§1 事件与概率

§1.1 概念

1. 随机实验
   - 可重复
   - 所有可能结果可知
   - 每次实验结果在实验前不可知

2. 样本空间 $\Omega=\{\omega \mid$ 在相同条件下随机实验的结果$\}$

3. 事件 $A\subseteq\Omega$

例 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　　$A=\{1,2,3\}$

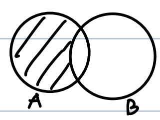
某一次实验结果为1称事件发生.

事件关系　A.B是两个事件.　$A\subseteq B$　　$A=B$

事件运算　1° A^c　A的对立事件　　2° $A\cup B$　　A发生或B发生时, $A\cup B$都发生.

3° $A\cap B$　若 $A\cap B=\phi$, A.B称不相容事件.

4° $A\setminus B$



$B\subseteq A$时, $A\setminus B\triangleq A-B$

5° $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

6° $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$　在事件列$\{A_n\}$中出现无穷多次的结果全体.

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$　只有有限个集合中不出现的结果全体.

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

事件域　Ω的某些子集构成的集合类 F 满足:

↗可列并

1° $\Omega\in F$　　2° 若 $A\in F$, 则 $A^c\in F$　　3° $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列事件 $A_n\in F$. 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in F$

称F为Ω的事件域(σ-代数)

例 $F_1=\{\phi,\Omega\}$ 最小的σ-代数

$F_2=\{\phi, A, A^c, \Omega\}$

$F_3 = 2^{\Omega}$ Ω 有限集

若 $A, B \in F$, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in F$. $A \cup B \in F$.

若 $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in F$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

(Ω, F)

§1.2 概率.

1. 事件发生频率

n次重复实验 A发生的次数为n(A). $\frac{n(A)}{n}$ 稳定于某个数p. $(n \to +\infty)$

2. 古典概型 Ω 有限集 每个结果等可能出现.

3. 几何概型. Ω 可看作线段, 平面有界图形或空间有界立体. $P(A) = \frac{A\text{测度}}{\Omega\text{测度}}$

4. P是事件域 F上定义的函数满足

1° $P(\Omega)=1$ (规范性) 2° $A \in F$, $P(A) \geq 0$ (非负性)

3° $A_n \in F$, $n=1,2\cdots$ 两两不相容. 即 $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

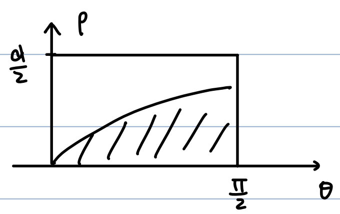
称P是(Ω, F)上定义的概率测度.

例 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

定义 $P(\{w_i\}) = p_i$ 古典概型中 $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n}$

若 $P(A)=0$, A称为null event. 若 $P(A)=1$, A称为几乎必然事件.

$\Omega = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{a}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$



$$P(A) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{4} d} = \frac{2L}{\pi d} \Rightarrow \text{估计}\pi$$

↑
模拟

针与平行线相交 $\frac{l}{2} \sin\theta \geq \rho$

5. 概率测度性质

1° $P(\phi)=0$ $\quad P(\Omega\cup(\bigcup_{k=2}^{\infty}\phi))=P(\Omega)+\sum_{k=2}^{\infty}P(\phi)=1$.

2° $P(A^c)=1-P(A)$

3° $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathcal{F}$. $A_i\cap A_j=\phi$. $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

4° $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$.

5° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

证：$A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)+P(A\cap B)$ 代入

$P((A\setminus B)\cup(A\cap B))=P(A)\Rightarrow P(A\setminus B)=P(A)-P(B\cap A)$

次可加性：$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

(hw) $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\cdots\cap A_n)$

6° $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

hw: P_4 4.5 ; P_8 4.6

引理 (1) $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ $\quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\triangleq\lim_{n\to\infty}A_n$，则 $P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

(2) $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$ $\quad A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\triangleq\lim_{n\to\infty}A_n$，则 $P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

证：(1) 记 $B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1$, $\cdots$, $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$ $\{B_n\}$两两不相容.

$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ $\quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P(B_k)=\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{k=1}^{n}B_k)$

$=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$ 概率测度下(左)连续.

