注：概统B的卷子会在第x学期后附加"(B)"

21-22. 第二学期

(2) $\begin{cases} P_2 = P(X=1,Y<1)+P(Y=1,X<1)+P(X=Y=1) & ① \\ P_3 = P(X=1,Y>1)+P(Y=1,X>1)+P(X=Y=1) & ② \end{cases}$

①+②，并由 $P(X=1)=P(X=1,Y<1)+P(X=1,Y>1)+P(X=1,Y=1)$

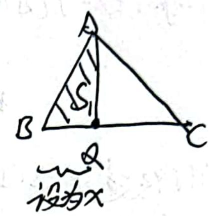
以及 $P(Y=1)=P(Y=1,X<1)+P(Y=1,X>1)+P(Y=1,X=1)$

得 $P_2+P_3=P(X=1)+P(Y=1) \Rightarrow P(Y=1)=P_2+P_3-P_1$

(3) 极坐标换元.

(5). 几何概型，$P(PQ与AB相交|Q)=\frac{S_1}{S_总}$

$P=\int_0^a \frac{\frac{1}{2}xh}{\frac{1}{2}ah}dx=\frac{1}{2}$



设 $|BC|=a$，高为 h

(7).

A. 错，σ^2 不一定为1　B. $\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 不独立，错

C. 错

D. $\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,n) \Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi_1^2 \Rightarrow$ 对.

21-22 第一学期.

3. 3

在 $z=0$ 处间断，$F(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(z) & (z<0)\\ \frac{1}{2}\Phi(z)+\frac{1}{2} & (z\geq 0)\end{cases}$

4. 利用几何概型.

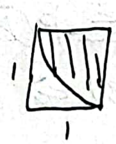
$P(X^n+Y>1)=P(Y>1-X^n)$

$=1-\int_0^1 1-x^n dx=\frac{1}{n+1}$

这是曲线 $y=1-x^n$

5. 利用示性变量和期望的线性可加性质可简化计算.

设 $X_i=\begin{cases}0 & 第i个顶点不在圆内 \quad (1\leq i\leq 4)\\ 1 & 第i个顶点在圆内\end{cases}$



$P(X_i)=\frac{S_{阴影}}{S_总}=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow E(X_i)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow E=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=\pi$

8. 注意区分无偏性和相合性.

10. 第二类错误，即 $\theta=\theta_1$ 为真，但 H_1 被拒，概率 $1-\theta_1^6$

20-21 第一学期(B)

1. A: 显然　B: $P(AB)=P(A|B)P(B)\overset{题目条件}{>}P(A)P(B)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A})P(\bar{B})$

$\Rightarrow P(AB)+P(\bar{A})+P(\bar{B})-1\xlongequal{Morgan律}P(\bar{A}\bar{B})>P(\bar{A})P(\bar{B})$

C: $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})<P(A|B)P(B)+P(A|B)P(\bar{B})=P(A|B)$

这种题在考试时建议用直观理解而非严格证明

(2) 设事件A：从非1非2的某一点出发，先到2后到1

由对称性，$P(A)=\frac{1}{2}$

从非1非2的某点出发，走一步后，有三种结果 $\begin{cases}\text{到达下个非1非2点}, & p=\frac{n-3}{n-1}\\ \text{到1}, & p=\frac{1}{n-1}\\ \text{到2}, & p=\frac{1}{n-1}\end{cases}$

∴

$$P(\text{题目待求的那个事件})=P(A)\times\underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{\text{到达非2点}}+\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{直接到达2点}}=\frac{n}{2(n-1)}$$

(4). 注意定义（教材P92定义3.5）

(6). $P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{e^{\lambda}k!}\cdot\frac{\mu^{n-k}}{e^{-\mu}(n-k)!}=\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!\cdot e^{\lambda+\mu}}$

$P(X=k|X+Y=n)$

$$=\frac{\frac{\lambda^k}{e^{\lambda}k!}\cdot\frac{\mu^{n-k}}{e^{-\mu}(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!\cdot e^{\lambda+\mu}}}=C_n^k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

即 $X|_{X+Y=n}\sim B\left(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

~~(10)~~ (9). 与S有关

(10). $P(\text{犯第二类错误})=P(\bar{X}\leq 11|\mu=11.5)$

三(4)的参考答案有误

$h(v)=1-\frac{v}{2}\quad(0<v<2)$

19-20 第二学期（B）

瞎写的，无保证

1. 2/7

设 $P(\bar{A})=x$ $\quad P(\bar{A}\cap B)\xlongequal{\text{独立}}P(\bar{A})P(B)=0.3x$

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)\Leftrightarrow 0.8=x+0.3-0.3x\Rightarrow x=\frac{5}{7}\Rightarrow P(A)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$

2. 0　　3. $a=\pm\frac{1}{5}$, $b=\pm\frac{1}{25}$　　4. [17.7, 22.3]　　5. $\bar{X}$

6. 7　　7. 1　　8. 5/7

第8题：记事件A：$X\geq 0$，事件B：$Y\geq 0$

$P(A\cap B)=\frac{3}{7}$，$P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$ $\quad P(\max\{X,Y\}\geq 0)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{7}$

9. D　　10. A

19-20 第一学期(B)

1. 法1(容斥原理)

$$1=\frac{P(AB)}{P(A)}+\frac{P(\bar A\bar B)}{P(\bar A)}=\frac{P(AB)}{0.4}+\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{0.6}=\frac{P(AB)}{0.4}+\frac{0.2+P(AB)}{0.6}\Rightarrow P(AB)=0.16$$

法2(全概率公式)

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar A)P(\bar A)=[1-\underset{\text{由条件}}{P(\bar B|\bar A)}]P(A)+[1-P(\bar B|\bar A)]P(\bar A)=1-P(\bar B|\bar A)=P(B|A)$$

即 $P(B)=P(B|A)$, A B 相互独立.

