流体力学期中试卷答案（2022.11）

1. （10分）已知平面速度场

$$\begin{cases} u = 1 - y \\ v = t \end{cases}$$

求t=1时，过点(0,0)的流线方程及t=1时位于点(0,0)的质点轨迹方程。

解:该平面流动的流线微分方程为

$$\frac{dx}{1-y} = \frac{dy}{t}$$

因为在流线方程中时间 t 可视为常量参数,故可直接积分得

$$2y - y^2 - 2tx = c$$

由 t=1,x=0,y=0,可得 c=0

所以,当 t=1 时,过(0,0)的流线方程为:$2y - y^2 - 2x = 0$。

迹线微分方程为

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = t \tag{2}$$

由方程(2)积分得:$y = \frac{1}{2}t^2 + c_2$。将其代入方程(1)积分,得

$$x = t - \frac{t^3}{6} - c_2 t + c_1$$

由 t=1,x=0,y=0,得:$c_1 = -\frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{2}$。

故 t=1 时,过点(0,0)的迹线方程为

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - \frac{t^3}{6} - \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3}{2}(2y+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}(2y+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}$$

2. （10分）请简述速度分解定理，并说明速度变形张量

$$\overleftrightarrow{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

中各项的物理含义。

答：流体微团的速度由平动速度、转动速度和变形速度三部分组成

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \frac{1}{2} rot\,\vec{v} \times \delta\vec{r} + \overleftrightarrow{S} \cdot \delta\vec{r}$$

速度变形张量对角线各项表示**线变形**，非对角线上各项表示**角变形**。具体如下：

$\frac{\partial u}{\partial x}$表示x轴上线段元δx的相对拉伸速度或相对压缩速度

$\frac{\partial v}{\partial y}$表示y轴上线段元δy的相对拉伸速度或相对压缩速度

$\frac{\partial w}{\partial z}$表示z轴上线段元δz的相对拉伸速度或相对压缩速度

$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ 表示x与y轴夹角的变形速度

$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ 表示x与z轴夹角的变形速度

$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ 表示y与z轴夹角的变形速度

3. （10分）已知不可压缩黏性流体平面流动的流速分量为

$$\begin{cases} u = Ax \\ v = -Ay \end{cases}$$

其中A为常数，试求：

1) 应力p_{xx}，p_{yy}，τ_{xy}，τ_{yx}；

2) 假设忽略外力作用，且x=y=0处压强为p_0，写出压强分布表达式。

提示：不可压黏性流体运动方程$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \nabla p + \mu\Delta\vec{v}$，本构方程$\overleftrightarrow{P} = -p\overleftrightarrow{I} + 2\mu\overleftrightarrow{S}$

解：1）$p_{xx} = -\mathrm{p} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{p} + 2\mu A$，$p_{yy} = -\mathrm{p} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\mathrm{p} - 2\mu A$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

2） 将u,v的表达式代入运动方程，可得

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} = A^2 x \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} = A^2 y \end{cases}$$

$-\frac{1}{\rho}d\rho = A^2xdx + A^2ydy \Longrightarrow -\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}A^2(x^2+y^2) + C$

x=y=0处压强为p_0，可得c=$-\frac{p_0}{\rho}$

$\Longrightarrow \rho = p_0 - \frac{\rho}{2}A^2(x^2+y^2)$

4. （10分）理想流体涡量方程为

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=\nabla\times\vec{F}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\vec{v}-\vec{\Omega}(\nabla\cdot\vec{v})$$