(2) $A_1^c\subseteq A_2^c\subseteq\cdots\subseteq A_n^c\subseteq\cdots$

$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=1-P((\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)^c)=1-P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c)=1-\lim_{n\to\infty}P(A_n^c)$

$=1-\lim_{n\to\infty}(1-P(A_n))=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$ 概率测度上(右)连续.

在非负性.规范性前提下，可列可加性 $\Leftrightarrow$ 有限可加性 + 下连续性.

$\Leftarrow$ $\{A_n\}$互不相容事件列.

令 $B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$　$\{B_n\}$是单增事件列　$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\overset{\text{引理}}{=}\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\overset{\text{有限可加}}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

例1：均匀硬币　甲掷 $n+1$次，乙掷 n次.

求甲掷出的正面次数比乙掷出的正面次数多的概率?

解：记甲.乙掷出正确次数为 $a.b$. 反面次数为 $c.d$.

$$\left.\begin{aligned}&A:a>b \qquad B:c>d \qquad P(A)=P(B)\\&a>b \iff n+1-c>n-d \iff d\geq c \qquad P(A)=P(B^c)=1-P(B)\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

例2　n封信和n个写好封面的信封.

随机地将信放入信封，求至少有一封放对的概率?

解：记A_k为第k封信放对. 所求事件为 $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$

$$P(A_1)=\frac{(n-1)!}{n!}\qquad P(A_1\cap A_2)\triangleq P(A_1A_2)=\frac{(n-2)!}{n!},\cdots,P(A_1\cdots A_k)=\frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\begin{aligned}P(A)=P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)\\&=n\cdot\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots-(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

§1.3 条件概率

掷一颗骰子　A：点数为奇数　B：点数大于2.

已知A发生，求B也发生的概率.

$\Omega_A=\{1,3,5\}$　$P(B|A)=\frac{2}{3}$

定义　设$P(A)>0$.　$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 称为A发生的前提下，B发生的概率.

$$P(A\cap B)=P(B|A)\cdot P(A)$$

推广：$P(\bigcap^{n}A_k)>0$　$P(\bigcap^{n}A_k)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

证：右边 $= \cancel{P(A_1)} \cdot \dfrac{P(\cancel{A_1 \cap A_2})}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \dfrac{P(A_1 \cancel{A_2} A_3)}{P(\cancel{A_1 \cap A_2})} \cdots \cdots \dfrac{P(A_1 \cdots A_n)}{P(\cancel{A_1 \cdots A_{n-1}})} = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$

例 n段绳子，随机取两个端头打结，求打n个结后，正好形成n个圈的概率？

解：A_k：第k次打结后正好形成一个圈.

$P(A_1) = \dfrac{1}{2n-1}$ $\uparrow \dfrac{n}{C_{2n}^2}$ $\quad P(A_2 | A_1) = \dfrac{1}{2n-3}$ $\uparrow \dfrac{n-1}{C_{2n-2}^2}$ $\quad P(A_k | A_1 \cdots A_{k-1}) = \dfrac{1}{2(n-k+1)-1}$

$\Rightarrow P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \dfrac{1}{(2n-1)!!}$

例 袋中有w只白球，b只黑球，每次随机取一个，记下颜色后放回，再放入c只同色球.

(1) 连续取3次，求3次都取到黑球的概率.

(2) 取n次，其中 n_1 只白色，n_2 只黑色的概率.

解：A_k. 第k次取到黑球.

(1) $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) = \dfrac{b}{w+b} \cdot \dfrac{b+c}{w+b+c} \cdot \dfrac{b+2c}{w+b+2c}$

(2) $P(A_1^c A_2^c \cdots A_{n_1}^c A_{n_1+1} \cdots A_{n_1+n_2})$ ←固定顺序

$= \dfrac{w}{w+b} \cdot \dfrac{w+c}{w+b+c} \cdots \cdots \dfrac{w+(n_1-1)c}{w+b+(n_1-1)c} \cdot \dfrac{b}{w+b+n_1 c} \cdot \dfrac{b+c}{w+b+(n_1+1)c} \cdots \cdots \dfrac{b+(n_2-1)c}{w+b+(\underbrace{n_1+n_2}_{n}-1)c}$

$P(n_1\text{白}\, n_2\text{黑}) = C_n^{n_1} \cdot P(A_1^c A_2^c \cdots A_{n_1}^c A_{n_1+1} \cdots A_{n_1+n_2})$

条件概率也是定义在 (Ω, F) 上概率测度：$P(A) > 0$. 定义 $P(\cdot | A)$

$P(\Omega | A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = 1$

$P(B | A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq 0$

$\{B_n\}$ 互不相容，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n | A) = \dfrac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A))}{P(A)} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n | A)$

两个重要公式：

1. 全概率公式

定义：$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$. $A_k \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ $\quad \{A_i\}$ 称为 Ω 的一个分割.

