2.3 复变函数的导数与解析函数的概念

1.导数的定义:

设$w=f(z)$ 在z 的某个领域U 内有定义，$z+\Delta z\in U$.

$\boxed{\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\ \Delta y}$

如果 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在，则称 $f(z)$ 在z可微(或可导).

称 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 为 $f(z)$ 在 z 的导数或微商.

记作 $f'(z)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\tilde{z}\to z}\dfrac{f(\tilde{z})-f(z)}{\tilde{z}-z}$.

注：$\Delta z\to 0$(即$z+\Delta z\to z$)的方式是任意的.

解析

- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点z可微, $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$,

  则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数.

- 如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内 $\{z\,\|z-z_0|<\delta\}$ 内每一点可微,

  则称 $f(z)$ 在 z_0 解析. ★★★

- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 即 $f(z)$ 在 z_0 的任一邻域内

  都有不可微的点, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

- 对闭区域 $\bar{D}$, 若 $f(z)$ 在包含 $\bar{D}$ 的某个区域 G(开) 内 解析,

  $$(\bar{D}\subset G)$$

  则称 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析.

- 若$f(z)$在z可微，则$f(z)$在z连续. (P 25)

证明　若$f(z)$在z可微，记$\alpha(z,\Delta z)\equiv\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)$,

则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$, 进而 $\alpha\Delta z=o(|\Delta z|)$.

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|). \quad (2.2)(P25)$$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(f(z+\Delta z)-f(z))=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|)\right)=0.$

故$f(z)$在z连续. #

例4(P 26) 求证 $f(z)=z^n$是解析函数, n是任意正整数.

证明：$\forall z\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

$\boxed{\text{二项式定理}}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\cancel{z^n}+C_n^1 z^{n-1}\Delta z+C_n^2 z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+C_n^n(\Delta z)^n-\cancel{z^n}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left\{C_n^1 z^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right\}$$

$$=C_n^1 z^{n-1}=nz^{n-1}.$$

故 $f(z)=z^n$ 处处可微, 且 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

故 $f(z)=z^n$在全平面解析. #

由于复函数导数定义与数学分析中实函数导数定义类似，故类似地有如下求导法则(P26)：

条件：等式两边导数都存在.

- $(c)' = 0$，c是复常数.
- $(z^n)' = nz^{n-1}$，$n \in \mathbb{Z}^+$. (P 26例4)

(1) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(2) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(3) $g(z) \neq 0$时，$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

(4) $\{f(g(z))\}' = \left\{f'(w)\big|_{w=g(z)}\right\} g'(z)$.

(5) $f'(z) = \dfrac{1}{\phi'(w)}$，其中 $w = f(z)$与$z = \phi(w)$是两个互为反函数的单值函数，且$\phi'(w) \neq 0$.

• $(c)'=0$, c是复常数.

• $(z^n)'=nz^{n-1}$, $n\in\mathbb{Z}^+$. (P26例4)

(1) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

(2) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(3) $g(z)\neq 0$时, $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

(1) 多项式 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n$, 全平面解析,

$$\boxed{P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}.}$$

(2) 有理函数 $w=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式,

在全复平面, 除掉使分母$Q(z)=0$的点外, 处处可微.

$Q(z)\neq 0$时, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)=\dfrac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$. 背熟

• 若$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在全平面解析, 则此结论也成立,

此时使得分母$Q(z)=0$的点是 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 仅有的奇点. ★★★★★

(2) 有理函数 $w=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式，

在全复平面，除掉使分母$Q(z)=0$的点外，处处可微.

$Q(z)\neq 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)=\dfrac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$. 背熟

• 若$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在全平面解析，则此结论也成立，

此时使得分母$Q(z)=0$的点是 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 仅有的奇点. ★★★★★

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\text{在区域}D\text{的奇点有}\begin{cases}1.\ P(z)\text{在}D\text{内的奇点，}\\ 2.\ Q(z)\text{在}D\text{内的奇点，}\\ 3.\ \text{在}D\text{内使分母}Q(z)=0\text{的点.}\end{cases}$$

★★★★★

(3) $g(z)\neq 0$时，$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

例7′(P 29) 研究函数 $w=\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 的解析性.

解 由$(z-\mathrm{i})^2=0$ 解得 $z=\mathrm{i}$.