请说明方程右边各项的物理含义。

答：$\nabla\times\vec{F}$：外力（旋度）对涡量的影响，外力有势时该项为0

$-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$：斜压项对涡量的影响，正压时该项为0

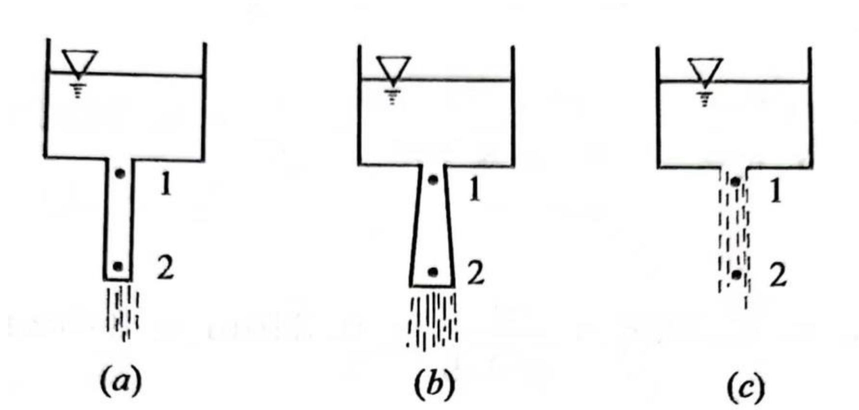
$\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\vec{v}$： 涡线的拉伸、压缩和扭曲，使转动惯性发生变化，进而影响涡量

$-\vec{\Omega}(\nabla\cdot\vec{v})$：辐合辐散对涡量的影响，当流体被压缩时，$\nabla\cdot\vec{v}<0$，它将使转动惯性减小，角动量守恒时，涡量将增大。

5. （10分）试比较图中1和2两点流速v_1和v_2的大小：

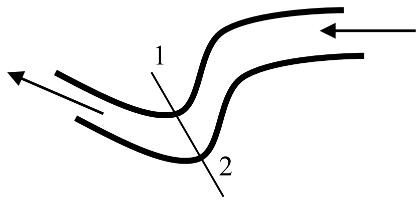
1）三种立管情形下

(a)在等直径立管中; (b) 在渐扩形立管中; (c) 在底孔出流流股中



(a) v_1=v_2（流量相同） (b) $v_1>v_2$（流量相同） (c) $v_1<v_2$（下落加速）

2）假设河水是理想不可压缩均质、流动定常无旋，且外力只考虑重力



$v_1>v_2$（向心加速度，要求液面向内侧倾斜，高度 1<2，由伯努利积分，速度 1>2）

6. （10 分）试证有限长度的直线涡丝段 MN 对空间任一点 P 的诱导速度为

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}(cos\alpha+cos\beta)$$

其中Γ为涡丝的强度，h为该点到涡丝的距离，α和β为该点到涡丝两端连线与涡丝的夹角。

设点Q为直线涡丝MN上的任意一点，其对空间中任一点P的诱导速度为

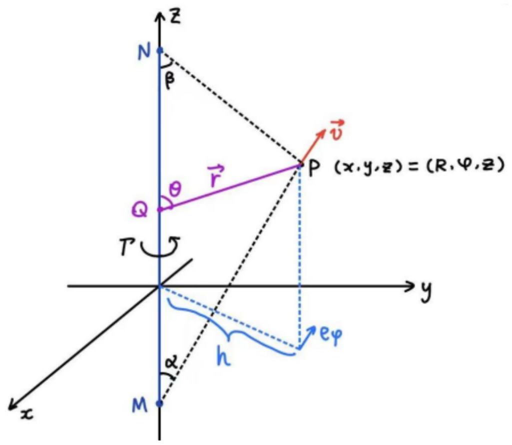
$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$|\mathrm{d}\boldsymbol{l}|=|\mathrm{d}(h\cot\theta)|=h\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，$|\boldsymbol{r}|=\frac{h}{\sin\theta}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}$方向为$\boldsymbol{e}_\varphi$

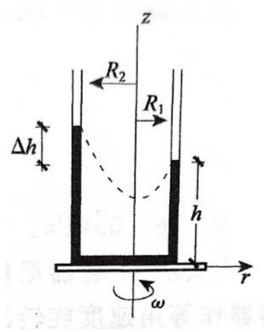
$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{h\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot h}{\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)^3}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{h}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_\alpha^{\pi-\beta}\frac{\sin\theta}{h}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha+\cos\beta)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha+\cos\beta)$$



7. （10 分）U 形管角速度测量仪如图所示，两竖管距离旋转轴为 R_1 和 R_2，其液面高差为Δh，试求角速度 ω 的表达式。



解： $\rho\vec{F}-\nabla p-\rho\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=0$

将 $\vec{F}=-\nabla gz$，$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\omega^2\vec{r}=-\nabla\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2\right)$ 代入，有

$$\nabla\left(\rho gz+p-\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2\right)=0$$