定理：$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ 是 Ω 的一个分割，且 $P(A_i)>0$.

对 $\forall B\in\mathcal{F}$，$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$

证：$B=B\cap\Omega=B\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$ 互不相容.

$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$

常用：$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)$

例 盒1中 2白球3红球 盒2中 3白球4红球

从盒1中随机取1个球放入盒2，再从2中取1个，求盒2中取出红球的概率？

解：A：从1中取出白球 B：从2中取出红球.

$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{23}{40}$

例 抽签问题 n个签，m个好签，不放回，证明第k个人抽中好签的概率为 $\frac{m}{n}$.

证：A_k：第k个人抽中好签

$P(A_1)=\frac{m}{n}$

$P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|A_1^c)P(A_1^c)=\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n}$

$P(A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_1A_2)+P(A_3|A_1A_2^c)P(A_1A_2^c)+\cdots$

$n\geq 3$ 归纳法.

假设 $P(A_k)=\frac{m}{n}$

$P(A_{k+1})=P(A_{k+1}|A_1)P(A_1)+P(A_{k+1}|A_1^c)P(A_1^c)$

$=\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n}$

2. Bayes 公式

定理：$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ 是 Ω 的一个分割，$P(A_i)>0$. 用实际试验的结果，代替先验概率.

对 $\forall B\in\mathcal{F}$，$P(B)>0$，有 $P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}$

试验

后验概率

例 一单项选择题. 某同学会做的可能性p, 不会做但猜对的概率为$\frac{1}{4}$.

已知此题做对了, 问: 该同学会做的可能性是多少?

解: A 会做 B 做对

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{4}\cdot(1-p)}$$

例 某疾病患病可能0.5%. 通过化验手段, 误诊率5%.

A. 某人患此疾病 B. 化验结果为阳性. 求$P(A|B)$ 用$P(A|B)$代替$P(A)$

$P(A)=0.005$ $P(B^c|A)=0.05$ $P(B|A^c)=0.05$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}=\frac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.05\times0.995}=0.087$$

§1.4 独立性

$P(A)>0$, $P(B)>0$. $P(B|A)=P(B)$, $P(A|B)=P(A)$, $\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$

定义: 若事件A.B满足$P(AB)=P(A)P(B)$, 则称A.B相互独立.

推论: 1° 若$P(A)=0$, 则A与任意事件独立.

2° A与B独立, 则A与B^c, A^c与B, A^c与B^c独立

证: $P(A\cap B^c)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c)$

说明: 1° 实际问题中. 是否独立由具体情况判断.

2° 独立与不相容不同. A.B不相容 $\Leftrightarrow P(AB)=0$

3° A.B.C独立.

两两独立

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C) & ①\\ P(A\cap B)=P(A)P(B),\ P(A\cap C)=P(A)P(C),\ P(B\cap C)=P(B)P(C) & ②\end{cases}$$

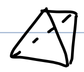
注: 满足①的事件A.B.C 不一定满足②:

$\Omega=(0,1)$ $A=(0,\frac{1}{2})$, $B=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$, $C=(\frac{3}{8},\frac{7}{8})$

$A\cap B\cap C=(\frac{3}{8},\frac{1}{2})$

$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$ 但 $\frac{1}{8}=P(AC)\neq P(A)P(C)=\frac{1}{4}$.

满足②的事件A.B.C 不一定满足①：



有3个面分别涂红、蓝、黄色，第4个面涂3种颜色.

A：向下的面有红色 $\quad P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$

B：··· 黄 $\quad P(ABC)=\frac{1}{4}$

C：··· 蓝 $\quad P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

A_i, $i\in I$. I为指标集. 相互独立 $\Leftrightarrow P(\bigcap_{i\in J} A_i)=\prod_{i\in J} P(A_i)$, $\forall J\in I$.

hw: P_{12} 1.3(1,2) $\quad P_{14}$ 2.4

设 $A_1,\cdots,A_n$ 独立, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=1-P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

小概率事件迟早发生：

$P(A)=\varepsilon<<1$. 重复实验. A_k第k次实验,事件A发生

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=1-(1-\varepsilon)^n \longrightarrow 1$$

条件独立性：

$P(C)>0$. 若 $P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$,称事件A.B关于C条件独立.