由导数的运算法则得，当$z\neq\mathrm{i}$时，$\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$可微，解析，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z}{(z-\mathrm{i})^2}\right\}=\frac{1\cdot(z-\mathrm{i})^2-z\cdot 2(z-\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})^4}=\frac{(z-\mathrm{i})-2z}{(z-\mathrm{i})^3}=-\frac{z+\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^3}.$$

$z=\mathrm{i}$ 是 $\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$的唯一奇点． #

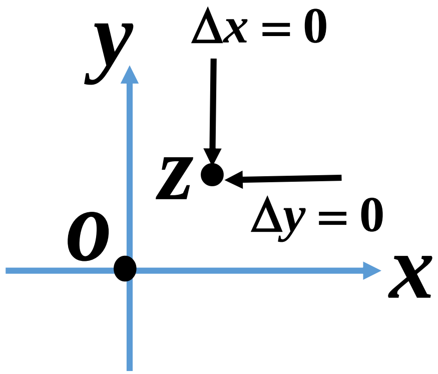
例5(P 26) 设$z = x + \mathrm{i}\, y$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$,则

则$f(z) = x + \mathrm{i}\,\lambda y$在$z$平面处处连续, 但处处不可微.

解 (2) 关于可微性：$\forall z = x + \mathrm{i}\, y,\ x, y \in \mathbb{R}$, $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y$,

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\{x+\Delta x+\mathrm{i}\lambda(y+\Delta y)\} - (x+\mathrm{i}\lambda y)}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

$$= \frac{\Delta x + \mathrm{i}\,\lambda\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \text{当}\Delta y = 0,\ \Delta x \neq 0\text{时}, \\ \dfrac{\mathrm{i}\,\lambda\Delta y}{\mathrm{i}\,\Delta y} = \lambda, & \text{当}\Delta x = 0,\ \Delta y \neq 0\text{时}, \\ \cdots\cdots & \end{cases}$$



故当$\lambda \neq 1$时，$f(z) = x + \mathrm{i}\,\lambda y$ 在z平面处处不可微. #

特别是, 取$\lambda = -1$, $f(z) = \bar{z}$, 处处不可微. 记下背熟

★★★★★

但是, $u(x, y) = x$和$v(x, y) = \lambda y$ 在xy平面处处可微的.

由$f(z)=x+\mathrm{i}\lambda y(\lambda\neq 1$时$)$,特别是$f(z)=\bar{z}$在全平面处处不可微发现:

$u(x,y)$和$v(x,y)$都在点(x_0,y_0)可微时,

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$仍有可能在点$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$不可微.

如何直接判断一个复函数在某一点是否可微?
(按定义分析有点麻烦)

2.4 柯西-黎曼方程

将给出:
直接判断一个复函数在某一点是否可微的方法.

2.4 柯西—黎曼方程

★★★★★

定理2(P28) (可微的充要条件)

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，则

$f(z)$在点$z=x+\mathrm{i}y\in D$可微的充要条件是：

(1) $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)都可微；

(2) $u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x,y)满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (*)$$

同时成立.

★★★★★ (熟记)

条件(*)称为柯西—黎曼方程(C-R方程) .

定理2(P28) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，则 $f(z)$在点$z=x+\mathrm{i}y\in D$可微的充要条件是：在点(x,y)，(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$可微，(2) $\underline{\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}}$，(称为C-R方程).

证明：1)充分性. 设在点(x,y)，u,v可微，且满足C-R方程.

记 $\underline{a\triangleq\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad -b\triangleq\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}}$. $\forall\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$, $|\Delta z|$充分小时，

$$\underline{f(z+\Delta z)-f(z)}=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+\mathrm{i}\{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+o(|\Delta z|)$$

$$=\underline{a\Delta x\underline{-b}\Delta y+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y)}+o(|\Delta z|)\qquad\boxed{-1=\mathrm{i}^2}$$

$$=\underline{(a+\mathrm{i}b)}(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o(|\Delta z|)=\underline{(a+\mathrm{i}b)\Delta z+o(|\Delta z|)}.$$

故 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b$. 故$f(z)$在$z$可微.

定理2(P28) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在D内任一点$z=x+\mathrm{i}y$ 可微的充要条件是：在点(x,y), (1) $u(x,y)$与$v(x,y)$可微, (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (C-R方程).

2) 必要性. 若$f(z)$在z可微，记$f'(z)=a(x,y)+\mathrm{i}b(x,y)$，则

$\forall \Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，$|\Delta z|$充分小，由(P25)(2.2)有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|)=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o(|\Delta z|)$$

$$=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{i}(a\Delta y+b\Delta x)+o(|\Delta z|).$$

另, $f(z+\Delta z)-f(z)=\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\}+\mathrm{i}\{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\}$.

