密 封 线 内 不 要 答 题

中国科学技术大学数学科学学院

2018 ～ 2019学年 第 1 学期期末考试试卷

■A卷　　　□B卷

课程名称 计算方法(B)　　课程编号 001511

考试时间 2019年1月8日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 除特殊说明，计算结果保留4位小数。

一、 (36分)填空

(1) (6分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，则谱半径$\rho(A)=$________， $\|A\|_\infty=$________， 条件数$cond_1(A)=$________。

(2) (6分) 已知$f(-1)=3, f(0)=-1, f(1)=4$， 则$f(x)$关于插值节点$\{-1,0,1\}$的2次Lagrange插值多项式$L_2(x)=$ ____,

差商$f[-1,0,1]=$________。

(3) (6分) 设 $S(x)=\begin{cases} x^3-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ ax^3+bx^2+cx-1, & 1\leqslant x\leqslant 2, \end{cases}$ 是以$0,1,2$为节点的三次样条函数，则$a=$________， $b=$________， $c=$________。

(4) (6分) 设$f(x)=x^3-5x^2+7x-3$，则解非线性方程$f(x)=0$的牛顿迭代格式为________________________， 当初始值x_0取在根$x^*=1$附近时，迭代格式的收敛阶为________。

(5)（6分）若n阶矩阵A的按模最大特征值只有一个且是单实根，则可用________方法数值求解；若n阶矩阵A的按模最小特征值只有一个且是单实根，则可用________方法数值求解；若n阶矩阵A为对称实矩阵，则可用________方法数值求解其所有特征值。

(6)（6分）向量$v \in \mathbb{R}^3$，矩阵$H = I - 2vv^T$，若$\|v\| = 1$，则$det(H) =$________。$x = (4,0,3)^T$，$y = (\alpha,0,0)^T$，若有$H(x) = y$且$\alpha > 0$，则$\alpha =$________，$v =$________。

二、（10分）用Gauss-Seidel方法解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

1）写出Gauss-Seidel迭代的分量形式；

2）写出Gauss-Seidel迭代的迭代矩阵；

3）分析Gauss-Seidel迭代的收敛性。

三、（10分）按下列数据，用最小二乘法做出$f(x)=a+be^{2x}$形式的拟合函数。

x_i	−1	0	1	1.5	2
y_i	0.35	0.60	0.85	1.24	1.58

四、（10分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，运用LU分解法（其中$L$为单位下三角矩阵）求矩阵$A$的逆。

五、（10分）取$h=\frac{b-a}{n}$，试导出下述复化积分公式的截断误差：

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+(i+\frac{1}{2})h\right).$$

六、（12分）设$f(x)=\frac{1}{a-x}$，$x_0,x_1,\ldots,x_n$互异且不等于a。试求$f[x_0,x_1,\ldots,x_k](1\leqslant k\leqslant n)$及$f(x)$关于插值节点$\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$的$n$次Newton插值多项式。

七、（12分）对于常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

其中$f(x,y)$足够光滑。若取$h = \frac{b-a}{m}$，$x_n = a + nh, n = 0,1,2,\cdots,m$，$m$为正整数。试确定常数$\alpha$和$\beta$，使如下线性多步格式

$$y_{n+3} - y_n + \alpha(y_{n+2} - y_{n+1}) = h\beta\left[f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

至少具有3阶精度，并求局部截断误差，要求给出表达式。