$P(\cdot|C)$ 概率测度

例 掷两个骰子. A 第1个3点. B第2个3点. C 点数和为偶数.

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{36}$. $\quad P(AB|C)=\frac{P(ABC)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{18}$

而 $P(A|C)P(B|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\cdot\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ 不是条件独立.

§1.5 乘积空间.

$\Omega_1=\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad F_1=F_2=2^{\Omega}$ $\quad P(\{i\})=\frac{1}{6}$.

$\Omega_1\overset{\text{叉乘}}{\times}\Omega_2=\{(i,j)\mid i\in\Omega_1,\ j\in\Omega_2\}$ $F_1\times F_2=\{A_1\times A_2\mid A_1\in F_1,\ A_2\in F_2\}$

$F_1=\{\phi,\Omega,A,A^c\}$ $F_2=\{\phi,\Omega,B,B^c\}$

$F_1\times F_2=\{\phi,\Omega\times\Omega,A\times\Omega,A^c\times\Omega,\Omega\times B,\Omega\times B^c,A\times B,A\times B^c,A^c\times B,A^c\times B^c\}$

$\Omega\times\Omega\setminus(A\times B)\notin F_1\times F_2 \Rightarrow F_1\times F_2$ 不是σ代数.

引理 F. g 是 Ω 的两个σ代数. 则 $F\cap g$ 也是σ代数.

证: 1° $\Omega\in F$. $\Omega\in g$. $\Omega\in F\cap g$

2° $A\in F\cap g$, 则 $A^c\in F$, $A^c\in g \Rightarrow A^c\in F\cap g$

3° $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset F\cap g$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F$. $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in g$ $\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F\cap g$

$F\cup g$ 不一定是σ-代数.

定义. A 是 Ω 的部分子集组成的集合类. 满足 $A\subset F_i$ 的σ代数 F_i 的交集 $\cap F_i$ 称为由 A 生成的σ代数. (包含 A 的最小σ代数)

例 R 上 Borel σ-代数.

$A=\{(a,b]\mid a<b,\ a,b\in R\}$ $A_1=\{(a,b)\mid a<b\}$

$(-\infty,b]\in\sigma(A)$ $\sigma(A)=\sigma(A_1)$

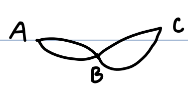
$=\bigcup_{n=|b|}^{\infty}(-n,b]$ $R^2=R\times R$. $B_2=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\mid a_1<b_1,\ a_2<b_2\}$

$\{b\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(b-\frac{1}{n},b]\in\sigma(A)$ $(a,b)\in\sigma(A)$

(Ω_1,F_1,P_1), (Ω_2,F_2,P_2)

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ $F=\sigma(F_1\times F_2)$ $P((A_1,A_2))=P_1(A_1)P_2(A_2)$ $A_1\in F_1$, $A_2\in F_2$

§1.6 例

1. 

每条路独立地以概率p被阻断.

(1) 求有一条从A到C的通路的概率.

E 表示有从A到C通路 E_1: $A\to B$ E_2: $B\to C$

$E=E_1\cap E_2$ E_1. E_2 独立. $P(E)=P(E_1)P(E_2)=(1-P(A\to B$ 两条路都不通$))P(E_2)$

$= (1-p^2)(1-p^2)$

(2) 另有一条路直接从A到C. 以概率p被阻断. 求此时有一条从A到C的通路的概率.

E_3表示A→C有直通路. $\Omega = E_3 \cup E_3^c$

$p(E) = p(E|E_3)p(E_3) + p(E|E_3^c)p(E_3^c) = 1\cdot(1-p) + (1-p^2)^2\cdot p$

2. 赌徒破产模型

甲 K 　　掷硬币. 正面: 甲资金+1, 庄-1.

庄 $N-K$ 　　反面: 庄资金+1, 甲-1.

直到1方资金为0结束. 求甲资金变为0的概率.