故 $u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)$,

$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)$.

故在点(x,y), (1) u 与v 可微, (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-b=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. #

$$f'(z)=a+\mathrm{i}b=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.7)$$

(P28)

熟记

根据定理2和解析定义，得

定理3(P28-29) (解析的充要条件)

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内解析

(即在D内处处可微) 的充要条件是:

(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$在 D 内处处可微,

(2) 在 D 内处处满足C-R方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- 用定理2,3(P28-29) 判断函数的可微性和解析性.

★★★★★

例6(P29) 试证：$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$在全平面解析，$f'(z)=f(z)$.

证明 $u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\sin y$， u,v在全平面可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$，处处满足C-R方程.

故$f(z)$在全平面内处处可微，故在全平面解析，

且 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z)$. #

注：$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x e^{iy}\triangleq e^{x+iy}=e^z$.

⇨ e^z 在全平面解析， $\boxed{(e^z)'=e^z}$. 熟记 ★★★★

注：$e^{f(z)}$的奇点只包含$f(z)$的奇点，其他地方处处解析.

在可微点，$(e^{f(z)})'=e^{f(z)}f'(z)$.

例8 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w = z\,\mathrm{Re}(z)$; (2) $w = |z|^2$.

解 (1) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + \mathrm{i}\,xy$, $u = x^2$ 和 $v = xy$ 处处可微,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$ 因此

C-R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 成立 $\Leftrightarrow 2x = x,\ 0 = -y \ \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$

故 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 只在 $z = 0$ 可微, 在其余点不可微, 故不解析.

在 $z = 0$ 的任一邻域中都有不可微的点, 故在 $z = 0$ 不解析.

因此 $z\,\mathrm{Re}(z)$ 在复平面处处不解析.

$$f'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{(0,0)} = (2x + \mathrm{i}\,y)\big|_{(0,0)} = 0.$$

(2) $w=|z|^2=x^2+y^2$,

$u=x^2+y^2,\ v=0$, 都在全平面可微, 且

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$ 因此

C-R方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 成立 $\Leftrightarrow\ x=0,\ y=0.$

故由定理2(P28)知, $|z|^2$ 只在 $z=0$ 处可微,

$$f'(0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0)}=(2x+\mathrm{i}\cdot 0)\big|_{(0,0)}=0.$$

$\forall z\neq 0,\ |z|^2$ 不可微, 不解析. 故由解析定义知 $|z|^2$ 在 $z=0$ 不解析.

总之, $|z|^2$ 只在 $z=0$ 可微, 在复平面内处处不解析. #

★★★

8(5)(P47) 证明区域D内满足$|f(z)|=$常数的解析函数$f(z)$必为常数.

解 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $|f(z)|=c$(非负常数).

为了证明$f(z)$为常数, 只需证明$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\frac{\partial v}{\partial y}=0.$

因$f(z)$解析，故满足C-R方程: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$u^2+v^2=c^2$. 两边分别关于x,y求偏导得

$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 用C-R方程消$v$偏导数项:

$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 解得 $u=v=0$, 或$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

若$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$, 代入C-R方程得$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

故u,v是常数，故$f(z)$必为常数.#

8(P47)的其他题可以类似地证明.

2.5 初等函数 ★★★

熟记定义

定义7(P30)(单叶函数) 一对一且解析

如果$w = f(z)$是区域D 内的一一解析映照，

则称$f(z)$是D 内的单叶函数，

称D为$f(z)$ 的单叶性区域.

2.5.1 幂函数(整数次幂)

设$n \in \mathbb{Z}^+$，$w = z^n = |z|^n e^{in\arg z}$ 表示 n 个 z 相乘，在全平面有定义，且$0^n = 0$, $\infty^n = \infty$. 称$w = z^n$为幂函数.

- $w = z^n$ 在复平面处处可微，处处解析，

$$(z^n)' = n z^{n-1}.$$

- $w = z^n$是单值函数, 但是, 不是全平面一一映照.

事实上，$\forall w \neq 0$, w 在映照$w = z^n$ 下有n 个不同的原像$\sqrt[n]{w}$:

$$z_k = \left(\sqrt[n]{|w|}\right)\left(\cos\frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right), \; k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

记$z_k = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$， $z_k^n = w$， $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$

z_k 均匀地分布在以原点为中心、$\left(\sqrt[n]{|w|}\right)$ 为半径的圆周上.

