函数

$$g(x):=\frac{f(x)}{1+|f(x)|},\quad \forall x\in E.$$

注意到因为 f 处处有限, 对任意 $x\in E$, $|g(x)|<1$. 从而 g 为有界函数. 并且 g 也决定 f: 对任意 $x\in E$, $f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$. 由此关系我们知道对任意子集 $F\subset E$, 若 $g|_F$ 连续, 则 $f|_F$ 也连续. 因此只需证存在满足条件的闭集 F 使得 $g|_F$ 连续.

因为 g 有界, 由定理 8.6 和 8.7 可知存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k\rightrightarrows g$[18]. 由前证的简单函数情形, 对任意 $\epsilon>0$, 对每个 φ_k, 存在闭集 $F_k\subset E$ 满足

[18]我们并没有将这个定理陈述出来. 但这个结论可以很容易地从定理 8.7 的证明推出. 具体而言, 若 g 有界, 则 $g^{\pm}$ 均有界. 由定理 8.6 (2) 可知存在单调递增简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}\}$, $\{\varphi_k^{(2)}\}$ 使得 $\varphi_k^{(1)}\rightrightarrows g^+$, $\varphi_k^{(2)}\rightrightarrows g^-$. 再令 $\varphi_k=\varphi_k^{(1)}-\varphi_k^{(2)}$. 易见 $\varphi_k\rightrightarrows g^+-g^-=g$.

$m(E\setminus F_k)<\epsilon/2^k$ 且 $\varphi_k|_{F_k}$ 连续. 令 $F=\bigcap_{k=1}^\infty F_k$. 注意到

$$m(E\setminus F)\le m\left(\bigcup_{k=1}^\infty E\setminus F_k\right)\le\sum_{k=1}^\infty m(E\setminus F_k)<\sum_{k=1}^\infty\frac{\epsilon}{2^k}=\epsilon.$$

另一方面, 注意到对任意 $k\ge 1$, $\varphi_k|_F$ 连续, 并且 $\varphi_k|_F\rightrightarrows g|_F$. 从而由引理 9.4, $g|_F$ 连续.

最后我们假设 f 几乎处处有限. 令

$$\tilde{E}:=\{x\in E:|f(x)|<+\infty\}.$$

由假设 $E\setminus\tilde{E}$ 为零测集. 并且由 $\tilde{E}$ 定义, f 在 $\tilde{E}$ 上处处有限. 从而对任意 $\epsilon>0$ 存在闭集 $F\subset\tilde{E}$ 使得 $f|_F$ 连续. 并且注意到

$$m(E\setminus F)=m(E\setminus\tilde{E})+m(\tilde{E}\setminus F)=m(\tilde{E}\setminus F)<\epsilon.$$

从而命题得证. □

下面我们叙述并证明 Littlewood 第三原则, 即 Egorov 定理.

定理 9.5 (Egorov)**.** *设 f, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 且 $m(E)<\infty$. 若 $f_n\to f$, a.e. $x\in E$, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在闭子集 $F\subset E$ 满足 $m(E\setminus F)<\epsilon$ 且 f_k 在 F 上一致收敛到 f.*

想法: 由定义,

$$\begin{aligned} f_k\rightrightarrows f \text{ on } F \quad &\Leftrightarrow\quad \forall\,\delta>0,\exists\,k_\delta\ge 1 \text{ s.t. } \sup_{x\in F}|f_j(x)-f(x)|<\delta,\ \forall\,j\ge k_\delta,\\ &\Leftrightarrow\quad \forall\,n\ge 1,\exists\,k_n\ge 1 \text{ s.t. } \sup_{x\in F}|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\ \forall\,j\ge k_n. \end{aligned}$$

因此若我们定义

$$E_k^n:=\left\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\ \forall\,j\ge k\right\},\quad \forall\,k,n\ge 1.$$

则 Egorov 定理大致是说存在整数列 $\{k_n\}$ 使得集合 $\bigcap_{n=1}^\infty E_{k_n}^n$ (测度意义下) 足够大. 相应的, 我们需要对每个 $n\ge 1$, 找出 k_n 使得 $E_{k_n}^n$ 足够大.

证明. 首先注意到不妨设 f_n 逐点收敛到 f. 对任意 $k,n\ge 1$, 定义

$$E_k^n:=\left\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n},\ \forall\,j\ge k\right\}.$$

注意到对固定的 n, $\{E_k^n\}_{k=1}^\infty$ 关于 k 单调递增, 并且 $E_k^n\nearrow E$ (留作作业). 从而由单调递增集列的测度连续性 (定理 6.3 (1)) 可知对任意 $n\ge 1$, $\lim_{k\to\infty}m(E_k^n)=$

$m(E)$. 因为 $m(E)<\infty$, 这一等式等价于 $\lim_{k\to\infty} m(E\setminus E_k^n)=0$. 因此可取 k_n 充分大使得 $m(E\setminus E_{k_n}^n)<\epsilon/2^{n+1}$. 令

$$\tilde{F}:=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}^n.$$

一方面, 注意到

$$m(E\setminus\tilde{F})\le\sum_{n=1}^{\infty} m(E\setminus E_{k_n}^n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{n+1}}=\frac{\epsilon}{2}.$$

另一方面, 注意到对任意 $\delta>0$, 若取 n_δ 足够大使得 $\frac{1}{n_\delta}<\delta$, 则因为 $\tilde{F}\subset E_{k_{n_\delta}}^{n_\delta}$ 我们有

$$\text{对任意 } j\ge k_{n_\delta},\quad \sup_{x\in\tilde{F}}|f_j(x)-f(x)|<\tfrac{1}{n_\delta}<\delta.$$

即 $\{f_n\}$ 在 $\tilde{F}$ 上一致收敛到 f. 最后由引理 5.7, 存在闭集 $F\subset\tilde{F}$ 满足 $m(\tilde{F}\setminus F)<\frac{\epsilon}{2}$. 从而

$$m(E\setminus F)=m(E\setminus\tilde{F})+m(\tilde{F}\setminus F)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

并且因为 $F\subset\tilde{F}$, $\{f_n\}$ 在 $\tilde{F}$ 上一致收敛到 f 可推出 $\{f_n\}$ 在 F 上也一致收敛到 f. 命题得证. □

注记 9.6. *Lusin 定理中我们并不需要假设 $m(E)<\infty$, 而在 Egorov 定理中这一假设是必须的. 我们可举如下反例: 令 $E=\mathbb{R}$, $f_n=\chi_{[-n,n]}$, $n=1,2,3\cdots$, $f=1$ 为恒为 1 的常值函数. 容易证明 $f_n\to f$, 但是 Egorov 定理的结论对此例不满足. 事实上, 可以证明对任意 $0<\epsilon<1$, 均不存在 $F_\epsilon\subset\mathbb{R}$ 使得 $m(\mathbb{R}\setminus F_\epsilon)<\epsilon$ 且 f_n 在 F_ϵ 上一致收敛到 f.*

10 第十讲

3 月 27 日

今天我们开始学习 Lebesgue 积分理论. 我们将依照由简单到一般的顺序依次来扩大被积函数的范围. 具体的, 我们依照如下顺序定义 Lebesgue 积分.

1. 非负简单函数
2. 非负可测函数
3. 一般可测函数

10.1 简单函数 Lebesgue 积分

首先我们定义非负简单函数的 Lebesgue 积分.

定义 10.1. *令 φ 为 $\mathbb{R}^d$ 上一非负简单函数. 设其标准表示 (见命题 7.14) 为*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}.$$

1. 定义

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dm(x) := \sum_{i=1}^{N} a_i m(E_i)$$

*为 φ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Lebesgue 积分**.*

2. 对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 定义

$$\int_E \varphi(x)\, dm(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \chi_E(x)\, dm(x)$$

*为 φ 在 E 上的 **Lebesgue 积分**.*

注记 10.2. *(i) 我们会经常用到如下简便记号来指代 Lebesgue 积分:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, dm = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = \int \varphi; \qquad \int_E \varphi\, dm = \int_E \varphi(x)\, dx = \int_E \varphi.$$

(ii) $\int \varphi$ 可能为 $+\infty$; $a_i m(E_i)$ 的计算遵循 $0 \cdot (+\infty) = 0$ 的规定, 即只要 a_i, $m(E_i)$ 其中之一为 0, 我们规定 $a_i m(E_i) = 0$.

(iii) $\int_E \varphi$ 是良定义的. 这是因为 $\varphi \chi_E = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i \cap E}$ 也为非负简单函数.

下面我们来看一些例子.

例 10.3. *(i)* $\varphi=\chi_{\mathbb{Q}}$ 为有理数集的特征函数. 其标准表示为

$$f=\chi_{\mathbb{Q}}+0\chi_{\mathbb{Q}^c}.$$

从而由定义

$$\int\varphi=1\times m(\mathbb{Q})+0\times m(\mathbb{Q}^c)=1\times 0+0\times(+\infty)=0.$$

(ii) $\varphi=\chi_{(0,2)}+2\chi_{(1,3)}$. 其标准表示为

$$\varphi=\chi_{(0,1]}+3\chi_{(1,2)}+2\chi_{[2,3)}+0\chi_{(-\infty,0]\cup[3,+\infty)}.$$

从而

$$\int\varphi=1\times 1+3\times 1+2\times 1+0\times(+\infty)=6.$$

(iii) $\varphi=\sum_{j=1}^M b_j\chi_{F_j}$, 其中 $\bigsqcup_{j=1}^M F_j=\mathbb{R}^d$, $\{b_j\}_{j=1}^M$ 均非负, 但未必两两不等. 对这样的函数我们有

$$\int\varphi=\sum_{j=1}^M b_j m(F_j).$$

证明. 令 $\mathrm{Range}(\varphi)=\{a_1,\cdots,a_N\}$. 注意到 $\mathrm{Range}(\varphi)=\{b_1,\cdots,b_M\}$, 但等式右端集合内的元素可能有重复. 对任意 $1\le i\le N$, 定义

$$E_i:=\bigsqcup_{\substack{1\le j\le M\\ b_j=a_i}}F_j.$$

易知 $\varphi=\sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i}$ 为 φ 的标准表示. 从而由定义

$$\begin{aligned}\int\varphi&=\sum_{i=1}^N a_i m(E_i)=\sum_{i=1}^N a_i m\left(\bigsqcup_{\substack{1\le j\le M\\ b_j=a_i}}F_j\right)=\sum_{i=1}^N a_i\sum_{\substack{1\le j\le M\\ b_j=a_i}}m(F_j)\\&=\sum_{i=1}^N\sum_{\substack{1\le j\le M\\ b_j=a_i}}b_j m(F_j)=\sum_{j=1}^M b_j m(F_j).\end{aligned}$$

□

(iv) $\varphi=\sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i}$ 为 φ 的标准表示, 则对任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$,

$$\int_E\varphi=\sum_{i=1}^N a_i m(E_i\cap E).$$

证明. 由定义 $\int_E \varphi = \int \varphi\chi_E$. 我们可以将 $\varphi\chi_E$ 写成上例中的形式:

$$\varphi\chi_E = \sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i\cap E} = \sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i\cap E} + 0\cdot\chi_{E^c}.$$

由上例可知

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^N a_i m(E_i\cap E).$$

□

下面我们证明非负简单函数的 Lebesgue 积分满足我们所期望的一些常见积分性质.

命题 10.4. *设 φ, ψ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的两个非负简单函数.*

1. *(正线性) 对任意 $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\int\varphi + \beta\int\psi.$$

2. *(可加性) 对任意不交可测集 $E, F \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\int_{E\sqcup F}\varphi = \int_E\varphi + \int_F\varphi.$$

3. *(单调性) 若 $\varphi \leq \psi$, 则 $\int\varphi \leq \int\psi$.*

4. *(连续性) 给定可测集列 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ 及可测集 E. 若 $E_k \nearrow E$, 则*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\psi = \int_E\psi.$$

证明. 将 φ 和 ψ 分别写成标准形式:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1}^M b_j\chi_{F_j}. \tag{11}$$

下面我们依次证明这四个性质.

正线性: 首先易知

$$\int\alpha\varphi = \alpha\int\varphi, \quad \forall\,\alpha \geq 0.$$

从而只需证

$$\int(\varphi+\psi) = \int\varphi + \int\psi.$$

由于 (11) 中分别为 φ 和 ψ 的标准形式, 我们有

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^{M} E_i \cap F_j, \quad (\forall 1 \le i \le N), \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i \cap F_j, \quad (\forall 1 \le j \le M), \tag{12}$$

并且

$$\bigsqcup_{i=1}^{N} \bigsqcup_{j=1}^{M} E_i \cap F_j = \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

特别的,

$$\chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{M} \chi_{E_i \cap F_j}, \quad (\forall 1 \le i \le N), \qquad \chi_{F_j} = \sum_{i=1}^{N} \chi_{E_i \cap F_j}, \quad (\forall 1 \le j \le M).$$

从而我们有

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M} \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^{M} b_j \sum_{i=1}^{N} \chi_{E_i \cap F_j} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}. \end{aligned}$$

因为 (13), 上述 $\varphi + \psi$ 的表示是例 10.3 (iii) 中的情形. 从而由此例我们有

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (a_i + b_j) m(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M} m(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{M} b_j \sum_{i=1}^{N} m(E_i \cap F_j) \\ &\overset{(12)}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i m(E_i) + \sum_{j=1}^{M} b_j m(F_j) \\ &= \int \varphi + \int \psi. \end{aligned}$$

可加性: 因为 E 与 F 不交, $\chi_{E \sqcup F} = \chi_E + \chi_F$. 从而

$$\begin{aligned} \int_{E \sqcup F} \varphi = \int \varphi \chi_{E \sqcup F} &= \int \varphi (\chi_E + \chi_F) \\ &\overset{\text{正线性}}{=} \int \varphi \chi_E + \int \varphi \chi_F = \int_E \varphi + \int_F \varphi. \end{aligned}$$

单调性: 设 $\varphi \le \psi$. 我们断言:

$$\forall 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le M, \quad E_i \cap F_j \ne \emptyset \ \Rightarrow\ a_i \le b_j. \tag{14}$$

这是因为若 $E_i \cap F_j \ne \emptyset$, 则存在 $x \in E_i \cap F_j$. 从而我们有

$$a_i = \varphi(x) \le \psi(x) = b_j.$$

断言得证. 由此我们可作如下估计:

$$\begin{aligned}\int \varphi &= \sum_{i=1}^{N} a_i m(E_i) \overset{(12)}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i m(E_i\cap F_j)\\ &= \sum_{\substack{1\le i\le N, 1\le j\le M\\ E_i\cap F_j\neq\emptyset}} a_i m(E_i\cap F_j)\\ &\overset{(14)}{\le} \sum_{\substack{1\le i\le N, 1\le j\le M\\ E_i\cap F_j\neq\emptyset}} b_j m(E_i\cap F_j)\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} b_j m(E_i\cap F_j) = \int \psi.\end{aligned}$$

上述第三个等式成立是因为若 $E_i\cap F_j=\emptyset$, 则 $m(E_i\cap F_j)=0$.

连续性: 因为 $E_k\nearrow E$, 对任意 $1\le j\le M$, 我们有 $E_k\cap F_j\nearrow E\cap F_j$. 由单调递增集列的测度连续性 (定理 6.3 (1)) 可知

$$\text{对任意 } 1\le j\le M,\quad \lim_{k\to\infty} m(E_k\cap F_j)=m(E\cap F_j).$$

此结论加上例 10.3 (iv) 说明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{M} b_j m(E_k\cap F_j)=\sum_{j=1}^{M} b_j m(E\cap F_j)=\int_E\varphi.$$

□

有了正线性后计算非负简单函数的 Lebesgue 积分不再需要找出其标准表示.

推论 10.5. *设 $\varphi=\sum_{j=1}^{N} b_j\chi_{F_j}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的简单函数, 其中 b_j 均非负. 则*

$$\int\varphi=\sum_{j=1}^{N} b_j m(F_j).$$

证明. 由正线性可知

$$\int\varphi=\sum_{j=1}^{M} b_j\int\chi_{F_j}=\sum_{j=1}^{N} b_j m(F_j).$$

□

10.2　非负函数的 Lebesgue 积分

下面我们定义非负可测函数的 Lebesgue 积分.

定义 10.6. 令 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数.

1. 定义

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dm(x) := \sup\left\{\int \varphi : \varphi \text{ 为简单函数且满足 } 0 \le \varphi \le f\right\}$$

为 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上的 ***Lebesgue* 积分**. 若 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dm(x) < +\infty$, 则称 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 记为 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 或简记为 $f \in L^1$.

2. 对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 定义

$$\int_E f(x)\,dm(x) := \sup\left\{\int_E \varphi : \varphi \text{ 为简单函数且满足 } 0 \le \varphi \le f\right\}$$

为 f 在 E 上的 ***Lebesgue* 积分**. 若 $\int_E f(x)\,dm(x) < +\infty$, 则称 f 在 E 上可积, 记为 $f \in L^1(E)$.

注记 10.7. *(i)* 若 f 为非负简单函数, 易见定义 10.1 与 10.6 等价. (因为定义 10.6 中的上确界可由 $\varphi = f$ 取得.)

(ii) 对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 对任意非负可测函数 f, 可以证明 $\int_E f = \int f\chi_E$. 这是因为一方面对任意简单函数 φ 满足 $0 \le \varphi \le f$, 我们有 $\varphi\chi_E \le f\chi_E$. 从而由 $\int f\chi_E$ 定义可知 $\int_E \varphi = \int \varphi\chi_E \le \int f\chi_E$. 再由 φ 的任意性可知 $\int_E f \le \int f\chi_E$. 另一方面, 对任意简单函数 ψ 满足 $0 \le \psi \le f\chi_E$, 注意到 ψ 满足 $0 \le \psi \le f$ 且 $\int_E \psi = \int \psi$ (因为 ψ 在 E 外处处为 0). 从而由 $\int_E f$ 定义可知 $\int \psi = \int_E \psi \le \int_E f$. 再由 ψ 的任意性即得 $\int f\chi_E \le \int_E f$. 从而 $\int_E f = \int f\chi_E$.

或者更加直接的, 我们定义 $\int_E f := \int f\chi_E$. 这里的论证说明这一定义与定义 10.6 (2) 中定义等价.

非负可测函数 Lebesgue 积分的正线性并不容易证明. 在证明这个结论之前, 我们先证明该积分的一些简单性质.

命题 10.8 (单调性)**.** 对任意两个非负可测函数 f, g, 若 $f \le g$, 则 $\int f \le \int g$.

证明. 对任意简单函数 φ 满足 $0 \le \varphi \le f$, 因为 $f \le g$, 也有 $0 \le \varphi \le g$. 由 $\int g$ 的定义可知 $\int \varphi \le \int g$. 再由 φ 的任意性可知 $\int f \le \int g$. □

命题 10.9. 设 $f \ge 0$ 在可测集 E 上可测. 则

$$\int_E f(x)\,dx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0,\ a.e.\ x \in E.$$

证明. 首先假设 f 在 E 上几乎处处为 0. 令 $F=\{x\in E: f(x)>0\}$. 由假设 $m(F)=0$. 并且易见 $f\le \tilde f := (+\infty)\cdot\chi_F$. 注意到对任意满足 $0\le\varphi\le\tilde f$ 的简单函数 φ, 将 $\varphi=\sum_{i=1}^N a_i\chi_{E_i}$ 写成标准表示, 则若 $a_i>0$, 有 $E_i\subset F$ 为零测集. 从而

$$\int\varphi=\sum_{i=1}^N a_i m(E_i)=\sum_{\substack{1\le i\le N\\ a_i>0}} a_i m(E_i)=\sum_{\substack{1\le i\le N\\ a_i>0}} a_i\cdot 0=0.$$

由 φ 任意性即得 $\int\tilde f=0$. 再由单调性我们有

$$\int f\le\int\tilde f=0.$$

另一方面, 假设 $\int_E f=0$. 我们要证集合 $F:=\{x\in E: f(x)>0\}$ 为零测集. 对任意 $k\ge 1$, 定义 $E_k:=\left\{x\in E: f(x)>\frac{1}{k}\right\}$. 因为 f 可测, 每个 E_k 均可测. 注意到 $F=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 因此只需证每个 E_k 均为零测集. 为此, 注意到对任意 $k\ge 1$,

$$0=\int_E f=\int f\chi_E\overset{\text{单调性}}{\ge}\int f\chi_{E_k}\overset{\text{单调性}}{\ge}\int\frac{1}{k}\chi_{E_k}=\frac{1}{k}m(E_k).$$

从而 $m(E_k)\le 0$, 但显然 $m(E_k)\ge 0$. 因此 $m(E_k)=0$. 命题得证. □

11 第十一讲

4 月 1 日

11.1 非负可测函数的 Lebesgue 积分: 继续

命题 11.1 (可积性)**.** *设 f, g 在可测集 E 上非负可测.*

(i) 若 $f \le g$ 且 $g \in L^1(E)$, 则 $f \in L^1(E)$. 特别的, 若 $f \le M$ 且 $m(E) < \infty$, 则 $f \in L^1(E)$.

(ii) 若 $f \in L^1(E)$ 则 $f(x) < \infty$, a.e. $x \in E$.

证明. (i): 由单调性 (命题 10.8) 及 g 的可积性可知

$$\int_E f \le \int_E g < \infty.$$

从而 $f \in L^1(E)$. 对第二部分, 取 $g = M\chi_E$. 易见 $g \in L^1(E)$ 且 $f \le g$.

(ii): 令 $F = \{x \in E : f(x) = \infty\}$. 要证 F 为零测集. 对任意 $k \ge 1$, 定义 $E_k := \{x \in E : f(x) > k\}$. 注意到 $E_k \searrow F$, 即 $\{E_k\}$ 单调递减且 $F = \bigcap_{k=1}^\infty E_k$. 另一方面, 对任意 $k \ge 1$,

$$\int_E f \ge \int_{E_k} f \ge \int_{E_k} k = km(E_k).$$

从而 $m(E_k) \le \frac{1}{k}\int_E f < \infty$. 由单调递减集列的测度连续性定理 (定理 6.3 (2)) 可知

$$m(F) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) \le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int_E f = 0.$$

命题得证. □

下面我们证明第一个重要的收敛定理, 即单调收敛定理. (这类收敛定理一般关注函数列的极限与积分是否可以交换顺序.)

定理 11.2 (单调收敛定理, MCT)**.** *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $\{f_k\}, f$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f_k \nearrow f$, 则*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

在证明单调收敛定理之前, 我们先利用其证明非负函数的 Lebesgue 积分的正线性以及可加性.

命题 11.3. *设 f, g 在 $\mathbb{R}^d$ 上非负可测.*

1. *(正线性)* 对任意 $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

2. *(可加性)* 对任意不交可测集 $E, F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\int_{E \sqcup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

证明. 与命题 10.4 (2) 的证明相同, 可加性是正线性的直接推论. 因此只需证正线性. 由作业 5b 可知对任意 $\alpha \geq 0$, $\int \alpha f = \alpha \int f$. 从而只需证

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

由简单函数逼近定理定理 (定理 8.6) 可知存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ 使得 $\varphi_k \nearrow f$, $\psi_k \nearrow g$. 从而也有 $\varphi_k + \psi_k \nearrow f + g$. 再由单调收敛定理以及非负简单函数 Lebesgue 积分的正线性可知

$$\int (f+g) = \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k + \psi_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\int \varphi_k + \int \psi_k \right) = \int f + \int g.$$

正线性得证. □

由正线性以及命题 10.9 易知对任意可测函数, 我们可以在一个零测集上改变其取值而不改变其积分.

推论 11.4. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测且 f, g 在 E 上非负可测. 则

$$f = g, \quad a.e.\ x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f = \int_E g.$$

证明. 留作作业. □

单调收敛定理证明. 因为 $f_k \nearrow f$, 由单调性 (命题 10.8) 可知数列 $\{\int_E f_k\}_{k=1}^\infty$ 单调递增且对任意 $k \geq 1$, $\int_E f_k \leq \int_E f$. 从而极限 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k$ 存在 (可能为 $+\infty$) 且 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \leq \int_E f$. 因此只需证

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \geq \int_E f. \tag{15}$$

若 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \infty$, 此不等式平凡成立, 所以不妨设 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty$. 任取 $0 < \lambda < 1$ 以及简单函数 φ 满足 $0 \leq \varphi \leq f$. 对任意 $k \geq 1$, 定义

$$E_k := \{x \in E : f_k(x) \geq \lambda\varphi\}.$$

注意到

$$\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \lambda\varphi = \lambda \int_{E_k} \varphi. \tag{16}$$

这里最后一个等式运用了非负简单函数的正线性 (见命题 10.4(1)). 我们断言 $E_k \nearrow E$. 因为 $\{f_k\}$ 单调递增, 易见 E_k 单调递增. 因而只需证 $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 包含关系 "$\supseteq$" 是平凡的, 只需证 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 对任意 $x \in E$, 若 $\varphi(x) = 0$, 则显然对任意 $k \geq 1$ 我们有 $x \in E_k$. 若 $\varphi(x) > 0$ (并且注意到因为 φ 为简单函数, $\varphi(x) < \infty$), 则 $0 < \lambda\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$. 从而由假设 $f_k(x) \nearrow f(x)$ 可知存在 $K \geq 1$ 使得对任意 $k \geq K$, $f_k(x) \geq \lambda\varphi(x)$. 从而对任意 $k \geq K$ 有 $x \in E_k$. 在这两种情况下我们均有 $x \in \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 因为 $x \in E$ 是任取的, 从而 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 断言得证. 从而由命题 10.4 (4) 可知

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi = \int_E \varphi.$$

再结合估计 (16) 可知

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \geq \lambda \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi = \lambda \int_E \varphi.$$

由 φ 的任意性得 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \geq \lambda \int_E f$. 最后再令 $\lambda \to 1$ 即得 (15). □

单调收敛定理可以直接推出如下逐项积分定理. (逐项积分定理是说满足一定条件的级数的积分等于这个级数中各项积分之和.)

推论 11.5 (逐项积分定理)**.** *设 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 在可测集 E 上非负可测. 则*

$$\int_E \sum_{k=1}^\infty a_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^\infty \int_E a_k(x)\, dx.$$

特别的, 若 $\sum_{k=1}^\infty \int_E a_k(x)\, dx < \infty$, 则 $\sum_{k=1}^\infty a_k(x) < \infty$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

证明. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 令 $f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k(x)$ (可能为 $+\infty$), 对任意 $n \geq 1$, 令 $f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$. 则 f_n 非负可测且 $f_n \nearrow f$ (从而 f 也可测). 由单调收敛定理可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty \int_E a_k(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_E a_k(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{正线性}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E \left(\sum_{k=1}^n a_k(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定理 11.2}}{=} \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对第二部分, 若 $\sum_{k=1}^\infty \int_E a_k(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, 则 $f(x) \in L^1(E)$. 从而由命题 11.1, $f(x) < \infty$, a.e. $x \in E$, 即 $\sum_{k=1}^\infty a_k(x) < \infty$, a.e. $x \in E$. □

下面我们证明另外一个非常重要的收敛定理: Fatou 引理. Fatou 并不是一个严格等式, 但它对一般的非负可测函数列 $\{f_k\}$ 均适用.

定理 11.6 (Fatou 引理). *设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为可测集 E 上的非负可测函数列. 则*

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx. \tag{17}$$

证明. 令 $g := \liminf_{k\to\infty} f_k$. 对任意 $k \ge 1$, 定义 $g_k := \inf_{n\ge k} f_n$. 注意到由命题 7.11 (i), g_k, g 均可测. 并且 $0 \le g_k \le f_k$ 以及 $g_k \nearrow g$. 从而由单调收敛定理有

$$\int_E g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题得证. □

注记 11.7. *(i) Fatou 引理可用来判定极限函数的可积性.*

(ii) Fatou 引理中的 "$<$" 可取得: 令 $E=\mathbb{R}$, $f_k=\chi_{[k,k+1]}$, $k=1,2,\cdots$. 易见 $f_k\to 0$ 且对任意 $k\ge 1$, $\int f_k = 1$. 从而(17) 左边等于 $\int_E 0\,dx = 0$, 而右边等于 1. 这里例子的构造依赖于 $E=\mathbb{R}$ 非紧 (这里函数 f_k 向 x-轴的右端 "逃离" 导致极限函数为 0). 事实上, 即使 E 为紧集, 也存在函数列 $\{f_k\}$ 使得 (17) 中的 "$<$" 可取得 (作业).

11.2 可测函数的 Lebesgue 积分

下面我们定义一般可测函数的 Lebesgue 积分. 回忆对任意 $\mathbb{R}^d$ 上的广义实值可测函数 f, 我们可以将其写成其正部与负部的差: $f = f^+ - f^-$, 其中 $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$ 均非负可测.

定义 11.8. *令 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的广义实值可测函数.*

1. *定义*
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dm(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f^+(x)\,dm(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f^-(x)\,dm(x)$$
*为 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Lebesgue 积分**. 若 $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dm(x) < +\infty$, 则称 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 记为 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$.*

2. *对任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$, 定义*
$$\int_E f(x)\,dm(x) := \int_E f^+(x)\,dm(x) - \int_E f^-(x)\,dm(x)$$
*为 f 在 E 上的 **Lebesgue 积分**. 若 $\int_E |f(x)|\,dm(x) < +\infty$, 则称 f 在 E 上可积, 记为 $f\in L^1(E)$.*

注记 11.9. *(i)* 当 f 非负时, $f^+ = f$, $f^- = 0$. 由此易见此时此定义与定义 *10.6* 相符.

(ii) 注意到因为 $|f| = f^+ + f^-$, $\int_E |f| < \infty$ 当且仅当 $\int_E f^\pm < \infty$. 即 $f \in L^1(E)$ 当且仅当 $f^\pm \in L^1(E)$.

(iii) 因为 $(f\chi_E)^\pm = f^\pm \chi_E$, 易见 $\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} f\chi_E$.

下面我们证明 $\int_E f$ 的一些简单性质. 在接下来的讨论中我们均只考虑可积函数. 注意到在之前非负可测函数的讨论中我们并没有强调这一点 (例如在单调收敛定理及 Fatou 引理中均只假设函数列 $\{f_k\}$ 非负可测). 这是因为在那里只出现非负函数相加的情形, 因此我们可以允许 $+\infty$ 的出现. 而对一般的可测函数, 若我们不限制在可积的假设下则会出现 $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ 的情形. 为避免出现这些情形, 我们只考虑可积函数.

命题 11.10. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $f, g \in L^1(E)$.

1. 对任意 $f, g \in L^1(E)$, 若 $f = g$, *a.e.* $x \in E$, 则 $\int_E f = \int_E g$.

2. $f \in L^1(E) \ \Rightarrow\ |f(x)| < \infty$, *a.e.* $x \in E$.

证明. (1): $f = g$, a.e. $x \in E \Rightarrow f^\pm = g^\pm$, a.e. $x \in E$. 因为 $f^\pm, g^\pm$ 均非负可测. 由推论 11.4 可知 $\int_E f^\pm = \int_E g^\pm$. 从而

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

(2): $f \in L^1(E) \ \Rightarrow\ f^\pm \in L^1(E)$. 因为 $f^\pm$ 非负可测, 由命题 11.1 (ii) 可知 $f^\pm(x) < \infty$, a.e. $x \in E$, 即集合 $\{f^+ = \infty\}$, $\{f^- = \infty\}$ 均为零测集. 注意到 $\{|f| = \infty\} \subset \{f^+ = \infty\} \cup \{f^- = \infty\}$. 从而 $\{|f| = \infty\}$ 也为零测集, 即 $|f(x)| < \infty$, a.e. $x \in E$. □

12 第十二讲

4 月 3 日

12.1 可测函数的 Lebesgue 积分性质

命题 12.1. *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $f, g \in L^1(E)$.*

1. *(线性性) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$.*
2. *(可加性) 对任意不交可测子集 $F_1, F_2 \subset E$ 有 $\int_{F_1 \sqcup F_2} f = \int_{F_1} f + \int_{F_2} f$.*
3. *(单调性) 若 $f \le g$, 则 $\int_E f \le \int_E g$.*
4. *(三角不等式) $\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$.*

证明. 我们只证明 $E = \mathbb{R}^d$ 的情形, 对一般的情形可将 f, g 替换成 $f\chi_E, g\chi_E$ (看成 $\mathbb{R}^d$ 上的函数). 不妨设 $|f|, |g|$ 均处处有限 (自己验证).

