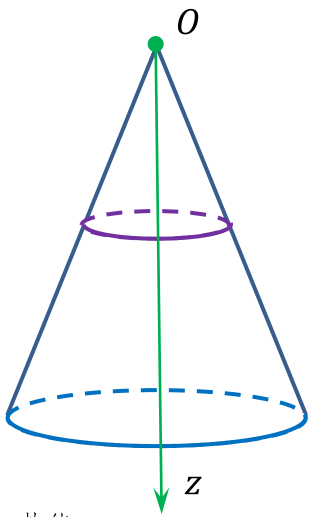
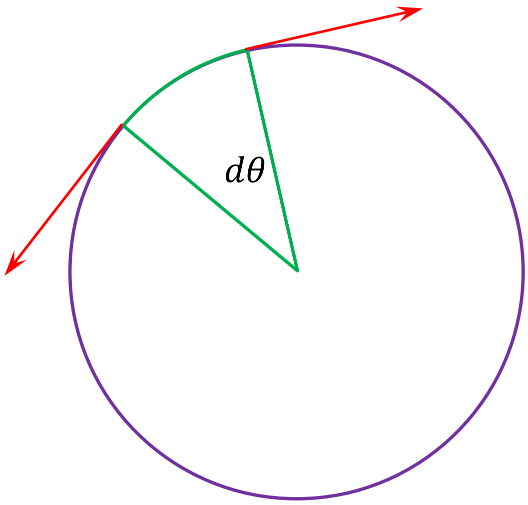
一、　　（20%）





解法 1：势能

$$V=-mgz+\frac{1}{2}k(2\pi z\tan\alpha-l)^2$$
$$\delta V=\{-mg+k(2\pi z\tan\alpha-l)2\pi\tan\alpha\}\delta z=0$$
$$2\pi z\tan\alpha=\frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}+l$$

解法 2：如图，取一小段橡皮绳微元来分析。这段绳受到三个主动力的作用。其中有两个主动力为弹性张力，其方向在水平面内，大小为$k(2\pi z\tan\alpha-l)$；这两个力的合力为$2\times k(2\pi z\tan\alpha-l)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{d\theta}{2}\right)=k(2\pi z\tan\alpha-l)d\theta$，方向在水平面内，指向橡皮圈的圆心。另一个主动力是重力，垂直向下，大小为$\frac{m}{2\pi}d\theta g$。

设橡皮绳微元沿侧面向下发生虚位移，其z分量为δz，水平分量为$\delta z\tan\alpha$，由虚功原理

$$\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$
$$-k(2\pi z\tan\alpha-l)d\theta\cdot\delta z\tan\alpha+\frac{m}{2\pi}d\theta g\cdot\delta z=0$$
$$-k(2\pi z\tan\alpha-l)\tan\alpha+\frac{mg}{2\pi}=0$$
$$2\pi z\tan\alpha=\frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}+l$$

二、　　（20 分）

解：

（1）变换为

$$t'=t$$
$$\vec{r}_i'=\vec{r}_i+\vec{v}_0t$$
$$\dot{\vec{r}}_i'=\dot{\vec{r}}_i+\vec{v}_0$$

得

$$L'dt'=\left\{\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2-V(\vec{r}_1'-\vec{r}_2')\right\}dt'$$
$$=\left\{\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{r}}_1+\vec{\epsilon}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{r}}_1+\vec{\epsilon}\right)^2-V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right\}dt$$
$$=Ldt+\left(m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\vec{\epsilon}dt+O(\epsilon^2)$$
$$=Ldt+d\{(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)\cdot\vec{\epsilon}\}+O(\epsilon^2)$$

所以是准对称变换。

（2）由

$$\Delta t=0,\qquad \Delta\vec r_i=\vec\epsilon t,\qquad \Delta\varphi=(m_1\vec r_1+m_2\vec r_2)\cdot\vec\epsilon$$
$$\vec p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_i}=m_i\dot{\vec r}_i(i\text{不求和})$$
$$-H\Delta t+\vec p_i\cdot\Delta\vec r_i-\Delta\varphi=\left(m_1\dot{\vec r}_1+m_2\dot{\vec r}_2\right)\cdot\vec\epsilon t-(m_1\vec r_1+m_2\vec r_2)\cdot\vec\epsilon$$

守恒量为

$$\left(m_1\dot{\vec r}_1+m_2\dot{\vec r}_2\right)t-(m_1\vec r_1+m_2\vec r_2)=M(\vec v_C t-\vec r_c)=M\vec r_c(0)$$

三、　　（20 分）

解：光程

$$S[r,\theta]=\int_{z_1}^{z_2}n_0\sqrt{1-\alpha^2 r}\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}dz$$

拉氏量为

$$L=n_0\sqrt{(1-\alpha^2 r)(1+r'^2+r^2\theta'^2)}$$

拉氏方程

$$\frac{d}{dz}\frac{r'\sqrt{1-\alpha^2 r}}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}}+\frac{\alpha^2(1+r'^2)+(3\alpha^2r^2-2r)\theta'^2}{2\sqrt{(1-\alpha^2 r)(1+r'^2+r^2\theta'^2)}}=0$$
$$\frac{d}{dz}\left(r^2\theta'\sqrt{\frac{1-\alpha^2 r}{1+r'^2+r^2\theta'^2}}\right)=0$$