$w = z^n$的单叶性区域

- 设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, 则

$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow r_1 = r_2$, 且$\exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2k\pi}{n}$.

证： $z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2}$

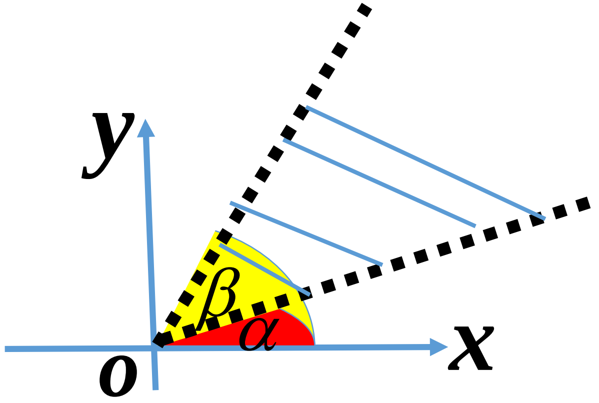
$\Leftrightarrow r_1^n = r_2^n$, 且$\exists k \in \mathbb{Z}$, 使得 $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2k\pi$.　　#

$w = z^n$在D内是一一映照$\Leftrightarrow$在D 内不存在两不同的点z_1 和z_2 满足:

$|z_1| = |z_2|$,且存在非零整数k, 使得$\arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n}$.

角域：$\alpha < \arg z < \beta$, 　α, β满足$\beta - \alpha \le \frac{2\pi}{n}$,

是 $w = z^n$ 的单叶性区域.



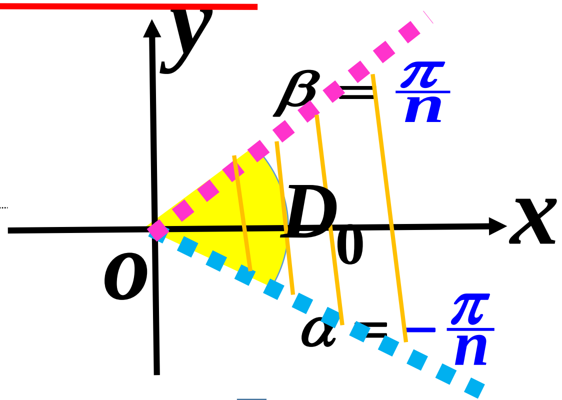
角域：$\alpha < \arg z < \beta$， α,β满足$\beta - \alpha \le \dfrac{2\pi}{n}$，是 $w = z^n$ 的单叶性区域.

例如, 取$\alpha = -\dfrac{\pi}{n}, \beta = \dfrac{\pi}{n}$，则$\alpha,\beta$ 满足$\beta - \alpha \le \dfrac{2\pi}{n}$.

$w = z^n$将z平面角域D_0：$0 < |z| < +\infty$，$-\dfrac{\pi}{n} < \arg z < \dfrac{\pi}{n}$单叶映照成：

角域D_0'： $0 < |w| < +\infty$， $-\pi < \arg w < \pi$，

它是沿着负实轴割开了的w平面.



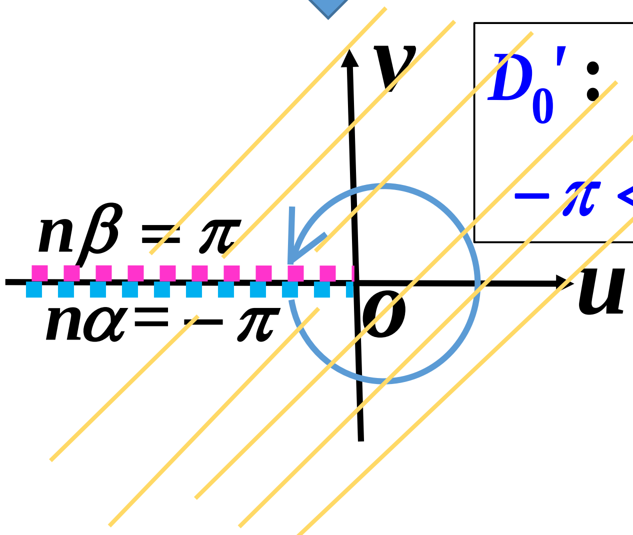
$w = z^n$将角域的边$\arg z = -\dfrac{\pi}{n}$单叶映照为

w平面负实轴的下岸$\arg w = -\pi$ ；

$w = z^n$将此角域的边$\arg z = \dfrac{\pi}{n}$单叶映照为

w平面负实轴的上岸$\arg w = \pi$.