线性性: 需要证明如下两个命题

$$\int \alpha f = \alpha \int f,\ (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}) \quad 及 \quad \int (f+g) = \int f + \int g.$$

对第一个等式, 注意到若 $\alpha \ge 0$, 则 $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$. 从而

$$\int \alpha f = \int (\alpha f)^+ - \int (\alpha f)^- = \int \alpha f^+ - \int \alpha f^- = \alpha \left(\int f^+ - \int f^- \right) = \alpha \int f.$$

这里第三个等式运用到非负可测函数积分的正线性 (见命题 11.3 (1)). 若 $\alpha < 0$, 则

$$\int \alpha f = \int (-\alpha)(-f) = -\alpha \int (-f).$$

注意到 $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$. 从而

$$\int (-f) = \int (-f)^+ - \int (-f)^- = \int f^- - \int f^+ = -\int f.$$

因此

$$\int \alpha f = -\alpha \left(-\int f \right) = \alpha \int f.$$

第一个等式得证. 下证第二个等式. 令 $h = f + g$. 要证 $\int h = \int f + \int g$. 注意到一般情况下 $h^+ \ne f^+ + g^+$, $h^- \ne f^- + \int g^-$. 例如 $f(x) = |x| = -g(x)$. 则 $h = 0$, $f^+ = g^- = |x|, f^- = g^+ = 0$. 从而 $h^{\pm} = 0$, 但 $f^+ + g^+ = f^- + g^- = |x|$. 但此时我们依然有如下关系

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

等价的,

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

注意到上式两端中的每一项均为非负可测函数. 从而由非负可测函数积分的正线性可知

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+.$$

上式等价于

$$\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \quad \Leftrightarrow \quad \int h = \int f + \int g.$$

从而第二个等式得证.

可加性是线性的直接推论.

单调性:

$$f \le g \quad \Leftrightarrow \quad f^+ - f^- \le g^+ - g^- \quad \Leftrightarrow \quad f^+ + g^- \le g^+ + f^-.$$

由非负可测函数积分的单调性及正线性可知

$$\int f^+ + \int g^- = \int (f^+ + g^-) \le \int (g^+ + f^-) = \int g^+ + \int f^-.$$

上式等价于

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \le \int g^+ - \int g^- = \int g.$$

三角不等式: 注意到 $\pm f \le |f|$, 由单调性及线性 $\pm \int f \le \int |f|$. 从而 $|\int f| \le \int |f|$. □

下面我们证明一个适用于一般可测函数列的收敛定理. (注意到单调收敛定理及 Fatou 引理均仅适用于非负可测函数列.)

定理 12.2 (控制收敛定理, DCT). 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列可测函数且 f_k 几乎逐点收敛到某个 E 上函数 f. 若存在 $g \in L^1(E)$ 使得对任意 $k \ge 1$, $|f_k| \le g$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, dx = 0. \tag{18}$$

特别的,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f \, dx. \tag{19}$$

证明. 首先我们证明 (18) 蕴含 (19). 这是因为对任意 $k \geq 1$, 由三角不等式我们有

$$\left|\int_E (f - f_k)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_E |f_k - f|\,\mathrm{d}x.$$

从而 (18) 说明 $\lim_{k\to\infty} \left|\int_E (f - f_k)\,\mathrm{d}x\right| = 0$, 即 (19).

下面我们证明 (18). 对任意 $k \geq 1$, 令 $h_k = |f_k - f|$. 因为 $|f_k| \leq g$ 且 $f_k \to f$, a.e. $x \in E$, 我们有 $|f| \leq g$, a.e. $x \in E$. 特别的,

$$h_k = |f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq 2g, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

从而 $2g - h_k \geq 0$, a.e. $x \in E$. 对函数列 $\{2g - h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 应用 Fatou 引理[19]得

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} (2g - h_k)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E (2g - h_k)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $f_k \to f$, a.e. $x \in E$, $h_k \to 0$, a.e. $x \in E$. 从而上式左端等于 $2\int_E g\,\mathrm{d}x$. 另一方面易见上式右端等于 $2\int_E g\,\mathrm{d}x - \limsup_{k\to\infty} \int_E h_k\,\mathrm{d}x$. 从而

$$2\int_E g\,\mathrm{d}x \leq 2\int_E g\,\mathrm{d}x - \limsup_{k\to\infty} \int_E h_k\,\mathrm{d}x,$$

即 $\limsup_{k\to\infty} \int_E h_k \leq 0$. 因为 $h_k \geq 0$, 显然我们有 $\liminf_{k\to\infty} \int_E h_k\,\mathrm{d}x \geq 0$. 比较两式即得 $\lim_{k\to\infty} \int_E h_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 命题得证. □

控制收敛定理的一个特殊情形是如下有界收敛定理.

推论 12.3 (有界收敛定理, BCT). *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列可测函数且 f_k 几乎逐点收敛到某个 E 上函数 f. 若 $m(E) < \infty$ 且 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上一致有界, 即存在 $M > 0$ 使得对任意 $k \geq 1$ 有 $|f_k| \leq M$, 则*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\,dx = 0.$$

特别的,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,dx = \int_E f\,dx.$$

证明. 取 $g = M\chi_E$. 则 $\int_E g = \int_E M = Mm(E) < \infty$, 从而 $g \in L^1(E)$. 并且由假设可知对任意 $k \geq 1$ 我们有 $|f_k| \leq g$. 从而对 $\{f_k\}, f, g$ 应用控制收敛定理即证得此定理. □

[19]Fatou 引理中我们需要假设 $h_k \geq 0$, 但由命题 11.10 (1) 易见这一条件可弱化为 $h_k \geq 0$, a.e. $x \in E$.

12.2 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系

下面我们开始讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系. 为方便起见我们仅讨论 $d=1$ 的情形, 但一般维数的情形也类似.

定理 12.4. *设实值函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 则 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积且*

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)\,dx.$$

这里我们用符号 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}}$ 指代 Riemann 积分, 用 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}$ 指代 Lebesgue 积分.

证明. 因为 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 由定义一方面我们知道 f 在 $[a,b]$ 上有界, 即存在 $M>0$ 使得对任意 $x\in[a,b]$, $|f(x)|\le M$. 另一方面, 对任意 $k\ge 1$, 对定义域 $[a,b]$ 作 k 等分划分: $[a,b]=\bigsqcup_{i=1}^k I_i$, 其中 I_i 为这个划分中的第 i 个小区间. 定义函数

$$\varphi_k := \sum_{i=1}^k a_i \chi_{I_i} \quad \text{和} \quad \psi_k := \sum_{i=1}^k A_i \chi_{I_i},$$

其中 $a_i := \inf_{x\in I_i} f(x)$, $A_i := \sup_{x\in I_i} f(x)$. 则 f Riemann 可积告诉我们

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k a_i|I_i| = \sum_{i=1}^k A_i|I_i| = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

我们有如下观察:

(i) φ_k, ψ_k 均为阶梯函数且

$$\sum_{i=1}^k a_i|I_i| = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k\,\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{i=1}^k A_i|I_i| = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k\,\mathrm{d}x.$$

(ii) 对任意 $k\ge 1$, $\varphi_k\le f\le \psi_k$ 且 $\varphi_k \nearrow, \psi_k \searrow$ 以及 $\max(|\varphi_k|,|\psi_k|)\le M$.

(iii) 因为 (ii) 极限函数 $\tilde{\varphi} := \lim_{k\to\infty}\varphi_k$ 和 $\tilde{\psi} := \lim_{k\to\infty}\psi_k$ 存在且可测, 并且满足 $\tilde{\varphi}\le f\le\tilde{\psi}$ 以及 $\max(|\tilde{\varphi}|,|\tilde{\psi}|)\le M$.

由 (ii) 以及有界收敛定理我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x \quad \text{和} \quad \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\psi}\,\mathrm{d}x.$$

从而由 (i) 以及 (20) 可知

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\psi}\,\mathrm{d}x. \tag{21}$$

上述第二个等式以及关系 $\tilde{\psi} \geq \tilde{\varphi}$ 以及命题 10.9 说明 $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$, a.e. $x \in [a,b]$. 再结合关系 $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$ 说明 $f = \tilde{\varphi}$, a.e. $x \in [a,b]$. 因为 $\tilde{\varphi}$ 可测, 从而 f 也可测 (见命题 8.1). 并且由命题 11.10 (1) 可知

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x \overset{(21)}{=} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理得证. □

例 12.5. 计算 $\lim_{k\to\infty} \int_E^{\mathcal{L}} \frac{x^k}{1+x^{k+2}+\log x}\,dx$, 其中 $E = [2,\infty)$.

证明. 令 I 为所要求的极限值. 我们想要对此积分应用某个收敛定理以此来交换积分和求极限顺序. 注意到

$$\frac{x^k}{1+x^{k+2}+\log x} \leq \frac{x^k}{x^{k+2}} = \frac{1}{x^2} =: g(x), \quad \forall\, x \geq 2.$$

下面我们证明 $g \in L^1(E)$. 注意到因为 E 不是一个闭区间, 我们并不能直接应用定理 12.4 将 Lebesgue 积分 $\int_E^{\mathcal{L}} g(x)\,\mathrm{d}x$ 与相应的 Riemann 积分联系起来. 为此对任意 $k \geq 3$, 定义 $E_k = [2,k]$. 注意到 $E_k \nearrow E$, 从而 $g\chi_{E_k} \nearrow g$. 从而

$$\int_E^{\mathcal{L}} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{MCT}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{E_k}^{\mathcal{L}} g(x)\,\mathrm{d} \overset{\text{定理 12.4}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{E_k}^{\mathcal{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^k = \frac{1}{2} < \infty.$$

从而 $g \in L^1(E)$. 再由控制收敛定理有

$$I = \int_E^{\mathcal{L}} \lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{1+x^{k+2}+\log x}\,\mathrm{d}x = \int_E^{\mathcal{L}} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

□

12.3 可积性的一些推论

定理 12.6. *设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则对任意 $\epsilon > 0$,*

1. *存在紧集 $B \subset \mathbb{R}^d$ 使得*

$$\int_{B^c} |f|\,dx < \epsilon.$$

2. *(绝对连续性) 存在 $\delta > 0$ 使得对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$,*

$$m(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f|\,dx < \epsilon.$$

注记 12.7. *定理 12.6 (1) 说明可积函数的“质量”绝大部分落在某个紧集内. 但注意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 并不能说明 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ (作业).*

定理 12.6 证明. 首先注意到不妨设 $f \ge 0$. 否则用 $|f|$ 替代 f.

下面我们证明 (1). 对任意 $k \ge 1$, 定义 $f_k = f\chi_{B_k}$, 其中 $B_k := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le k\}$ 为以原点为圆心半径为 k 的闭球. 注意到因为 $B_k \nearrow \mathbb{R}^d$, 我们有 $f_k \nearrow f$ 从而由单调收敛定理得 $\int_E f_k \nearrow \int_E f$. 从而存在 $N \gg 1$ 充分大使得

$$0 \le \int_E (f - f_N) < \epsilon.$$

注意到若 $x \in B_N$, 则 $f(x) - f_N(x) = f(x) - f(x) = 0$, 若 $x \in B_N^c$, 则 $f(x) - f_N(x) = f(x)$. 从而我们有

$$0 \le \int_{B_N^c} f = \int (f - f_N) < \epsilon.$$

命题 (1) 得证. 下证命题 (2). 对任意 $k \ge 1$, 定义 $g_k := f\chi_{E_k}$, 其中

$$E_k := \{f \le k\}.$$

注意到 $g_k \le k$. 这是因为若 $x \in E_k$, 则由 E_k 定义有 $g_k(x) = f(x) \le k$, 若 $x \notin E_k$, 则 $g_k(x) = 0 \le k$. 另一方面, 我们有 $E_k \nearrow \{f < +\infty\}$. 从而对任意 $x \in \{f < +\infty\}$, $g_k(x) \nearrow f(x)$. 因为 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 由命题 11.10 (2) 我们有 $\{f < +\infty\}$ 为满测集 (即它的补集为零测集). 从而 $g_k \nearrow f$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. 再由单调收敛定理可知存在 $N \gg 1$ 充分大使得

$$0 \le \int (f - g_N) < \frac{\epsilon}{2}.$$

取 $\delta > 0$ 使得 $N\delta < \epsilon/2$. 则对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 若 $m(E) < \delta$ 我们有

$$\int_E f = \int_E (f - g_N) + \int_E g_N \le \int (f - g_N) + \int_E N < \frac{\epsilon}{2} + Nm(E) < \epsilon.$$

命题得证. □

当 $d = 1$ 时我们有如下上述命题 (2) 的直接推论.

推论 12.8. *设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 则函数 $F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$ 关于 x 绝对连续.*

13 第十三讲

4 月 8 日

13.1 L^p-空间

定义 13.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为一正测集 (即 E 可测且 $m(E) > 0$), f 在 E 上可测.

1. 对任意 $0 < p < \infty$, 定义
$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. 若存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$, a.e. $x \in E$, 则称 f 在 E 上**本性有界**, M 称为 f 在 E 上的**本性上界**. 定义
$$\|f\|_\infty := \inf\{M : |f(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in E\},$$
称为 f 在 E 上的**本性上确界**.

3. 对任意 $0 < p \leq \infty$,
$$L^p(E) := \{f : \|f\|_p < \infty\}$$
称为 E 上的 **L^p-函数空间**.

注记 13.2. (i) 本性上确界的定义中取几乎处处上界是为了排除零测集的影响, 因为我们知道在 *Lebesgue* 积分理论中可测函数在一个零测集上取值的改变并不改变其积分. 例如函数 $f = 3\chi_{\mathbb{Q}} + 2\chi_{\mathbb{Q}^c}$, 虽然 f 可以取到 3, 但其本性上确界为 $\|f\|_\infty = 2$.

(ii) 易见对任意 $f \in L^\infty(E)$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, a.e. $x \in E$. 另一方面若 M 是 f 的一个本性上界, 即 $|f(x)| \leq M$, a.e. $x \in E$, 则 $\|f\|_\infty \leq M$.

(iii) $\|\cdot\|_p$ 具有如下线性性: 对任意 $f \in L^p(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$.

目前为止 $L^p(E)$ 仅仅是一个集合. 我们的目标是在其上发现足够多的结构使得在其上允许一些常见的函数运算 (例如我们现在并不知道若 $f, g \in L^p(E)$, $f + g$ 是否也为 $L^p(E)$ 中的元素).

首先我们证明 $L^p(E)$ 是一个线性空间. 特别的, 它对数乘和加减法封闭.

命题 13.3. 对任意 $0 < p \leq \infty$, $L^p(E)$ 是一个 (实数域 $\mathbb{R}$ 上的) 线性空间.

证明. 需要证明对任意 $f,g\in L^p(E)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$.

若 $0<p<\infty$, 则

$$\begin{aligned}|\alpha f+\beta g|^p &\le (|\alpha f|+|\beta g|)^p \le (2\max(|\alpha f|,|\beta g|))^p\\ &= 2^p\max(|\alpha f|^p,|\beta g|^p)\le 2^p(|\alpha f|^p+|\beta g|^p).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|\alpha f+\beta g\|_p^p &= \int_E |\alpha f+\beta g|^p\,\mathrm{d}x \le 2^p\int_E (|\alpha f|^p+|\beta g|^p)\,\mathrm{d}x\\ &= 2^p\left(|\alpha|^p\|f\|_p^p+|\beta|^p\|g\|_p^p\right)<\infty.\end{aligned}$$

从而 $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$.

若 $p=\infty$, 则有

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\le|\alpha f(x)|+|\beta g(x)|\le|\alpha|\|f\|_\infty+|\beta|\|g\|_\infty,\ \text{a.e. } x\in E.$$

从而 $\|\alpha f+\beta g\|_\infty\le|\alpha|\|f\|_\infty+|\beta|\|g\|_\infty<\infty$. 即得 $\alpha f+\beta g\in L^\infty(E)$. □

下面我们确定 $\|\cdot\|_p$ 是否为 $L^p(E)$ 上的范数. 首先我们回忆范数的定义.

定义 13.4. *设 V 是一个实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 设函数 $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ 满足*

(i) (正定性) 对任意 $v\in V$, $\|v\|\ge 0$ 且 $\|v\|=0$ 当且仅当 $v=0$.

(ii) (齐次性) 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $v\in V$, $\|\alpha v\|=|\alpha|\|v\|$.

(iii) (三角不等式) 对任意 $v,w\in V$, $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$.

这里我们遇到的第一个问题是 $\|\cdot\|_p$ 不满足正定性. 事实上, 对任意 f 满足 $f=0$, a.e. $x\in E$, 但是 f 不恒等于 0, 我们有 $\|f\|_p=0$, 但 $f\ne 0$ (作为函数相等, 即逐点相等). 为解决这个问题, 我们作如下规定: 对任意 $f,g\in L^p(E)$,

$$f \text{ 与 } g \text{ 在 } L^p(E) \text{ 内相等} \quad\Leftrightarrow\quad f=g,\ \text{a.e. } x\in E.$$

然而即使作了如上规定, 当 $0<p<1$ 时, $\|\cdot\|_p$ 依然不满足三角不等式 (从而它不是一个范数).

命题 13.5. *当 $0<p<1$ 时, $\|\cdot\|_p$ 不满足三角不等式.*

为证明此命题我们需要如下的简单不等式.

引理 13.6. *设 $q>1$. 则对任意 $a,b>0$, $(a+b)^q>a^q+b^q$.*

证明. 令 $x = \frac{a}{b}$. 上述不等式等价于对任意 $x > 0$, $(1+x)^q > x^q + 1$. 这个不等式可由简单的导数计算可证. □

命题 *13.5* 证明. 取 E 中可测子集 E_1, E_2 满足 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ 且 $0 < m(E_1), m(E_2) < m(E)$ (想想为什么可以取这样的子集?). 令 $f = \chi_{E_1}$, $g = \chi_{E_2}$. 利用引理 13.6可以证明 $\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$ (作业). □

当 $1 \le p \le \infty$ 时, $\|\cdot\|_p$ 确实是一个范数.

定理 13.7. *设 $1 \le p \le \infty$, 则 $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ 是一个赋范空间.*

证明. 首先证明正定性. 显然 $\|f\|_p \ge 0$ 对任意 $f \in L^p(E)$. 若 $\|f\|_p = 0$, 则由命题 10.9, $|f|^p = 0$, a.e. $x \in E$, 即 $f = 0$, a.e. $x \in E$. 另一方面, 齐次性可由 Lebesgue 积分的线性性推出. 三角不等式即为下述要证的 Minkowski 不等式. □

命题 13.8 (Minkowski 不等式)**.** *设 $1 \le p \le \infty$. 我们有*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall\, f, g \in L^p(E). \tag{22}$$

Minkowsi 不等式的证明依赖于 Hölder 不等式. 为叙述 Hölder 不等式我们引入如下定义.

定义 13.9. *设 $p, q > 1$. 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则称 (p, q) 互为共轭指标. 并且我们规定 $(\infty, 1)$ 也互为共轭指标.*

注记 13.10. *若 $p > 1$, 经简单计算可知其共轭指标为 $q = (1 - \frac{1}{p})^{-1} = \frac{p}{p-1}$.*

命题 13.11 (Hölder 不等式)**.** *设 (p, q) 互为共轭指标. 我们有*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall\, f \in L^p(E),\ g \in L^q(E). \tag{23}$$

特别的, $fg \in L^1(E)$.

为证明 Hölder 不等式我们先证明一个简单的不等式引理.

引理 13.12. *设 $0 < \lambda < 1$. 则对任意 $a, b \ge 0$, $a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b$.*

证明. 若 $b = 0$, 此不等式显然成立. 下面假设 $b > 0$. 令 $x = \frac{a}{b}$. 此不等式等价于 $x^\lambda \le \lambda x + 1 - \lambda$ 对任意 $x \ge 0$ 成立. 同样的, 这个不等式可通过简单的导数计算证明. □

下面我们证明 Hölder 不等式.

Hölder 不等式证明. 首先证明一些简单情形. 若 $(p,q)=(\infty,1)$, 则 $|f(x)|\le\|f\|_\infty$, a.e. $x\in E$. 从而 $|fg|\le\|f\|_\infty|g|$, a.e. $x\in E$. 由积分单调性及线性性可知

$$\|fg\|_1=\int_E|fg|\,\mathrm{d}x\le\int_E\|f\|_\infty|g|\,\mathrm{d}x=\|f\|_\infty\int_E|g|\,\mathrm{d}x=\|f\|_\infty\|g\|_1.$$

$(p,q)=(1,\infty)$ 的情形可类似证明. 下面假设 $1<p,q<\infty$. 从而不等式 (23) 等价于

$$\int_E|fg|\,\mathrm{d}x\le\left(\int_E|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\tag{24}$$

首先若 $\|f\|_p=0$, 则由命题 10.9, $f=0$, a.e. $x\in E$. 从而上式左右两端都等于 0. 类似的若 $\|g\|_q=0$, 上式左右两端也均为 0. 因此不妨设 $\|f\|_p\|g\|_q\ne0$. 令 $\tilde f=\frac{f}{\|f\|_p}$, $\tilde g=\frac{g}{\|g\|_q}$. 注意到 $\|\tilde f\|_p=\|\frac{f}{\|f\|_p}\|_p=\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p}=1$. 类似的 $\|\tilde g\|_q=1$. 在不等式 (24) 左右两端同除以 $\|f\|_p\|g\|_q$, 此不等式约化为 $\|\tilde f\tilde g\|_1\le1$. 注意到

$$\|\tilde f\tilde g\|_1=\int_E|\tilde f\tilde g|\,\mathrm{d}x=\int_E(|\tilde f|^p)^{1/p}(|\tilde g|^q)^{1/q}\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $|f(x)|,|g(x)|<\infty$, a.e. $x\in E$, 从而对几乎所有 $x\in E$, 我们可以对三元组 $(a,b,\lambda)=(|\tilde f(x)|^p,|\tilde g(x)|^q,1/p)$ 应用引理 13.12 (并且注意到 $1-\lambda=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$) 得到

$$(|\tilde f|^p)^{1/p}(|\tilde g|^q)^{1/q}\le\frac{1}{p}|\tilde f|^p+\frac{1}{q}|\tilde g|^q,\quad \text{a.e. } x\in E.$$

从而

$$\|\tilde f\tilde g\|_1\le\frac{1}{p}\int_E|\tilde f|^p\,\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_E|\tilde g|^q\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\|\tilde f\|_p^p+\frac{1}{q}\|\tilde g\|_q^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

不等式得证. □

利用 Hölder 不等式我们可以证明 Minkowsi 不等式.

Minkowsi 不等式证明. 若 $p=1$, 则由 $\mathbb{R}$ 上绝对值的三角不等式可知

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1&=\int_E|f+g|\,\mathrm{d}x\le\int_E(|f|+|g|)\,\mathrm{d}x\\&=\int_E|f|\,\mathrm{d}x+\int_E|g|\,\mathrm{d}x=\|f\|_1+\|g\|_1.\end{aligned}$$

若 $p=\infty$, 注意到 $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$, a.e. $x\in E$. 从而 $\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$. 下面假设 $1<p<\infty$. 我们有

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p&=\int_E|f+g|^p\,\mathrm{d}x=\int_E|f+g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x\\&\le\int_E|f||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x+\int_E|g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $f,g\in L^p(E)$, 由命题 13.3可知 $f+g\in L^p(E)$. 从而 $|f+g|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(E)$. 注意到 $\frac{p}{p-1}=q$ 为 p 的共轭指标. 对函数对 $(|f|,|f+g|^{p-1})$ 应用 Hölder 不等式 (23) 可得

$$\begin{aligned}\int_E|f||f+g|^{p-1}&\le\|f\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q=\|f\|_p\left(\int_E|f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&=\|f\|_p\left(\int_E|f+g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\times\frac{p}{q}}=\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

这里最后一个等式用到等式 $\frac{p}{q}=p\times\frac{p-1}{p}=p-1$. 类似的我们有

$$\int_E|g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}x\le\|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1}.$$

结合这两个不等式即得

$$\|f+g\|_p^p\le\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}+\|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1}.$$

在不等式两端同时除以 $\|f+g\|_p^{p-1}$ 即得 Minkowski 不等式(22). □

注记 13.13. *Hölder 不等式与 Minkowski 不等式取等的条件是什么？(作业)*

给定一个赋范空间 $(V,\|\cdot\|)$, 可以在其上自然的定义一个度量[20]：$d:V\times V\to\mathbb{R}$, $d(v,w):=\|v-w\|$. 特别的, 当 $1\le p\le\infty$, $d(f,g):=\|f-g\|_p$ 是函数空间 $L^p(E)$ 上的一个度量. 有了度量之后一方面我们可以定义开球闭球, 从而在 V 上引入拓扑; 另一方面有了距离的概念之后我们可以在 V 上定义极限: 称 V 上点列 $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ 趋向于某点 $v\in V$ 若 $\lim_{n\to\infty}d(v_n,v)=0$. 自然的我们关心 V 在取极限下是否封闭, 即 V 是否完备. 我们首先回忆相关概念.

定义 13.14. *设 d 是 V 上的一个度量.*

*(i) 称点列 $\{v_n\}_{n=1}^\infty\subset V$ 为一个 **Cauchy** 列若* $\lim_{n,m\to\infty}d(v_n,v_m)=0$.

[20]我们称函数 $d:V\times V\to\mathbb{R}$ 为空间 V 上的一个**度量**若其满足如下三个条件: (i) 正定性: 对任意 $v,w\in V$, $d(v,w)\ge0$ 且 $d(v,w)=0$ 当且仅当 $v=w$; (ii) 对称性: 对任意 $v,w\in V$, $d(v,w)=d(w,v)$; (iii) 三角不等式: 对任意 $v,w,z\in V$, $d(v,w)\le d(v,z)+d(z,w)$.

(ii) 称 (V,d) 是完备的若对任意 V 上的 *Cauchy* 列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, 存在 $v\in V$ 使得 $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, 即 $\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$.

下面我们叙述今天的主要定理.

定理 13.15. 设 $1\le p\le\infty$, $L^p(E)$ 在度量 $d(f,g) := \|f-g\|_p$ 下完备.

证明. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(E)$ 上的一列 Cauchy 列, 要证存在 $f\in L^p(E)$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$.

我们首先证明 $p=\infty$ 的情形. 对任意 $k,j\ge 1$, 我们有 $|f_k(x)-f_j(x)|\le \|f_k - f_j\|_\infty$, a.e $x\in E$. 即存在一个零测集 $F_{k,j}\subset E$ 使得

$$\forall\, x\in E\setminus F_{k,j}: \quad |f_k(x)-f_j(x)|\le \|f_k-f_j\|_\infty.$$

令 $F=\bigcup_{k,j=1}^{\infty} F_{k,j}$, 则 $m(F)=0$ 且

$$\forall\, x\in E\setminus F,\ \forall\, k,j\ge 1: \quad |f_k(x)-f_j(x)|\le \|f_k-f_j\|_\infty. \tag{25}$$

特别的, 因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^\infty(E)$ 为一列 Cauchy 列, 我们有

$$\lim_{k,j\to\infty}|f_k(x)-f_j(x)|\le \lim_{k,j\to\infty}\|f_k-f_j\|_\infty = 0,\ \forall\, x\in E\setminus F.$$

从而对任意 $x\in E\setminus F$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列实数 Cauchy 列 (相对于 $\mathbb{R}$ 上的绝对值 $|\cdot|$). 因为 $(R,|\cdot|)$ 完备, 对任意 $x\in E\setminus F$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\in\mathbb{R}$ 存在. 定义

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & 若\ x\in E\setminus F, \\ 0 & 若\ x\in F. \end{cases}$$

下证 $f\in L^\infty(E)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$. 首先因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列, 对任意 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 使得对任意 $k,j\ge N$, $\|f_k-f_j\|_\infty<\epsilon$. 特别的, 对任意 $k\ge N$, $x\in E\setminus F$,

$$|f_k(x)-f(x)| = \lim_{j\to\infty}|f_k(x)-f_j(x)| = \lim_{\substack{j\to\infty\\ j\ge N}}|f_k(x)-f_j(x)|\le \lim_{\substack{j\to\infty\\ j\ge N}}\|f_k-f_j\|_\infty < \epsilon.$$

总结一下我们证明了对任意 $\epsilon>0$, 存在 N 使得对任意 $k\ge N$,

$$\|f_k - f\|_\infty \overset{F\ \text{零测}}{\le} \sup_{x\in E\setminus F}|f_k(x)-f(x)| < \epsilon.$$

从而 $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_\infty = 0$. 最后注意到任取 $k\ge N$ 有 $\|f\|_\infty\le\|f-f_k\|_\infty + \|f_k\|_\infty < \epsilon + \|f_k\|_\infty<\infty$. 从而 $f\in L^\infty(E)$. $\square$

14 第十四讲

4 月 10 日

14.1 L^p-完备性: 继续

今天我们继续定理 13.15 的证明.

定理 13.15 证明. 设 $1 \le p < \infty$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $L^p(E)$ 上的一列 Cauchy 列. 要证存在 $f \in L^p(E)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. 因为 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $n_\epsilon \ge 1$ 使得对任意 $n \ge n_\epsilon$, $\|f_n - f_{n_\epsilon}\|_p < \epsilon$. 特别的, 依次取 $\epsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^j}, \cdots$ 我们可以得到一列单调递增的正整数列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ 满足

$$\forall\, n \ge n_j : \quad \|f_n - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}.$$

特别的, 我们有

$$\forall\, j \ge 1 : \quad \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}. \tag{26}$$

定义

$$g := |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^\infty |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

以及

$$f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^\infty (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}).$$

注意到因为 g 与 f 的定义级数未必收敛, 暂时我们并不知道 g 与 f 是否是良定义的. 但是对任意 $x \in E$, 若 $g(x) < \infty$, 则 $f(x)$ 的定义级数绝对收敛. 从而 $f(x)$ 存在且其对应的部分级数收敛至 $f(x)$. 注意到 $f(x)$ 定义级数的部分级数为

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big) = f_{n_k}(x).$$

从而当 $g(x) < \infty$ 时, $f_{n_k}(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$. 并且我们还有 $|f_{n_k}(x)|, |f(x)| \le g(x)$.

下面我们断言 $g(x) < \infty$, a.e. $x \in E$. 事实上, 我们证明 $g \in L^p(E)$. 令

$$M := \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^\infty \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p,$$

以及

$$\forall\, k \ge 2 : \quad g_{n_k} := |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

由 (26) 可知 $M \le \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty$. 另一方面, 注意到 g_{n_k} 为 g 的定义级数的部分和. 从而 $g_{n_k} \nearrow g$ ($\Leftrightarrow g_{n_k}^p \nearrow g^p$). 并且由 Minkowski 不等式我们有

$$\|g_{n_k}\|_p \le \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \le M.$$

从而由单调收敛定理可知

$$\|g\|_p^p = \int_E g^p \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E g_{n_k}^p \, \mathrm{d}x \le M^p.$$

从而 $g \in L^p(E)$. 特别的, $g(x) < \infty$, a.e. $x \in E$. 从而 $|f(x)| \le g(x) < \infty$, a.e. $x \in E$ 且 $f_{n_k} \to f$, a.e. $x \in E$. 因为 $|f_{n_k}| \le g$ ($\Leftrightarrow \ |f_{n_k}|^p \le g^p$), a.e. $x \in E$, $g \in L^p(E)$ ($\Leftrightarrow \ g^p \in L^1(E)$), 由控制收敛定理我们有

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k}|^p \, \mathrm{d}x \le \int_E g^p \, \mathrm{d}x = \|g\|_p^p < \infty.$$

从而 $f \in L^p(E)$. 下证 $\|f_n - f\|_p \to 0$. 我们首先证 $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$. 注意到对任意 $k \ge 2$,

$$|f - f_{n_k}| = |\sum_{j=k}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})| \le \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \le g, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

从而再由控制收敛定理 (应用到 $\{|f - f_{n_k}|\}_{k=1}^{\infty}$) 我们有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k} - f|^p \, \mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^p \, \mathrm{d}x = 0.$$

一般的, 由三角不等式以及 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 列的假设我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ n_k\to\infty}} (\|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p) = 0.$$

命题得证. □

注记 14.1. *注意到定理 13.15 中 f_n 收敛至 f 并不是指 f_n 逐点收敛至 f, 而是指 $\|f_n - f\|_p \to 0$. 事实上, 可以证明, $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ \Rightarrow \ f_n \to f$, a.e. $x \in E$, 但当 $1 \le p < \infty$ 时, $\|f_n - f\|_p \to 0 \ \not\Rightarrow \ f_n \to f$, a.e. $x \in E$[21] (作业).*

14.2 依范数与依测度收敛

定理 13.15 中的收敛称为依范数收敛.