解: 记A_k表示甲资金从K变为0. $p(A_k) = p_k$.

B表示第1次掷出正面. $p_0 = 1, p_N = 0$

$p(A_k) = p(A_k|B)p(B) + p(A_k|B^c)p(B^c) = p(A \quad)\cdot\frac{1}{2} + p(A_{k-1})\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$ 　　$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$

$p_k = p_k - p_{k-1} + p_{k-1} - p_{k-2} + \cdots + p_1 - p_0 + p_0$

$0 = p_N = N(p_1 - p_0) + p_0 \Rightarrow p_1 - p_0 = -\frac{1}{N}$ 　　$\therefore p_k = 1 - \frac{k}{N}$

古典概型

Ω 有限集 等可能.

计数 从n个元素中任取m个有多少种取法?

	放回	不放回
可区分	n^m	A_n^m
不可区分	C_{m+n-1}^{n-1}	C_n^m

↑ 等价于分球入盒模型 　以 $n=3, m=2$ 为例 (1,1) (2,2) (3,3)

hw 1.7.1, 1.7.2, 1.7.5, 1.8.9, 1.8.11, 1.8.16 　　(1,2) (1,3) (2,3)

例 袋中有5只红球，6只白球．从中随机取两个．求下列事件概率：

A 取出2只红球

B 1红1白

C 至少有1只红球

解：依次取．（有序，不放回）

$\#\Omega = A_{11}^{2} = 110$

$\#A = 5\times4=20$ $P(A)=\frac{2}{11}$

$\#B = 2\times5\times6=60$ $P(B)=\frac{6}{11}$

$P(C)=P(A\cup B)$

一次取2个：

$\#\Omega = C_{11}^{2} = 55$

$\#A = C_{5}^{2} = 10$

例 将n个球放入N（$N\geq n$）个盒中．求下列事件的概率．

A．指定的n个盒中各有1球．

B．恰好n个盒中各有1球．

C．至少1盒中有≥ 2个球．

解：盒子无限制 球不可区分：

$\#\Omega = N^{n}$ $\#A=1$ $\#B=C_{N}^{n}$ $P(C)=1-P(B)$

球可区分：

$\#\Omega = N^{n}$ $\#A=n!$ $\#B=A_{N}^{n}$

§2．随机变量及分布函数

例 掷两个骰子 $\Omega=\{(i,j)\mid i,j\in\{1,2,\cdots,6\}\}$ X表示两个点数之和．

$X((i,j))=i+j$

一．随机变量

定义：(Ω,F,P) 概率空间． $X:\Omega\rightarrow R$ 满足

$\{w\mid X(w)\leq x\}\in F$，$\forall x\in R$．称X是随机变量 r.v.

例 盒中n个白球，1个黑球，逐个取出，X表示取到黑球的次数。

$\Omega = \{(000\cdots1 0\cdots) \mid 1 \text{ 位置 } 1,2,\cdots,n+1\}$ 　　X = 黑球位置序号。

$$P(\{X=k\}) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & k=\{1,2,\cdots,n+1\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

说明

1° X是单值函数

2° $\{X\le x\}\in F$，则 $\{X>x\}$，$\{X=x\}$，$\{a<X\le b\}$，$\{a<X<b\}$ 都是事件。

证：$\{X>x\} = \{X\le x\}^c$

$\{X<x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X\le x-\frac{1}{n}\}}_{\in F}$

$\{X=x\} = \{X\le x\}\setminus\{X<x\}$

$\{a<X<b\} = \{X\le b\}\setminus\{X\le a\}$

3° 若 $B\in\mathcal{B}(R)$，则 $\{w \mid X(w)\in B\}\in F$.

证：$\mathcal{A} = \{A\subseteq R \mid X^{-1}(A)\in F\}$

$(a,b]\in\mathcal{A}$. 只需证明 $\mathcal{A}$ 是 σ代数

$\sigma(R) = \sigma(\{(a,b] \mid a<b\})$

(1) $X^{-1}(R) = \Omega\in F \Rightarrow R\in\mathcal{A}$

(2) 若 $A\in\mathcal{A}$，即 $X^{-1}(A)\in F$，　$(X^{-1}(A))^c\in F$

$(X^{-1}(A^c)) = (X^{-1}(A))^c\in F$ 　$\therefore A^c\in\mathcal{A}$.