$w = z^n$ 单叶映照



D_0'：$0 < |w| < +\infty$，

$-\pi < \arg w < \pi$.

$w=z^n$：不是z全平面的单叶函数, 但是

取z平面角域D_0：$0<|z|<+\infty$, $-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}$,

定义在D_0的函数$w=z^n$ 是单叶函数,

$$w=z^n: D_0 \to D_0'=\{w \mid 0<|w|<+\infty,\ \underline{-\pi<\arg w<\pi}\}.$$

由单叶性, 可以定义D_0 上函数$w=z^n$ 的反函数:

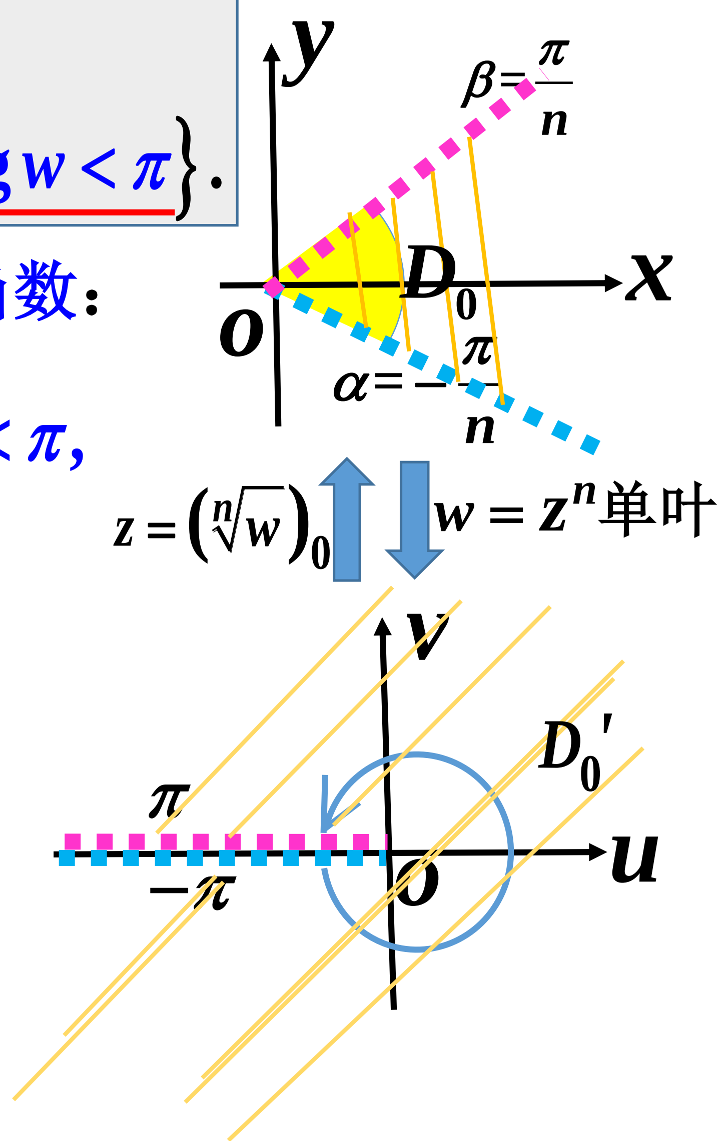
$$z=\left(\sqrt[n]{w}\right)_0=\left(\sqrt[n]{|w|}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg w}{n}\right),\quad -\pi<\arg w<\pi,$$

其中$\exp(\mathrm{i}\,\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$\left(\sqrt[n]{w}\right)_0$将 "沿着负实轴割开了的$w$ 平面：