[21] 但是注意到定理 13.15 的证明告诉我们当 $1 \le p < \infty$ 时, $\|f_n - f\|_p \to 0$ 可推出存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $f_{n_k} \to f$, a.e. $x \in E$.

定义 14.2. 设 $1 \le p < \infty$, $f, f_n (n = 1, 2, \cdots) \in L^p(E)$. 若当 $n \to \infty$ 时, $\|f_n - f\|_p \to 0$, 则称 f_n **依 L^p 范数收敛于** f, 记为 $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

我们还可以定义如下的一种收敛方式.

定义 14.3. 设 $f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为 E 上的可测函数. 若对任意 $\epsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, $m(\{|f_n - f| \ge \epsilon\}) \to 0$, 则称 f_n **依测度收敛于** f, 记为 $f_n \xrightarrow{m} f$.

易见依范数收敛可推出依测度收敛.

命题 14.4. 设 $1 \le p < \infty$, $f, f_n (n = 1, 2, \cdots) \in L^p(E)$. 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则 $f_n \xrightarrow{m} f$.

证明. 设 $f_n \xrightarrow{L^p} f$. 对任意 $\epsilon > 0$, 令 $E_n(\epsilon) := \{|f_n - f| \ge \epsilon\}$. 要证 $\lim_{n\to\infty} m(E_n(\epsilon)) = 0$. 注意到

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p^p &= \int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x \ge \int_{E_n(\epsilon)} |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x \\ &\ge \int_{E_n(\epsilon)} \epsilon^p \,\mathrm{d}x = \epsilon^p m(E_n(\epsilon)).\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n(\epsilon)) \le \epsilon^{-p} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0.$$

命题得证. □

由注记 14.1 以及命题 14.4 可知 $f_n \xrightarrow{m} f \not\Rightarrow f_n \to f$, a.e. $x \in E$. 另一方面, 注意到 $f_n \to f$, a.e. $x \in E \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f$. 例如对任意 $n \ge 1$, 令 $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. 则 $f_n \to f = 0$, 但对任意 $n \ge 1$,

$$m(\{|f_n - f| \ge 1/2\}) = m([n, n+1]) = 1.$$

但是, 若我们额外假设 $m(E) < \infty$, 则几乎逐点收敛可推出依测度收敛.

命题 14.5 (Lebesgue)**.** 设 $m(E) < \infty$, $f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 在 E 上可测且几乎处处有限. 则

$$f_n \to f, \ a.e. \ x \in E \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{m} f.$$

证明. 不妨设 $f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 在 E 上均处处有限 (为什么?). 对任意 $\epsilon > 0$, $n \ge 1$ 令 $E_n(\epsilon) := \{|f_n - f| \ge \epsilon\}$. 要证 $\lim_{n\to\infty} m(E_n(\epsilon)) = 0$. 注意到对任意

$x \in E$,

$$\begin{aligned} f_n(x) \not\to f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \, \exists \text{子列 } \{n_k\} \text{ 使得 } |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \text{ 使得 } |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \text{ 对无穷多个 } n \text{ 成立} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \text{ 使得 } x \in E_n(\epsilon) \text{ 对无穷多个 } n \text{ 成立}. \end{aligned}$$

从而我们有

$$\{f_n \not\to f\} = \bigcup_{\epsilon>0} \limsup_{n\to\infty} E_n(\epsilon). \tag{27}$$

由假设 $\{f_n \not\to f\}$ 为零测集, 从而对任意 $\epsilon > 0$, $\limsup_{n\to\infty} E_n(\epsilon)$ 也为零测集. 注意到

$$\limsup_{n\to\infty} E_n(\epsilon) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} E_n(\epsilon).$$

对任意 $k \geq 1$ 令 $B_k := \bigcup_{n\geq k} E_n(\epsilon)$. 则 $B_k \searrow \limsup_{n\to\infty} E_n(\epsilon)$. 并且我们有 $m(B_1) \leq m(E) < \infty$. 从而由单调递减集列的测度连续性 (定理 6.3 (2)) 我们有

$$\lim_{k\to\infty} m(B_k) = m(\limsup_{n\to\infty} E_n(\epsilon)) = 0.$$

注意到 $E_k(\epsilon) \subset B_k$. 从而

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k(\epsilon)) \leq \lim_{k\to\infty} m(B_k) = 0.$$

显然 $\lim_{k\to\infty} m(E_k(\epsilon)) \geq 0$. 从而 $\lim_{k\to\infty} m(E_k(\epsilon)) = 0$. 命题得证. □

另一方面我们证明依测度收敛可推出沿子列几乎处处逐点收敛.

定理 14.6 (Riesz). *设 $f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 在 E 上可测且几乎处处有限. 若 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $f_{n_k} \to f$, a.e. $x \in E$.*

证明. 不妨设 $f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 处处有限. 注意到

$$\exists \text{ 子列 } \{n_k\} \text{ s.t. } f_{n_k} \to f, \text{ a.e.} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ 子列 } \{n_k\} \text{ s.t. } m(\{f_{n_k} \not\to f\}) = 0.$$

由 (27) 我们有

$$\{f_{n_k} \not\to f\} = \bigcup_{\epsilon>0} \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon).$$

因此我们只需证存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $\bigcup_{\epsilon>0} \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon)$ 为零测集. 注意到对任意固定 $n \geq 1$, $\{E_n(\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ 关于 ϵ 单调递减, 即若 $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, 则 $E_n(\epsilon_2) \subset E_n(\epsilon_1)$. 由此我们有 $\bigcup_{\epsilon>0} \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon) = \bigcup_{j\geq 1} \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(1/j)$. 从

而只需证对任意 $\epsilon > 0$, $\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon)$ 为零测集. 下面我们构造这样的子列 $\{n_k\}$. 任取一列单调递减至 0 的正实数列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. 由于 $f_n \xrightarrow{m} f$ 我们有对任意 $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} m(E_n(\epsilon)) = 0$. 从而我们可以找到一列单调递增的正整数列 $\{n_k\}$ 满足对任意 $k \geq 1$, $m(E_{n_k}(b_k)) < \frac{1}{2^k}$. 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_{n_k}(b_k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

再由 Borel-Cantelli 引理有 $m(\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(b_k)) = 0$. 对任意 $\epsilon > 0$, 因为 $\{b_k\}$ 递减至 0, 存在 $K \geq 1$ 使得对任意 $k \geq K$, $b_k < \epsilon$. 从而对任意 $k \geq K$, $E_{n_k}(\epsilon) \subset E_{n_k}(b_k)$. 从而我们有

$$\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon) \subset \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(b_k).$$

因此 $\limsup_{k\to\infty} E_{n_k}(\epsilon)$ 也为零测集, 命题得证. $\square$

15 第十五讲

4 月 17 日

15.1 稠密性定理

前面几次课的内容主要是说明 L^p-函数空间 $(1 \le p \le \infty)$ 是一个足够大的集合: 它在一些常见操作下封闭. 今天我们的主要目标是说明, 相对于 Riemann 可积函数空间, L^p-函数空间是一个合理的延拓: 一些常见的特殊函数在 L^p-函数空间中是稠密的. 这使得我们可以运用一些逼近的论证方法证明 L^p-函数空间也满足这些特殊函数所满足的一些性质. 首先我们回忆度量空间中稠密性的定义.

定义 15.1. *设 (V, d) 为一度量空间. 称 $X \subset V$ 是稠密的 (记作 $X \overset{dense}{\subset} V$) 若对任意 $v \in V$, 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $x \in X$ 使得 $d(v, x) < \epsilon$.*

定理 15.2. *设 $1 \le p < \infty$. 则*

$$\{L^p\text{-简单函数}\} \overset{dense}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{且} \quad \{\text{阶梯函数}\} \overset{dense}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d).$$

这里 $\{L^p\text{-简单函数}\}$ 指代 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中所有简单函数所构成的集合. 下面这个简单引理告诉我们为证明定理 15.2 我们只需证明如下关系:

$$\{\text{阶梯函数}\} \overset{dense}{\subset} \{L^p\text{-简单函数}\} \overset{dense}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d).$$

引理 15.3. *若 $X \overset{dense}{\subset} V$ 且 $Y \overset{dense}{\subset} X$, 则 $Y \overset{dense}{\subset} V$.*

证明. 对任意 $v \in V$, 任意 $\epsilon > 0$, 要证存在 $y \in Y$ 使得 $d(v, y) < \epsilon$. 因为 X 在 V 中稠密, 存在 $x \in X$ 使得 $d(v, x) < \epsilon/2$. 又因为 Y 在 X 中稠密, 存在 $y \in Y$ 使得 $d(x, y) < \epsilon/2$. 从而由三角不等式有 $d(v, y) \le d(v, x) + d(x, y) < \epsilon$. □

定理 15.2 证明. 首先我们证明 $\{L^p\text{-简单函数}\} \overset{dense}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d)$. 即证对任意给定 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在简单函数 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$. 首先假设 f 非负. 则由简单函数逼近定理 (定理 8.6) 可知存在一列非负简单函数 $\{\varphi_k\}$ 使得 $\varphi_k \nearrow f$. 特别的, 我们有 $0 \le \varphi_k \le f$. 从而 $\varphi_k \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 另一方面, 注意到 $|f - \varphi_k| \le f + \varphi_k \le 2f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 从而由控制收敛定理 (定理 12.2) 有

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int |f - \varphi_k|^p \,\mathrm{d}x = \int \lim_{k\to\infty} |f - \varphi_k|^d \,\mathrm{d}x = 0.$$

特别的, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $k \ge 1$ 充分大使得 $\|f - \varphi_k\|_p < \epsilon$. 对一般的 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 将 f 写作 $f = f^+ - f^-$, 注意到 $f^\pm \ge 0$ 且 $f^\pm \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 从而由

上证情形对任意 $\epsilon > 0$, 存在简单函数 $\varphi^1, \varphi^2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f^+ - \varphi^1\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ 且 $\|f^- - \varphi^2\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. 令 $\varphi = \varphi^1 - \varphi^2$, 则 φ 为简单函数且 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 并且

$$\|f - \varphi\|_p = \|f^+ - \varphi^1 - f^- + \varphi^2\|_p \le \|f^+ - \varphi^1\|_p + \|f^- - \varphi^2\|_p < \epsilon.$$

下证 $\{$阶梯函数$\} \overset{dense}{\subset} \{L^p$-简单函数$\}$. 给定简单函数 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 对任意 $\epsilon > 0$, 我们想要找到阶梯函数 ψ 使得 $\|\varphi - \psi\|_p < \epsilon$. 首先假设 $\varphi = \chi_E$ 为某个可测集 E 的示性函数. 注意到 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当 $m(E) < \infty$. 从而由 Littlewood 三原则之一 (定理 6.5 (2); 也参见注记 6.6) 可知对任意 $\epsilon > 0$, 存在有限个闭方体的几乎不交并 $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 使得 $m(E\Delta F) < \epsilon^p$. 令 $\psi = \sum_{j=1}^N \chi_{Q_j}$. 显然 ψ 为阶梯函数, 并且因为 $\{Q_j\}$ 为几乎不交并, $\chi_F = \psi$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. 从而

$$\|\varphi - \psi\|_p^p = \|\chi_E - \chi_F\|_p^p = \int |\chi_E - \chi_F|^p \,\mathrm{d}x.$$

注意到对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $|\chi_E(x) - \chi_F(x)| \in \{0, 1\}$, 从而 $|\chi_E(x) - \chi_F(x)|^p = |\chi_E(x) - \chi_F(x)|$. 因此

$$\|\varphi - \psi\|_p^p = \int |\chi_E - \chi_F| \,\mathrm{d}x = m(E\Delta F) < \epsilon^p.$$

等价的, $\|\varphi - \psi\|_p < \epsilon$. 对一般的简单函数 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 将其写成标准形式: $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$. 注意到因为 $\{E_i\}$ 两两不交, $|\varphi|^p = \sum_{i=1}^N |a_i|^p \chi_{E_i}$. 从而 $\|\varphi\|_p^p = \sum_{i=1}^N |a_i|^p m(E_i)$. 因为 $\|\varphi\|_p < \infty$, 对任意 $1 \le i \le N$, 若 $a_i \ne 0$, 则有 $m(E_i) < \infty$ (否则 $\|\varphi\|_p = \infty$). 但因为 $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$ 为标准表示, $\bigsqcup_{i=1}^N E_i = \mathbb{R}^d$, 从而存在唯一 $1 \le i \le N$ 使得 $a_i = 0$ 并且相应的 $m(E_i) = \infty$. 不妨设 $a_N = 0$. 从而

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \chi_{E_i} \quad \text{并且} \quad a_i \ne 0,\ m(E_i) < \infty,\ \forall 1 \le i \le N-1.$$

对任意 $1 \le i \le N-1$, 因为 $m(E_i) < \infty$, 由前证情形, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在阶梯函数 ψ_i 使得 $\|\chi_{E_i} - \psi_i\|_p < \frac{\epsilon}{|a_i|N}$. 令 $\psi = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \psi_i$. 则 ψ 为阶梯函数且

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\|_p &= \|\sum_{i=1}^{N-1} a_i \chi_{E_i} - \sum_{i=1}^{N-1} a_i \psi_i\|_p \le \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \|\chi_{E_i} - \psi_i\|_p \\ &< \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \frac{\epsilon}{|a_i|N} < \epsilon. \end{aligned}$$

命题得证. $\square$

令 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上所有具有紧支集[22]的连续函数全体. 注意到 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 中函数具有很好的性质: 对任意 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 因为 g 的支撑集 $\mathrm{supp}(g)$ 为紧集且 g 连续, 从而 g 在 $\mathrm{supp}(g)$ 上有界并且一致连续. 特别的, 若令 $M > 0$ 为 g 的一个上界, 则

$$\|g\|_p^p = \int_{\mathrm{supp}(g)} |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \le M^p m(\mathrm{supp}(g)) < \infty.$$

从而 $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. 下面我们证明 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中稠密.

定理 15.4. 设 $1 \le p < \infty$. 则 $C_c(\mathbb{R}^d) \overset{dense}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d)$.

证明. 由引理 15.3, 阶梯函数在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性以及 $\|\cdot\|_p$ 满足的三角不等式 (即 Minkowsi 不等式), 只需证对任意矩体 $R \subset \mathbb{R}^d$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|g - \chi_R\|_p < \epsilon$. 若 $d = 1$, 则 $R = [a, b]$ 为一闭区间. 对任意 $\delta > 0$, 定义函数 (参见图 5)

$$g_{\delta,[a,b]}(x) := \begin{cases} 0 & x \le a-\delta \text{ 或 } x \ge b+\delta, \\ 1 & a \le x \le b, \\ \frac{1}{\delta}(x-a) & a-\delta < x < a, \\ 1 - \frac{1}{\delta}(x-b) & b < x < b+\delta. \end{cases}$$

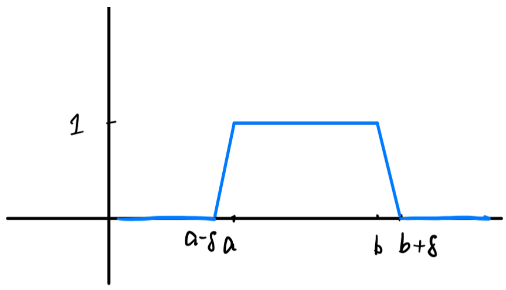

图 5: 函数 $g_{\delta,[a,b]}$.

注意到 $g = g_{\delta,[a,b]}$ 满足

(i) $\mathrm{supp}(g) = [a-\delta, b+\delta]$, g 连续, 从而 $g \in C_c(\mathbb{R})$;

(ii) $0 \le g \le 1$;

[22]回忆函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 的支撑集为 $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ne 0\}}$. 称 f 具有紧支集若 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集.

(iii) $g|_R = 1 = \chi_R$.

对任意 $\epsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使得 $2\delta < \epsilon^p$ 并令 $g = g_{\delta,[a,b]}$. 则

$$\begin{aligned}\|g-\chi_R\|_p^p = \int |g-\chi_R|^p \,\mathrm{d}x &\overset{(iii)}{=} \int_{[a-\delta,b+\delta]\setminus[a,b]} |g|^p \,\mathrm{d}x \\ &\overset{(ii)}{\leq} \int_{[a-\delta,b+\delta]\setminus[a,b]} 1 \,\mathrm{d}x = 2\delta < \epsilon^p,\end{aligned}$$

即 $\|g-\chi_R\|_p < \epsilon$.

对一般的维数 d, $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. 对任意 $\delta > 0$, 令

$$g_{\delta,R}(x_1, \cdots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} g_{\delta,[a_i,b_i]}(x_i).$$

注意到 $g_{\delta,R}$ 满足

(i) $\operatorname{supp}(g_{\delta,R}) = \prod_{i=1}^d [a_i - \delta, b_i + \delta] =: R_\delta$, g 连续, 从而 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$;

(ii) $0 \leq g_{\delta,R} \leq 1$;

(iii) $g_{\delta,R}|_R = 1 = \chi_R$.

对任意 $\epsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使得 $m(R_\delta \setminus R) < \epsilon^p$. 由上面类似的计算可知

$$\|g_{\delta,R} - \chi_R\|_p \leq m(R_\delta \setminus R)^{1/p} < \epsilon.$$

从而命题得证. □

15.2 一些应用

下面我们利用前证的稠密性定理证明 Lebesgue 积分的一些性质. 在这些证明中我们一般首先证明某些特殊函数 (例如简单函数或 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 中的函数) 满足这些性质, 然后再利用相应逼近或者稠密性定理将这些性质推广到一般的可积函数.

命题 15.5 (Lebesgue 积分的变量变换法则). 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则

1. *(平移不变性) 对任意* $h \in \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$.
2. *对任意* $\lambda > 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\,dx = \lambda^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$.
3. $\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$.

证明. 我们只证明 (1); (2) 与 (3) 的证明类似. 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathbb{R}^d$, 令 $f_h(x) := f(x-h)$. 首先我们假设 $f = \chi_E$. 注意到 $f_h(x) = \chi_E(x-h) = \chi_{E+h}(x)$. 从而

$$\int f_h \,\mathrm{d}x = m(E+h) = m(E) = \int f \,\mathrm{d}x.$$

这里第二个等式用到 Lebesgue 测度的平移不变性 (命题 3.6 (3)). 若 $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$ 为简单函数. 则注意到 $f_h = \sum_{i=1}^N a_i (\chi_{E_i})_h$, 从而

$$\int f_h \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N a_i m((E_i)_h) = \sum_{i=1}^N a_i m(E_i) = \int f \,\mathrm{d}x.$$

下面假设 f 非负可测. 则由简单函数逼近定理 (定理 8.6) 可知存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 使得 $\varphi_k \nearrow f$. 等价的, 我们也有 $(\varphi_k)_h \nearrow f_h$. 从而由单调收敛定理以及前证简单函数情形有

$$\int f_h \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k)_h \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x.$$

对一般的 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 将 f 写作 $f = f^+ - f^-$, 其中 $f^+ = \frac{|f|+f}{2} \geq 0$, $f^- = \frac{|f|-f}{2} \geq 0$ 分别为 f 的正部和负部. 注意到

$$f_h = (f^+)_h - (f^-)_h \quad 且 \quad (f_h)^\pm = (f^\pm)_h.$$

从而

$$\begin{aligned}
\int f_h \,\mathrm{d}x &= \int (f_h)^+ \,\mathrm{d}x - \int (f_h)^- \,\mathrm{d}x \\
&= \int (f^+)_h \,\mathrm{d}x - \int (f^-)_h \,\mathrm{d}x \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}x - \int f^- \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

下面我们利用 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性证明平移变换 $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto f_h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上连续.

命题 15.6 (平移变换的连续性)**.** 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则当 $h \to 0$ 时, $\|f_h - f\|_1 \to 0$.

证明. 首先我们假设 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. 注意到因为 f 的支撑集 $E = \mathrm{supp}(f)$ 为紧集, f 在 E 上一致连续, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x, y \in E$, 若 $|x-y| < \delta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 对任意 $\epsilon > 0$, 取这样的 $\delta > 0$. 则对任意

$h \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|h| < \delta$, 我们有

$$\begin{aligned}\|f_h - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{E \cup (E+h)} |f(x-h) - f(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\le \int_{E \cup (E+h)} \epsilon \,\mathrm{d}x = \epsilon m(E \cup (E+h)) \le 2m(E)\epsilon.\end{aligned}$$

从而 $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

对一般的 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 因为 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f - g\|_1 < \epsilon$. 从而对任意 $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\|f_h - f\|_1 = \|f_h - g_h + g_h - g + g - f\|_1 \le \|f_h - g_h\|_1 + \|g_h - g\|_1 + \|g - f\|_1.$$

由平移不变性 (命题 15.5 (1)) 有 $\|f_h - g_h\|_1 = \|f - g\|_1$. 从而

$$\|f_h - f\|_1 \le 2\|f - g\|_1 + \|g_h - g\|_1 < 2\epsilon + \|g_h - g\|_1.$$

令 $h \to 0$ 并且注意到 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ 可得

$$\varlimsup_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 \le 2\epsilon + \lim_{h\to 0} \|g_h - g\|_1 = 2\epsilon.$$

令 $\epsilon \to 0^+$ (注意到左式与 ϵ 无关) 即得 $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$. $\square$

16 第十六讲

4 月 22 日

16.1 Fubini 定理

设 f 是集合 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数. 当计算 f 在 I 上的 Riemann 积分时, 我们可以将此二重积分转化成累次积分:

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{28}$$

这里我们先对变量 x 作积分再对变量 y 作积分. 类似的我们也可以先对 y 作积分, 再对 x 作积分:

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

等式 (28) 蕴含了如下三层意思:

(i) 对任意固定的 $y\in[c,d]$, 函数 $x\mapsto f(x,y)$ 关于 x Riemann 可积 (从而右端内部积分有意义).

(ii) 函数 $y\mapsto\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y Riemann 可积 (从而右端外部积分有意义).

(iii) 在 (i), (ii) 的前提下 (从而右端双重积分有意义) 等式 (28) 成立.

注意到上述 (i)(ii) 中的函数均是连续的, 从而这两个条件成立. 对 Lebesgue 积分, 我们也期望有类似的将多重积分转化成累次积分的结论. 首先我们来规定一些记号. 设 $d=d_1+d_2$, 其中 d_1,d_2 均为正整数. 我们用 (x,y) 来指代 $\mathbb{R}^d$ 中的元素, 其中 $x\in\mathbb{R}^{d_1}$, $y\in\mathbb{R}^{d_2}$. 为作区分我们用 m^{d_1},m^{d_2} 分别来指代 $\mathbb{R}^{d_1}$, $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的 Lebesgue 测度. 类似的, 我们用 $m_*^{d_1},m_*^{d_2}$ 分别来指代 $\mathbb{R}^{d_1}$, $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的 Lebesgue 外测度.

给定 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数 f, 为研究是否存在类似于 (28) 的关于 Lebesgue 积分的等式, 我们首先需要知道:

(Q1) 对任意固定的 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$, 函数 $x\mapsto f(x,y)$ 是否 Lebesgue 可积?

(Q2) 在 (Q1) 的前提下, 函数 $y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 是否 Lebesgue 可积?

为方便讨论, 我们作如下定义.

定义 16.1. *(1) 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上函数. 对任意 $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$,*

$$f_x(y) := f(x,y), \qquad f^y(x) := f(x,y)$$

*分别称为 f 关于 x 和 y 的**切片函数**.*

(2) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$

$$E_x := \left\{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x,y) \in E\right\}, \quad E^y := \left\{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\right\}$$

*分别称为 E 关于 x 和 y 的**切片集合** (参见图 6).*

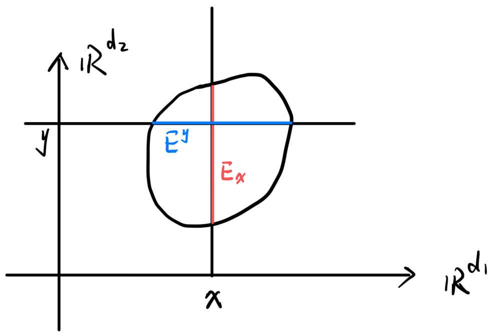

图 6: 切片集合: E^y 与 E_x.

例 16.2. *(i) 若 $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$, 则 $f^0(x) = x^2, f^1(x) = x^2 + 2x + 1$; $f_0(y) = y^3$, $f_1(y) = 1 + 2y + y^3$.*

(ii) 若 $f = \chi_E$ 为集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的示性函数, 则易见对任意 $x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$, $f_x = \chi_{E_x}$, $f^y = \chi_{E^y}$.

首先我们来回答问题 (Q1), 即我们想要知道对任意 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 切片函数 f^y 是否关于 $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ 可积. 不幸的是, 答案是否定的. 例如取 $f = \chi_E$, 其中

$$E = \mathcal{N} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$\mathcal{N} \subset [0,1]$ 为我们在 6.1 节构造的一个不可测集. 注意到 $E \subset [0,1] \times \{0\}$, 而 $[0,1] \times \{0\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的零测集, 从而 $E \subset \mathbb{R}^2$ 也为零测集. 特别的 $f = \chi_E$ 可积. 但注意到 $E^0 = \mathcal{N}$ 不可测, 从而函数 $f^0 = \chi_{E^0} = \chi_{\mathcal{N}}$ 不可测. 特别的, f^0 不可积. 但幸运的是, 考虑一个可测函数的 Lebesgue 积分时, 我们只需要知道这个函数在几乎处处点的取值. 事实上, 在 f 可积的假设下, 我们可以证明 f^y 对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 可积. 并且在此基础上我们还可以证明函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in \mathbb{R}^{d_1}$ 可积. 这便是 Fubini 定理所能告诉我们的信息.

定理 16.3 (Fubini)**.** *设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则*

(F1) 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, $f^y \in L^1(\mathbb{R}^{d_1})$.

(F2) 函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 可积.

(F3) $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right)\,dy$.

对切片函数 f_x 我们也有类似的结论[23].

Fubini 定理的一个伴随定理是 Tonelli 定理.

定理 16.4 (Tonelli)**.** *设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数, 则*

(T1) 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, f^y 可测.

(T2) 函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 可测.

(T3) $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right)\,dy$, 其中等式左右两端允许为 $+\infty$.

注记 16.5. *(i) 在一些应用场景中给定某可测函数 f, 我们想要计算积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f$. 我们可以先对函数 $|f|$ 应用 Tonelli 定理来计算积分 $\int_{\mathbb{R}^d} |f|$. 若计算说明 $\int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty$, 则 f 可积. 此时可再对 f 应用 Fubini 定理来计算积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f$.*

(ii) Tonelli 定理可由 Fubini 定理推出. 若 f 可积, 则显然 Fubini 定理蕴含 Tonelli 定理. 若 $\int_{\mathbb{R}^d} f = \infty$, 则可对 f 作截断以得到一列单调递增函数 $\{f_k\}$ 满足 $f_k \nearrow f$ 且 f_k 可积. 从而对 f_k 应用 Fubini 定理并对函数列 $\{f_k\}$ 应用单调收敛定理可推出 Tonelli 定理. 细节留作作业.

Fubini 定理证明. 令

$$\mathcal{F} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : f \text{ 满足性质 (F1), (F2), (F3)}\}.$$

为证 Fubini 定理等价于证明 $\mathcal{F} = L^1(\mathbb{R}^d)$.

第一步: 我们证明 $\mathcal{F}$ 在数乘, 加减法以及单调极限下封闭.

引理 16.6. *若 $f, g \in \mathcal{F}$, 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$.*

证明. 任取 $f, g \in \mathcal{F}$. 则 f, g 满足条件 (F1), (F2), (F3), 即

(i) 存在零测集 $A_f, A_g \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 使得对任意对任意 $y \notin A_f$, $f^y \in L^1(\mathbb{R}^{d_1})$, 对任意 $y \notin A_g$, $g^y \in L^1(\mathbb{R}^{d_1})$.

[23] 即 (i) 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, $f_x \in L^1(\mathbb{R}^{d_2})$; (ii) 函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x(y)\,\mathrm{d}y$ 可积; (iii) $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$.

(ii) 函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g^y(x)\,\mathrm{d}x$ 均可积.

(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$ 以及 $\int_{\mathbb{R}^d} g = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$.

注意到对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha f + \beta g)^y = \alpha f^y + \beta g^y, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{29}$$

令 $A = A_f \cup A_g$, 从而 A 为零测集且对任意 $y \notin A$, $f^y, g^y \in L^1(\mathbb{R}^{d_1})$. 特别的, 对任意 $y \notin A$, $(\alpha f+\beta g)^y = \alpha f^y + \beta g^y \in L^1(\mathbb{R}^{d_1})$. 因为 A 为零测集, 从而 $\alpha f+\beta g$ 满足条件 (F1). 进一步的, 由 (29) 以及 (ii) 易见函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\alpha f+\beta g)^y(x)\,\mathrm{d}x$ 可积, 从而 $\alpha f+\beta g$ 满足条件 (F2). 最后, 应用 (iii), (29) 以及 Lebesgue 积分的线性性可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f + \beta g) &= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} f + \beta \int_{\mathbb{R}^d} g \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \beta \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\alpha f+\beta g)^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

从而 $\alpha f+\beta g$ 满足条件 (F3). 因而 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$. □

引理 16.7. *设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 若 $f_k \nearrow f$ 或 $f_k \searrow f$, 则 $f \in \mathcal{F}$.*

证明. 将 f_k, f 分别替换成 $-f_k, -f$, 我们不妨设 $f_k \nearrow f$. 进一步的, 将 f_k, f 分别替换成 $f_k - f_1, f - f_1$ 我们不妨设 $f_k \geq 0$. 因为 $f_k \nearrow f$, 对任意 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 我们有 $f_k^y \nearrow f^y$. 并且 $f_k^y \geq 0$, 由单调收敛定理我们有

$$g_k(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,\mathrm{d}x \nearrow g(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

再对 $\{g_k\}$ 应用单调收敛定理我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,\mathrm{d}y \nearrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

因为 $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$, 我们有 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f_k$. 从而

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k \nearrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

另一方面, 因为 $f_k \nearrow f$ 且 $f_k \geq 0$, 对 $\{f_k\}$ 应用单调收敛定理我们有 $\int_{\mathbb{R}^d} f_k \nearrow \int_{\mathbb{R}^d} f$. 与上式比较即得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

从而 f 满足条件 (F3). 进一步的, 因为 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 上式说明函数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x$ 可积, 即 f 满足 (F2). 并且因为 $f \geq 0$, 再结合上式我们有 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, a.e. $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 即 f 满足 (F1). 从而 $f \in \mathcal{F}$. □

第二步: 我们证明有限测度集合的示性函数落在 $\mathcal{F}$ 中.

命题 16.8. *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测且 $m(E) < \infty$. 则 $f = \chi_E \in \mathcal{F}$.*

在证明命题 16.8 之前我们注意到当 $f = \chi_E$ 为示性函数时, 条件 (F3) 蕴含 (F2), 从而只需证明 f 满足 (F1) 与 (F3). 并且注意到此时条件 (F1) 和 (F3) 分别等价于

(F1') 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, $m^{d_1}(E^y) < \infty$.

(F3') $m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m^{d_1}(E^y)\,\mathrm{d}y$.

下面证明中我们只验证 E 满足条件 (F1') 和 (F3').

命题 16.8 证明. **情形 1**: E 为 (开或闭) 方体.

此时 $E = Q_1 \times Q_2$, 其中 Q_1, Q_2 分别为 $\mathbb{R}^{d_1}$ 及 $\mathbb{R}^{d_2}$ 中方体. 注意到

$$E^y = \begin{cases} Q_1 & y \in Q_2, \\ \emptyset & y \notin Q_2. \end{cases}$$

特别的,

$$m^{d_1}(E^y) = \begin{cases} |Q_1| & y \in Q_2, \\ 0 & y \notin Q_2. \end{cases}$$

从而 E 满足条件 (F1'). 进一步的,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} m^{d_1}(E^y)\,\mathrm{d}y = \int_{Q_2} m^{d_1}(E^y)\,\mathrm{d}y = \int_{Q_2} |Q_1|\,\mathrm{d}y = |Q_1| \times |Q_2| = m(E).$$

从而 E 也满足 (F3'). 此情形得证.

情形 2: $E \subset G$ 其中 $m(G) = 0$ 且 $\chi_G \in \mathcal{F}$. 特别的, 可选取 $G = \partial Q$ 为方体 Q 的边界.