(3) $A_n\in\mathcal{A}$，$n=1,2\cdots$

$X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)\in F \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$

说明 $\mathcal{A}$ 是 σ代数。 $A\supset\mathcal{B}(R)$

4°. X, Y 是 (Ω, F, P) 上 r.v.s $\Rightarrow$ X+Y, X·Y 是 r.v.s.

$g: R\to R$ 　Borel可测函数，则 $g(x)$ 是r.v.

证：$Q = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 　　$\{X+Y>x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{X>r_n\}\cap\{Y>x-r_n\})$

$\{X+Y\le x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\{X\le r_n\}\cup\{Y\le x-r_n\})\in F$

$\therefore X+Y$ 是 r.v.

$XY = \frac{(X+Y)^2-(X-Y)^2}{4}$

只需证明 X^2 是 r.v.

$\{X^2 \le r\} = \begin{cases} \phi & , r<0 \\ \{-\sqrt{r} \le X \le \sqrt{r}\} & , r \ge 0 \end{cases}$

$\in F.$

二、分布函数

定义. X是 (Ω, F, P) 上定义的 r.v. 称 $F(x) = P(X \le x)$ 为 X 的分布函数.

性质: 1° $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

2° 若 $x \le y$, 则 $F(x) \le F(y)$

3° $F(x)$ 右连续

证: 2° $F(y) - F(x) = P(x < X \le y) \ge 0$

$F(x)$ 单调, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(-n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \le -n) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X \le -n)) = P(\phi) = 0$

3° $\forall x \in R$ 只需证 $\lim_{n\to+\infty} F(x+\frac{1}{n}) = F(x)$

$F(x+\frac{1}{n}) = P(X \le x+\frac{1}{n})$

记 $B_n = \{w \mid X(w) \le x+\frac{1}{n}\}$ 则 $B_n \supseteq B_{n+1}$

则 $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = P(X \le x)$

若 $F(x) \triangleq P(X < a)$, 则为左连续.

例 $X(w) = c$

$\{X \le x\} = \begin{cases} \phi & , x<c \\ \Omega & , x \ge c \end{cases} \in F.$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<c \\ 1 & , x \ge c \end{cases}$

$x = \{ 1, w \in A$

$0,\ \omega\in A^c.$

$\{X<x\}=\begin{cases}\phi, & x<0\\ A^c, & 0\le x<1\\ \Omega, & x\ge 1\end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-P(A), & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

引理 $F(x)$是 r.v. X 的分布函数. 则

$P(X>x)=P((X\le x)^c)=1-P(X\le x)=1-F(x)$

$P(x<X\le y)=F(y)-F(x)$

$P(X=x)=P(X\le x)-P(X<x)=F(x)-P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\le x-\frac{1}{n}))$

$\quad =F(x)-P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\le x-\frac{1}{n}))=F(x)-\lim_{n\to\infty}P(X\le x-\frac{1}{n})$

$\quad =F(x)-F(x-0)$

$P(X\ge x)=1-F(x-0)\qquad P(a<X<b)=F(b-0)-F(a)$

§2.2 离散型和连续型 r.v.

一. 离散型 r.v.

X 的取值至多可列个.

$f(x)=P(X=x)$ probability mass function 质量函数.

分布律

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

$1\ge p_i=P(X=x_i)\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1$

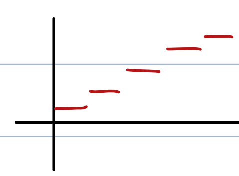
$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}p_i$ 阶梯函数.

例

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{6}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{5}{6}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$

跳跃度为取该值的概率.



例 r次被击中后完全被催毁. 每次射击过程相互独立以概率 p 命中目标.

以 X 表示目标物被毁时总射击次数. 求 X 分布律,

$X = r, r+1, r+2, \cdots$

对 $k \geq r$. $P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r} \cdot p$

$$p^r \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r} \overset{?}{=} 1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right)' \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)x^{k-3}$$ 代入 $x = 1-p$.

$$\Rightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r} = \frac{1}{p^r}$$

hw: 2.1.2, 2.1.4, 2.1.5, 2.3.2, 2.3.3

满足: 存在非负函数 $f(u)$, s.t. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ 称 X 为连续型 r.v.