$0<|w|<+\infty$, $-\pi<\arg w<\pi$" 单叶映照为

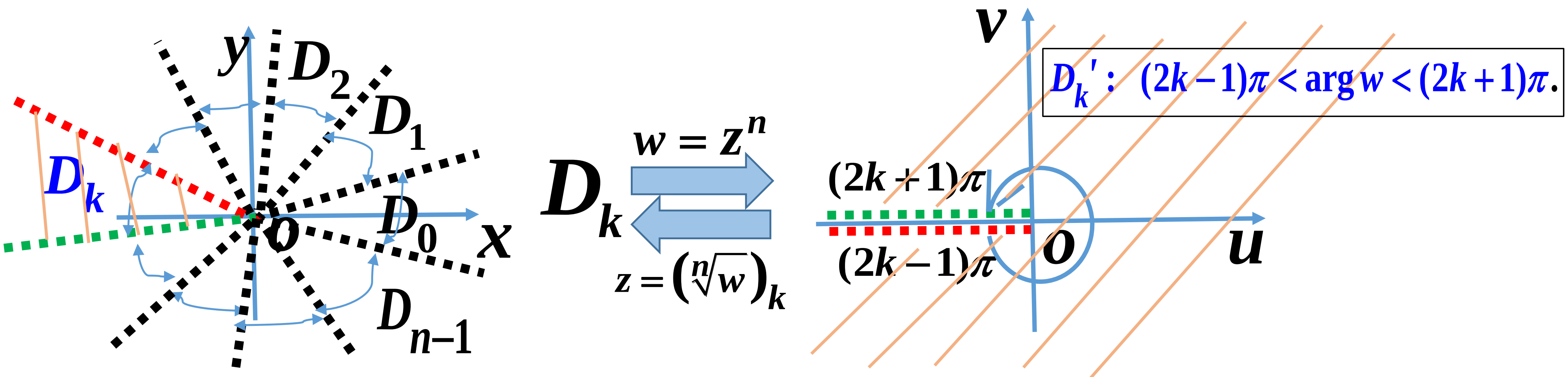
"z平面角域D_0：$0<|z|<+\infty, -\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}$".



$w=z^n$将z平面角域D_k：$0<|z|<+\infty$，$\frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg z<\frac{(2k+1)\pi}{n}$

单叶映照成D_k'：$0<|w|<+\infty$，$(2k-1)\pi<\arg w<(2k+1)\pi$，

它也是沿着负实轴割开了的w 平面.



限制在角域D_k：$\frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg z<\frac{(2k+1)\pi}{n}$的映照$w=z^n$，

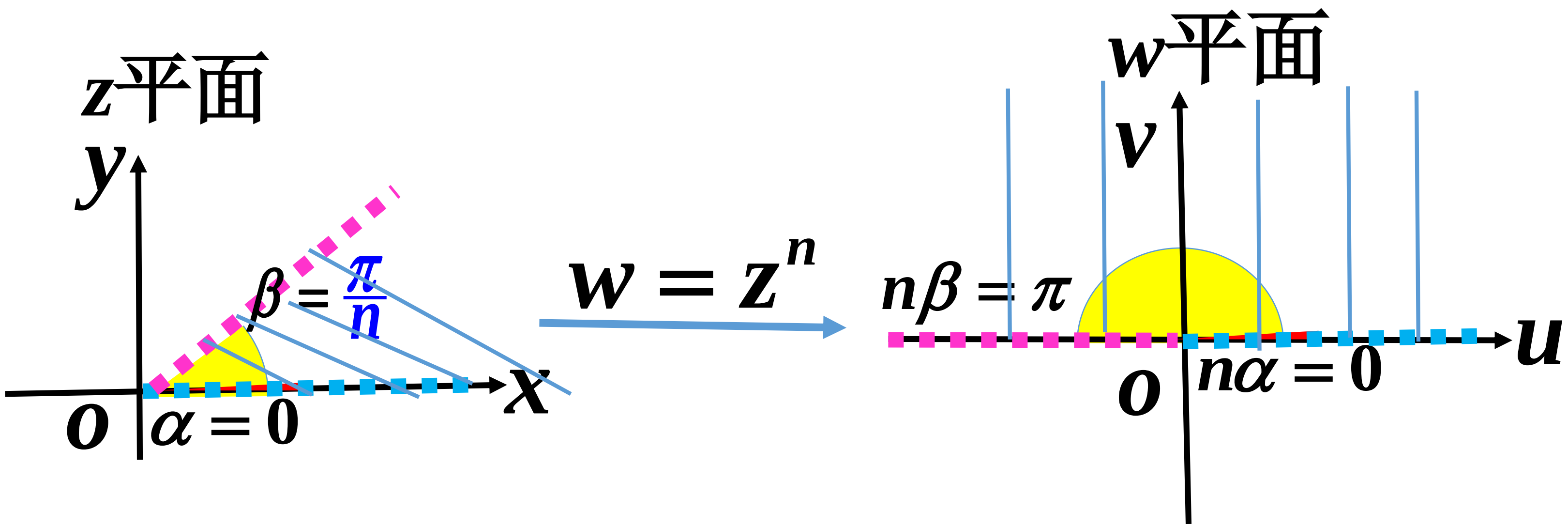
有单值反函数$z=\left(\sqrt[n]{w}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|w|}\right)\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\arg w}{n}\right)$，$(2k-1)\pi<\arg w<(2k+1)\pi$.