因为 $E \subset G$, 对任意 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 我们有 $E^y \subset G^y$. 并且因为 G 为零测集, E 也为零测集. 另一方面, 因为 $\chi_G \in \mathcal{F}$, 我们有

$$0 = m(G) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m^{d_1}(G^y)\,\mathrm{d}y.$$

从而 $m^{d_1}(G^y)=0$, a.e. $y\in\mathbb{R}^{d_2}$. 因此 $m^{d_1}(E^y)=0$, a.e. $y\in\mathbb{R}^{d_2}$, 即知 E 满足条件 (F1'). 并且由此我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} m^{d_1}(E^y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{d_2}} 0\,\mathrm{d}y=0=m(E).$$

从而 E 也满足条件 (F3').

下面证 "特别的" 部分, 注意到对方体 Q, 显然 $m(\partial Q)=0$, 并且 $\partial Q=\overline{Q}\setminus Q^\circ$, 其中 $\overline{Q}$ 为 Q 的闭包, 即 Q 所对应的闭方体; Q° 为 Q 的内部, 即 Q 所对应的开方体. 从而 $\chi_{\partial Q}=\chi_{\overline{Q}}-\chi_{Q^\circ}$. 由情形 1 我们知道 $\chi_{\overline{Q}},\chi_{Q^\circ}\in\mathcal{F}$. 再结合引理 16.6 我们有 $\chi_{\partial Q}=\chi_{\overline{Q}}-\chi_{Q^\circ}\in\mathcal{F}$.

情形 3: $E=\bigcup_{j=1}^N Q_j$ 为有限个闭方体的几乎不交并.

此时我们有 $E=\bigsqcup_{j=1}^N Q_j^\circ\bigsqcup F$, 其中 $F=\bigcup_{j=1}^N\partial Q_j$. 令

$$F_1=\partial Q_1,\quad F_j=\partial Q_j\setminus(F_1\cup\cdots\cup F_{j-1}),\quad 2\le j\le N.$$

则 $F=\bigsqcup_{j=1}^N F_j$ 且 $F_j\subset\partial Q_j$. 从而我们有

$$\chi_E=\sum_{j=1}^N\chi_{Q_j^\circ}+\sum_{j=1}^N\chi_{F_j}.$$

对任意 $1\le j\le N$, 由情形 1 我们知道 $\chi_{Q_j^\circ}\in\mathcal{F}$; 由情形 2 我们知道 $\chi_{F_j}\in\mathcal{F}$ (因为 $F_j\subset\partial Q_j$). 因此再由引理 16.6 可知 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

情形 4: E 为有限测度开集.

由开集结构定理 (定理 2.20) 我们可以将 E 写成一列闭方体的几乎不交并: $E=\bigcup_{j=1}^\infty Q_j$. 对任意 $N\ge 1$, 令 $E_N=\bigcup_{j=1}^N Q_j$. 则由情形 3 我们可知 $\chi_{E_N}\in\mathcal{F}$. 另一方面, 注意到 $E_N\nearrow E$, 从而 $\chi_{E_N}\nearrow\chi_E$. 再由引理 16.7 可知 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

□

未完待续...

□

17 第十七讲

4 月 24 日

17.1 Fubini 定理: 继续

今天我们完成 Fubini 定理的证明.

命题 16.8 证明. **情形 5**: E 为有限测度 G_δ 集.

由定义 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{O}}_k$, 其中 $\tilde{\mathcal{O}}_k \subset \mathbb{R}^d$ 为开集. 因为 $m(E) < \infty$, 存在开集 $\mathcal{O}_0 \subset \mathbb{R}^d$ 使得 $E \subset \mathcal{O}_0$ 且 $m(\mathcal{O}_0) < \infty$. 因为 $E \subset \mathcal{O}_0$, 我们有 $E = \mathcal{O}_0 \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{O}}_k$. 从而对任意 $k \geq 1$, 若令 $\mathcal{O}_k := \mathcal{O}_0 \cap \tilde{\mathcal{O}}_k$, 则 $m(\mathcal{O}_k) < \infty$ 且 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$. 对任意 $N \geq 1$, 令 $E_N = \bigcap_{k=1}^{N} \mathcal{O}_k$. 注意到 E_N 均为有限测度开集, 从而由情形 4 可知 $\chi_{E_N} \in \mathcal{F}$. 另一方面, $E_N \searrow E$, 从而 $\chi_{E_N} \searrow \chi_E$. 从而再由引理 16.7 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 6: E 为零测集.

回忆对任意可测集 E, 存在 G_δ 集满足 $E \subset G$ 且 $m(E) = m(G)$. 从而当 E 为零测集时, 该 G_δ 集 G 也为零测集. 由情形 5 可知 $\chi_G \in \mathcal{F}$. 再由情形 2 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 7: E 为一般有限测度集合.

令 $G \supset E$ 为上述 G_δ 集, 令 $Z = G \setminus E$. 则 $m(G) = m(E) < \infty$ 且 $m(Z) = m(G) - m(E) = 0$. 则由情形 5 可知 $\chi_G \in \mathcal{F}$; 由情形 6 可知 $\chi_Z \in \mathcal{F}$. 从而由引理 16.6, $\chi_E = \chi_G - \chi_Z \in \mathcal{F}$. □

由命题 16.8 我们有如下直接推论.

推论 17.1. *{可积简单函数} $\subset \mathcal{F}$.*

证明. 设 φ 为可积简单函数, 则可将 φ 写成 $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$, 其中 $a_j \in \mathbb{R}$, $E_j \subset \mathbb{R}^d$ 可测且 $m(E_j) < \infty$. 由命题 16.8, $\chi_{E_j} \in \mathcal{F}$. 再由引理 16.6 可知 $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j} \in \mathcal{F}$. □

Fubini 定理证明. **第三步**: $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$.

任取 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 将 f 写作 $f = f^+ - f^-$. 由简单函数逼近定理可知存在非负简单函数列 $\{\varphi_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k^1 \nearrow f^+$, $\varphi_k^2 \nearrow f^-$. 因为 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 我们有 $f^{\pm} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 另一方面对任意 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varphi_k^1 \leq f^+$, $0 \leq \varphi_k^2 \leq f^-$, 从而

φ_k^1, φ_k^1 均可积. 从而由推论 17.1 可知 $\varphi_k^1, \varphi_k^2 \in \mathcal{F}$. 再由引理 16.7 以及 $\varphi_k^1 \nearrow f^+$, $\varphi_k^2 \nearrow f^-$ 可知 $f^\pm \in \mathcal{F}$. 最后再由引理 16.6 可知 $f = f^+ - f^- \in \mathcal{F}$. □

17.2 Fubini 定理应用: 乘积集合的可测性

下面我们来讨论 Fubini 定理的一些应用. 首先对示性函数应用 Tonelli 定理我们有如下直接的推论.

推论 17.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 则

(i) 对 *a.e.* $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, E^y 可测.

(i') 对 *a.e.* $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, E_x 可测.

(ii) 函数 $y \mapsto m^{d_1}(E^y)$ 可测.

(ii') 函数 $x \mapsto m^{d_2}(E_x)$ 可测.

(iii) $m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m^{d_1}(E^y)\, dy$.

(iii') $m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} m^{d_2}(E_x)\, dx$.

下面我们讨论乘积集合的可测性问题. 首先我们给出乘积集合的定义.

定义 17.3. 设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. 集合 $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^d$ 称为 E_1 与 E_2 的**乘积集合**.

若 $E = E_1 \times E_2$ 为乘积集合, 注意到对任意 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$,

$$E^y = \begin{cases} E_1 & y \in E_2, \\ \emptyset & y \notin E_2. \end{cases}$$

类似的, 对任意 $x \in \mathbb{R}^{d_1}$,

$$E_x = \begin{cases} E_2 & x \in E_1, \\ \emptyset & x \notin E_1. \end{cases}$$

推论 17.2 (i) 说明若 E 可测, 则对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, E^y 可测. 从而若 E_2 为正测集, 则存在 $y \in E_2$ 使得 $E_1 = E^y$ 可测. 下面的命题说明事实上我们只需假设 E_2 具有正外测度便可有同样的结论.

命题 17.4. 设 $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 可测, 且 $m_*^{d_2}(E_2) > 0$, 则 E_1 可测.

证明. 由推论 17.2 (i) 可知存在零测集 $F \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 使得对任意 $y \notin F$, E^y 可测. 另一方面, 对任意 $y \in E_2$, $E^y = E_1$. 只需证明 $E_2 \cap F^c$ 非空. 这是因为若 $E_2 \cap F^c$ 非空, 则可取 $y \in E_2 \cap F^c$, 从而 $E_1 = E^y$ 可测.

下证 $E_2 \cap F^c$ 非空. 注意到 $E_2 = (E_2 \cap F) \sqcup (E_2 \cap F^c)$. 由外测度的单调性及次可数可加性并且注意到 $E_2 \cap F \subset F$ 为零测集我们有

$$m_*^{d_2}(E_2 \cap F^c) = m_*^{d_2}(E_2 \cap F) + m_*^{d_2}(E_2 \cap F^c) \geq m_*^{d_2}(E_2) > 0.$$

从而 $E_2\cap F^c$ 非空. 命题得证. □

下面我们讨论 E 可测 (关于 E_1, E_2 的) 充分条件. 首先我们有如下的关于 E 的外测度估计.

引理 17.5. 设 $E=E_1\times E_2\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, 则

$$m_*(E)\le m_*^{d_1}(E_1)\times m_*^{d_2}(E_2), \tag{30}$$

其中右端乘积遵循 $0\cdot(+\infty)=0$ 的规定.

证明. 首先我们假设 $m_*^{d_1}(E_1), m_*^{d_2}(E_2)$ 均有限. 此时由外测度定义可知对任意 $\epsilon>0$, 存在 E_1, E_2 的方体覆盖 $E_1\subset\bigcup_{j=1}^\infty Q_j$, $E_2\subset\bigcup_{\ell=1}^\infty Q'_\ell$ 使得

$$\sum_{j=1}^\infty |Q_j|<m_*^{d_1}(E_1)+\epsilon \quad 且 \quad \sum_{\ell=1}^\infty |Q'_\ell|<m_*^{d_2}(E_2)+\epsilon.$$

从而 $E=E_1\times E_2\subset\bigcup_{j,\ell=1}^\infty(Q_j\times Q'_\ell)$ 并且

$$m_*(E)\le\sum_{j,\ell=1}^\infty m_*(Q_j\times Q'_\ell).$$

因为 $Q_j\subset\mathbb{R}^{d_1}$, $Q'_\ell\subset\mathbb{R}^{d_2}$ 分别为 $\mathbb{R}^{d_1}$ 与 $\mathbb{R}^{d_2}$ 中的方体, $Q_j\times Q'_\ell$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的矩体. 从而 $m_*(Q_j\times Q'_\ell)=|Q_j\times Q'_\ell|=|Q_j||Q'_\ell|$. 因此

$$\begin{aligned} m_*(E)&\le\sum_{j,\ell=1}^\infty |Q_j||Q'_\ell|=\left(\sum_{j=1}^\infty |Q_j|\right)\left(\sum_{\ell=1}^\infty |Q'_\ell|\right)\\ &<(m_*^{d_1}(E_1)+\epsilon)(m_*^{d_2}(E_2)+\epsilon).\end{aligned}$$

上述不等式左端与 ϵ 无关, 并且因为 $m_*^{d_1}(E_1), m_*^{d_2}(E_2)$ 均有限, 令 $\epsilon\to0^+$ 即得 $m_*(E)\le m_*^{d_1}(E_1)m_*^{d_2}(E_2)$.

下面假设 $m_*^{d_1}(E_1)=\infty$ 或 $m_*^{d_2}(E_2)=\infty$. 不妨设 $m_*^{d_2}(E_2)=\infty$. 若 $m_*^{d_1}(E_1)>0$, 则 $m_*^{d_1}(E_1)m_*^{d_2}(E_2)=\infty$, 从而不等式 (30) 平凡成立. 因此不妨设 $m_*^{d_1}(E_1)=0$. 此时需证 $m_*(E)=0$. 对任意 $k\ge1$, 令 $E_2^k:=\{y\in E_2:|y|<k\}$. 从而 $m_*^{d_2}(E_2^k)<\infty$ 且 $E_2^k\nearrow E_2$. 由前证有限外测度情形可知

$$m_*(E_1\times E_2^k)\le m_*^{d_1}(E_1)m_*^{d_2}(E_2^k)=0.$$

因为 $E_2^k\nearrow E_2$, 我们有 $E_1\times E_2^k\nearrow E=E_1\times E_2$. 注意到 $E_1\times E_2^k$ 零测, 特别的其可测. 从而 E 也可测. 再由单调集列的测度连续性我们有

$$m_*(E)=\lim_{k\to\infty}m_*(E_1\times E_2^k)=\lim_{k\to\infty}0=0.$$

命题得证. □

下面我们证明若 E_1, E_2 均可测, 则其乘积集合也可测.

命题 17.6. *设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 与 $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 均可测. 则 $E = E_1 \times E_2$ 可测, 并且 $m(E) = m^{d_1}(E_1)m^{d_2}(E_2)$.*

证明. 若 E 可测, 则等式 $m(E) = m^{d_1}(E_1)m^{d_2}(E_2)$ 可由推论 17.2 直接推出. 从而只需证 E 可测. 因为 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ 可测, 存在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中 G_δ 集 G_1 以及零测集 Z_1 使得 $E_1 = G_1 \setminus Z_1$. 类似的, 因为 $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 可测, 存在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 中 G_δ 集 G_2 以及零测集 Z_2 使得 $E_2 = G_2 \setminus Z_2$. 令 $G := G_1 \times G_2$, $Z := G \setminus E$. 注意到 $E \subset G$ 且 $E = G \setminus Z$. 我们断言 G, Z 分别为 $\mathbb{R}^d$ 中的 G_δ 集和零测集. 从而 $E = G \setminus Z$ 可测.

因为 G_1, G_2 分别为 $\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}$ 中的 G_δ 集, 存在开集列 $\{\mathcal{O}_k\} \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $\{\mathcal{O}'_\ell\} \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 使得 $G_1 = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{O}_k$ 以及 $G_2 = \bigcap_{\ell=1}^\infty \mathcal{O}'_\ell$. 从而

$$G = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{O}_k \times \bigcap_{\ell=1}^\infty \mathcal{O}'_\ell = \bigcap_{k,\ell=1}^\infty \mathcal{O}_k \times \mathcal{O}'_\ell.$$

注意到 $\mathcal{O}_k \times \mathcal{O}'_\ell$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中开集, 从而 G 为 $\mathbb{R}^d$ 中 G_δ 集. 另一方面, 注意到

$$Z = (G_1 \times G_2) \setminus (E_1 \times E_2) \subset Z_1 \times G_2 \cup G_1 \times Z_2. \tag{31}$$

这是因为若 $(x,y) \in Z = (G_1 \times G_2) \setminus (E_1 \times E_2)$, 则 $(x,y) \in G_1 \times G_2$ 且 $(x,y) \notin E_1 \times E_2$. 从而 $x \notin E_1$ 或 $y \notin E_2$. 若 $x \notin E_1$, 则 $(x,y) \in (G_1 \setminus E_1) \times G_2 = Z_1 \times G_2$; 若 $y \notin E_2$, 则 $(x,y) \in G_1 \times (G_2 \setminus E_2) = G_1 \times Z_2$. 即证 (31). 从而我们有

$$\begin{aligned} m_*(Z) &\le m_*(Z_1 \times G_2) + m_*(G_1 \times Z_2) \\ &\le m_*^{d_1}(Z_1)m_*^{d_2}(G_2) + m_*^{d_1}(G_1)m_*^{d_2}(Z_2) = 0. \end{aligned}$$

即 F 为零测集. 从而断言得证. □

总结一下, 关于乘积集合可测性问题我们有如下结论.

推论 17.7. *设 $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. 则*

(i) 若 E_1 或 E_2 为零测集, 则 E 也为 $\mathbb{R}^d$ 中零测集. 特别的, E 可测.

(ii) 若 $m_*^{d_1}(E_1)m_*^{d_2}(E_2) > 0$, 则 E 可测当且仅当 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 均可测.

证明. (i) 是引理 17.5 的直接推论. 对 (ii), "$\Leftarrow$" 方向是命题 17.6; "$\Rightarrow$" 方向可由命题 17.4 直接推出. □

下面我们讨论 Lebesgue 积分的几何意义.

命题 17.8. *设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上非负函数. 令*

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

则

(i) f 可测当且仅当 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 可测.

(ii) 若 f 可测, 则

$$m^{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

为证明命题 17.8 我们需要如下的一个简单引理.

引理 17.9. *设 f 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可测, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$. 则函数 $\tilde{f}(x, y) := f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测.*

证明. 由定义需证对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\{\tilde{f} < a\} \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 注意到对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \tilde{f}(x, y) < a\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : f(x) < a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\} \times \mathbb{R}^{d_2}.\end{aligned}$$

由于 f 可测, $\{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\}$ 可测. 再由命题 17.6 可知 $\{\tilde{f} < a\} = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 可测. □

命题 17.8 证明. 先证 (i). 首先假设 f 可测. 令

$$F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) := y - f(x).$$

由引理 17.9 可知 $\tilde{f}_1(x, y) := y$, $\tilde{f}_2(x, y) := f(x)$ 均可测, 从而 $F = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ 也可测. 注意到

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y \geq 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : F \leq 0\}.$$

因为 F 可测, 从而 $\mathcal{A}$ 可测. 另一方面, 设 $\mathcal{A}$ 可测. 注意到对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}_x = [0, f(x)]$. 由推论 17.2 (ii'), 函数 $x \mapsto m^1(\mathcal{A}_x) = f(x)$ 可测, 即 f 可测.

对命题 (ii), 设 f 可测, 从而由 (i), $\mathcal{A}$ 可测. 对 $\mathcal{A}$ 应用推论 17.2 (iii') 即得

$$m^{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^d} m^1(\mathcal{A}_x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

□

最后我们提到下面这个有用的事实 (例如在讨论函数卷积时会用到).

引理 17.10. 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数. 则函数

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x,y) = f(x-y)$$

可测.

证明. 作业. □

18 第十八讲

4 月 29 日

18.1 微分与积分

今天我们开始研究与 Lebesgue 积分理论相对应的微分理论. 首先我们回忆 Riemann 积分理论下的微积分基本定理:

(1) 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续. 则函数 $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 上可微且对任意 $x \in (a,b)$, $F'(x) = f(x)$.

(2) **Newton-Leibniz** 公式: 设 F 在 (a,b) 上可微且 F' Riemann 可积, 则对任意 $x \in [a,b]$, $\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

我们的目标是将微积分基本定理推广至 Lebesgue 积分理论的框架下. 自然的, 我们关心如下两个问题:

Q1 : 若仅假设 $f \in L^1([a,b])$, (1) 中结论是否依然成立? (当然此时函数 F 的定义积分为 Lebesgue 积分.)

Q2 : 若 F 在 (a,b) 上几乎处处可微且 F' Lebesgue 可积, Newton-Leibniz 是否依然成立?

问题 (Q1) 的答案是否定的. 例如取 $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$. 则 $f = 0$, a.e. $x \in [a,b]$. 从而对任意 $x \in (a,b)$, $F(x) = \int_a^x 0\,\mathrm{d}t = 0$, 即得 $F' = 0$. 但是若 $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$, 则 $f(x) = 1 \neq F'(x)$. 但注意到此时我们依然有 $F'(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$. 事实上, 在几乎处处相等意义下, 问题 (Q1) 的答案是肯定的, 这便是我们接下来要讨论的 **Lebesgue 微分定理**.

问题 (Q2) 的答案也是否定的. 令 $\mathcal{C} \subset [0,1]$ 为 Cantor 三分集. 回忆 $[0,1] \setminus \mathcal{C} = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j$, 其中 $\{I_j\}$ 为在构造 Cantor 三分集过程中删去的所有居中子开区间. 令 $F : [0,1] \to [0,1]$ 为 Cantor-Lebesgue 函数 (参见作业..). 则 F 满足如下性质:

(i) $F(\mathcal{C}) = [0,1]$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ 且对任意 $x \in \mathcal{C} \cap (0,1)$, $0 < F(x) < 1$.

(ii) F 单调递增[24].

[24] F 单调递增是指对任意 $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$. 注意与严格单调递增 $(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) < F(x_2))$ 作区分.

(iii) 对任意 I_j, $F|_{I_j}$ 为常数. 特别的, 对任意 $x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$, $F'(x) = 0$.

因为 $\mathcal{C}$ 为零测集, $F'(x) = 0$, a.e. $x \in [0,1]$. 因此对任意 $x \in (0,1)$, $\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x 0\,\mathrm{d}t = 0 < F(x)$. 为保证 Newton-Leibniz 公式在 Lebesgue 积分框架下成立, 我们需要对函数 F 作额外的假设: 我们需假设 F **绝对连续**. 具体定义我们会在之后给出.

18.2 Lebesgue 微分定理

下面我们来讨论 Lebesgue 微分定理. 首先我们需要将导数的概念推广至一般维数欧氏空间上. 首先假设 $f \in L^1([a,b])$, $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 我们想要知道是否 F' 与 f 几乎处处相等. 回忆

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad \text{(若该极限存在)}.$$

上述极限中若我们取右极限, 即令 $h > 0$, 则

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \frac{\int_{I_h} f(t)\,\mathrm{d}t}{|I_h|},$$

其中 $I_h := (x, x+h)$. 从而

$$F'(x) = \lim_{|I_h|\to 0} \frac{\int_{I_h} f(t)\,\mathrm{d}t}{|I_h|}, \quad \text{(若该极限存在)}.$$

对一般维数欧氏空间 $\mathbb{R}^d$, 我们用开球替代上述极限中的开区间 I_h. 具体的, 给定 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 我们想要知道

$$\text{是否} \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,\mathrm{d}y = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^d \ ? \tag{32}$$

这里极限取遍所有体积趋向于 0 的包含 x 的开球 B. 关于此问题, 我们先作如下注记.

注记 18.1. *(i) 积分 $\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy$ 是函数 f 在开球 B 上的"平均值". 当 B 的半径越来越小 (并且一直包含点 x) 时, 我们期待这个平均值越来越接近 f 在 x 处的取值. 事实上, 若 f 在 x 处连续, 则 (32) 中等式在 x 处成立: f 在 x 处连续是指对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $y \in \mathbb{R}^d$, 若 $|x-y| < \delta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 令 $\delta' > 0$ 使得对任意开球 $B \subset \mathbb{R}^d$, 若 $m(B) < \delta'$, 则其直径 $diam(B) < \delta$. 特别的, 对任意包含 x 且满足体积小于 δ' 的开球 B, 我们有对任意 $y \in B$, $|x-y| < diam(B) < \delta$, 从而*

$|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-f(x))\,dy\right| \\ &\le \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy \\ &< \frac{1}{m(B)}\int_B \epsilon\,dy = \epsilon.\end{aligned}$$

由此即得

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| = 0,$$

即

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy = f(x).$$

(ii) 注意到“导数”是一个局部的概念, 它不依赖于函数在无穷远处的性状: 对任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 任意包含 x 的开球 B, 易见若我们将 f 替换成 $f\chi_B$, (32) 中的极限不变. 另一方面, 可积性是一个全局性的概念. 因此在讨论问题 (32) 时, 我们可以弱化可积性的假设.

依上述讨论, 我们引入如下局部可积的概念.

定义 18.2. 设函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测. 若对任意开球 $B\subset\mathbb{R}^d$, $f\chi_B\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则称 f 是**局部可积的**, 记为 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

下面我们陈述 Lebesgue 微分定理, 它给出了问题 (32) 的一个肯定性答案.

定理 18.3 (Lebesgue 微分定理, LDT)**.** 设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy = f(x),\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^d.$$

为证明 Lebesgue 微分定理, 我们需要引入如下的 Hardy-Littlewood 极大函数.

定义 18.4. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测. 函数

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^d:\quad f^*(x) := \sup_{B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy$$

称为 f 的 ***Hardy-Littlewood (H-L) 极大函数***. 这里上确界取遍所有包含 x 的开球.

首先我们证明 f^* 可测.

引理 18.5. 若 f 可测, 则 f^* 也可测.

证明. 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令 $E_\alpha := \{x : f^*(x) > \alpha\}$. 我们要证 E_α 可测. 事实上, 我们断言 E_α 为开集 (从而可测). 对任意 $x \in E_\alpha$, 由定义 $f^*(x) > \alpha$. 再由 H-L 极大函数定义可知存在包含 x 的开球 B_x 使得

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, \mathrm{d}y > \alpha.$$

下面我们证明 $B_x \subset E_\alpha$, 从而 E_α 为开集. 对任意 $x' \in B_x$, 要证 $x' \in E_\alpha$. 由定义需证 $f^*(x') > \alpha$. 注意到

$$f^*(x') = \sup_{B \ni x'} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \, \mathrm{d}y \geq \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, \mathrm{d}y > \alpha.$$

这里的第一个不等式成立是因为 $x' \in B_x$. 从而 $x' \in E_\alpha$. 命题得证. □

定理 18.6 (H-L 极大不等式)**.** 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则对任意 $\alpha > 0$,

$$m\left(\{f^* > \alpha\}\right) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1,$$

其中 $A = 3^d$.

我们将会利用 H-L 极大不等式证明 Lebesgue 微分定理. 下面我们证明 H-L 极大不等式. 在此之前我们先证明它的一个简单推论.

推论 18.7. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 则 $f^*(x) < \infty$, *a.e.* $x \in \mathbb{R}^d$.

证明. 因为 f^* 非负, 只需证 $\{f^* = \infty\}$ 为零测集. 注意到对任意 $\alpha > 0$, 我们有

$$\{f^* = \infty\} \subset \{f^* > \alpha\}.$$

从而由定理 18.6 可知对任意 $\alpha > 0$,

$$m(\{f^* = \infty\}) \leq m(\{f^* > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1.$$

令 $\alpha \to \infty$ 即得 $m(\{f^* = \infty\}) = 0$. 命题得证. □

为证明 H-L 极大不等式, 我们需要下面的关于开球的覆盖定理.

定理 18.8 (Vitali 覆盖引理)**.** 令 $N \in \mathbb{N}$. 设 $\mathcal{F} = \{B_1, \cdots, B_N\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 N 个开球. 则存在 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k} \in \mathcal{F}$ 使得 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}$ 两两不交且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \tag{33}$$

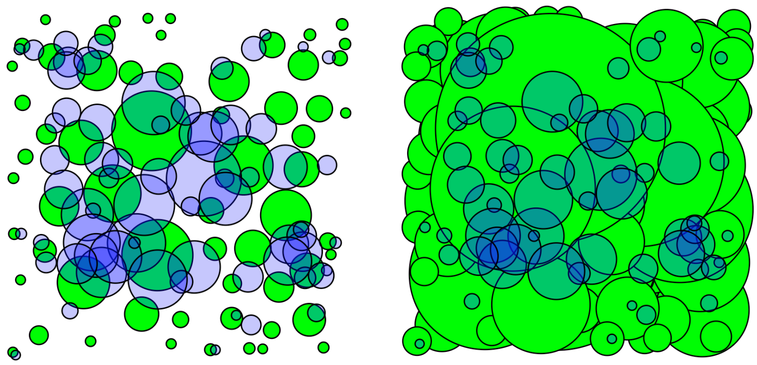

图 7: **左图**: 绿色球为图中开球族中选取出的不交子开球族; **右图**: 左图中绿色球的三倍半径同心球覆盖所有的开球. 图片来源: wikipedia

我们需要下面的这个简单观察.

引理 18.9. *设 $B = B_r(x)$, $B_{r'}(x')$ 且 $0 < r' \le r$. 若 $B \cap B' \ne \emptyset$, 则 $B' \subset B_{2r}(x)$. 这里 $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d$ 指代 $\mathbb{R}^d$ 中以 x 为球心, r 为半径对开球.*

证明. 对任意 $y \in B'$, 只需证 $y \in B_{3r}(x)$, 即 $d(x,y) < 3r$. 注意到

$$d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y) < r + r' + r' \le 3r.$$

命题得证. □

我们引入如下记号: 对任意 $\mathbb{R}^d$ 中开球 $B = B_r(x)$, 令 $\tilde{B} := B_{3r}(x)$ 为 B 的三倍半径同心球.

定理 18.8 证明. 因为 $\mathcal{F}$ 有限, 可取 $\mathcal{F}$ 中的一个最大开球 B_{i_1} (因为 $\mathcal{F}$ 有限, 这样的开球可取得), 并令

$$\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} : B \cap B_{i_1} = \emptyset\}.$$

注意到

- $B_{i_1} \notin \mathcal{F}_1$ (因为 $B_{i_1} \cap B_{i_1} = B_{i_1} \ne \emptyset$). 从而 $\#\mathcal{F}_1 < \#\mathcal{F}$.
- 对任意 $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1$ (即 $B \cap B_{i_1} \ne \emptyset$), 因为 B 的半径不大于 B_{i_1} 的半径且 B 与 B_{i_1} 相交, 由引理 18.9 可知 $B \subset \tilde{B}_{i_1}$.

若 $\mathcal{F}_1 = \emptyset$, 则停止操作, 否则从 $\mathcal{F}_1$ 中选取出一个最大的开球 B_{i_2}, 并令

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F}_1 : B \cap B_{i_2} = \emptyset\}.$$

同样的, 注意到 B_{i_2}, $\mathcal{F}_2$ 满足:

- $B_{i_2} \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$, 从而 $\#\mathcal{F}_2 < \#\mathcal{F}_1$.
- 对任意 $B \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$, $B \subset \tilde{B}_{i_2}$.

重复此操作 (并且因为每一步得到的开球族内开球的个数严格变小, 有限步之后该操作会停止) 得到一列开球 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k} \in \mathcal{F}$ 以及开球族

$$\mathcal{F}_j := \left\{B \in \mathcal{F}_{j-1} : B \cap B_{i_j} = \emptyset\right\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

满足

- $\mathcal{F} =: \mathcal{F}_0 \supsetneq \mathcal{F}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{F}_k = \emptyset$.
- 对任意 $1 \leq j \leq k$, $B_{i_j} \in \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_j$ 并且对任意 $B \in \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_{j-1}$, $B \subset \tilde{B}_{i_j}$.

我们下面证明 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}$ 满足所需要的条件. 首先我们证明它们两两不交. 任取 $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$, 要证 $B_{i_{j_1}} \cap B_{i_{j_2}} = \emptyset$. 注意到因为 $j_2 > j_1$, $j_2 - 1 \geq j_1$. 从而

$$B_{i_{j_2}} \in \mathcal{F}_{j_2-1} \subset \mathcal{F}_{j_1} = \{B \in \mathcal{F}_{j_1-1} : B \cap B_{i_{j_1}} = \emptyset\}.$$

即得 $B_{i_{j_2}} \cap B_{i_{j_1}} = \emptyset$. 下面我们证明 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}$ 满足 (33). 注意到

$$\mathcal{F} = \bigsqcup_{j=1}^{k} \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_j.$$

相应的,

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_j} B \subset \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}.$$

这里第二个包含关系成立是因为对任意 $B \in \mathcal{F}_{j-1} \setminus \mathcal{F}_j$ 有 $B \subset \tilde{B}_{i_j}$. 从而

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} m\left(\tilde{B}_{i_j}\right) = 3^d \sum_{j=1}^{k} m\left(B_{i_j}\right).$$

命题得证. □

19 第十九讲

5 月 6 日

我们接下来证明 H-L 极大不等式, 继而证明 Lebesgue 微分定理. 在开始证明之前, 我们先证明 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 空间的一些简单性质.

引理 19.1. *(i) $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.*

(ii) 若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, 则 $|f(x)|<\infty$, a.e. $x\in\mathbb{R}^d$.

证明. 先证 (i). 对任意 $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 要证 $\alpha f+\beta g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 由定义要证对任意开球 $B\subset\mathbb{R}^d$, $(\alpha f+\beta g)\chi_B\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 因为 $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 从而 $f\chi_B, g\chi_B\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 又因为 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 即得

$$(\alpha f+\beta g)\chi_B=\alpha f\chi_B+\beta g\chi_B\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

对 (ii), 我们首先证明一个满测集[25]的简单但有用的等价刻画:

$$E\subset\mathbb{R}^d \text{ 满测} \quad\Leftrightarrow\quad \text{对任意开球 } B\subset\mathbb{R}^d,\ E\cap B\subset B \text{ 是 } B \text{ 中满测集.} \tag{34}$$

我们先证明 “$\Rightarrow$” 方向. 任取开球 $B\subset\mathbb{R}^d$, 注意到 $B=(E\cap B)\sqcup(E^c\cap B)$. 因此只需证 $E^c\cap B$ 是零测集, 而这是显然的: 因为 E 满测, E^c 为零测集. 从而 $E^c\cap B\subset E^c$ 也为零测集. 再证 “$\Leftarrow$“方向. 用反证法, 假设 E 不是满测集, 即 $m(E^c)>0$. 对任意 $k\geq 1$, 令 $B_k=\{x:|x|<k\}$. 则 $E^c\cap B_k\nearrow E^c$. 从而由单调集列的测度连续性可知 $\lim_{k\to\infty}m(E^c\cap B_k)=m(E^c)>0$. 从而存在 N 充分大使得 $m(E^c\cap B_N)>0$, 这与 $E\cap B_N\subset E$ 在 E 中满测矛盾.

