# 第一周作业答案

罗曾宇

**题目 1.** 证明 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$.

**解答.**

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & 0 \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

注：注意，这里的第二个等号并没有那么显然，因为这里 $k$ 是哑指标，按理应该遍历求和，也就是说

$$\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i1} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j1} \\ \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i2} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j2} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i3} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j3} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{33} \end{vmatrix},$$

而且 $\delta_{kk} \neq 1$, 而是$\delta_{kk} = 3$, $k$取不同值时，$\delta_{kp}, \delta_{kq}, \delta_{ik}, \delta_{jk}$也不一定都为零.

原因在于，这里的 $i, j, p, q$ 都是自由指标，也就是确定的一个数，而且它们都只能取 1，2，3 中的值，那么当 $k$ 遍历时，在

$$\epsilon_{ij1}, \epsilon_{ij2}, \epsilon_{ij3}, \epsilon_{pq1}, \epsilon_{pq2}, \epsilon_{pq3},$$

中肯定有四个为零，当然，我们要取有意义的，也就是不为零的两个组合在一起，所以最终的结果只用算一个行列式就可以了. 类似的，我们可以计算一下

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}.$$

**题目 2.** 根据算符 $\nabla$ 的微分性与矢量性，推导下列公式：

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A^2} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

**解答.**

证明第一式：

等式左边 $k$ 分量等于

$$\partial_k(A_iB_i) = B_i\partial_kA_i + A_i\partial_kB_i,$$

等式右边 $k$ 分量等于

$$\epsilon_{ijk}B_i(\nabla\times\boldsymbol{A})_j + B_l\partial_lA_k + \epsilon_{ijk}A_i(\nabla\times\boldsymbol{B})_j + A_l\partial_lB_k,$$

其中

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}B_i(\nabla\times\boldsymbol{A})_j &= \epsilon_{ijk}B_i\epsilon_{mnj}\partial_mA_n \\
&= -\epsilon_{jik}\epsilon_{jmn}B_i\partial_mA_n \\
&= -(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})B_i\partial_mA_n \\
&= \delta_{in}\delta_{km}B_i\partial_mA_n - \delta_{im}\delta_{kn}B_i\partial_mA_n \\
&= B_n\partial_kA_n - B_m\partial_mA_k
\end{aligned}$$

同理可得

$$\epsilon_{ijk}A_i(\nabla\times\boldsymbol{B})_j = A_n\partial_kB_n - A_m\partial_mB_k,$$

将其代入得，等式右边 $k$ 分量等于

$$B_n\partial_kA_n - B_m\partial_mA_k + B_l\partial_lA_k + A_n\partial_kB_n - A_m\partial_mB_k + A_l\partial_lB_k$$

$$= B_n \partial_k A_n + A_n \partial_k B_n = B_i \partial_k A_i + A_i \partial_k B_i$$

等于等式左边 $k$ 分量.

证明第二式:

在第一式中令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, 则有

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A},$$

整理得

$$\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{A^2} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}.$$

**题目 3.** 设 $u$ 是空间坐标 $x$,$y$,$z$ 的函数, 证明:

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du}\nabla u,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\boldsymbol{A}}{du},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\boldsymbol{A}}{du},$$

**解答.**

$$\nabla f(u) = \partial_i f(u) \boldsymbol{e}_i \xlongequal{\text{链式法则}} \frac{df}{du}\partial_i u \boldsymbol{e}_i = \frac{df}{du}\nabla u$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \partial_i A_i(u) \xlongequal{\text{链式法则}} \partial_i u \frac{dA_i}{du} = \nabla u \cdot \frac{d\boldsymbol{A}}{du}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j(u) \boldsymbol{e_k} \xlongequal{\text{链式法则}} \epsilon_{ijk} \partial_i u \frac{dA_j}{du} \boldsymbol{e_k} = \nabla u \times \frac{d\boldsymbol{A}}{du}$$

**题目 4.** 证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

**解答.**

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\epsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e_k}\cdot c_l\boldsymbol{e_l}=\epsilon_{ijk}a_ib_jc_l\delta_{kl}=\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$