例 z平面什么样的角域在$w=z^n$ 下单叶映照成w 平面上半平面？

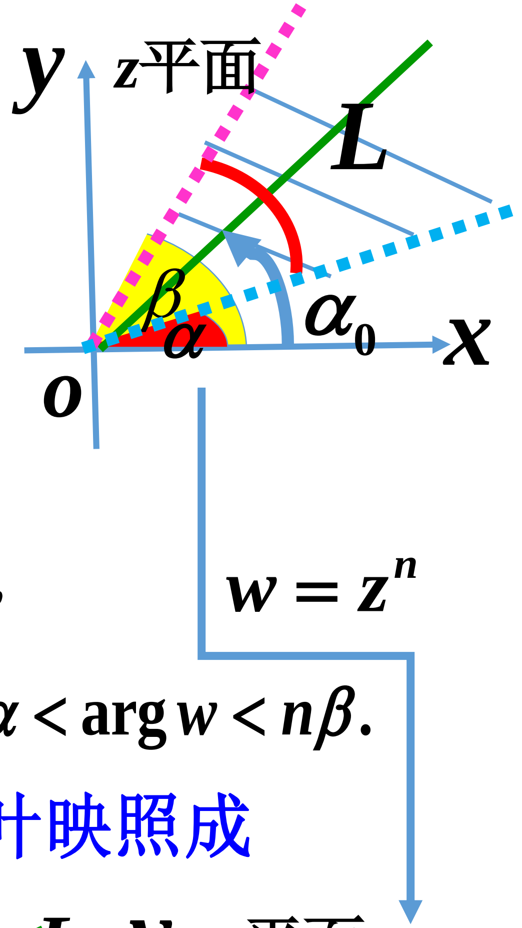
解 取$n\alpha=0$，$n\beta=\pi$，则$\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{n}$, 故

$w=z^n$将z平面角域$0<|z|<+\infty$, $0<\arg z<\frac{\pi}{n}$单叶映照成

w平面的上半平面$0<|w|<+\infty$, $0<\arg w<\pi$. #



角域：$\alpha < \arg z < \beta$，　α, β满足$\beta - \alpha \le \dfrac{2\pi}{n}$，
都是是 $w = z^n$ 的单叶性区域.



1) z平面的射线L：$0 < |z| < +\infty$，$\arg z = \alpha_0$

在映照$w = z^n$下的像$(w = |z|^n e^{in\alpha_0})$是

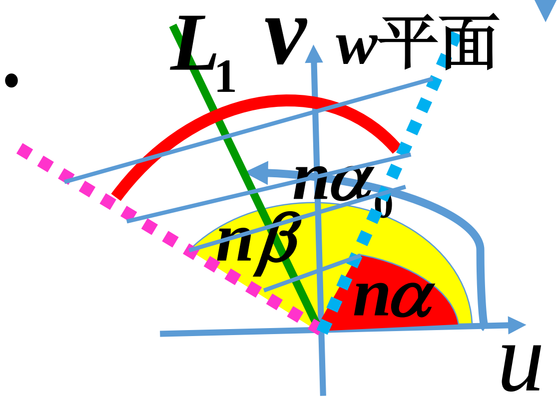
在w平面的射线L'：$0 < |w| < +\infty$，$\arg w = n\alpha_0$.

2) L在z平面逆时针方向扫过角域$\alpha < \arg z < \beta$ 时，

在映照$w = z^n$下像L' 在w平面逆时针方向扫过角域$n\alpha < \arg w < n\beta$.

3) $w = z^n$ 将z 平面圆弧$|z| = R$，$\alpha < \arg z < \beta$ 单叶映照成

w 平面圆弧$|w| = R^n$，$n\alpha < \arg w < n\beta$.



4(1)(P47) 判定下列函数在何处可导, 在何处解析: $w=|z|$.

解 $w=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=0$.

1). 当$(x,y)\neq(0,0)$时u,v可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

故当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, C-R方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 不可能同时成立.