下面我们证 (ii). 给定 $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 令 $E=\{|f|<\infty\}$, 要证 E 为满测集. 由 (34) 只需证对任意开球 $B\subset\mathbb{R}^d$, $E\cap B\subset B$ 为 B 中的满测集. 任取开球 $B\subset\mathbb{R}^d$, 由定义 $f\chi_B\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 从而 $|f(x)\chi_B(x)|<\infty$, a.e. $x\in\mathbb{R}^d$. 特别的, $|f(x)\chi_B(x)|<\infty$, a.e. $x\in B$. 但注意到当 $x\in B$ 时, $f(x)\chi_B(x)=f(x)$, 从而我们有 $|f(x)|<\infty$, $x\in B$, 即 $E\cap B\subset B$ 为 B 中满测集. 命题得证. $\square$

定理 18.6 证明. 对任意 $\alpha>0$, 令 $E_\alpha=\{f^*>\alpha\}$. 对任意 $x\in E_\alpha$, 由 f^* 定义存在开球 B_x 包含 x 满足

$$\frac{1}{m(B_x)}\int_{B_x}|f(y)|\,\mathrm{d}y>\alpha \quad\Leftrightarrow\quad m(B_x)<\frac{1}{\alpha}\int_{B_x}|f(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{35}$$

[25]集合 $A\subset E$ 为 E 中的满测集是指 $E\setminus A$ 为零测集. 当 $E=\mathbb{R}^d$ 时, 我们简称 A 为满测集.

对任意 E_α 的紧子集 K, 我们有 $K\subset E_\alpha\subset\bigcup_{x\in E_\alpha}B_x$. 从而由有限覆盖定理存在有限个开球 $B_1,\cdots,B_N\in\{B_x:x\in E_\alpha\}$ 使得 $K\subset\bigcup_{i=1}^N B_i$. 由 Vitali 覆盖引理存在 $1\le i_1<\cdots<i_k\le N$ 使得 $B_{i_1},\cdots,B_{i_k}$ 两两不交且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\le 3^d\sum_{j=1}^k m(B_{i_j}).$$

这里第三个不等式我们用到 (35) (注意到 $B_{i_j}\in\{B_x:x\in E_\alpha\}$). 从而

$$\begin{aligned}m(K)&\le m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\le 3^d\sum_{j=1}^k m(B_{i_j})\\&<3^d\sum_{j=1}^k\frac{1}{\alpha}\int_{B_{i_j}}|f(y)|\,\mathrm{d}y=\frac{3^d}{\alpha}\int_{\bigsqcup_{j=1}^k B_{i_j}}|f(y)|\,\mathrm{d}y\\&\le\frac{3^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\,\mathrm{d}y=\frac{3^d}{\alpha}\|f\|_1.\end{aligned}$$

注意到 (自己验证)

$$m(E_\alpha)=\sup\{m(K):K\subset E_\alpha\text{ 为紧集}\}.$$

从而由 K 任意性我们有

$$m(E_\alpha)\le\frac{3^d}{\alpha}\|f\|_1.$$

命题得证. □

下面我们利用 H-L 极大不等式证明 Lebesgue 微分定理.

定理 *18.3* **证明.** 首先我们假设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 不妨设 f 处处有限. 注意到对任意 $x\in\mathbb{R}^d$,

$$\lim_{\substack{m(B)\to0\\B\ni x}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y=f(x)\quad\Leftrightarrow\quad\limsup_{\substack{m(B)\to0\\B\ni x}}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|=0.$$

从而只需证

$$E:=\left\{x:\limsup_{\substack{m(B)\to0\\B\ni x}}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|>0\right\}$$

为零测集. 对任意 $\alpha>0$, 令

$$E_\alpha:=\left\{x:\limsup_{\substack{m(B)\to0\\B\ni x}}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|>2\alpha\right\}.$$

注意到 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$, 因此只需证对任意 $\alpha>0$, $m(E_\alpha)=0$ (从而 $m(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}m(E_{\frac{1}{n}})=0$). 回忆 $C_c(\mathbb{R}^d)\overset{dense}{\subset}L^1(\mathbb{R}^d)$ (定理 15.4), 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $g\in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f-g\|_1<\epsilon$. 注意到因为 g 连续, 我们有

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,\mathrm{d}y=g(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}^d. \tag{36}$$

另一方面, 利用三角不等式我们有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|\\ &\le\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}y+\left|\frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,\mathrm{d}y-g(x)\right|+|g(x)-f(x)|.\end{aligned}$$

取上极限 $\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}$ 并应用 (36) 得

$$\begin{aligned}\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}&\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|\\ &\le\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}y+|g(x)-f(x)|\\ &\le(f-g)^*(x)+|f(x)-g(x)|.\end{aligned}$$

从而若 $x\in E_\alpha$, 则有

$$\begin{aligned}2\max((f-g)^*(x),|f(x)-g(x)|)&\ge(f-g)^*(x)+|f(x)-g(x)|\\ &\ge\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|>2\alpha,\end{aligned}$$

即 $(f-g)^*(x)>\alpha$ 或 $|f(x)-g(x)|>\alpha$. 从而

$$E_\alpha\subset\{(f-g)^*>\alpha\}\cup\{|f-g|>\alpha\}.$$

对 $f-g$ 应用 H-L 极大不等式 (定理 18.6) 得

$$m(\{(f-g)^*>\alpha\})\le\frac{3^d}{\alpha}\|f-g\|_1<\frac{3^d\epsilon}{\alpha}.$$

对函数 $|f-g|$ 应用 Tchebychev 不等式得

$$m(\{|f-g|>\alpha\})\le\frac{1}{\alpha}\|f-g\|_1<\frac{\epsilon}{\alpha}.$$

从而

$$m(E_\alpha)<\frac{(3^d+1)\epsilon}{\alpha}.$$

令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $m(E_\alpha)=0$. 可积情形得证.

对一般的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 要证集合

$$G := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \right\}$$

为满测集. 由 (34) 只需证对任意开球 $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^d$, $G\cap \tilde{B}$ 为 $\tilde{B}$ 中满测集. 对任意开球 $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^d$, 注意到 $\tilde{f} := f\chi_{\tilde{B}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由前证可积情形可知

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B \tilde{f}(y)\,\mathrm{d}y = \tilde{f}(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^d.$$

特别的,

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B \tilde{f}(y)\,\mathrm{d}y = \tilde{f}(x), \quad a.e.\ x \in \tilde{B}.$$

对任意 $x \in \tilde{B}$, $\tilde{f}(x)=f(x)$. 并且对任意包含 x 的开球 B, 当 $m(B)$ 足够小时能确保 $B \subset \tilde{B}$. 从而上式左端等于 $\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,\mathrm{d}y$. 因此我们有

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,\mathrm{d}y = f(x), \quad a.e.\ x \in \tilde{B}.$$

即 $G\cap\tilde{B}$ 为 $\tilde{B}$ 中满测集. □

下面我们讨论 Lebesgue 微分定理的一些推论. 给定函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 对 $|f|$ 应用 Lebesgue 微分定理我们有如下直接推论.

推论 19.2. *设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 则 $f^*(x) \geq |f(x)|$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.*

定义 19.3. *设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 若*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1,$$

*则称 $x \in \mathbb{R}^d$ 为 E 的**密度点**.*

大概而言, $x \in \mathbb{R}^d$ 为 E 的密度点是指 x 附近的充分小的小球几乎都落在 E 中. 我们有下面一些简单例子.

例 19.4. *(i) $E \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, 则任意 $x \in E$ 均是 E 的密度点 (因为任意 E 中的点都存在开球邻域使得其完全落在 E 中).*

(ii) $E=(a,b)$ 或 $[a,b]$. 则易见 $x \in \mathbb{R}$ 为 E 的密度点当且仅当 $x \in (a,b)$.

(iii) 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为零测集, 则任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 均不是 E 的密度点. (这是因为此时密度点定义中的极限均为 0.)

(iv) 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为满测集, 则任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 均为 E 的密度点.

上述后三个例子说明可测集 E 的密度点未必包含在 E 中. 然而在几乎处处意义下, 这个结论是成立的.

推论 19.5. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测. 则

(i) a.e. $x \in E$ 是 E 的密度点.

(ii) a.e. $x \in E^c$ 不是 E 的密度点.

证明. 对函数 $f = \chi_E$ 应用 Lebesgue 微分定理得

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B \chi_E(y)\,\mathrm{d}y = \chi_E(x), \ \ a.e.\ x \in \mathbb{R}^d.$$

特别的,

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1, \ \ a.e.\ x \in E,$$

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 0 \neq 1, \ \ a.e.\ x \in E^c.$$

命题得证. □

下面我们引入一个比 Lebesgue 微分定理中极限等式更强的条件.

定义 19.6. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 若 $|f(x)| < \infty$ 且

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy = 0,$$

则称 x 为 f 的一个 ***Lebesgue* 点**. 记 f 的所有 *Lebesgue* 点全体为 L_f, 称为 f 的 ***Lebesgue* 集**.

注记 19.7. 易见

(i) 若 f 在 x 处连续, 则 $x \in L_f$.

(ii) 若 $x \in L_f$, 则 $\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x)$.

推论 19.8. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, 则 $L_f \subset \mathbb{R}^d$ 为满测集.

证明. 对任意 $r \in \mathbb{Q}$, 对函数 $|f-r|$ 应用 Lebesgue 微分定理 (注意到 $|f-r| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$) 可知存在零测集 $E_r \subset \mathbb{R}^d$ 使得

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-r|\,\mathrm{d}y = |f(x)-r|, \quad \forall\ x \notin E_r. \tag{37}$$

令 $E := \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r \bigcup \{|f|=\infty\}$. 注意到 $\{|f|=\infty\}$ 为零测集 (引理 19.1), 从而 $E \subset \mathbb{R}^d$ 也为零测集. 对任意 $x \notin E$, 因为 $|f(x)| < \infty$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $|f(x)-r| < \epsilon$. 从而对任意包含 x 的开球 B 我们有

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \le \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-r|\,\mathrm{d}y + |f(x)-r|.$$

因为 $x \notin E_r$, 取上极限 $\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}}$ 并应用 (37) 我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y &\le \limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-r|\,\mathrm{d}y + |f(x)-r| \\ &= 2|f(x)-r| < 2\epsilon.\end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0^+$ 即得

$$\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = 0,$$

等价的,

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y, \quad \forall\, x \notin E.$$

因为 E 为零测集, 命题得证. □

20 第二十讲

5 月 7 日

20.1 相对于其他集合的平均

在前面的讨论中我们研究的是可测函数在某一点附近的开球的平均是否会随着这些开球越来越小而趋向于这个函数在这一点处的取值. 类似的, 我们可以将开球换成其它形状的集合并提出同样的问题. 为得到类似的结论, 我们需要对这些集合作一些正则性假设.

定义 20.1. *设 $x \in \mathbb{R}^d$. 我们称一族可测集 $\mathcal{F}_x$ 正则收缩于 x 若*

(i) *对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{F}_x$ 使得 $diam(U) < \epsilon$.*

(ii) *存在 $c > 0$ 使得对任意 $U \in \mathcal{F}_x$ 存在开球 B 满足 $x \in B$, $U \subset B$ 且 $m(U) \geq cm(B)$.*

我们有如下例子.

例 20.2. *给定 $x \in \mathbb{R}^d$.*

(i) *易见 $\{B \text{ 开球} : x \in B\}$ 正则收缩于 x.*

(ii) *类似的, $\{B_r(x) : r > 0\}$ 正则收缩于 x.*

(iii) *$\{Q \text{ 开方体} : x \in Q\}$ 正则收缩于 x. (对任意包含 x 的开方体 Q, 可取其外接球 B, 易见 $m(Q)/m(B)$ 具有一致下界.)*

(iv) *$\{R \text{ 开矩体} : x \in R\}$* **不**正则收缩于 *$x$. 以二维情形为例, 对任意开矩形 R, 我们用下标 $R_{a,b}$ 以指代其长与宽. 则任意包含 $R_{a,b}$ 的开圆 B 的面积至少为 $R_{a,b}$ 外接圆的面积 (其面积为 $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$). 从而*

$$\frac{m(R_{a,b})}{m(B)} \leq \frac{4ab}{\pi(a^2+b^2)} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \to 0, \quad \text{当 } \frac{b}{a} \to 0.$$

即 $\frac{m(R_{a,b})}{m(B)}$ 不存在一致下界.

(iv) *但另一方面, 若我们对矩形的长宽比作一个限制, 则相应的矩形族会正则收缩于 x: 固定常数 $c > 1$, $\{R_{a,b} : x \in R_{a,b},\, c^{-1} < \frac{a}{b} < c\}$ 正则收缩于 x.*

关于正则收缩族我们有如下简单引理.

引理 20.3. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x \in L_f$ 且可测集合族 $\mathcal{F}_x$ 正则收缩于 x. 则

$$\lim_{\substack{diam(U)\to 0\\ U\in\mathcal{F}_x}} \frac{1}{m(U)} \int_U |f(y)-f(x)|\, dy = 0.$$

证明. 对任意 $U \in \mathcal{F}_x$, 由定义存在开球 B_U 满足 $x \in B_U$, $U \subset B_U$ 且 $m(U) \geq cm(B_U)$. 从而我们有

$$\frac{1}{m(U)} \int_U |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{cm(B_U)} \int_{B_U} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y.$$

注意到当 $\mathrm{diam}(U) \to 0$ 时, $m(B_U) \leq \frac{1}{c} m(U)$ 也趋向于 0, 从而

$$\lim_{\substack{\mathrm{diam}(U)\to 0\\ U\in\mathcal{F}_x}} \frac{1}{m(U)} \int_U |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leq \lim_{\substack{m(B_U)\to 0\\ U\in\mathcal{F}_x}} \frac{1}{cm(B_U)} \int_{B_U} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

这里的等式成立是因为 $x \in L_f$ 且对任意 $U \in \mathcal{F}_x$, $x \in B_U$. 命题得证. □

对任意 $x \in L_f$, 取 $\mathcal{F}_x = \{B_r(x) : r > 0\}$ 并应用引理 20.3 我们有如下相对于中心球的 Lebesgue 微分定理.

推论 20.4. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 则对任意 $x \in L_f$ 我们有

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\, dy = 0.$$

特别的, 因为 L_f 为满测集, 我们有

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy = f(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{38}$$

20.2 恒等元逼近与卷积平均

我们可以将 (38) 中的左端写成卷积平均的形式. 首先回忆卷积的定义. 给定可测函数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 若积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ 有意义 (即被积函数可积), 则定义

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

若 $f * g$ 几乎处处有定义, 则称 $f * g$ 为 f 与 g 的**卷积函数**. 我们在作业中证明了卷积函数的一些性质:

(i) $f * g(x)$ 几乎处处有定义, 并且当 $f * g(x)$ 有定义时, $g * f(x)$ 也有定义且满足 $f * g(x) = g * f(x)$ (卷积交换性).

(ii) 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且满足 $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(iii) 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 g 有界, 则 $f * g$ 一致连续.

对任意 $r > 0$, 令 $\varphi_r := \frac{1}{m(B_r(0))}\chi_{B_r(0)}$. 注意到

$$\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m(B_r(x))}\int f(y)\chi_{B_r(x)}(y)\,\mathrm{d}y.$$

注意到 $y \in B_r(x)$ 当且仅当 $x - y \in B_r(0)$, 即 $\chi_{B_r(x)}(y) = \chi_{B_r(0)}(x-y)$. 从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{m(B_r(0))}\int f(y)\chi_{B_r(0)}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \varphi_r * f(x) = f * \varphi_r(x).\end{aligned}$$

因此 (38) 等价于 $f * \varphi_r \to f$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. 另一方面, 我们将会看到 $\{\varphi_r\}_{r>0}$ 是一个**恒等元逼近**的例子, 我们将要把推论 20.4 推广到一般的恒等元逼近情形. 首先我们给出相关定义.

定义 20.5. *设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上一族可测函数. 若*

(i) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\,dx = 1$, $\forall\, \delta > 0$.

(ii) 存在 $C > 0$ 使得 $|K_\delta(x)| \le \frac{C}{\delta^d}$, $\forall\, \delta > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$.

(iii) $|K_\delta(x)| \le \frac{C\delta}{|x|^{d+1}}$, $\forall\, \delta > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$.

*则称 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个**恒等元逼近**.*

我们有如下例子.

例 20.6. *(i) 对任意 $r > 0$, 令 $\varphi_r = \frac{1}{m(B_r(0))}\chi_{B_r(0)}$. 可以验证 $\{\varphi_r\}_{r>0}$ 是一个恒等元逼近.*

(ii) 若 φ 有界, 具有紧支集且 $\int \varphi = 1$[26], 对任意 $\delta > 0$, 令 $K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/\delta)$. 则 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近.

(iii) 取 $\varphi(x) = \frac{e^{-|x|^2/4}}{(4\pi)^{d/2}}$, 令 $K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/d)$. 则 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近.

我们有如下推广推论 20.4 的定理.

定理 20.7. *设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近. 则对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in L_f$, 当 $\delta \to 0^+$ 时有 $f * K_\delta(x) \to f(x)$. 特别的, 当 $\delta \to 0^+$ 时 $f * K_\delta \to f$, a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.*

[26]课上我们举该例时少写了这个条件.

为证明该定理我们先证明如下引理.

引理 20.8. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in L_f$. 令

$$\mathcal{A}(r) := \frac{1}{r^d} \int_{|y| \le r} |f(x-y) - f(x)|\, dy, \quad \forall\, r > 0. \tag{39}$$

则

1. $\mathcal{A}(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续且 $\lim_{r\to 0^+} \mathcal{A}(r) = 0$.
2. $\mathcal{A}(r)$ 有界.

证明. 首先证明 (1). 任取 $r > 0$, 要证 $\lim_{h\to 0} \mathcal{A}(r+h) = \mathcal{A}(r)$. 设 $h > 0$ 并令 $g(y) := |f(x-y) - f(x)|$. (注意到在这个引理中 $x \in L_f$ 是固定的.) 由定义

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r+h) - \mathcal{A}(r) &= \frac{1}{(r+h)^d} \int_{|y| \le r+h} g(y)\, \mathrm{d}y - \frac{1}{r^d} \int_{|y| \le r} g(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(r+h)^d} \int_{r < |y| \le r+h} g(y)\, \mathrm{d}y + \left(\frac{1}{(r+h)^d} - \frac{1}{r^d} \right) \int_{|y| \le r} g(y)\, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 Lebesgue 积分的绝对连续性 (定理 12.6 (2)) 可知[27]

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{r < |y| \le r+h} g(y)\, \mathrm{d}y = 0.$$

另一方面, $\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{(r+h)^d} - \frac{1}{r^d} \right) = 0$, 并且

$$\begin{aligned}\int_{|y| \le r} g(y)\, \mathrm{d}y &\le \int_{|y| \le r} |f(x-y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y| \le r} |f(x)|\, \mathrm{d}y \\ &\le \|f\|_1 + |f(x)| m(B_r(0)) < \infty.\end{aligned}$$

从而 $\lim_{h\to 0^+} \mathcal{A}(r+h) = \mathcal{A}(r)$. 类似的, 可证 $\lim_{h\to 0^-} \mathcal{A}(r+h) = \mathcal{A}(r)$. 因此 $\mathcal{A}(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续. 下证 $\lim_{r\to 0^+} \mathcal{A}(r) = 0$. 令 $\nu_d := m(B_1(0))$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的体积. 对任意 $r > 0$, 作变量变换 $y' = x - y$ (并且注意到 $y \in B_r(0)$ 当且仅当 $y' \in B_r(x)$) 可得

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x)} |f(y') - f(x)|\, \mathrm{d}y' = \frac{\nu_d}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, \mathrm{d}y.$$

从而

$$\lim_{r\to 0^+} \mathcal{A}(r) = \nu_d \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, \mathrm{d}y = 0.$$

---

[27]这里我们并不能直接对函数 g 应用定理 12.6 (2), 这是因为 $g(y) = |f(x-y) - f(x)|$ 并不可积. 事实上, 我们对函数 $\tilde{g} = g\chi_{\{|y|<2r\}}$ 应用定理 12.6 (2). 注意到 $\tilde{g}$ 可积且在开球 $\{|y| < 2r\}$ 内 $\tilde{g} = g$.

这里最后一个等式成立是因为 $x \in L_f$.

下面证 (2). 首先注意到因为 $\mathcal{A}(r)$ 在 $(0,1]$ 上连续且 $\lim_{r\to 0^+}\mathcal{A}(r)=0$, $\mathcal{A}$ 在 $(0,1]$ 上有界. 因此只需证 $\mathcal{A}$ 在 $(1,\infty)$ 上也有界. 对任意 $r>1$, 由三角不等式我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &\le \frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)|\,\mathrm{d}y+\frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x)|\,\mathrm{d}y\\ &\le \frac{1}{r^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,\mathrm{d}y+\frac{1}{r^d}\times|f(x)|\nu_d r^d<\|f\|_1+\nu_d|f(x)|<\infty.\end{aligned}$$

命题得证. □

定理 *20.7* 证明. 给定 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x\in L_f$, 对任意 $\delta>0$, 因为 $\int K_\delta(y)\,\mathrm{d}y=1$ (定义 20.5 性质 (i)) 我们有

$$\begin{aligned}|f*K_\delta(x)-f(x)| &= \left|\int (f(x-y)-f(x))K_\delta(y)\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le \int |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

将上述积分区域 $\mathbb{R}^d$ 作划分:

$$\mathbb{R}^d=\{|y|\le\delta\}\bigsqcup_{k=0}^{\infty}\{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta\}$$

得

$$|f*K_\delta(x)-f(x)|\le I+\sum_{k=0}^{\infty}J_k,$$

其中

$$I:=\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\,\mathrm{d}y,$$

对任意 $k\ge 0$,

$$J_k:=\int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|\,\mathrm{d}y.$$

利用定义 20.5 性质 (ii) 可得

$$I\le\frac{C}{\delta^d}\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y=C\mathcal{A}(\delta).$$

其中 $\mathcal{A}$ 是 (39) 中定义的函数. 另一方面, 对任意 $k\ge 0$, 注意到当 $2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta$ 时, 由定义 20.5 性质 (iii) 有

$$|K_\delta(y)|\le\frac{C\delta}{|y|^{d+1}}\le\frac{C\delta}{(2^k\delta)^{d+1}}=\frac{C}{2^{k(d+1)}\delta^d}.$$

从而

$$
\begin{aligned}
J_k &\leq \frac{C}{2^{k(d+1)}\delta^d}\int_{2^k\delta<|y|\leq 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{C}{2^{k(d+1)}\delta^d}\int_{|y|\leq 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{C}{2^{k(d+1)}}\times\frac{2^{(k+1)d}}{(2^{k+1}\delta)^d}\int_{|y|\leq 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&= C2^{d-k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta).
\end{aligned}
$$

结合上述两个估计我们有

$$
|f*K_\delta(x)-f(x)|\leq C\mathcal{A}(\delta)+C2^d\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta).
$$

对任意 $\epsilon>0$, 取 $N\geq 1$ 充分大使得 $\sum_{k=N}^{\infty}2^{-k}<\epsilon$. 另一方面, 由引理 20.8, 存在 $M>0$ 使得对任意 $r>0$, $\mathcal{A}(r)<M$. 从而我们有

$$
\begin{aligned}
|f*K_\delta(x)-f(x)| &\leq C\mathcal{A}(\delta)+C2^d\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)+C2^d\sum_{k=N}^{\infty}2^{-k}M \\
&\leq C\mathcal{A}(\delta)+C2^d\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)+C2^dM\epsilon.
\end{aligned}
$$

再因为 $\lim_{r\to 0^+}\mathcal{A}(r)=0$ (引理 20.8 (1)), 令 $\delta\to 0^+$ 我们有

$$
\limsup_{\delta\to 0^+}|f*K_\delta(x)-f(x)|\leq C2^dM\epsilon.
$$

不等式左端与 ϵ 无关, 令 $\epsilon\to 0^+$ 即得 $\limsup_{\delta\to 0^+}|f*K_\delta(x)-f(x)|=0$, 即 $\lim_{\delta\to 0^+}f*K_\delta(x)=f(x)$. □

21 第二十一讲

5 月 11 日

设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 我们之前证明了 $f * K_\delta \to f$ a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. 下面我们证明 $f * K_\delta$ 还依范数收敛于 f.

定理 21.1. 设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近. 则对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 当 $\delta \to 0^+$ 时, $\|f * K_\delta - f\|_1 \to 0$.

证明. 令 $g_\delta := f * K_\delta - f$, 要证当 $\delta \to 0^+$ 时, $\|g_\delta\|_1 \to 0$. 由三角不等式对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 有

$$\begin{aligned} |g_\delta(x)| &= \left| \int (f(x-y) - f(x)) K_\delta(y)\, \mathrm{d}y \right| \\ &\le \int |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

从而

$$\|g_\delta\|_1 = \int |g_\delta(x)|\, \mathrm{d}x \le \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

应用 Tonelli 定理 (定理 16.4) 交换积分顺序得

$$\begin{aligned} \|g_\delta\|_1 &\le \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|\, \mathrm{d}x \right) |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y \\ &= \int \|f_x - f\|_1 |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

其中 $f_y(x) = f(x-y)$. 回忆 $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$ (命题 15.6), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$ 使得对任意 $|y| \le \eta$ 有 $\|f_y - f\|_1 < \epsilon$. 从而

$$\begin{aligned} \|g_\delta\|_1 &\le \int_{|y|\le\eta} \|f_y - f\|_1 |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y|>\eta} \|f_y - f\|_1 |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y \\ &\le \int_{|y|\le\eta} \epsilon |K_\delta(y)|\, \mathrm{d}y + \int_{|y|>\eta} \|f_y - f\|_1 \frac{C\delta}{|y|^{d+1}}\, \mathrm{d}y \\ &\le \epsilon \|K_\delta\|_1 + 2C\delta \|f\|_1 \int_{|y|>\eta} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+1}}, \end{aligned}$$

这里对第二个积分的估计我们用到了定义 20.5 性质 (iii). 由作业, 存在 $M > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$, $\|K_\delta\|_1 \le M$. 另一方面注意到积分 $\int_{|y|>\eta} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+1}} < \infty$. 从而

$$\limsup_{\delta\to 0^+} \|g_\delta\|_1 \le \epsilon M + \lim_{\delta\to 0^+} 2C\delta \|f\|_1 \int_{|y|>\eta} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+1}} = \epsilon M.$$

再令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $\limsup_{\delta\to 0^+} \|g_\delta\|_1 = 0$, 等价的, $\lim_{\delta\to 0^+} \|g_\delta\|_1 = 0$. □

注记 21.2. 回忆 $C_c(\mathbb{R}^d) \overset{dense}{\subset} L^1(\mathbb{R}^d)$. 令 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上所有光滑紧支撑函数全体. 利用恒等元逼近, 我们可以证明 $C_c^\infty \overset{dense}{\subset} L^1(\mathbb{R}^d)$. 事实上, 可以选取恒等元逼近 $\{K_\delta\}_{\delta>0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. 则可证对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * K_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. 另一方面, 由定理 *21.1* 可知当 $\delta \to 0^+$ 时, $\|f * K_\delta - f\|_1 \to 0$.

21.1 可求长曲线与有界变差函数

下面我们开始讨论微分理论的第二部分, 即 Newton-Leibniz 公式的成立条件. 具体的, 给定函数 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ 我们想要知道何时等式

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a, b] \tag{40}$$

成立. 为使等式 (49) 成立, F 需要满足

(i) F a.e. 可微.

(ii) $F' \in L^1([a, b])$.

(iii) 在 (i), (ii) 的前提下等式(49)成立.

我们首先考虑前两个条件. 这里需要的条件是**有界变差**. 我们首先给出有界变差的一个等价几何刻画.

定义 21.3. 设 $z : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto z(t) = (x(t), y(t))$ 是曲线 γ 的一个参数化表示, 其中 $x(t), y(t)$ 连续. 若存在 $M > 0$ 使得对任意 $[a, b]$ 的划分

$$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

有

$$\sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})| \le M,$$

则称 γ **可求长**, 并定义

$$L(\gamma) := \sup_P \sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

为 γ 的**弧长**.

注记 21.4. 由定义 γ 可求长当且仅当 $L(\gamma) < \infty$.

例 21.5. 若 x, y 均连续可微, 则

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

下面我们给出有界变差的定义.

定义 21.6. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 对任意 $[a,b]$ 的划分 $P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,

$$V(f,P):=\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上相对于 P 的变差,

$$V_a^b(f):=\sup_P V(f,P)$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的**全变差**. 若 $V_a^b(f)<\infty$, 则 f 称为**有界变差函数**, 记为 $f\in BV[a,b]$.

利用上述定义以及不等式

$$\max(|x|,|y|)\le|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|,\quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

易见下面可求长曲线与有界变差函数之间的关系.

命题 21.7. 曲线 γ 可求长当且仅当 $x(t),y(t)\in BV[a,b]$.

下面我们给出有界变差函数的一些例子.

例 21.8. *(i)* 若 f 单调递增, 则 $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$. 类似的, 若 f 单调递减, 则 $V_a^b(f)=f(a)-f(b)$.

证明. 假设 f 单调递增. 任取 $[a,b]$ 的一个划分 P: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 因为 f 单调递增, 对任意 $1\le j\le n$, $f(t_j)\ge f(t_{j-1})$. 从而

$$V(f,P)=\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|=\sum_{j=1}^{n}(f(t_j)-f(t_{j-1}))=f(b)-f(a).$$

取上确界即得 $V_a^b(f)=\sup_P V(f,P)=f(b)-f(a)$. f 单调递减的情形类似. □

(ii) 若 f 可微且 $|f'|\le M$, 则 $V_a^b(f)\le M(b-a)$. 特别的, $f\in BV[a,b]$.

证明. 任取 $[a,b]$ 的一个划分 P: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 对任意 $1\le j\le n$, 由微分中值定理, 存在 $x_j\in[t_{j-1},t_j]$ 使得

$$|f(t_j)-f(t_{j-1})|=|f'(x_j)|(t_j-t_{j-1})\le M(t_j-t_{j-1}).$$

从而

$$V(f,P)=\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|\le\sum_{j=1}^{n}M(t_j-t_{j-1})=M(b-a).$$

进一步的, 取上确界即得 $V_a^b(f)=\sup_P V(f,P)\le M(b-a)$. □

下面我们证明函数变差的一些简单性质.

引理 21.9. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, P 为 $[a,b]$ 的一个划分. 则

(i) $V(f,P)\ge|f(b)-f(a)|$.

(ii) 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$V(\alpha f,P)=|\alpha|V(f,P)\quad 且\quad V(f+g,P)\le V(f,P)+V(g,P).$$

(iii) 若 P' 是 P 的一个精细划分, 则 $V(f,P')\ge V(f,P)$.

(iv) 对任意 $c\in(a,b)$, 若 P_1 为 $[a,c]$ 的一个划分, P_2 为 $[c,b]$ 的一个划分, 令 $P_1\cup P_2$ 为 P_1, P_2 合并而得的 $[a,b]$ 的划分, 则 $V(f,P)=V(f,P_1)+V(f,P_2)$.

证明. 我们仅证明 (i), 其余证明留作作业. 设 P: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 则

$$|f(b)-f(a)|=|\sum_{j=1}^{n}(f(t_j)-f(t_{j-1}))|\le\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|=V(f,P).$$

□

下面我们证明函数变差的第一个重要性质.

命题 21.10. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 则

(i) 对任意 $x\in[a,b]$, $V_a^b(f)=V_a^x(f)+V_x^b(f)$, 其中我们规定对任意 $c\in[a,b]$, $V_c^c(f)=0$.

(ii) 设 $f\in BV[a,b]$, 则函数 $x\mapsto V_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.

证明. 首先证明 (i). 不妨假设 $V_a^x(f),V_x^b(f)$ 均有限. 这是因为若 $V_a^x(f)$ 或 $V_x^b(f)$) 等于 $+\infty$, 则由简单关系 $V_a^b(f)\ge\max(V_a^x(f),V_x^b(f))$ 易见此时 (i) 中等式两端均为 $+\infty$, 从而平凡成立.

