

2023-2024 MA B1 Mid

1. (6分) 用极限定义证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = c.$$

2. (36分, 每小题6分) 计算:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$, $0 < k < 1$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x+x^2} - 1}{\tan 2x}$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin^4 x}$;

5. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}$;

6. $f(x) = \ln(\cos x)$ 的4阶Maclaurin公式, 带Peano余项.

3. (16分, 每小题8分)

1. 求参数方程

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

确定的曲线 $y = y(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程.

2. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ a \sin x + b, & x < 0 \end{cases}$$

- 求 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续;
- 求 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导;
- 当 $f(x)$ 可导时, 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的微分.

4. (12分) 设 $f(x) = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 求 $f(x)$ 的最值.
- 求曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. (10分) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可微, 且

$$f(a) \cdot f(b) > 0, \quad f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, $f'(\xi) = f(\xi)$.

6. (12分) $f(x)$ 在有界闭区间上有定义, 且满足条件:

- $f(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$;
- $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$.

称满足 $f(c) = c$ 的实数 c 为 $f(x)$ 的不动点. 试证明:

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一的不动点;

2. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件:

$$x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

则 $\{x_n\}$ 收敛于 $f(x)$ 的不动点.

7. (8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1)$, $|f''(x)| \leq 2$ ($\forall x \in [0, 1]$), 试证明 $|f'(x)| \leq 1$.