四、　　（20 分）

解：莫培督原理

$$0=\delta\int_{s_1}^{s_2}ds=\delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{2m[E-V(r)]}\sqrt{r'^2+r^2}d\theta$$
$$=\delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{2m(E-\alpha u)}\sqrt{\frac{1}{u^4}u'^2+\frac{1}{u^2}}d\theta$$
$$=\delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{u^2}\sqrt{2m(E-\alpha u)}\sqrt{u'^2+u^2}d\theta$$
$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{u^2}\sqrt{E-\alpha u}\frac{u'}{\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{2}{u^3}\sqrt{E-\alpha u}\sqrt{u'^2+u^2}+\frac{1}{2u^2}\frac{\alpha}{\sqrt{E-\alpha u}}\sqrt{u'^2+u^2}$$
$$-\frac{1}{u}\sqrt{E-\alpha u}\frac{1}{\sqrt{u'^2+u^2}}=0$$
$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E-\alpha u}}{\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{\alpha}{2\sqrt{E-\alpha u}\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{1}{u^2}\sqrt{E-\alpha u}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{u'}{\sqrt{u'^2+u^2}}-\frac{u}{\sqrt{u'^2+u^2}}\right)=0$$
$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E-\alpha u}}{\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{\alpha}{2\sqrt{E-\alpha u}\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{\sqrt{E-\alpha u}}{u^2}\left(\frac{u''}{\sqrt{u'^2+u^2}}-\frac{u'^2(u''+u)}{(u'^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{u}{\sqrt{u'^2+u^2}}\right)=0$$
$$\frac{2}{u}\frac{\sqrt{E-\alpha u}}{\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{\alpha}{2\sqrt{E-\alpha u}\sqrt{u'^2+u^2}}+\frac{\sqrt{E-\alpha u}}{u^2}\frac{1}{(u'^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}\left(uu''-2u'^2-u^2\right)=0$$
$$4(E-\alpha u)(u'^2+u^2)+\alpha u(u'^2+u^2)+2(E-\alpha u)\left(uu''-2u'^2-u^2\right)=0$$
$$2(E-\alpha u)(u'^2+u^2)+\alpha u(u'^2+u^2)+2(E-\alpha u)\left(uu''-u'^2\right)=0$$
$$2(E-\alpha u)uu''+\alpha uu'^2+2Eu^2-\alpha u^3=0$$
$$2(E-\alpha u)u''+\alpha(u'^2+u^2)+2(E-\alpha u)u=0$$

注：如果把广义能量积分

$$J=\sqrt{2m(E-\alpha u)}\frac{1}{\sqrt{u'^2+u^2}}$$

$$\frac{u'^2+u^2}{2(E-\alpha u)}=\frac{m}{J^2}$$

代入，则方程化简为 Binet 方程

$$u''+u=\frac{m\alpha}{J^2}$$

五、 （20%）

解：

（1）

$$\partial_t\psi=\dot{q}_1(t)(x^2-a^2)+\dot{q}_2(t)(x^2-a^2)x$$
$$\partial_x\psi=q_1(t)\cdot 2x+q_2(t)(3x^2-a^2)$$

作用量

$$\mathrm{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{-a}^{a}dx\mathcal{L}$$

$$\begin{aligned}
&L=\int_{-a}^{a}dx\mathcal{L}\\
&=\frac{1}{2}\rho\dot{q}_1^2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2dx+\rho\dot{q}_1\dot{q}_2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2xdx+\frac{1}{2}\rho\dot{q}_2^2\int_{-a}^{a}(x^2-a^2)^2x^2dx\\
&\ -\frac{1}{2}Yq_1^2\int_{-a}^{a}4x^2dx-Yq_1q_2\int_{-a}^{a}2x(3x^2-a^2)dx-\frac{1}{2}Yq_2^2\int_{-a}^{a}(3x^2-a^2)^2dx\\
&=\frac{1}{2}\rho\dot{q}_1^2\cdot\frac{16a^5}{15}+\rho\dot{q}_1\dot{q}_2\cdot 0+\frac{1}{2}\rho\dot{q}_2^2\cdot\frac{16a^7}{105}-\frac{1}{2}Yq_1^2\cdot\frac{8a^3}{3}-Yq_1q_2\cdot 0-\frac{1}{2}Yq_2^2\frac{8a^5}{5}\\
&=\frac{8\rho a^5}{105}(7\dot{q}_1^2\cdot+a^2\dot{q}_2^2)-\frac{4Ya^3}{15}(5q_1^2+3a^2q_2^2)
\end{aligned}$$

（2）运动方程

$$2\rho a^2\ddot{q}_1+5Yq_1=0$$
$$2\rho a^2\ddot{q}_2+21Yq_2=0$$