说明 1° $F(x)$ 是连续函数

2° X 是 $f(x)$ 的连续点 $\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0) \quad (\Delta x \to 0)$

$$f(x_0)\Delta x \approx P(X \leq x_0+\Delta x) - P(X \leq x_0) = P(x_0 < X \leq x_0+\Delta x)$$

$f(x)$ 称为概率密度函数.

3° $P(X=a) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(a-\frac{1}{n} < X \leq a) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(a) - F(a-\frac{1}{n}) = 0$

4° $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

性质 1° $f(x) \geq 0$ 2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

满足性质 1°. 2° 的函数 $f(x)$ 都可以看作某 r.v. 的 p.d.f.

例 某电子元件的使用寿命 X.

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & x \leq 1000 \end{cases}$

求 1° 常数 c 2° $P(X \leq 1700 \mid 1500 < X \leq 2000)$

3° 某设备中有3个此类元件, 问 1500小时内至多1个损坏的概率.

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1000}^{+\infty} \frac{c}{x^2}\,dx = \frac{c}{1000} = 1 \Rightarrow c = 1000$

(2) $P(X \le 1700 \mid 1500 < X \le 2000)$

$$= \frac{P(1500 < X \le 1700)}{P(1500 < X \le 2000)} = \frac{\int_{1500}^{1700} \frac{1000}{x^2}\,dx}{\int_{1500}^{2000} \frac{1000}{x^2}\,dx} \approx 0.4706$$

(3) $P(X < 1500) = \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}$

$P(\text{至多1个损坏}) = P(\text{没有损坏}) + P(\text{1个损坏}) = (1-\frac{1}{3})^3 + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})^2$

混合型

F_1 为离散型 r.v. 分布函数；F_2 为连续型 r.v. 分布函数.

$0 < \alpha < 1$. $F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x)$ $F(x)$ 满足单调性, 有界, 右连续是混合型分布.

例 掷飞镖 (x, y) 落点、 $X = \sqrt{x^2+y^2}$ 标靶 $r \le 3$

掷中标靶的可能性为 α，脱靶的可能性为 $1-\alpha$.

$$Z = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{上靶} \\ 0, & \text{脱靶} \end{cases}$$ 求 Z 的分布函数.

$P(Z \le R) = P(Z \le R \mid \text{脱靶})(1-\alpha) + P(Z \le R \mid \text{中靶}) \cdot \alpha$

$R < 0$ $P(Z \le R) = 0$

$0 \le R \le 3$ $P(Z \le R) = (1-\alpha) + \alpha \cdot \frac{R^2}{3^2}$

$R \ge 3$ $P(Z \le R) = 1$

$$\Rightarrow P(Z \le R) = \begin{cases} 0, & R < 0 \\ \alpha \cdot \frac{R^2}{9} + (1-\alpha), & 0 \le R < 3 \\ 1, & R \ge 3 \end{cases}$$

§2.5 随机向量.

一. $X_1, \cdots, X_n$ 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的 n 个 r.v. $(X_1, \cdots, X_n)$ n 维随机向量. n-dim r.v.

$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$ 称为联合分布函数.

$n=2$ (X, Y) $F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$

引理：$F(x,y)$ 是 r.v. (X,Y) 联合分布函数.

1° $0 \le F(x,y) \le 1$, $\forall (x,y) \in R^2$

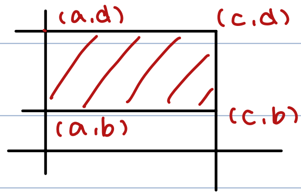
2° $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$

3° 固定一个变量，则 $F(X,Y)$ 关于另一变量单调增 $y_1 < y_2$ $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$

4° $a<c$. $b<d$ $F(c,d) - F(c,b) - F(a,d) + F(a,b) \ge 0$

$F(c,d) - F(c,b) - F(a,d) + F(a,b) = P(X \le c, b < Y \le d) - P(X \le a, b < Y \le d)$

$= P(a < X \le c, b < Y \le d) \ge 0$



5° $F(x,y)$ 固定 y，关于 x 右连续；固定 x，关于 y 右连续.

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & x+y \ge 0 \\ 0 & x+y < 0 \end{cases}$$ 满足 2°, 3°, 5° 但不满足 4°.