所以有 $\rho gz+p-\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2=c$

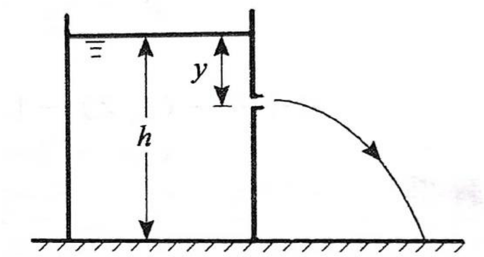
自由面上$p=$ *常数*，所以有 $\boldsymbol{z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+c}$

$$r=R_1\text{时，}z=\frac{\omega^2}{2g}{R_1}^2+\mathrm{c}=\mathrm{h}$$

$$r=R_2\text{时，}z=\frac{\omega^2}{2g}{R_2}^2+\mathrm{c}=\mathrm{h}+\Delta\mathrm{h}$$

$$\Longrightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{2g\Delta\mathrm{h}}{{R_2}^2-{R_1}^2}}$$

8. （10 分）设一大桶内装液体，液面距离底高为 h。问在桶侧壁距离液面多少距离的地方开出流小孔口，流出的液柱射得最远？

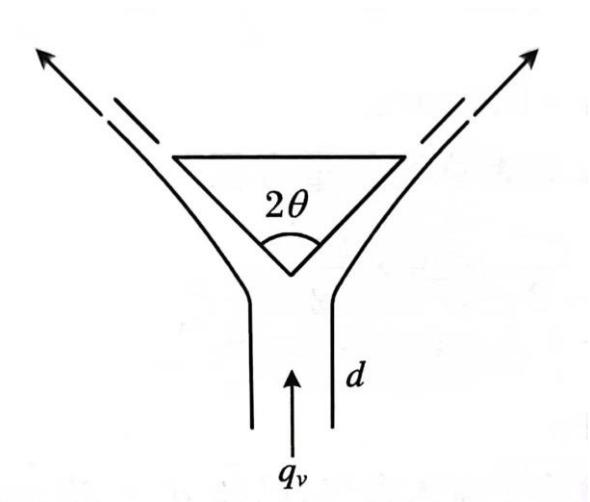


$$\frac{v^2}{2}+g(h-y)+\frac{p_0}{\rho}=gh+\frac{p_0}{\rho}\Longrightarrow v=\sqrt{2gy}$$

液柱射出距离：$\mathrm{s}=\mathrm{vt}=\sqrt{2gy}\sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}=2\sqrt{y(h-y)}$

当$y=h-y$，即$y=h/2$ 时液柱射得最远。

9. （10 分）如图，直径 d=0.3m 的管道出口设置一个锥形阀，圆锥顶角$2\theta=120°$，锥体自重 W=1500N。当水流量 q_v 为多少时，管道出口的射流刚好将锥体托起？



解：不计流体重力影响，根据伯努利积分，易得水流绕过阀体后流速仍为 v.

管道出口的射流刚好将锥体托起，此时水流对阀体的冲击力应等于阀体自重。

即根据动量定理有：$\rho v^2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2(1-cos\theta)=\mathrm{W}$

代入数据得$v=6.542\mathrm{m/s}$

$$\Rightarrow q_v=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 v=0.461m^3/s$$

10. （10 分）波长为λ的简谐波系沿深水表面传播，证明，在未扰动表面以下深度为 h 的点上，受扰动后此点达到$\mathrm{h}+\xi$深度的瞬时压强，与同一点的未扰动压强之比为

$$\left(1+\frac{\xi}{h}e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}\right):1$$

其中压强为相对表面的压强（$p-p_0$）。

证明：行进波$\varphi(x,z,t)=ce^{kz}sin(kx-\sigma t)$

依题意，ξ为自由面高度，即$\xi=\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}=\frac{c\sigma}{g}cos(kx-\sigma t)$

$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz=\sigma ce^{kz}cos(kx-\sigma t)-gz=g\xi e^{kz}-gz$

此时该点的（相对自由表面）压力为：$p'-p_0\approx\rho g(\xi e^{-kh}+h)$

未扰动前的（相对自由表面）压力为：$p-p_0=\rho gh$

$$\frac{p'-p_0}{p-p_0}=\frac{\rho g(\xi e^{-kh}+h)}{\rho gh}=\left(1+\frac{\xi}{h}e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}\right):1$$