我们首先证 $V_a^b(f)\le V_a^x(f)+V_x^b(f)$. 由全变差定义, 只需证明对任意 $[a,b]$ 的划分 P, $V(f,P)\le V_a^x(f)+V_x^b(f)$. 任取 $[a,b]$ 的一个划分 P, 如有必要, 将 x

添加进 P 中可得到一个 P 的精细划分 P' 使得 x 为 P' 的一个间断点. 从而 P' 可写成 $P' = P_1 \cup P_2$ 的形式, 其中 P_1 是 $[a, x]$ 的一个划分, P_2 是 $[x, b]$ 的一个划分. 从而由引理 21.9 (iii) (iv) 以及全变差定义可知

$$V(f, P) \le V(f, P') = V(f, P_1) + V(f, P_2) \le V_a^x(f) + V_x^b(f).$$

从而

$$V_a^b(f) = \sup_P V(f, P) \le V_a^x(f) + V_x^b(f).$$

下面再证 $V_a^b(f) \ge V_a^x(f) + V_x^b(f)$. 由全变差定义以及 $\max(V_a^x(f), V_x^b(f)) < \infty$ 假设, 对任意 $\epsilon > 0$, 分别存在 $[a, x]$ 及 $[x, b]$ 的划分 P_1, P_2 使得

$$V(f, P_1) \ge V_a^x(f) - \epsilon, \quad V(f, P_2) \ge V_x^b(f) - \epsilon.$$

注意到 $P_1 \cup P_2$ 是 $[a, b]$ 的一个划分, 从而

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &\ge V(f, P_1 \cup P_2) = V(f, P_1) + V(f, P_2) \\ &\ge V_a^x(f) - \epsilon + V_x^b(f) - \epsilon = V_a^x(f) + V_x^b(f) - 2\epsilon. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $V_a^b(f) \ge V_a^x(f) + V_x^b(f)$, 从而 (i) 得证.

对 (ii), 任取 $a \le x_1 < x_2 \le b$, 则由 (i) 我们有

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) \quad \Leftrightarrow \quad V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \ge 0.$$

命题得证. □

注记 21.11. *现在我们可以解释全变差的几何含义: $V_a^b(f)$ 衡量函数 f 在 $[a, b]$ 上取值变化的累积量. 以下面图 8 中函数为例. 若此函数从左至右的三个单调区间分别为 $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, b]$. 则由命题 21.10 以及例 21.8 (i) 我们有*

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= V_a^{t_1}(f) + V_{t_1}^{t_2}(f) + V_{t_2}^b(f) \\ &= f(t_1) - f(a) + f(t_1) - f(t_2) + f(b) - f(t_2) \\ &= 2f(t_1) - 2f(t_2) + f(b) - f(a). \end{aligned}$$

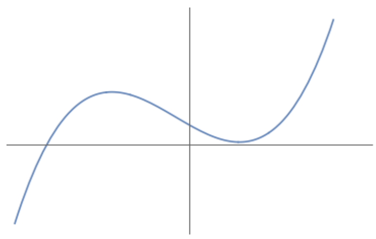

图 8: 函数 $y = f(x)$ 图像

例 21.12. *(i)* $f(x)=x^3-3x$, $x\in[-2,2]$. 易见 f 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,1]$ 上单调递减，在 $[1,2]$ 上单调递增. 并且 $f(-2)=f(1)=-2$, $f(-1)=f(2)=2$. 从而

$$V_{-2}^{2}(f)=V_{-2}^{-1}(f)+V_{-1}^{1}(f)+V_{1}^{2}(f)=4+4+4=12.$$

(ii) (作业) 设 $a,b>0$, 令

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin(\frac{1}{x^b}) & 0<x\le 1,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

证明 $f\in BV[0,1]$ 当且仅当 $a>b$.

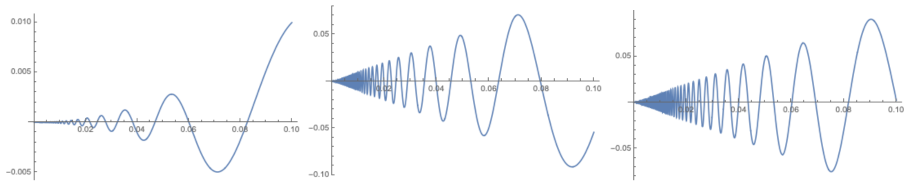

图 9: 从左至右 (a,b) 分别为 $(1,0.9)$, $(1,1)$, $(1,1.1)$.

22 第二十二讲

5 月 13 日

定理 22.1 (Jordan 分解定理)**.** *设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 则 $f\in BV[a,b]$ 当且仅当 $f=g-h$, 其中 g,h 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数.*

证明. 先证 "$\Leftarrow$" 方向. 因为 g,h 单调递增, 我们有 $V_a^b(g)=g(b)-g(a)<\infty$, 从而 $g\in \mathrm{BV}[a,b]$. 类似的, $h\in\mathrm{BV}[a,b]$. 由引理 21.9 (ii), 对任意 $[a,b]$ 的划分 P,

$$V(f,P)=V(g-h,P)\le V(g,P)+V(h,P)\le V_a^b(g)+V_a^b(h).$$

从而 $V_a^b(f)=\sup_P V(f,P)\le V_a^b(g)+V_a^b(h)<\infty$, 即 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$.

再证 "$\Rightarrow$" 方向. 令 $g(x)=V_a^x(f)$, $h(x)=V_a^x(f)-f(x)$. 易见 $f=g-h$, 且由命题 21.10, g 单调递增. 因此只需证明 h 单调递增. 任取 $a\le x_1<x_2\le b$, 我们有

$$\begin{aligned}
h(x_2)-h(x_1)&=V_a^{x_2}(f)-f(x_2)-V_a^{x_1}(f)+f(x_1)\\
&=V_{x_1}^{x_2}(f)-(f(x_2)-f(x_1))\\
&\ge V_{x_1}^{x_2}(f)-|f(x_2)-f(x_1)|\ge 0.
\end{aligned}$$

这里第二个等式用到命题 21.10 (i), 最后一个不等式用到引理 21.9 (i). 即证得 h 单调递增. □

22.1 单调函数微分定理

Jordan 分解定理告诉我们有界变差函数的微分性问题可以转化为单调函数的微分性问题. 下面我们叙述本章的第二个主要定理: 单调函数微分定理.

定理 22.2. *设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增. 则*

(i) f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微.

(ii) $f'\in L^1([a,b])$.

(iii) $\int_a^b f'(t)\,dt\le f(b)-f(a)$.

注记 22.3. *注意到定理 22.2 (iii) 等价于*

$$\int_a^x f'(t)\,dt\le f(x)-f(b),\quad \forall x\in[a,b].$$

显然此不等式蕴含定理 22.2 *(iii)*. 另一方面, 对任意 $x \in [a,b]$, 因为 f 在 $[a,b]$ 上单调递增, f 在 $[a,x]$ 上也单调递增. 从而对函数 $f:[a,x] \to \mathbb{R}$ 应用定理 22.2 *(iii)* 即得上述不等式.

由上述定理以及 Joran 分解定理, 我们有如下直接推论.

推论 22.4. 设 $f \in BV[a,b]$. 则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微且 $f' \in L^1([a,b])$.

为证明定理 22.2 我们需要引入如下 Vitali 覆盖的概念.

定义 22.5. 设 $E \subset \mathbb{R}$, $\Gamma = \{I_\alpha\}$ 是一个区间族. 若对任意 $x \in E$, 任意 $\epsilon > 0$, 存在 $I \in \Gamma$ 使得 $x \in I$ 且 $|I| < \epsilon$, 则称 Γ 是 E 的一个 ***Vitali* 覆盖**.

注记 22.6. 注意到由定义 *Vitali* 覆盖一定是一个无穷覆盖. 等价的, Γ 是 E 的一个 *Vitali* 覆盖当且仅当

$$\forall x \in E,\ \exists \{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma \text{ 使得 } x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} |I_n| \to 0.$$

定理 22.7 (Vitali 覆盖定理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) < \infty$, Γ 是 E 的一个 *Vitali* 覆盖. 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $I_1, \cdots, I_n \in \Gamma$ 两两不交使得

$$m_*\left(E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) < \epsilon.$$

注记 22.8. 若 $I_1, \cdots, I_n \in \Gamma$ 满足 *Vitali* 覆盖定理的结论, 则

$$m_*\left(E \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) > m_*(E) - \epsilon. \tag{41}$$

这是因为 $E = \left(E \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) \bigsqcup \left(E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right)$. 由外测度次可数可加性可知

$$m_*(E) \le m_*\left(E \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) + m_*\left(E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) < m_*\left(E \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) + \epsilon,$$

即等价于 (41). 由 (41) 以及 $I_1, \cdots, I_n$ 两两不交我们还有

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| = m\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) \ge m_*\left(E \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j\right) > m_*(E) - \epsilon.$$

定理 *22.7* 证明. 将 Γ 中元素替换成其闭包, 我们不妨假设 Γ 为一闭区间族[28]. 因为 $m_*(E) < \infty$, 由外正则性 (命题 4.1 (1)) 存在开集 G 使得 $E \subset G$ 且

[28] 若 Γ 中包含无穷区间, 则可将这些区间从 Γ 中删去. 由 Vitali 覆盖的定义可知, 删去这些无穷区间后的 Γ 依旧是 E 的一个 Vitali 覆盖.

$m(G) < \infty$. 不妨设 Γ 中区间均包含在 G 中 (作业). 下面我们分两种情形来论证.

情形 1: 存在 $I_1, \cdots, I_n \in \Gamma$ 两两不交使得 $E \subset \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j$, 则 $\{I_1, \cdots, I_n\}$ 满足定理要求.

情形 2: 不存在这样的两两不交子有限子区间族, 即

$$\forall\, k \geq 1, \forall\, I_1, \cdots, I_k \in \Gamma \text{ 两两不交} \quad \Rightarrow \quad E \not\subseteq \bigsqcup_{j=1}^{k} I_j. \tag{42}$$

下面我们开始在假设 (42) 下选取满足要求的 Γ 中元素. 首先任取 $I_1 \in \Gamma$, 并令

$$\delta_1 := \sup\{|I| : I \in \Gamma,\, I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

我们断言 δ_1 良定义, 且 $\delta_1 \leq m(G) < \infty$. 因为任意 $I \in \Gamma$ 均有 $I \subset G$, 显然若 δ_1 良定义, 则 $\delta_1 \leq m(G)$. 为证 δ_1 良定义, 只需证集合 $\{I \in \Gamma : I \cap I_1 = \emptyset\}$ 非空. 由假设 (42) ($k = 1$ 情形) 我们有 $E \not\subseteq I_1$, 从而存在 $x \in E \setminus I_1$. 因为 I_1 为闭区间, 有 $d(x, I_1) > 0$. 又因为 Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖, 存在 $J \in \Gamma$ 使得 $x \in J$ 且 $|J| < d(x, I_1)$. 由此即知 $J \cap I_1 = \emptyset$. 从而 $J \in \{I \in \Gamma : I \cap I_1 = \emptyset\}$. 因此该集合非空.

由 δ_1 定义, 存在 $I_2 \in \{I \in \Gamma : I \cap I_1 = \emptyset\}$ 使得 $|I_2| > \frac{1}{2}\delta_1$. 归纳的, 假设我们已经选取了两两不交的区间 $I_1, \cdots, I_k \in \Gamma$. 令

$$\delta_k := \{|I| : I \in \Gamma,\, I \cap I_j = \emptyset, \forall\, 1 \leq j \leq k\}.$$

类似的, 应用假设 (42) 可知 δ_k 良定义且 $\delta_k \leq m(G) < \infty$. 从而可选取

$$I_{k+1} \in \{I \in \Gamma : I \cap I_j = \emptyset, \forall\, 1 \leq j \leq k\}$$

使得 $|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\delta_k$. 重复此操作 (注意到因为假设 (42), 此过程不会停止), 我们得到一列两两不交的闭区间 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Gamma$ 满足对任意 $k \geq 1$, $|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\delta_k$, 其中 δ_k 定义如上. 因为 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ 两两不交且均包含在 G 中, 我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq m(G) < \infty.$$

特别的, 当 $k \to \infty$ 时, $\delta_k < 2|I_{k+1}| \to 0$. 另一方面, 因为 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \infty$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$ 充分大使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty} |I_j| < \epsilon$. 令

$$S := E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{N} I_j.$$

我们断言 $m_*(S) < \epsilon$, 从而 $\{I_1, \cdots, I_N\}$ 满足定理要求.

下面我们证明该断言. 对任意 $x \in S$, 因为 $x \notin \bigsqcup_{j=1}^N I_j$ 且 $\bigsqcup_{j=1}^N I_j$ 为闭集, 有 $d(x, \bigsqcup_{j=1}^N I_j) > 0$. 特别的, 因为 Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖, 存在 $I^x \in \Gamma$ 使得 $|I^x| < d(x, \bigsqcup_{j=1}^N I_j)$. 由此可知 $I^x \cap \bigsqcup_{j=1}^N I_j = \emptyset$, 即对任意 $1 \le j \le N$, $I^x \cap I_j = \emptyset$. 另一方面, 注意到存在 $k \ge 1$ 使得 $I^x \cap I_k \ne \emptyset$. 若否, 则对任意 $k \ge 1$, $I^x \in \{I \in \Gamma : I \cap I_j = \emptyset, \forall 1 \le j \le k\}$. 从而对任意 $k \ge 1$, $|I^x| \le \delta_k$. 因为 $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$, 我们有 $|I^x| = 0$, 矛盾! 因此

$$N_0 := \min\{k \in \mathbb{N} : I^x \cap I_k \ne \emptyset\}$$

良定义. 由 N_0 最小性, 我们有

$$I^x \cap I_j = \emptyset,\ \forall 1 \le j \le N_0 - 1 \text{ 且 } I^x \cap I_{N_0} \ne \emptyset.$$

由上述不交条件我们有 $|I^x| \le \delta_{N_0-1} < 2|I_{N_0}|$. 另一方面, 因为 $I^x \cap I_{N_0} \ne \emptyset$, I^x 至少有一个端点落在 I_{N_0} 中. 结合条件 $|I^x| < 2|I_{N_0}|$ 可知若 I^x 的左 (右) 端点落在 I_{N_0} 中, 则将 I_{N_0} 向右 (左) 延长其两倍区间长度, 得到的新区间包含 I^x. 从而若令 I'_{N_0} 为 I_{N_0} 的同心五倍长闭区间, 在两种情形下我们均有 $I^x \subset I'_{N_0}$. 最后因为 I^x 与 $I_1, \cdots, I_N$ 均不交, 有 $N \le N_0 - 1$, 即 $N_0 > N$.

总结的, 我们证明了对任意 $x \in S$, 存在 $I^x \in \Gamma$ 使得 $x \in I^x$, 且存在 $N_0 > N$ 使得 $I^x \subset I'_{N_0}$, 其中 I'_{N_0} 是 I_{N_0} 的同心五倍长闭区间. 从而我们有

$$S \subset \bigcup_{x\in S} I^x \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} I'_j.$$

因此

$$m_*(S) \le \sum_{j=N+1}^{\infty} |I'_j| = 5 \sum_{j=N+1}^{\infty} |I_j| < 5 \times \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

断言得证, 从而此定理也得证. □

下面我们开始证明定理 22.2. 在证明之前我们引入如下定义.

定义 22.9. *设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. 对任意 $x \in (a, b)$, 令*

(i) $D^+f(x) := \limsup_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *称为 f 在 x 处的**右上 Dini 导数**.*

(ii) $D_+f(x) := \liminf_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *称为 f 在 x 处的**右下 Dini 导数**.*

(iii) $D^-f(x) := \limsup_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *称为 f 在 x 处的**左上 Dini 导数**.*

(iv) $D_-f(x) := \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *称为 f 在 x 处的***左下 *Dini* 导数***.*

注记 22.10. 注意到对任意 $x \in (a,b)$,

$$D^+f(x) \geq D_+f(x), \quad D^-f(x) \geq D_-f(x),$$

$$D^+(-f)(x) = -D_+f(x), \quad D^-(-f)(x) = -D_-f(x).$$

我们分如下两步证明定理 22.2:

第一步: 证明

$$D^+f(x) = D^+f(x) = D^+f(x) = D^+f(x), \quad a.e.\ x \in (a,b), \tag{43}$$

从而 $f'(x)$ 几乎处处存在.

第二步: 证明定理 22.2 (iii). 注意到, 因为 f 单调递增, 若 $f'(x)$ 存在, 则 $f'(x) \geq 0$. 因此定理 22.2 (iii) 中不等式蕴含 (ii), 即 f' 的可积性.

我们首先将第一步的证明转化为证明某个集合的零测性.

引理 22.11. *以下命题等价:*

(i) *对任意 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 单调递增, f' 几乎处处存在.*

(ii) *对任意 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 单调递增, 集合*

$$E_1(f) := \left\{x \in (a,b) : D^+f(x) > D_-f(x)\right\}$$

零测.

证明. 因为 f' 几乎处处存在等价于 (43), (i) 显然蕴含 (ii). 下面我们证明 (ii) 也蕴含 (i). 我们假设 (ii) 成立. 对任意一个单调递增函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, 定义一个新的集合

$$E_2(f) := \left\{x \in (a,b) : D^-f(x) > D_+f(x)\right\}.$$

注意到对任意 $x \notin E_1(f) \cup E_2(f)$, 我们有

$$D^+f(x) \geq D_+f(x) \overset{x\notin E_2(f)}{\geq} D^-f(x) \geq D_-f(x) \overset{x\notin E_1(f)}{\geq} D^+f(x).$$

从而上述四个 Dini 导数均相等, 即 $f'(x)$ 存在. 因此我们只需证明 $E_1(f) \cup E_2(f)$ 为零测集. 由假设 $E_1(f)$ 零测. 考虑函数 $g(x) = -f(-x) : [-b,-a] \to \mathbb{R}$. 注意到因为 f 单调递增, g 也单调递增. 从而由假设 $E_1(g) \subset [-b,-a]$ 为零测集. 另一方面, 对任意 $y \in [-b,-a]$, 令 $x = -y \in [a,b]$. 注意到

$$D^+g(y) > D_-g(y) \quad \Leftrightarrow \quad -D_+f(-y) > -D^-f(-y) \quad \Leftrightarrow \quad D_+f(x) < D^-f(x).$$

由此等价关系我们有 $E_2(f) = -E_1(g)$. 从而 $E_2(f)$ 也为零测集. 命题得证. $\square$

23 第二十三讲

5 月 15 日

我们下面开始定理 22.2 的证明.

证明. 我们首先证明 f' 几乎处处存在. 由引理 22.11 只需证明集合

$$E_1(f) = \left\{x \in (a,b) : D^+ f(x) > D_- f(x)\right\}$$

为零测集. 注意到对任意 $x \in (a,b)$, $x \in E_1(f)$ 当且仅当存在有理数 $r > s$ 使得 $D^+ f(x) > r > s > D_- f(x)$. 从而有

$$E_1 = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r > s}} A_{r,s},$$

其中

$$A_{r,s} := \left\{x \in (a,b) : D^+ f(x) > r > s > D_- f(x)\right\}.$$

因此只需证明对任意给定的有理数 $r > s$, $A = A_{r,s}$ 为零测集. 若否, 则 $m_*(A) > 0$. 从而对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset A$ 使得 $m(G) < (1+\epsilon) m_*(A)$. 注意到

$$D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad \forall x \in (a,b).$$

从而对任意 $x \in A$ 我们有

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < s. \tag{44}$$

因为 $x \in A \subset G$ 且 G 为开集, 存在 $h_x > 0$ 使得 $(x - h_x, x + h_x) \subset G$. 令

$$H_x := \{h \in (0, h_x) : \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < s\}.$$

因为 (44), H_x 中包含一列单调递减趋向于 0 的正数列. 从而

$$\Gamma_1 := \{[x-h, x] : x \in A, h \in H_x\}$$

是 A 的一个 Vitali 覆盖, 且 Γ_1 中元素均包含在 G 中. 由 Vitali 覆盖定理可知存在 $[x_1 - h_1, x_1], \cdots, [x_N - h_N, x_N] \in \Gamma_1$ 两两不交且

$$m_*\left(A \cap \bigsqcup_{j=1}^{N} [x_j - h_j, x_j]\right) > m_*(A) - \epsilon.$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{N} h_j = m\left(\bigsqcup_{j=1}^{N}[x_j-h_j,x_j]\right) \le m(G) < (1+\epsilon)m_*(A),$$

另一方面, 对任意 $1 \le j \le N$, 因为 $[x_j-h_j,x_j] \in \Gamma_1$, 我们有

$$f(x_j) - f(x_j-h_j) < sh_j.$$

从而

$$\sum_{j=1}^{N}(f(x_j) - f(x_j-h_j)) < \sum_{j=1}^{N} sh_j < s(1+\epsilon)m_*(A).$$

令 $B := A \cap \bigsqcup_{j=1}^{N}(x_j-h_j,x_j)$, 则 $m_*(B) > m_*(A) - \epsilon$. 因为 $B \subset A$, 对任意 $y \in B$,

$$D^+f(y) = \limsup_{\ell\to 0^+}\frac{f(y+\ell)-f(x)}{\ell} > r.$$

由集合 B 定义, 存在唯一的 $1 \le j \le N$ 使得 $y \in (x_j-h_j,x_j)$. 从而存在 $\ell_y > 0$ 使得 $[y,y+\ell_y] \subset [x_j-h_j,x_j]$. 令

$$L_y := \left\{\ell \in (0,\ell_y) : \frac{f(x+\ell)-f(x)}{\ell} > r\right\}.$$

则类似的闭区间族

$$\Gamma_2 := \{[y,y+\ell] : y \in B, \ell \in L_y\}$$

是 B 的一个 Vitali 覆盖, 且 Γ_2 中任意元素均包含在某个 (x_j-h_j,x_j) 中. 从而再由 Vitali 覆盖定理可知存在 $[y_1,y_1+\ell_1],\cdots,[y_M,y_M+\ell_M] \in \Gamma_2$ 两两不交且满足

$$\sum_{i=1}^{M}\ell_i > m_*(B) - \epsilon > m_*(A) - 2\epsilon.$$

类似的, 我们有

$$\sum_{i=1}^{M}(f(y_i+\ell_i) - f(y_i)) > \sum_{i=1}^{M} r\ell_i > r(m_*(A) - 2\epsilon).$$

由定义, 每个 $[y_i,y_i+\ell_i]$ 均包含在某个 $[x_j-h_j,x_j]$ 中. 对任意 $1 \le j \le N$, 令

$$\mathcal{I}_j := \{1 \le i \le M : [y_i,y_i+\ell_i] \subset [x_j-h_j,x_j]\}.$$

则由 f 单调递增性, 我们有

$$f(x_j) - f(x_j-h_j) \ge \sum_{i\in\mathcal{I}_j}(f(y_i+\ell_i) - f(y_i)).$$

从而

$$
\begin{aligned}
s(1+\epsilon)m_*(A) &> \sum_{j=1}^{N}(f(x_j)-f(x_j-h_j)) \geq \sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in\mathcal{I}_j}(f(y_i+\ell_i)-f(y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{M}(f(y_i+\ell_i)-f(y_i)) > r(m_*(A)-2\epsilon).
\end{aligned}
$$

令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $sm_*(A) \geq rm_*(A)$. 因为 $r > s$, 该不等式成立当且仅当 $m_*(A)=0$. 与假设矛盾! 由此我们即证得 $m_*(A)=0$, 从而 $f'(x)$ 几乎处处存在.

下面我们证 (iii). 由前述讨论, 这也蕴含了 (ii). 对任意 $n \geq 1$, 令

$$
f_n(x) = n\left(f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-f(x)\right), \quad \forall x \in [a,b].
$$

其中若 $x+\frac{1}{n} > b$, 则令 $f(x+\frac{1}{n}) := f(b)$. 因为 f' 几乎处处存在, 我们有

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x), \quad a.e.\ x \in (a,b).
$$

特别的, 因为 f 可测[29], f' (作为可测函数的极限函数) 也可测. 从而

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{Fatou}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b nf(x+\tfrac{1}{n})\,\mathrm{d}x - \int_a^b nf(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= f(b)-f(a).
\end{aligned}
$$

这里倒数第二个不等式用到了当 $b \leq x \leq b+\frac{1}{n}$ 时 $f(x)=f(b)$, 当 $a \leq x \leq a+\frac{1}{n}$ 时, $f(x) \geq f(a)$ (因为 f 单调递增). 命题得证. □

23.1 绝对连续函数

我们注意到定理 22.2 (iii) 中的不等式不能改进到等式. 回忆 Cantor-Lebesgue 函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足如下性质: f 连续单调递增, $f(0)=0$, $f(1)=1$, f 几

[29] 在作业中我们证明单调递增函数可测.

乎处处可微且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in(0,1)$. 从而

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 0 < 1 = f(1)-f(0).$$

因此单调递增性 (或有界变差性) 并不足够确保 Newton-Leibniz 公式. 为此我们需要一个强一些的条件, 这个条件便是绝对连续性. 我们将会看到绝对连续性是函数满足 Newton-Leibniz 公式的充分必要条件. 我们首先给出绝对连续函数的定义.

定义 23.1. *设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 若对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对 $[a,b]$ 中任意有限个两两不交的开区间 $(a_1,b_1),\cdots,(a_N,b_N)$, 只要 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$, 则有 $\sum_{k=1}^N|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$, 则称 f 在 $[a,b]$ 上**绝对连续** (absolutely continuous), 记为 $f\in AC[a,b]$.*

注记 23.2. *(i) 绝对连续蕴含了一致连续.*

(ii) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续可微 (即 $f'\in C([a,b])$, 则 $f\in AC[a,b]$.

证明. 因为 $f'\in C([a,b])$, 存在 $M>0$ 使得 $|f'|\le M$. 特别的, 由微分中值定理有

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|,\quad \forall\, a\le x<y\le b. \tag{45}$$

下面我们证 f 绝对连续. 对任意 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\epsilon}{M}$. 则对任意满足 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$ 的两两不交子区间 $(a_1,b_1),\cdots,(a_N,b_N)\subset[a,b]$, 由 (45) 我们有

$$\sum_{k=1}^N|f(b_k)-f(a_k)|\le\sum_{k=1}^N M(b_k-a_k)<M\delta=M\times\frac{\epsilon}{M}=\epsilon.$$

从而 f 绝对连续. □

*(iii) 称 f 在 $[a,b]$ 上 **Lipschitz 连续**若存在 $M>0$ 使得 (45) 成立. 由上述论证我们知道 Lipschitz 连续蕴含绝对连续.*

下面我们将给出一个绝对连续但不 Lipschtitz 连续的例子. 在这之前我们先证明如下命题. 它告诉我们某些积分形式的函数也绝对连续.

命题 23.3. *设 $f\in L^1([a,b])$, 令 $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. 则 $F\in AC[a,b]$.*

证明. 首先回忆 Lebesgue 积分的绝对连续性 (定理 12.6 (2)): 对任意 $f \in L^1([a,b])$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意可测集 $E \subset [a,b]$, 只要 $m(E) < \delta$, 则有 $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon$.

对任意 $\epsilon > 0$, 令 $\delta > 0$ 如上. 对任意满足 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$ 的两两不交子开区间 $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N) \subset [a,b]$, 令 $E := \bigsqcup_{k=1}^N (a_k, b_k)$, 则 $m(E) = \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$. 从而由积分绝对连续性, 我们有 $\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon$. 另一方面, 注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_a^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&= \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \sum_{k=1}^N \int_{(a_k,b_k)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\bigsqcup_{k=1}^N (a_k,b_k)} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon.
\end{aligned}$$

这里倒数第二个等式我们用到了 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^N$ 两两不交的条件. □

例 23.4. *(i) 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续, 但 f 不 Lipschitz 连续.*

证明. 注意到 $f(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, 并且 $g(x) := \frac{2}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$. 从而由命题 23.3 可知 f 绝对连续. 下面我们证 f 不 Lipschitz 连续. 由定义, f Lipschitz 连续当且仅当存在 $M > 0$ 使得

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le M, \quad \forall\, a \le x < y \le b.$$

取 $(x, y) = (0, y)$, 则有

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \to \infty, \quad \text{当 } y \to 0^+.$$

从而上述商无上界, 即证 f 不 Lipschitz 连续. □

(ii) (作业) Cantor-Lebesgue 函数不绝对连续.

24 第二十四讲

5 月 20 日

命题 24.1 (绝对连续函数性质)**.**

(i) $AC[a,b]$ *是一个* $\mathbb{R}$ *上的向量空间.*

(ii) *若* $f, g \in AC[a,b]$, *则* $fg \in AC[a,b]$.

(iii) $AC[a,b] \subset BV[a,b]$. *特别的, 若* $f \in AC[a,b]$, *则* f' *几乎处处存在且* $f' \in L^1([a,b])$.

证明. (i) 的证明是平凡的, 留作练习. (ii) 留作作业. 我们只证明 (iii). 其中 "特别的" 部分可由推论 22.4 推出. 下面我们证明 $\mathrm{AC}[a,b] \subset \mathrm{BV}[a,b]$. 设 $f \in \mathrm{AC}[a,b]$. 由定义对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对 $[a,b]$ 中任意有限个两两不交的开区间 $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N)$, 只要 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$, 则有 $\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.

对任意 $\epsilon > 0$, 令 $\delta > 0$ 如上. 我们断言对任意区间 $I = (x,y) \subset [a,b]$, 只要 $|I| < \delta$, 则 $V_I(f) := V_x^y(f) \leq \epsilon$. 这是因为对任意 I 的划分 $x = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = y$, 开区间 $(t_0, t_1), \cdots, (t_{n-1}, t_n) \subset I$ 两两不交, 并且 $\sum_{j=1}^n |(t_{j-1}, t_j)| = |I| < \delta$, 从而由 δ 的选取我们有

$$V(f, P) = \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \epsilon.$$

因此 $V_x^y(f) = \sup_P V(f,P) \leq \epsilon$. 断言得证. 取正整数 M 充分大使得 $\frac{b-a}{M} < \delta$, 并将区间 $[a,b]$ 分成 M 等分: $[a,b] = \bigsqcup_{k=1}^M I_k$. 注意到每个 I_k 均满足 $|I_k| = \frac{b-a}{M} < \delta$. 从而由断言以及命题 21.10 (i) 我们有

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^M V_{I_k}(f) \leq \sum_{k=1}^M \epsilon = M\epsilon < \infty.$$

因此 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$. □

下面我们证明绝对连续函数的第一个主要定理, 我们将由此证明 Newton-Leibniz 公式.

定理 24.2. *设* $f \in AC[a,b]$. *则* f' *几乎处处存在. 且若* $f' = 0$, *a.e.* $x \in [a,b]$, *则* f *为* $[a,b]$ *上常值函数.*

证明. 给定 $f \in \mathrm{AC}[a,b]$. 由命题 24.1 (iii) 可知 f' 几乎处处存在. 下面假设 $f'=0$, a.e. $x\in[a,b]$, 注意到要证 f 为常值函数, 只需证明 $f(a)=f(b)$. 这是因为对任意 $a\le t_1<t_2\le b$, $f'=0$, a.e. $x\in[t_1,t_2]$. 对 $f|_{[t_1,t_2]}$ 应用此结论即得 $f(t_1)=f(t_2)$. 再由 t_1,t_2 的任意性可知 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

下面我们证明 $f(b)=f(a)$. 由定义对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意满足 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$ 的两两不交子开区间 $(a_1,b_1),\cdots,(a_N,b_N)\subset[a,b]$ 有 $\sum_{k=1}^N|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$. 任取 $\epsilon>0$, 令 $\delta>0$ 如上. 令

$$E:=\{x\in(a,b):f'(x)=0\}.$$

由假设 E 为 $[a,b]$ 中的满测集, 即 $m(E)=b-a$. 对任意 $x\in E$, 令

$$H_x:=\left\{h\in(0,h_x):\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\epsilon\right\},$$

其中 $h_x:=b-x$. 注意到对任意 $h\in H_x$, $[x,x+h]\subset(a,b)$. 并且因为 $f'(x)=0$, $\lim_{h\to0^+}|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|=0$, 因此 H_x 包含一列单调递减到 0 的正数列. 从而

$$\Gamma:=\{[x,x+h]:x\in E,\,h\in H_x\}$$

是 E 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖定理可知存在左至右排列的两两不交闭区间 $[x_1,x_1+h_1],\cdots,[x_N,x_N+h_N]\in\Gamma$ 使得

$$m\left(E\setminus\bigsqcup_{j=1}^N[x_j,x_j+h_j]\right)<\delta.$$

由此即知

$$\sum_{j=1}^N h_j=m\left(\bigsqcup_{j=1}^N[x_j,x_j+h_j]\right)>m(E)-\delta=b-a-\delta. \tag{46}$$

另一方面, 对任意 $1\le j\le N$, 由 Γ 定义有 $|f(x_j+h_j)-f(x_j)|<\epsilon h_j$. 对 j 求和即得

$$\sum_{j=1}^N|f(x_j+h_j)-f(x_j)|<\sum_{j=1}^N\epsilon h_j\le\epsilon(b-a). \tag{47}$$

这里最后一个不等式成立是因为 $\{[x_j,x_j+h_j]\}_{j=1}^N$ 两两不交且均包含在 (a,b) 中.