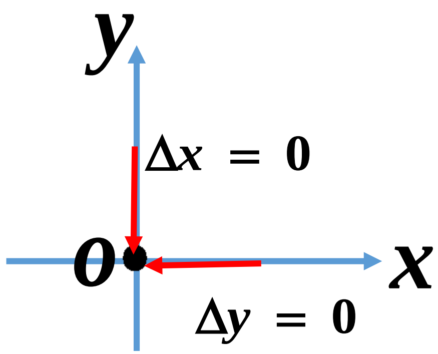
故当$z\neq 0$时, $|z|$不可微. 故$|z|$在复平面处处不解析.

2) 下面分析$w=f(z)=|z|$在$z=0$是否可微. 根据定义判断.

2) 下面分析$w=f(z)=|z|$在$z=0$是否可微. 根据定义判断.

因为
$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{|0+\Delta z|-|0|}{\Delta z}=\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1, & \text{当}\Delta y=0,\ \Delta x>0\text{时},\\[2ex] \dfrac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\mathrm{i}\Delta y}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\neq 1, & \text{当}\Delta x=0,\ \Delta y>0\text{时},\\ \ldots\ldots & \end{cases}$$



故$w=|z|$在$z=0$不可微.

故$|z|$在复平面处处不可微，处处不解析. #

作业P47-48

4 (1),(2), (3)$\left(\text{注意}f(z)=\frac{1}{\bar{z}}\right)\left(z\neq 0\text{ 时, 用C-R方程法；} z=0\text{ 时}\frac{1}{\bar{z}}\text{无定义, 故不可导}\right)$

5 (1)(先用C-R方程)

(2)$\left(\begin{array}{l}\text{先用C-R方程法分别判断在}0<|z|<1\text{ 和 }|z|>1\text{ 内可导性及解析性,}\\ \text{由解析定义判断在点}z=0\text{ 和圆周}|z|=1\text{ 上的解析性(不需要在这些地方的可微性).}\end{array}\right)$

8(1)(利用P28的公式(2.7)和C-R方程)

(2)($f(z)$和$\overline{f(z)}$都解析, 对它们分别用C-R方程)

(3)(用C-R方程)

(5)(用C-R方程, 参见此PPT的P18), (6)(选做, 方法与(5)类似).

11(先求使分母$\neq 0$的点确定解析区域, 再用分式求导公式求导)

(即仿照P29例7)

12(主要是须要证明在$|z|<1$ 内若$z_1 \neq z_2$, 则对应像w_1 与w_2 差不为0)

背P47第8题结论.

(P47)习题9 设$H(x,y)$在z平面的区域D内有直到二阶连续的偏导数，$\zeta = f(z) = \xi(x,y) + \mathrm{i}\eta(x,y)$是$D$内的单叶函数. 求证

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right).$$

证明　因$\zeta = f(z) = \xi(x,y) + \mathrm{i}\eta(x,y)$是$D$内的单叶函数，

故它在D内解析.　因此$\xi(x,y), \eta(x,y)$在D内满足C-R方程，即

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (*)$$

故 $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x}$，$\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$. 故 $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0.$

同理 $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.$ 由(*)得 $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$

由公式(2.7)得，$|f'(z)|^2 = \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2.$

用链式法则求$\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$，再利用前面划线等式，即可推出结论.

10(提示:利用$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,链式法则求$\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial \theta}$,

再利用关于x, y偏导数的C-R方程)

例 判断 $f(z)=x^3-y^3+2\mathrm{i}\,x^2y^2$ 可微性和解析性，并在可微点求导数.

解 $u(x,y)=x^3-y^3$， $v(x,y)=2x^2y^2$， u,v在全平面可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y,$$

它的C-R方程 $\Leftrightarrow 3x^2=4x^2y$, 且 $-3y^2=-4xy^2$.

解得 $x_1=0$, $y_1=0$ 和 $y_2=\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{3}{4}$.

故$f(z)$在$z_1=0$和$z_2=\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{3}{4}$可微, 在其他点都不可微, 不解析.

在点z_1和z_2也不解析，因为在z_1,z_2各自任一邻域内都有不可微的点.

故$f(z)$处处不解析. $f'(0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0)}=0.$

$$f'\left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)}=\left(3x^2+4\mathrm{i}\,xy^2\right)\Big|_{\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)}=\frac{27}{16}(1+\mathrm{i}).\ \#$$