4. 设点1 (x_1,y_1) 点2 (x_2,y_2)

$$E(X^2)=E[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]=E(x_1^2)+E(x_2^2)-\overbrace{2E(x_1x_2)}^{0}$$
$$+E(y_1^2)+E(y_2^2)-\underbrace{2E(y_1y_2)}_{0}=E(x_1^2+y_1^2)+E(x_2^2+y_2^2)$$

然后:法1 $E(x_1^2+y_1^2)=E(x_2^2+y_2^2)=\int_0^1 r^2\cdot 2r\,dr=\frac{1}{2}$ (三角换元)

法2 利用几何概型,令 $Z=x_1^2+y_1^2$ ($x_2^2+y_2^2$ 同理)

则 $0\le Z\le 1$, $P(Z\le z)=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi\cdot z}{\pi\cdot 1^2}=z$, 即 $Z\sim U(0,1)$

18-19 第一学期(B)

(5). $E(X^2)=Var(X)+(EX)^2=6$ $\quad E(Y^2)=Var(Y)+(EY)^2=3$

$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=18$ $\quad E(XY)=EX\,EY=0$

$Var(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=18$.

(6) $Y=\frac{a}{2}[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2]\Rightarrow a=1\ \ n=2$

(7) 法一:

$$E[(X_1+X_n-2\bar X)^2]=Var(X_1+X_n-2\bar X)+[\overbrace{E(X_1+X_n-2\bar X)}^{0}]^2$$
$$=\underbrace{Var(X_1+X_n)}_{2\sigma^2}+\underbrace{Var(2\bar X)}_{\frac{4\sigma^2}{n}}-2Cov(X_1+X_n,2\bar X)\quad (*)$$

$$Cov(X_1+X_n,2\bar X)=Cov[X_1+X_n,\frac{2}{n}(X_1+X_n)]=\frac{4\sigma^2}{n}$$

$\therefore (*)$式 $=2\sigma^2+\frac{4\sigma^2}{n}-2\times\frac{4\sigma^2}{n}=\frac{2(n-2)}{n}$

法二:将 $X_1+X_n-2\bar X$ 视为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性组合

$$X_1+X_2-2\bar X=\frac{n-2}{n}X_1+\frac{n-2}{n}X_n-\frac{2}{n}(X_2+\cdots+X_{n-1})$$

故 $E[(X_1+X_n-2\bar X)^2]=Var(X_1+X_n-2\bar X)+[E(X_1+X_n-2\bar X)]^2$

$$=[(\frac{n-2}{n})^2\times 2+\frac{4}{n^2}\times(n-2)]\sigma^2=\frac{2(n-2)}{n}\sigma^2$$

17-18 第一学期(B)

2. 递推，设第n次爬行往A的概率为p_n

$\begin{cases} p_1=0 \\ p_n=(1-p_{n-1})\times\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow p_n=\frac{1}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$

16-17 第一学期(B)

2. 记P_{n+2}为甲在第n+2局赢得整个比赛的概率(易知n为奇数时$P_{n+2}=0$，故只考虑n为偶数)

第2i-1局和2i局中，甲乙必各自有一胜(其中$2i\le n$)

$\therefore P_{n+2}=[C_2^1p(1-p)]^n\cdot p^2 \qquad P_{总}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+2}=\frac{p^2}{2p^2-2p+1}$

5. 答案似乎是0.8？

13-14 第一学期

三. $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=5p-P(BC)\Rightarrow P(BC)=5p-P(B\cup C)=P(AB)\le P(A)=p$

即 $4p-P(B\cup C)\le 0$ 故 $4p\le P(B\cup C)\le 1\Rightarrow p\le\frac{1}{4}$

反正我是不会做，抄来的

12-13 第二学期

9. 记$\mu_1=0.22$，$\mu_2=1.10$，由于μ的95%置信区间为$[\mu_1,\mu_2]$，故

$P(X\le 0)$的95%置信区间：$[P(X\le 0|\mu=\mu_1),P(X\le 0|\mu=\mu_2)]$

其中 $P(X\le 0|\mu=\mu_1)=P(\frac{X-\mu_1}{1}\le-\mu_1|\mu=\mu_1)=1-\Phi(1.10)$，右端点同理

10. P(犯二型错误)≤ 0.05，即$P(\sqrt{n}\bar{X}<1.645|\mu=1)\le 0.05$，

即$P(\sqrt{n}(\bar{X}-1)<\underset{u_{0.05}}{\underline{1.645}}-\sqrt{n})<0.05$，即 $u_{0.05}-\sqrt{n}<-u_{0.05}$，即$\sqrt{n}>2u_{0.005}$

即$n>4u_{0.05}^2=4\times1.645^2=10.82$

19-20 第一学期

3.4.6都值得看看，只讲了

舟

2023.03.02 于科大三教

【分析】 因不知 X 和 Y 的联合分布是否为二维正态分布，因此不能判定 X 和 Y 是否独立，比如，若 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}+e^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}\right],$$

则有 X 和 Y 都服从正态分布 $N(0,1)$，但是 X 和 Y 不独立．

若 (X,Y) 的联合密度为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，则都服从正态分布 $N(0,1)$，且 X 和 Y 独立．应选（C）．