另一方面, 注意到 $(a,b)\setminus\bigsqcup_{j=1}^N[x_j,x_j+h_j]=\bigsqcup_{i=0}^N(x_i+h_i,x_{i+1})$ 是有限个开区间的不交并. 这里我们令 $x_0=a,h_0=0$ 且 $x_{N+1}=b$. 并且由 (46) 可知

$$\sum_{i=0}^N|((x_i+h_i,x_{i+1})|=(b-a)-\sum_{j=1}^N h_j<\delta.$$

从而由 δ 的选取可知

$$\sum_{i=0}^{N}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|<\epsilon. \tag{48}$$

将 $a<x_1<x_1+h_1<x_2<x_2+h_2<\cdots<x_N+h_N<b$ 重新标号为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_M=b$. 我们有

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum_{k=1}^{M}f(t_k)-f(t_{k-1})\right|\le\sum_{k=1}^{M}|f(t_k)-f(t_{k-1})|,$$

并且注意到上式右端即为不等式 (47) 与 (48) 左端之和. 从而

$$|f(b)-f(a)|\le\epsilon(b-a)+\epsilon=\epsilon(b-a+1).$$

令 $\epsilon\to 0^+$ 即得 $f(b)=f(a)$. 命题得证. □

我们现在可以叙述 Lebesgue 积分理论框架下的微积分基本定理.

定理 24.3 (微积分基本定理)**.**

(i) 设 $F\in AC[a,b]$, 则 F' 几乎处处存在且

$$\int_a^x F'(t)\,dt=F(x)-F(a),\quad \forall x\in[a,b]. \tag{49}$$

(ii) 相反的, 对任意 $f\in L^1([a,b])$, 存在 $F\in AC[a,b]$ 使得 $F'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

在证明定理 24.3 之前, 我们首先给出一个实数轴上 Lebesgue 微分定理的简单推论.

引理 24.4. *设 $f\in L^1([a,b])$, 令 $G(x):=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. 则 $G'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.*

证明. 由命题 23.3 可知 $G\in \mathrm{AC}[a,b]$, 从而再由命题 24.1 (iii) G' 几乎处处存在. 另一方面, 推论 20.4 的一维情形说明

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t=f(x),\quad a.e.\ x\in[a,b].$$

令

$$E:=\left\{x\in(a,b):G'(x)\text{ 存在且 }\lim_{h\to0^+}\tfrac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\right\}.$$

则 E 在 $[a,b]$ 中满测. 对任意 $x\in E$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h)-G(x-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h)-G(x)}{2h}+\lim_{h\to0^+}\frac{G(x)-G(x-h)}{2h}=G'(x).\end{aligned}$$

这里最后一个等式成立是因为 $G'(x)$ 存在. 因为 $E\subset[a,b]$ 为满测集, 命题得证. □

定理 *24.3* 证明. 对 (ii), 只需取 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$. 引理 24.4 说明 $F'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

对 (i), 设 $F\in\mathrm{AC}[a,b]$, 从而由命题 24.1 (iii), F' 几乎处处存在且 $F'\in L^1([a,b])$. 对任意 $x\in[a,b]$, 令 $G(x):=\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$, $H(x):=F(x)-G(x)$. 同样的, $G\in\mathrm{AC}[a,b]$ 且由引理 24.4, $G'(x)=F'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$. 从而 $H\in\mathrm{AC}[a,b]$ 且 $H'(x)=F'(x)-G'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$. 再由定理 24.2 可知存在常数 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $H(x)=c$. 等价的,

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t+c,\quad\forall\, x\in[a,b].$$

代入 $x=a$ 得

$$F(a)=\int_a^a F'(t)\,\mathrm{d}t+c=c.$$

从而

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t+F(a),\quad\forall\, x\in[a,b].$$

即为 (49). □

24.1 复值函数

设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是一个复值函数. 令 $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ 分别为 f 的实部和虚部函数, 即对任意 $x\in[a,b]$, $f(x)=u(x)+iv(x)$. 我们称

(i) f **可测**若 u,v (作为实值函数) 可测.

(ii) f **可积**若 $\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$.

(iii) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x:=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x+i\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x.$$

利用不等式

$$\max(|x|,|y|) \le |z| = \sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y|, \quad \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}. \tag{50}$$

易见 f 可积当且仅当 u, v 可积. 由此可以看出上述复值函数的 Lebesgue 积分是良定义的.

对于复值函数我们同样可以讨论有界变差以及绝对连续的概念. 设 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一复值函数.

(i) 对任意 $[a,b]$ 的划分 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,

$$V(f,P) := \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

为 f 在 $[a,b]$ 上相对于 P 的**变差**, 称

$$V_a^b(f) := \sup_P V(f,P)$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的**全变差**. 若 $V_a^b(f) < \infty$, 则 f 称为**有界变差 (复值) 函数**, 记为 $f \in \mathrm{BV}[a,b]_{\mathbb{C}}$.

(ii) 若对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对 $[a,b]$ 中任意有限个两两不交的开区间 $(a_1,b_1), \cdots, (a_N,b_N)$,

$$\sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上**绝对连续**, 记为 $f \in \mathrm{AC}[a,b]_{\mathbb{C}}$.

注意到这里的定义与之前实值函数有界变差和绝对连续的定义完全相同, 唯一的区别是这里出现的绝对值是指复数绝对值. 利用不等式 (50), 我们同样有如下等价关系.

引理 24.5. *设 $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ 为一复值函数. 则*

(i) $f \in BV[a,b]_{\mathbb{C}}$ 当且仅当 $u, v \in BV[a,b]$.

(ii) $f \in AC[a,b]_{\mathbb{C}}$ 当且仅当 $u, v \in AC[a,b]$.

证明. 留给同学们自己验证. □

利用与之前几乎完全相同的证明, 我们可以验证复值函数也满足实值函数所满足的大部分有关有界变差和绝对连续性的命题[30]. 这里我们将接下来需要用到的性质罗列出来.

[30]除了关于单调函数的一些结论, 因为对复值函数我们并不考虑其单调性. 此时我们用其实部和虚部函数来替代讨论.

命题 24.6. 设 $f \in BV[a,b]_{\mathbb{C}}$. 则

(i) $V_a^b(f) \geq |f(b) - f(a)|$.

(ii) 对任意 $x \in [a,b]$, $V_a^b(f) = V_a^x(f) + V_x^b(f)$. 从而函数 $x \mapsto V_a^x(f)$ 单调递增.

(iii) f' 几乎处处存在且 $f' \in L^1([a,b])$.

证明. 对 (i), 由引理 21.9 (i) 完全一样的证明可知对任意 $[a,b]$ 的划分 $P, V(f,P) \geq |f(b) - f(a)|$, 从而

$$V_a^b(f) = \sup_P V(f,P) \geq |f(b) - f(a)|.$$

(ii) 的证明与命题 21.10 的证明完全相同, 只是需要将实数绝对值替换成复数绝对值. (iii) 是推论 22.4 的直接推论, 并且注意到 f' 可积当且仅当 u', v' 可积且 $f \in \mathrm{BV}[a,b]_{\mathbb{C}}$ 当且仅当 $u, v \in \mathrm{BV}[a,b]$. □

命题 24.7. $AC[a,b]_{\mathbb{C}} \subset BV[a,b]_{\mathbb{C}}$.

证明. 证明与命题 24.1 (iii) 证明相同. □

推论 24.8. 设 $F \in AC[a,b]_{\mathbb{C}}$. 则

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

证明. 令 $f = u + iv$, 其中 u, v 分别为 f 的实部和虚部函数. 由引理 24.5, $u, v \in \mathrm{BV}[a,b]$. 从而由定理 24.3 我们有对任意 $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^x v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= u(x) - u(a) + i(v(x) - v(a)) \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

命题得证. □

作为推论 24.8 的应用我们证明绝对连续性的另外一个等价刻画.

命题 24.9. 设 $f \in BV[a,b]_{\mathbb{C}}$, 则

$$f \in AC[a,b]_{\mathbb{C}} \quad \Leftrightarrow \quad V_a^x(f) = \int_a^x |f'(t)|\,dt,\ x \in [a,b].$$

证明. 首先证明 "$\Leftarrow$". 令 $F(x) := V_a^x(f)$, $x \in [a,b]$. 由假设 $F(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. 因为 $f \in \mathrm{BV}[a,b]_{\mathbb{C}}$, 从而 $f' \in L^1([a,b])$ (命题 24.6 (iii)). 再由命题 23.3, $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. 从而由绝对连续性定义对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意满足 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$ 的两两不交的子区间 $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N) \subset [a,b]$, 有 $\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$. 注意到

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| \overset{\text{命题24.6(i)}}{\leq} \sum_{k=1}^N V_{a_k}^{b_k}(f) \overset{\text{命题24.6(ii)}}{=} \sum_{k=1}^N |V_a^{b_k}(f) - V_a^{a_k}(f)| \tag{51}$$

$$= \sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon. \tag{52}$$

从而 f 绝对连续.

下证 "$\Rightarrow$" 方向. 设 $f \in \mathrm{AC}[a,b]$ 且令 $F(x) = V_a^x(f)$ 如上. 我们要证 $F(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. 首先证对任意 $x \in [a,b]$,

$$F(x) \leq \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

固定 $x \in [a,b]$, 对任意 $[a,x]$ 的划分 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = x$, 我们有

$$\begin{aligned} V(f,P) &= \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| \overset{\text{推论24.8}}{=} \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

从而

$$F(x) = V_a^x(f) = \sup_P V(f,P) \leq \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

下次课我们再证明 $F(x) \geq \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. $\square$

25 第二十五讲

5 月 22 日

我们首先完成命题 24.9 的证明.

命题 *24.9* 证明: 继续. 设 $f \in \mathrm{AC}[a,b]_{\mathbb{C}}$ 且令 $F(x) = V_a^x(f)$, $x \in [a,b]$. 我们要证对任意 $x \in [a,b]$,

$$F(x) \ge \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

首先注意到由命题 24.6 (ii), F 单调递增. 从而由单调函数微分定理 (定理 22.2) 可知 F' 几乎处处存在且

$$\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t \le F(x) - F(a) = F(x), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

另一方面, $f \in \mathrm{AC}[a,b]_{\mathbb{C}}$ 也说明 f' 几乎处处存在. 令

$$E := \{x \in (a,b) : f'(x), F'(x) \text{ 存在}\}.$$

则 E 在 $[a,b]$ 中满测. 对任意 $x \in E$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{V_a^{x+h}(f) - V_a^x(f)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{V_x^{x+h}(f)}{h} \ge \lim_{h\to 0^+} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} = |f'(x)|. \end{aligned}$$

因为 $E \subset [a,b]$ 为满测集, 我们有 $F'(x) \ge |f'(x)|$, a.e. $x \in [a,b]$. 从而

$$F(x) \ge \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

命题得证. □

25.1 可求长曲线弧长公式

设 γ 为一条连续曲线, $z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ 是 γ 的一个参数化表示, 其中 $x(t), y(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续. 回忆我们称 γ 是可求长的若存在 $M > 0$ 使得对任意 $[a,b]$ 的划分 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 均满足

$$\sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})| \le M.$$

其中这里的绝对值符号是指平面上的欧式范数. 回忆 γ 可求长当且仅当 $x(t), y(t) \in \mathrm{BV}[a,b]$ (命题 21.7).

当 γ 可求长时,

$$L(\gamma) := \sup_P \sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})|$$

为 γ 的弧长. 由微积分知识我们知道当 $x(t), y(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续可微时, γ 满足下列的弧长公式:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \tag{53}$$

我们想要知道是否可以弱化坐标函数连续可微的条件而依然得到上述公式. 显然一个必要条件是 x, y 均几乎处处可微且导函数可积. 然而从下例我们可以看到这一条件并不充分.

例 25.1. *令 $f : [0,1] \to [0,1]$ 为 Cantor-Lebesgue 函数. 则 f 连续单调递增, 且满足 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f' = 0$, a.e. $x \in [0,1]$. 设曲线 γ 由参数方程 $z(t) = (f(t), f(t))$, $t \in [0,1]$ 表示. 则 γ 为一个单位正方形的对角线段, 从而 $L(\gamma) = \sqrt{2}$. 但*

$$\int_0^1 \sqrt{(f'(t))^2 + (f'(t))^2}\, dt = 0 < L(\gamma).$$

下面我们利用命题 24.9 给出弧长公式 (53) 成立的充要条件. 设 $\gamma : z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ 如上. 定义复值函数 $f(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$. 利用复平面 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 的自然对应:$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^d$ 以及其上绝对值的自然对应: $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)|$, 我们容易发现对任意 $[a,b]$ 的任意划分 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,

$$V(f,P) = \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})|.$$

从而

$$V_a^b(f) := \sup_P V(f,P) = \sup_P \sum_{j=1}^n |z(t_j) - z(t_{j-1})| = L(\gamma).$$

并且注意到

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

从而我们有如下命题 24.9 的直接推论.

推论 25.2. *设 $\gamma : z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ 是一条可求长连续曲线. 令 $f(t) = x(t) + iy(t)$ 如上. 则*

$$f \in AC[a,b]_{\mathbb{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{弧长公式 (53) 成立.}$$

注记 25.3. *结合命题 21.7 我们知道 γ 可求长当且仅当 $f \in BV[a,b]_{\mathbb{C}}$; 进一步的, 弧长公式 (53) 成立当且仅当 $f \in AC[a,b]_{\mathbb{C}}$.*

25.2 抽象测度论

接下来我们讨论这学期的最后一章内容: 抽象测度理论. 我们的目标是将欧式空间上的 Lebesgue 测度论抽象化, 从而得到一般集合上的测度论. 给定一个非空集合 X, 为建立 X 上的测度论, 类比于 Lebesgue 测度, 我们需要规定 X 上的 "可测集" 并规定这些可测集的 "大小".

接下来的讨论中我们均假设 X 是一个非空集合, $\mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集全体. 首先我们引入 X 上的 "可测集": 它们由 X 上的一个 σ-代数给出.

定义 25.4. 若 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{M}$;

(ii) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$;

(iii) $E \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; E^c \in \mathcal{M}$;

则称 $\mathcal{M}$ 是 X 上的一个 **σ-代数**.

注记 25.5. 设 $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族 X 上的 σ-代数, 易见 $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$ 也是 X 上的一个 σ-代数. 因此对任意 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, 存在唯一一个最小的包含 $\mathcal{E}$ 的 σ-代数 (即为所有包含 $\mathcal{E}$ 的 σ-代数的交集), 记为 $\sigma(\mathcal{E})$, 称为 **$\mathcal{E}$ 生成的 σ-代数**.

例 25.6. *(i)* $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ 是 X 上的两个平凡 σ-代数.

(ii) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} = \{\mathbb{R}^d$ 上 *Lebesgue* 可测集$\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 σ-代数.

(iii) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \{\mathbb{R}^d$ 上 *Borel* 集$\}$ 也是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 σ-代数; 它是 $\mathbb{R}^d$ 上所有开集生成的 σ-代数.

(iv) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 非空且 *Lebesgue* 可测. 则 $\mathcal{L}_E := \{F \cap E : F \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}\}$ 是 E 上的一个 σ-代数.

(v) X 为不可数集, 则 $\{E \subset X : E$ 或 E^c 可数$\}$ 是 X 上的一个 σ-代数.

有了可测集之后, 下面我们规定这些可测集的大小, 即引入 X 上测度概念.

定义 25.7. *(i)* 设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的一个 σ-代数. 则称二元组 $(X, \mathcal{M})$ 为一个**可测空间**,

(ii) 设 $(X, \mathcal{M})$ 是一个可测空间. 若映射 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ 满足可数可加性, 即

$$\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \text{ 两两不交 } \Rightarrow\; \mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

则称 μ 为 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个**测度**. 称三元组 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个**测度空间**.

(iii) 若测度 μ 满足 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 是一个**有限测度**; 若 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 是一个**概率测度**, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为一个**概率空间**.

例 25.8. *(i)* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}, m)$ 是一个测度空间.

(ii) $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}})$ 也是一个测度空间.

(iii) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 非空且 *Lebesgue* 可测, $\mathcal{L}_E$ 如上. 则 $(E, \mathcal{L}_E, m|_{\mathcal{L}_E})$ 是一个测度空间. 若 $m(E) < \infty$, 则其为一个有限测度空间.

(iv) ***Dirac* 测度**: X 为任一非空集合, $x \in X$. 对任意 $E \subset X$,

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

则 $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ 是一个概率测度空间.

(v) **计数测度**: 设 X 为一非空集合. 对任意 $E \subset X$,

$$\mu(E) := \begin{cases} \#E & \#E < \infty, \\ \infty & \#E = \infty. \end{cases}$$

则 $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ 是一个测度空间. 形式上, "$\mu = \sum_{x \in X} \delta_x$".

我们期望测度满足的一些常见性质可由可数可加性推出.

定理 25.9. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间. 则

(i) *(单调性)* 对任意 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

(ii) *(次可数可加性)* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, 则 $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

(iii) *(单调集列测度连续性)* 设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$.

- 若 $E_j \nearrow$, 则 $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.
- 若 $E_j \searrow$ 且存在 $k \geq 1$ 使得 $\mu(E_k) < \infty$, 则 $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

证明. 我们只证明 (i) 和 (ii); (iii) 的证明与 Lebesgue 测度情形完全相同 (见定理 6.3). 在开始证明前我们注意到对任意 $E, F \in \mathcal{M}$, $E \setminus F \in \mathcal{M}$. 这是因为 $(E \setminus F)^c = (E \cap F^c)^c = E^c \cup F \in \mathcal{M}$. 从而 $E \setminus F \in \mathcal{M}$. 下面我们开始证明. 首先证单调性. 设 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$. 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $E_2 = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1)$. 由刚刚讨论 $E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{M}$. 从而由可数可加性有

$$\mu(E_2) = \mu(E_1 \sqcup E_2 \setminus E_1) = \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) \geq \mu(E_1).$$

下证次可数可加性. 设 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$. 我们想要应用可数可加性, 为此我们构造出一列两两不交的集列: 令 $F_1 := E_1$, 对任意 $k \geq 2$, 令 $F_k := E_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)$. 则注意到 $F_j \in \mathcal{M}$, $F_j \subset E_j$ 且 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j = \bigsqcup_{j=1}^\infty F_j$. 从而

$$\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) = \mu(\bigsqcup_{j=1}^\infty F_j) \overset{\text{可数可加性}}{=} \sum_{j=1}^\infty \mu(F_j) \overset{\text{单调性}}{\leq} \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j).$$

□

下面我们讨论与零测集相关的一些概念.

定义 25.10. *设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间.*

(i) 设 $E \in \mathcal{M}$. 若 $\mu(E) = 0$, 则称 E 是一个 **μ-零测集***, 记 $\mathcal{N} := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$.*

(ii) 若性质 P 在一个 μ-零测集外成立, 则称 P, μ-a.e. 成立.

(iii) 若 $\mathcal{M}$ 包含任意 μ-零测集的所有子集 (即 $\forall E \in \mathcal{N}$ 有 $F \in \mathcal{M}$, $\forall F \subset E$) 则称 μ 是 **完备的***.*

例 25.11. *$(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}, m)$ 完备 (命题 4.9 (2)), 但 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}})$ 不完备. 回忆 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subsetneq \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$, 这是因为存在 Lebesgue 零测的非 Borel 集. 另一方面 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 也仅仅相差这些零测集 (定理 5.5): 对任意 $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$,*

(i) 存在 G_δ 集 $G \supset E$, Lebesgue 零测集 $N_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ 使得 $G = E \cup N_1$;

(ii) 存在 F_σ 集 F, Lebesgue 零测集 $N_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ 使得 $E = F \cup N$.

由上述 (i) 可知 Borel 零测集 G 存在非 Borel 的子集.

上述例子中 Lebesgue 可测集可由在 Borel 集中添加进所有 Borel 零测集的子集得到. 我们称 m 是 $m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}$ 的完备化. 类似的, 对一般的测度空间 (未必完备), 我们可以将所有零测集的子集添加进 σ-代数 $\mathcal{M}$ 从而得到一个完备的测度空间.

定理 25.12. *设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间. 令 $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ 如上,*

$$\overline{\mathcal{M}} := \{E \cup F : E \in \mathcal{M},\ F \subset N \text{ 对某个 } N \in \mathcal{N}\}.$$

则 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 X 上的一个 σ-代数, 并且存在唯一的测度 $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \to [0, \infty]$ 使得 $\overline{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.

注记 25.13. $\overline{\mu}$ 称为 μ 的完备延拓或完备化.

证明. 我们首先验证 $\overline{\mathcal{M}}$ 是一个 σ-代数. 显然 $\emptyset, X \in \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$. 验证 $\overline{\mathcal{M}}$ 在可数并下封闭也相对容易, 我们留作作业. 下面我们证 $\overline{\mathcal{M}}$ 在取补下封闭. 设 $\overline{E} \in \overline{\mathcal{M}}$, 要证 $\overline{E}^c \in \overline{\mathcal{M}}$. 由定义 $\overline{E} = E \cup F$, 其中 $E \in \mathcal{M}$, 且存在 $N \in \mathcal{N}$ 使得 $F \subset N$. 将 F 替换成 $F \setminus E$, N 替换成 $N \setminus E$, 不妨设 $E \cap N = \emptyset$[31]. 从而

$$\begin{aligned}\overline{E}^c &= (E \cup F)^c = E^c \cap F^c = (E^c \cap F^c \cap N^c) \cup (E^c \cap F^c \cap N) \\ &= (E^c \cap N^c) \cup (N \setminus F).\end{aligned}$$

这里最后一个等式用到 $N^c \subset F^c$ (因为 $F \subset N$) 以及 $N \subset E^c$; 也参见图 10. 因为 $E^c \cap N^c \in \mathcal{M}$, $N \setminus F \subset N$ 且 $N \in \mathcal{N}$, 从而 $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. 由此即证得 $\overline{\mathcal{M}}$ 是一个 σ-代数.

剩余关于 $\overline{\mu}$ 的论断我们也留作作业. □

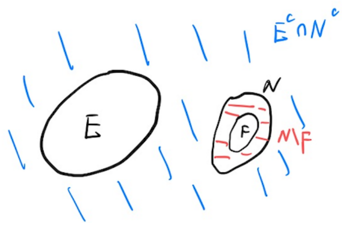

图 10: $E^c \cap F^c = (E^c \cap N^c) \cup N \setminus F$.

[31] 课上我们假设的是 $E \cap F = \emptyset$, 但更准确的应该假设 $E \cap N = \emptyset$.

26 第二十六讲

5 月 27 日

26.1 构造测度

令 X 为一非空集合. 我们今天的目标是要在 X 上构造出测度. 回忆在 Lebesgue 测度的构造过程中我们首先规定了矩体的 “大小” 为其体积, 进一步的我们利用方体覆盖定义了 Lebesgue 外测度 (参见定义 3.1). 这是定义在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 上的一个映射, 并满足一些我们所期待的测度性质 (除了可数可加性); 参见命题 3.6. 最后我们将 Lebesgue 外测度限制在 Lebesgue 可测集 (参见定义 4.7) 上由此定义了 Lebesgue 测度. 为定义 X 上的测度, 我们遵循类似的过程. 首先我们模仿 Lebesgue 外测度的性质定义 X 上的外测度.

定义 26.1. *设 X 是一个非空集合. 若映射 $\mu_*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ 满足*

(i) $\mu_*(\emptyset) = 0$;

(ii) (单调性) 设 $E_1 \subset E_2 \subset X$, 则 $\mu_*(E_1) \le \mu_*(E_2)$;

(iii) (次可数可加性) 设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$, 则 $\mu_*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j)$;

*则称 μ_* 为 X 上的**一个外测度**.*

设 μ_* 是 X 上的一个外测度. 接下来的问题是如何由此诱导出 X 上的一个测度. 对 Lebesgue 测度, 我们引入了 Lebesgue 可测的概念并将 Lebesgue 外测度限制在 Lebesgue 可测集上. 然而 Lebesgue 可测的定义中运用了开集, 在一个一般的 (未引入拓扑的) 集合上并没有开集的概念. 作为替代, 我们引入如下 μ_*-可测的概念. 注意到当 $(X, \mu_*) = (\mathbb{R}^d, m_*)$ 时, 这一条件与 Lebesgue 可测等价 (参见作业 3a).

定义 26.2. *设 μ_* 是 X 上的一个外测度. 集合 $E \subset X$ 称为 **μ_*-可测**若 E 满足*

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A), \quad \forall A \subset X. \tag{54}$$

注记 26.3. *因为 μ_* 满足次可数可加性, 等式 (54) 中的 “$\le$” 一直成立. 因此为验证 (54), 只需证明*

$$\mu_*(A) \ge \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A), \quad \forall A \subset X.$$

下面的定理告诉我们如何从外测度诱导出一个测度.

定理 26.4 (Caratheodory 定理). 设 μ_* 是 X 上的一个外测度, 令

$$\mathcal{M} := \{E \subset X : E\ \mu_*\text{-可测}\}.$$

则 $\mathcal{M}$ 是 X 上的一个 σ-代数且 $\mu := \mu_*|_{\mathcal{M}}$ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个完备测度.

证明. 我们首先证明 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数. 首先注意到等式 (54) 关于 E 和 E^c 对称, 从而 $\mathcal{M}$ 在取补下封闭. 进一步的, 易见 $\emptyset \in \mathcal{M}$. 从而也有 $X = \emptyset^c \in \mathcal{M}$. 因此只需证明 $\mathcal{M}$ 在可数并下封闭. 我们断言:

(i) $E_1, E_2 \in \mathcal{M} \ \Rightarrow\ E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

(ii) 进一步的, 若 E_1, E_2 不交, 则 $\mu_*(E_1 \bigsqcup E_2) = \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2)$.

首先证明断言 (i). 设 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, 令 $E = E_1 \cup E_2$. 对任意 $A \subset X$, 要证

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).$$

因为 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_*(A) &= \mu_*(E_2 \cap A) + \mu_*(E_2^c \cap A)\\ &= \mu_*(E_1 \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1 \cap E_2^c \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2^c \cap A).\end{aligned}$$

注意到

$$(E_1 \cap E_2 \cap A) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap A) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap A) = E \cap A,$$

且 $E_1^c \cap E_2^c = E^c$. 从而由次可数可加性有

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).$$

断言 (i) 得证. 下证断言 (ii). 我们假设 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则

$$\mu_*(E) = \mu_*(E_1 \cap E) + \mu_*(E_1^c \cap E) = \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2).$$

这里第二个不等式成立是因为 $E_1 \cap E = E_1$ 且 $E_1^c \cap E = E_1^c \cap E_2 = E_2$ (因为 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 从而 $E_2 \subset E_1^c$). 断言 (ii) 得证.

下面我们证 $\mathcal{M}$ 在可数并下封闭. 设 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, 令 $G = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 要证 $G \in \mathcal{M}$. 令 $G_k = \bigcup_{j=1}^k E_j$. 由上述断言 (i) 可知 $G_k \in \mathcal{M}$. 令 $F_1 = E_1$, 对任意 $k \geq 2$, 令 $F_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$. 注意到因为 $\mathcal{M}$ 在取补和有限交并下封闭, 我们也有 $\{F_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$. 进一步的我们还有 $\{F_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交且满足

$$G_k = \bigcup_{j=1}^k E_j = \bigsqcup_{j=1}^k F_j, \quad (\forall\, k \geq 1) \quad \text{且} \quad G = \bigcup_{j=1}^\infty E_j = \bigsqcup_{j=1}^\infty F_j.$$

对任意 $A \subset X$, 对任意 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mu_*(A) &\overset{G_k \in \mathcal{M}}{=} \mu_*(G_k \cap A) + \mu_*(G_k^c \cap A) \\
&\geq \mu_*(G_k \cap A) + \mu_*(G^c \cap A) \\
&= \mu_*\left(\bigsqcup_{j=1}^{k} F_j \cap A\right) + \mu_*(G^c \cap A) \\
&= \mu_*(F_k \cap A) + \mu_*\left(\bigsqcup_{j=1}^{k-1} F_j \cap A\right) + \mu_*(G^c \cap A) \\
&\overset{\text{归纳的}}{=} \sum_{j=1}^{k} \mu_*(F_j \cap A) + \mu_*(G^c \cap A).
\end{aligned}$$

这里倒数第二个等式成立是因为 $F_k \in \mathcal{M}$ 且 $F_1, \cdots, F_k$ 两两不交. 令 $k \to \infty$ 即得

$$\mu_*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(F_j \cap A) + \mu_*(G^c \cap A) \geq \mu_*(G \cap A) + \mu_*(G^c \cap A). \tag{55}$$

上述最后一个不等式成立是因为关系 $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} F_j = G$ 以及 μ_* 满足次可数可加性. 再由次可数可加性我们有

$$\mu_*(G \cap A) + \mu_*(G^c \cap A) \geq \mu_*(A).$$

从而不等式 (55) 中均为等式, 即知 $G \in \mathcal{M}$. 进一步的, 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 两两不交, 则 $F_j = E_j$. 令 $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} F_j$. 将其代入 (55) 中第一个等式并注意到 $G^c \cap A = \emptyset$ 即得

$$\mu_*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j \cap A).$$

即 μ_* 在 $\mathcal{M}$ 上满足可数可加性. 因此 $\mu = \mu_*|_{\mathcal{M}}$ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个测度.

最后, 我们证明 μ 是一个完备测度. 设 $E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu_*(E) = 0$. 则对任意 $F \subset E$, 对任意 $A \subset X$, 有

$$\mu_*(F \cap A) \leq \mu_*(E \cap A) \leq \mu_*(E) = 0.$$

从而 $\mu_*(F \cap A) = 0$. 因此

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(F^c \cap A) = \mu_*(F^c \cap A) + \mu_*(F \cap A).$$

即得 $F \in \mathcal{M}$, 从而 μ 完备. □

接下来我们讨论如何在 X 上构造出一个外测度. 在集合 X 上我们往往有一些 "标准集", 对这些标准集我们可以自然的定义其大小 (例如我们规定欧氏空间中的矩体的大小为其体积). 自然的我们期望将这些标准集的大小推广到 X 的任意子集从而得到一个外测度. 在作这样的推广之前, 我们首先引入如下定义.

定义 26.5. 若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ (等价的, $E_1, \cdots, E_N \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^N E_j \in \mathcal{A}$);

(iii) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$;

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的**一个代数**.

定义 26.6. 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个代数. 若映射 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 满足

(i) $\mu_0(\emptyset) = 0$,

(ii) ($\mathcal{A}$ 内可数可加性) 对任意 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ 两两不交且 $\bigsqcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{A}$, 则 $\mu_0(\bigsqcup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(E_j)$,

则称 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的**一个预测度**.

注记 26.7. 回忆一个 σ-代数在可数交并, 取补, 取差集下封闭, 而相应的一个代数也在取补, 取差集下封闭, 但仅在有限交并下封闭. 设 $\mathcal{E} := \{X \text{ 上标准集}\}$, $|\cdot|$ 是自然衡量标准集大小的映射. 我们可以取 $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的 σ-代数. 然而因为 σ-代数在可数交并下封闭, 其中的集合可能会相当复杂, 从而无法直接将 $|\cdot|$ 推广到 $\mathcal{M}$ 上. 相应的, 令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的代数, 因为 $\mathcal{A}$ 中只涉及集合的有限交并, 我们往往可以相对容易地将 $|\cdot|$ 推广到 $\mathcal{A}$ 上. 例如, 设 $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{\mathbb{R} \text{ 上区间}\}$. 则可证 $\mathcal{M} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* σ-代数, 而 $\mathcal{A} = \{\text{区间的有限不交并}\}$ (作业). 我们可以自然地将区间长度推广到 $\mathcal{A}$ 中的元素上. 另一方面, 相比于直接考虑 $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ 具有一定的结构 (在有限交并, 取补, 取差集下封闭), 这会简化我们接下来的一些讨论.

下面的命题告诉我们如何从一个预测度诱导出一个外测度. 再结合定理 26.4, 从而可以在 X 上构造出一个测度.

命题 26.8. 设 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度. 定义

$$\mu_*(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j) : \{E_j\}\subset\mathcal{A}, E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right\}. \tag{56}$$

则

(i) μ_* 是 X 上的一个外测度 *(留作作业)*.

(ii) $\mu_*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

(iii) $\mathcal{A}$ 中元素均 μ_*-可测 *(在* (54) *意义下)*.

27 第二十七讲

5 月 29 日

设 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度. 在证明命题 26.8 之前我们注意到因为预测度定义的性质 (ii), 预测度满足 $\mathcal{A}$ 内的单调性:

$$\text{对任意 } E_1, E_2 \in \mathcal{A}, \text{ 若 } E_1 \subset E_2, \text{ 则 } \mu_0(E_1) \leq \mu_0(E_2).$$

命题 *26.8* 证明. (i) 留作作业. 下面证明 (ii). 设 $E \in \mathcal{A}$, 要证 $\mu_*(E) = \mu_0(E)$. 因为 $E \in \mathcal{A}$ 且 E 为自己本身的覆盖, 由 μ_* 定义我们有 $\mu_*(E) \leq \mu_0(E)$. 下证 $\mu_*(E) \geq \mu_0(E)$. 对任意 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 令

$$F_1 := E \cap E_1, \quad F_k := E \cap (E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j), \quad (\forall\, k \geq 2).$$

因为 $\mathcal{A}$ 在取有限交并以及差集下封闭, 我们有 $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. 并且注意到 $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} F_j = E \in \mathcal{A}$ 以及 $F_j \subset E_j$. 从而由预测度的性质 (ii) 以及单调性我们有

$$\mu_0(E) = \mu_0(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j).$$

由 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 任意性有 $\mu_0(E) \leq \mu_*(E)$.

对 (iii), 设 $E \in \mathcal{A}$, 我们要证对任意 $A \subset X$,

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A). \tag{57}$$

对任意 $\epsilon > 0$, 由 μ_* 定义存在 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ 使得 $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 并且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu_*(A) + \epsilon.$$

另一方面, 对任意 $j \geq 1$ 有 $A_j = (E \cap A_j) \sqcup (E^c \cap A_j)$. 因为 $E, A_j \in \mathcal{A}$, 从而由预测度定义性质 (ii) 有

$$\mu_0(A_j) = \mu_0(E \cap A_j) + \mu_0(E^c \cap A_j).$$

因此

$$\begin{aligned}\mu_*(A) + \epsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E \cap A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap A_j) \\ &\geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).\end{aligned}$$

这里最后一个不等式成立是因为 $E \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j$, $E^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E^c \cap A_j$ 并且 $\{E \cap A_j\}_{j=1}^{\infty}, \{E^c \cap A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. 令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 (57). 命题 (iii) 得证. $\square$

定理 27.1. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu_0, \mu_*)$ 如上. 令 $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数. 则 $\mu := \mu_*|_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个测度且满足 $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. 进一步的, 若 μ σ-有限, 则 μ 是 $\mathcal{M}$ 上唯一的 μ_0 的延拓测度.

证明. 由命题 26.8 (i) 可知 μ_* 是 X 上的一个外测度. 令 $\mathcal{M}' := \{E \subset X : E\ \mu_*\text{-可测}\}$. 则由定理 26.4, $\mathcal{M}'$ 是一个 σ-代数且 $\mu_*|_{\mathcal{M}'}$ 是 $\mathcal{M}'$ 上的一个测度, 即 μ_* 在 $\mathcal{M}'$ 上满足可数可加性. 再由命题 26.8 (iii) 可知 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}'$. 因此 $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}'$ (这是因为 $\mathcal{M}$ 作为 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数, 包含在所有包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数中). 从而 μ_* 在 $\mathcal{M}$ 中也满足可数可加性, 即 $\mu = \mu_*|_{\mathcal{M}}$ 是一个 $\mathcal{M}$ 上的测度. 进一步的, 我们有

$$\mu|_{\mathcal{A}} = (\mu_*|_{\mathcal{M}})|_{\mathcal{A}} = \mu_*|_{\mathcal{A}} = \mu$$

这里的第二等式成立是因为 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, 第三个等式成立是因为命题 26.8 (ii).

下面我们证明唯一性. 假设 μ σ-有限, 即存在 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 使得 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 且对任意 $j \geq 1$, $\mu(E_j) < \infty$. 设 ν 是 $\mathcal{M}$ 上的另一个 μ_0 的延拓测度, 即 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. 我们要证 $\nu = \mu$, 即对任意 $F \in \mathcal{M}$, $\nu(F) = \mu(F)$. 我们断言:

对任意 $E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) \leq \mu(E)$, 且若 $\mu(E) < \infty$, 则 $\nu(E) = \mu(E)$.

首先注意到断言蕴含了唯一性: 对任意 $F \in \mathcal{M}$, 对任意 $k \geq 1$, 令 $F_k = F \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)$. 则注意到 $F_k \nearrow F$ 且 $\mu(F_k) < \infty$ (因为 $E_1, \cdots, E_k$ 相对于 μ 均是有限测度). 从而由断言的第二部分我们有 $\nu(F_k) = \mu(E_k)$. 再由单调集列的测度连续性我们有

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = \lim_{k\to\infty} \nu(F_k) = \nu(F).$$

即证得唯一性. 下面我们证明断言. 在证明之前我们首先注意到

(i) 对任意 $E \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \mu_*(A) = \mu_0(A) = \nu(A)$.

(ii) 对任意 $E \in \mathcal{M}$, $\mu_*(E) = \mu(E)$.

对任意 $E \in \mathcal{M}$, 因为 $\mu(E) = \mu_*(E)$, 由外测度 μ_* 定义 (参见 (56)), 要证 $\nu(E) \leq \mu(E)$, 只需证对任意 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 有 $\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$. 这一不等式成立是因为

$$\nu(E) \leq \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j).$$

即证得 $\nu(E)\le\mu(E)$. 这里第二个不等式用到了测度 ν 的可数可加性, 最后一个等式成立是因为 $E_j\in\mathcal{A}$.

下面我们证若 $\mu(E)<\infty$, 则 $\mu(E)=\nu(E)$. 因为 $\nu(E)\le\mu(E)$ 一直成立, 只需证 $\nu(E)\ge\mu(E)$. 同样的, 由外测度 μ_* 定义, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\{E_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{A}$ 使得 $E\subset\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ 并且

$$\sum_{j=1}^\infty \mu_0(E_j)\le\mu(E)+\epsilon.$$

令 $E_\infty:=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$. 由上述不等式以及测度 μ 的次可数可加性可知

$$\mu(E_\infty)\le\sum_{j=1}^\infty\mu(E_j)=\sum_{j=1}^\infty\mu_0(E_j)\le\mu(E)+\epsilon.$$

另一方面, 注意到 $F_k:=\bigcup_{j=1}^k E_j\in\mathcal{A}$ 且 $F_k\nearrow E_\infty$. 从而由测度连续性我们有

$$\mu(E_\infty)=\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)=\lim_{k\to\infty}\nu(F_k)=\nu(E_\infty).$$

这里的第二个等式用到 $\mu|_\mathcal{A}=\nu|_\mathcal{A}=\mu_0$ 且 $F_k\in\mathcal{A}$. 并且由分解 $E_\infty=E\sqcup(E_\infty\setminus E)$ 以及测度的可数可加性我们有

$$\mu(E_\infty)=\mu(E)+\mu(E_\infty\setminus E),\quad \nu(E_\infty)=\nu(E)+\nu(E_\infty\setminus E).$$

由于 $\mu(E)<\infty$, 上述第一个等式以及关系 $\mu(E_\infty)\le\mu(E)+\epsilon$ 告诉我们

$$\mu(E_\infty\setminus E)=\mu(E_\infty)-\mu(E)\le\epsilon.$$

从而 $\nu(E_\infty\setminus E)\le\mu(E_\infty\setminus E)\le\epsilon$. 因此

$$\nu(E)=\nu(E_\infty)-\nu(E_\infty\setminus E)\ge\nu(E_\infty)-\epsilon=\mu(E_\infty)-\epsilon\ge\mu(E)-\epsilon.$$

令 $\epsilon\to0^+$ 即得 $\nu(E)\ge\mu(E)$. 命题得证. □

27.1 积分理论

接下来我们快速的建立一般测度空间上的积分理论, 其构造过程与 Lebesgue 积分的构造几乎相同, 这里我们只罗列重要的结论而不给出证明.

假设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 是一个测度空间. 我们还假设 μ 是 σ-有限的.

定义 27.2. 设函数 $f:X\to[-\infty,\infty]$ 满足对任意 $a\in\mathbb{R}$, 集合 $\{f<a\}$ 均可测, 即 $\{f<a\}\in\mathcal{M}$, 则称 f **可测**.

命题 27.3. *(i)* 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列可测函数, 则

$$\sup_n f_n,\quad \inf_n f_n,\quad \limsup_{n\to\infty} f_n,\quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

均可测.

1. 设 f, g 可测, 则

$$cf\,(c\in\mathbb{R}),\quad f^+ := \max(f,0),\quad f^- = -\min(f,0),\quad f\pm g,\quad fg$$

均可测, 这里最后两种情形下我们假设 f, g 均是有限实值函数.

定义 27.4. **简单函数**是形如 $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ 的函数, 其中 $a_j \in \mathbb{R}$, $E_j \in \mathcal{M}$.

定理 27.5 (简单函数逼近定理)**.** *(i)* 设 f 非负可测, 则存在一列非负简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k \nearrow f$.

(ii) 设 f 可测, 则存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k \to f$ 且 $|\varphi_k| \nearrow |f|$.

简略证明. (i) 对任意 $k \geq 1$, $1 \leq j \leq k2^k$, 令

$$F_k := \{f \geq k\},\quad E_{j,k} := \left\{\frac{j-1}{2^k} \leq f < \frac{j}{2^k}\right\}.$$

令

$$\varphi_k := k\chi_{F_k} + \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k}\chi_{E_{j,k}}.$$

则可验证 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足所要求的条件.

对 (ii), 将 f 写成 $f = f^+ - f^-$. 由 (i) 存在非负简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k^{(1)} \nearrow f^+$, $\varphi_k^{(2)} \nearrow f^-$. 令 $\varphi_k := \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(1)}$. 则可验证 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足所要求的条件. □

下面我们定义测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的积分.

定义 27.6. *(i)* 设 $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}$ 为非负简单函数, 定义

$$\int \varphi\, d\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

(ii) 设 f 非负可测, 定义

$$\int f\, d\mu := \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : 0 \leq \varphi \leq f \text{ 简单函数}\right\}.$$

(iii) 设 f 可测, 定义

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

这里我们要求 $\int f^+\, d\mu$ 和 $\int f^-\, d\mu$ 至少有一项为有限值. 若 $\int |f|\, d\mu < \infty$, 则称 f **可积**, 记为 $f \in L^1(X, \mu)$.

(iv) 设 $E \in \mathcal{M}$, f 可测. 定义

$$\int_E f\, d\mu := \int f\chi_E\, d\mu.$$

若 $\int_E |f|\, d\mu < \infty$, 则称 f 在 E 上可积, 记为 $f \in L^1(E, \mu)$.

与 Lebesgue 积分类似, 上述定义的积分满足下列性质.

命题 27.7. 设 $f, g \in L^1(X, \mu)$.

(i) *(线性)* 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int(\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu$.

(ii) *(可加性)* 对任意 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则

$$\int_{E_1 \sqcup E_2} f\, d\mu = \int_{E_1} f\, d\mu + \int_{E_2} f\, d\mu.$$

(iii) *(单调性)* 若 $f \le g$, 则 $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$.

(iv) *(三角不等式)* 对任意 $E \in \mathcal{M}$, $\left|\int_E f\, d\mu\right| \le \int_E |f|\, d\mu$.

下面我们叙述测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的一些重要积分收敛定理并简述其证明.

定理 27.8. *(i)* *(MCT)* 设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 非负可测且 $f_k \nearrow f$. 则 $\int f_k\, d\mu \nearrow \int f\, d\mu$.

简略证明. 首先我们有一个简单函数版本的单调收敛定理: 对任意简单函数 φ, 对任意 $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ 满足 $E_k \nearrow E$, 我们有 $\int_{E_k} \varphi\, \mathrm{d}\mu \nearrow \int_E \varphi\, \mathrm{d}\mu$. 这一结论可由单调集列的测度连续性证得.

下面我们开始证明此定理. 因为 $f_k \nearrow f$, $\int f_k\, \mathrm{d}\mu$ 单调递增且不大于 $\int f\, \mathrm{d}\mu$, 从而 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\, \mathrm{d}\mu \le \int f\, \mathrm{d}\mu$. 对任意 $0 < \lambda < 1$, 任意简单函数 φ 满足 $0 \le \varphi \le f$, 令 $E_k := \{f_k \ge \lambda\varphi\}$. 由 $f_k \nearrow f$ 可知 $E_k \nearrow X$. 从而我们有

$$\int f_k\, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E_k} f_k\, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E_k} \lambda\varphi\, \mathrm{d}\mu \nearrow \lambda \int \varphi\, \mathrm{d}\mu.$$

即 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\, \mathrm{d}\mu \ge \lambda \int \varphi\, \mathrm{d}\mu$. 由 φ 任意性再令 $\lambda \to 1$ 我们有 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\, \mathrm{d}\mu \ge \int f\, \mathrm{d}\mu$. □

(ii) *(Fatou)* 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 非负可测. 则 $\int \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu$.

简略证明. 令 $g = \liminf_{k\to\infty} f_k$, $g_k = \inf_{n\ge k} f_n$. 则 $0 \le g_k \le f_k$ 且 $g_k \nearrow g$. 从而由单调收敛定理有

$$\int g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{k\to\infty} \int g_k \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

□

(iii) *(DCT)* 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测且 $f_k \to f$, μ-*a.e.*. 若存在 $g \in L^1(X,\mu)$ 使得 $|f_k| \le g$. 则 $\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\mu = 0$.

简略证明. 令 $h_k = |f_k - f|$. 则由假设有 $0 \le h_k \le 2g$ 且 $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$, μ-a.e.. 对 $\{2g - h_k\}$ 应用 Fatou 引理有

$$\int \liminf_{k\to\infty} (2g - h_k) \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int (2g - h_k) \, \mathrm{d}\mu.$$

上述不等式左端等于 $\int 2g \, \mathrm{d}\mu$, 右端等于 $\int 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}\mu$, 即得 $\limsup_{k\to\infty} \int h_k \, \mathrm{d}\mu \le 0$. 因为 $h_k = |f_k - f| \ge 0$, 即得 $\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$. □

(iv) *(BCT)* 设 $E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(E) < \infty$. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上可测且 $f_k \to f$, μ-*a.e.* $x \in E$. 若存在 $M > 0$ 使得在 E 上 $|f_k| \le M$, 则 $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \, d\mu = 0$.

简略证明. 取 $g = M\chi_E$ 并应用控制收敛定理. □

28 第二十八讲

6 月 3 日

28.1 乘积测度与 Fubini 定理

设 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 是两个测度空间. 我们今天的目标是要在乘积集合

$$X_1 \times X_2 := \{(x, y) : x \in X_2,\, y \in X_2\}$$

上定义一个自然的测度. 首先为定义测度, 我们需要给出 $X_1 \times X_2$ 上的一个 σ-代数. 首先我们自然期望如下集合可测.

定义 28.1. *设 $A \in \mathcal{M}_1$, $B \in \mathcal{M}_2$. 称集合 $A \times B$ 为 $X_1 \times X_2$ 上的一个可测矩形. 记 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 为 $X_1 \times X_2$ 上可测矩形的全体.*

注意到一般而言 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 并不是一个 σ-代数. 令 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$ 为 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 生成的 σ-代数. 我们的目标是要在可测空间 $(X, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$ 上定义 μ_1 与 μ_2 的 "乘积" 测度, 记为 $\mu_1 \times \mu_2$. 自然的, 我们期望

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B), \quad \forall\, A \times B \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2. \tag{58}$$

我们将按照前两次课讨论的 "预测度 $\to$ 外测度 $\to$ 测度" 的步骤来构造这样的乘积测度. 首先我们需要定义出 $X_1 \times X_2$ 上的一个预测度; 它是定义在一个代数上的映射. 令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 生成的代数. 我们有如下 $\mathcal{A}$ 的精确描述.

引理 28.2. *令 $\mathcal{A}$ 如上. 则 $\mathcal{A} = \{$可测矩形的有限不交并$\}$.*

证明. 证明留作作业. □

由引理 28.2 我们知道任意 $E \in \mathcal{A}$ 均可以写成 $E = \bigsqcup_{j=1}^n A_j \times B_j$ 的形式, 其中 $A_j \in \mathcal{M}_1$, $B_j \in \mathcal{M}_2$. 由此我们定义映射

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad E = \bigsqcup_{j=1}^n A_j \times B_j \mapsto \mu_0(E) := \sum_{j=1}^n \mu_1(A_j)\mu_2(B_j).$$

命题 28.3. *令 $\mathcal{A}$ 和 μ_0 如上. 则*

(i) μ_0 *是良定义的.*

(ii) μ_0 *是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度.*

证明. 首先我们证明 μ_0 是良定义的. 任取 $E\in\mathcal{A}$, 设 E 有如下两个有限可测矩形的不交并表示

$$E=\bigsqcup_{j=1}^{n}A_j\times B_j=\bigsqcup_{k=1}^{m}C_k\times D_k.$$

我们要证

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_1(A_j)\mu_2(B_j)=\sum_{k=1}^{m}\mu_1(C_k)\mu_2(D_k). \tag{59}$$

从而 $\mu_0(E)$(定义为这个公共值) 良定义. 首先注意到

$$\chi_E(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j\times B_j}(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y). \tag{60}$$

类似的,

$$\chi_E(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\chi_{C_k}(x)\chi_{D_k}(y).$$

固定 y, 在等式 (60) 左右两端关于 x 作积分我们有

$$\begin{aligned}\int_{X_1}\chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)&=\int_{X_1}\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\\&=\sum_{j=1}^{n}\mu_1(A_j)\chi_{B_j}(y).\end{aligned}$$

再对上述等式左右两端关于 y 作积分可得

$$\begin{aligned}\int_{X_2}\left(\int_{X_1}\chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y)&=\int_{X_2}\sum_{j=1}^{n}\mu_1(A_j)\chi_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\\&=\sum_{j=1}^{n}\mu_1(A_j)\mu_2(B_j).\end{aligned}$$

类似的, 我们有

$$\int_{X_2}\left(\int_{X_1}\chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y)=\sum_{k=1}^{m}\mu_1(C_k)\mu_2(D_k).$$

比较上述两式即得 (59). 注意到这里证明还告诉我们

$$\mu_0(E)=\int_{X_2}\left(\int_{X_1}\chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y),\quad\forall\,E\in\mathcal{A}. \tag{61}$$

下面我们证明 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度. 首先注意到 $\emptyset_X=\emptyset_{X_1}\times\emptyset_{X_2}$, 从而

$$\mu_1\times\mu_2(\emptyset_X)=\mu_1(\emptyset_{X_1})\mu_2(\emptyset_{X_2})=0.$$

其次我们要证明对任意 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, 若 $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交且 $E := \bigsqcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu_0(E) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(E_j).$$

因为每个 E_j 是有限个可测矩形的不交并且 $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交, 我们不妨设 $E_j = A_j \times B_j$ 均为可测矩形. 从而我们有

$$\chi_E(x,y) = \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y), \quad \forall\,(x,y) \in X.$$

因为 $E \in \mathcal{A}$, 结合等式 (61) 可知

$$\begin{aligned}
\mu_0(E) &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y) \\
&= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y) \\
&= \int_{X_2} \left(\sum_{j=1}^\infty \chi_{B_j}(y) \int_{X_1} \chi_{A_j}(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y) \\
&= \int_{X_2} \sum_{j=1}^\infty \chi_{B_j}(y)\mu_1(A_j)\,\mathrm{d}\mu_2(y) \\
&= \sum_{j=1}^\infty \mu_1(A_j)\mu_2(B_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(E_j).
\end{aligned}$$

命题得证. 这里第三和最后一个等式用到了逐项积分定理 (参见推论 11.5[32]).

□

因为 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度, 令 μ_* 为 μ_0 诱导的外测度 (见 (56)). 从而由定理 27.1 可知 $\mu_1 \times \mu_2 := \mu_*|_{\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2}$ 是 σ-代数 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 上的一个测度. 由此我们构造出了一个乘积测度空间: $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$. 注意到 $\mu_1 \times \mu_2$ 满足 $\mu_1 \times \mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. 特别的, $\mu_1 \times \mu_2$ 满足 (58). 另一方面, 容易证明若 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 与 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 均 σ-有限, 则 $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 也 σ-有限; 但这两个子测度空间完备推不出乘积测度空间完备.

接下来我们讨论乘积测度空间上的 Fubini 定理, 即我们想要知道在 $X_1 \times X_2$ 上的积分是否可以转化成在两个子测度空间上的二重积分. 类似于 Lebesgue 测度情形, 我们引入如下切片函数及切片集合的定义.

---

[32] 推论 11.5 是相对于 Lebesgue 测度的特殊情形, 但它的证明 (利用单调收敛定理) 可直接推广到一般测度空间情形.

定义 28.4. *(i)* 设 $E \subset X_1 \times X_2$. 对任意 $x \in X_1, y \in X_2$

$$E_x := \{y \in X_2 : (x,y) \in E\}, \quad E^y := \{x \in X_1 : (x,y) \in E\}$$

分别称为 E 关于 x 和 y 的**切片集合**.

(ii) 设 f 为 $X_1 \times X_2$ 上函数. 对任意 $x \in X_1$, $y \in X_2$,

$$f_x(y) := f(x,y), \qquad f^y(x) := f(x,y)$$

分别称为 f 关于 x 和 y 的**切片函数**.

在接下来的讨论中我们假设 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ **与** $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ **均** σ**-有限且完备**. 注意到在一个完备测度空间上, 因为零测集的任意子集均可测, 两个几乎处处相等的函数的可测性等价.

我们有如下一般乘积空间上的 Fubini 定理.

定理 28.5 (Fubini)**.** 设 $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$, 则

(F1) 对 μ_2-*a.e.* $y \in X_2$, $f^y \in L^1(X_1, \mu_1)$.

(F2) 函数 $y \mapsto \int_{X_1} f^y(x)\, d\mu_1(x)$ 在 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 上可积.

(F3)

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \tag{62}$$

类似于 Lebesgue 测度情形, 我们也有如下一般乘积测度空间上的 Tonelli 定理.

定理 28.6 (Tonelli)**.** 设 f 为 $X_1 \times X_2$ 上的非负可测函数, 则

(T1) 对 μ_2-*a.e.* $y \in X_2$, f^y 可测.

(T2) 函数 $y \mapsto \int_{X_1} f^y(x)\, d\mu_1(x)$ 可测.

(T3) 等式 (62) 成立, 并且左右两端允许为 $+\infty$.

与 Lebesgue 测度情形类似, 一般乘积测度空间上的 Tonelli 定理可由 Fubini 定理推出 (利用截断以及单调收敛定理). 我们下面只证明定理 28.5. 注意到 Lebesgue 测度下的 Fubini 定理证明用到了欧氏空间上的开集结构定理, 因此并不能直接推广到这里. 为避开这一部分证明, 我们引入如下两个集合族.

设 $\mathcal{A}$ 是非空集合 X 上的一个代数, 我们在作业中定义了集合族

$$\mathcal{A}_\sigma := \left\{\cup_{j=1}^\infty E_j : E_j \in \mathcal{A}\right\}$$

以及

$$\mathcal{A}_{\sigma\delta} := \left\{\cap_{j=1}^\infty F_j : F_j \in \mathcal{A}_\sigma\right\}.$$

我们在作业中证明了这两个集合族满足如下性质.

命题 28.7. *设 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度, μ_* 是其诱导的外测度. 则*

(i) *对任意 $E \subset X$, $\epsilon > 0$, 存在 $A \in \mathcal{A}_\sigma$ 使得 $E \subset A$ 且 $\mu_*(A) \le \mu_*(E) + \epsilon$.*

(ii) *若 $\mu_*(E) < \infty$, 则 E 是 μ_*-可测当且仅当存在 $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 使得 $E \subset F$ 且 $\mu_*(F \setminus E) = 0$.*

注记 28.8. *显然 $\mathcal{A}_\sigma$ 在有限并下封闭. 注意到 $\mathcal{A}_\sigma$ 也在有限交下封闭: 设 $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$, 即 $A = \bigcup_j E_j$, $B = \bigcup_j F_j$, 其中 $E_j, F_j \in \mathcal{A}$. 则*

$$A \cap B = (\cup_j E_j) \cap (\cup_k F_k) = \cup_{j,k} E_j \cap F_k.$$

因为 $E_j \cap F_k \in \mathcal{A}$, 即得 $A \cap B \in \mathcal{A}_\sigma$.

下面我们开始证明 Fubini 定理. 定义

$$\mathcal{F} := \left\{f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2) : f \text{ 满足条件 (F1), (F2), (F3)}\right\}.$$

我们要证 $\mathcal{F} = L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$. 显然 $\mathcal{F} \subset L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$, 因此只需证 $L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2) \subset \mathcal{F}$. 首先注意到利用与引理 16.6 和 16.7 几乎一样的证明可知 $\mathcal{F}$ 在线性组合以及极限下封闭. 总结如下:

引理 28.9. *(i)* *对任意 $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$.*

(ii) *设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ 且 $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$. 若 $f_k \nearrow f$ 或 $f_k \searrow f$, 则 $f \in \mathcal{F}$.*

注记 28.10. *在接下来的证明中我们将首先证明某些示性函数落在 $\mathcal{F}$ 中. 注意到当 $f = \chi_E$ 为一个示性函数时, Fubini 定理中的三个条件分别等价于*

(F1') *对 μ_2-a.e. $y \in X_2$, $E^y \in \mathcal{M}_1$ 且 $\mu_1(E^y) < \infty$.*

(F2') *函数 $y \mapsto \mu_1(E^y)$ 在 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 上可积.*

(F3') *$\mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{X_2} \mu_1(E^y)\, d\mu_2(y)$.*

首先我们证明 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 中的有限测度集合的示性函数均落在 $\mathcal{F}$ 中.

命题 28.11. *设 $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 且 $\mu_1 \times \mu_2(E) < \infty$, 则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.*

证明. **情形 1**: $E = A \times B \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. 此时我们有

$$E^y = \begin{cases} A & y \in B, \\ \emptyset & y \notin B. \end{cases}$$

由此易验证 χ_E 满足条件 (F1'-3'), 从而 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 2: $E \in \mathcal{A}$. 此时由引理 28.2 可知, $E = \bigsqcup_{j=1}^n A_j \times B_j$ 是有限个可测矩形的不交并. 从而 $\chi_E = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j \times B_j}$. 由情形 1 可知每个 $\chi_{A_j \times B_j}$ 均落在 $\mathcal{F}$ 中, 从而再由引理 28.9 (i) 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 3: $E \in \mathcal{A}_\sigma$. 此时 $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 其中 $E_j \in \mathcal{A}$. 令 $f_k = \chi_{\bigcup_{j=1}^k E_j}$. 因为代数 $\mathcal{A}$ 在有限并下封闭, 由情形 2 可知 $f_k \in \mathcal{F}$. 注意到 $f_k \nearrow \chi_E$, 且因为 E 测度有限, $\chi_E \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$. 从而由引理 28.9 (ii) 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 4: $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. 此时 $E = \bigcap_{j=1}^\infty F_j$, 其中 $F_j \in \mathcal{A}_\sigma$. 我们再额外假设 $\mu_1 \times \mu_2(F_1) < \infty$. 令 $f_k = \chi_{\bigcap_{j=1}^k F_j}$. 注意到 $f_k \searrow \chi_E$. 并且由注记 28.8, 情形 3 以及 F_1 有限测度假设, 我们知道 $f_k \in \mathcal{F}$. 从而再由引理 28.9 (ii) 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

情形 5: $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. 此时依然存在 $\{F_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\sigma$ 使得 $E = \bigcap_{j=1}^\infty F_j$, 但 F_1 未必具有有限测度. 此时由 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 与 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 均 σ-有限假设, 我们知道 $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 也 σ-有限, 从而存在集列 $\{A'_j\} \subset \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 使得 $X_1 \times X_2 = \bigcup_j A'_j$ 且对任意 $j \geq 1$, $\mu_1 \times \mu_2(A'_j) < \infty$. 由命题 28.7 (i) 可知存在 $A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ 使得 $A'_j \subset A_j$ 且 $\mu_1 \times \mu_2(A_j) \leq \mu_1 \times \mu_2(A'_j) + 1 < \infty$. 显然 $X_1 \times X_2 = \bigcup_j A_j$. 对任意 $k \geq 1$, 令 $B_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$. 因为 $\mathcal{A}_\sigma$ 在有限并下封闭, 我们有 $\{B_k\} \subset \mathcal{A}_\sigma$. 另一方面, 注意到 $\{B_k\}$ 单调递增且 $X_1 \times X_2 = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. 对任意 $k \geq 1$, 令 $E_k := E \cap B_k$, 则 $\chi_{E_k} \nearrow \chi_E$. 另一方面, $E_k = \bigcap_{j=1}^\infty (F_j \cap B_k)$. 因为 $\mathcal{A}_\sigma$ 还在有限交下封闭, $\{F_j \cap B_k\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\sigma$, 从而 $E_k \subset \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. 并且我们还有 $\mu_1 \times \mu_2(F_1 \cap B_k) < \infty$. 从而由情形 4 可知 $\chi_{E_k} \in \mathcal{F}$. 再由引理 28.9 (ii) 以及 $\chi_{E_k} \nearrow \chi_E$ 可知 $\chi_E \in \mathcal{F}$. 命题得证. □

命题 28.12. *设 $E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 且 $\mu_1 \times \mu_2(E) < \infty$, 则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.*

证明. 首先我们假设 E 为零测集. 则由命题 28.7 (ii) 可知存在 $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 使得 $E \subset F$ 且 F 为零测集. 特别的, $\chi_F \in \mathcal{F}$, 即 F 满足

(i) 对 μ_2-a.e. $y \in X_2$, $F^y \in \mathcal{M}_1$ 且 $\mu_1(F^y) < \infty$.

(ii) 函数 $y \mapsto \mu_1(F^y)$ 在 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 上可积.

(iii) $\int_{X_2} \mu_1(F^y)\,\mathrm{d}\mu_2(y) = 0$.

因为对任意 $y \in X_2$, $E^y \subset F^y$. 由上述 (i) 以及 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 的完备性可知对 μ_2-a.e. $y \in X_2$, E^y 也可测且测度有限. 再结合上述 (iii) 可知 $\mu_1(E^y) = 0$, μ_2-a.e. $y \in X_2$. 从而函数 $y \mapsto \mu_1(E^y)$ 几乎处处为零, 再由 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 的完备性可知此函数可测, 并且显然可积. 最后我们有

$$\int_{X_2} \mu_1(E^y)\,\mathrm{d}\mu_2(y) = \int_{X_2} 0\,\mathrm{d}\mu_2(y) = 0 = \mu_1 \times \mu_2(E).$$

从而 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

对一般有限测度的可测集 $E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, 再由命题 28.7 (ii) 可知存在 $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 使得 $E \subset F$ 且 $\mu_1 \times \mu_2(F \setminus E) = 0$. 令 $Z = F \setminus E$. 注意到 $\chi_E = \chi_F - \chi_Z$. 因为 Z 为零测集, 由上述情形可知 $\chi_Z \in \mathcal{F}$. 并且因为 $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 由命题 28.11 可知 $\chi_F \in \mathcal{F}$. 最后再由引理 28.9 (i) 可知 $\chi_E = \chi_F - \chi_Z \in \mathcal{F}$. 命题得证. □

Fubini **定理证明**. 设 $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$. 将 f 写成 $f = f^+ - f^-$ 的形式. 由简单函数逼近定理可知存在可积非负简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}\}$, $\{\varphi_k^{(2)}\}$ 使得 $\varphi_k^{(1)} \nearrow f^+$, $\varphi_k^{(2)} \nearrow f^-$. 由命题 28.12 以及引理 28.9 (i) 可知 $\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)} \in \mathcal{F}$. 从而再由引理 28.9 (ii) 可知 $f^\pm \in \mathcal{F}$. 最后再由引理 28.9 (i) 可知 $f = f^+ - f^- \in \mathcal{F}$. 命题得证. □