$F(1,1) - F(-1,1) - F(1,-1) + F(-1,-1) = 1-1-1+0 = -1 \Rightarrow$ 不满足 4°

推广到 n 维 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$A = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$

顶点集 $V = \{\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \cdots \times \{a_n, b_n\}\}$

$v \in V$. $i =$ v 的坐标中取 $\{a_k\}$ 的个数.

$sgn(v) = (-1)^i$

$P((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A) = \sum\limits_{v \in V} sgn(v) F(v) \ge 0$

二. 边缘分布.

(X,Y) 联合分布 $F(x,y)$.

其中X.Y各自的分布 $F_X(x)=P(X\le x)$, $F_Y(y)=P(Y\le y)$ 称为X.Y的边缘分布函数.

$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y\in R)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(X\le x, Y\le n))=\lim\limits_{n\to\infty}P(X\le x, Y\le n)$

例 (X, Y)联合分布函数.

$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{2}) \quad (x,y)\in R^2$

求 1° 常数A.B.C的值 2° X.Y边缘分布 3° $P(X>2)$

解: (1) $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{2})=0 \\ \lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0\end{cases} \Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2},\ A=\frac{1}{\pi^2}$

(2) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$

$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2})$

(3) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ n-dim r.v. $(X_{i_1}, \cdots, X_{i_k})$联合分布, K维边缘分布.

三. 离散型随机向量.

(X, Y) 取值为至多可列个.

Y\X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
y_m	p_{1m}	p_{2m}		p_{nm}
$\vdots$				

分布列 $P((X,Y)=(x_i,y_j))=p_{ij}$

$0\le p_{ij}\le 1$, $\sum\limits_{i,j}p_{ij}=1$

hw. 2.3.5, 2.4.2

三.连续型随机变量.

(X,Y) 联合分布 $F(x,y)$.

若 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dv$，其中 $f(x,y)\ge 0$

称 (X,Y) 是连续型 r.v. $f(x,y)$ 称为联合密度函数.

性质 1° $f(x,y)$ 是 p.d.f. $\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=1$

2° $F(x,y)$ 连续. 在 $f(x,y)$ 连续点上 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

3° $P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy \quad G\in B(R^2)$

边缘分布

$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right)$

令 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ X 概率密度.

例 r.v. (X,Y) 联合分布 概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy & 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求常数 k (2) $P(X+Y\ge 1)$ (3) $P(X<0.5)$

解: (1) $\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=\iint_D kxy\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^y kxy\,dx=\frac{k}{8}=1\Rightarrow k=8$

$D: 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1$

(2) 记 $D_1=D\cap\{x+y\ge 1\}$

$P(X+Y\ge 1)=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xy\,dx=\frac{5}{6}$.

(3) 记 $D_2=D\cap\{x<0.5\}$

$P(X<0.5)=\iint_{D_2}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 8xy\,dy=\frac{7}{16}$

§3 离散型 r.v.

§3.1 常见离散型分布

1. 均匀分布 $X(\omega)\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ $P(X=x_n)=\frac{1}{n}$ $i=1,\cdots,n$

2.二项分布

重复进行某实验n次，其中事件A发生次数为X. $X\in\{0,1,2,\cdots,n\}$ $P(X=k)$

A_i: 第i次实验. $P(A_i)=p$

$P(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}^c\cdots A_n^c)=\prod_{i=1}^{k}P(A_i)\prod_{j=1}^{n-k}(A_{k+j}^c)=p^k(1-p)^{n-k}$

$\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1$

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, 称X服从二项分布 记 $X\sim B(n,p)$

↪ n=1时, Bernoulli分布: $P(X=1)=p$, $P(X=0)=q=1-p$

例 每台机器需维修的概率是1%. 不同机器相互独立.

计算下列两种情形下, 机器故障来不及维修的概率.

(1) 1人看20台 (2) 3人看80台.

效率更高.

解: X, Y表示两种情形下, 需要维修的机器数.

$X\sim B(20,0.01)$ $Y\sim B(80,0.01)$

$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_{20}^0\,0.99^{20}-C_{20}^1\cdot0.01\times0.99^{19}\approx0.0169$

$P(Y>3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)-P(Y=3)\approx0.0087$

定理 $\lim_{n\to+\infty}np_n=\lambda$

则 $\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$. 记 $\lambda_n=np_n$, $p_n=\frac{\lambda_n}{n}$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$

$=\underbrace{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-k+1}{n})}_{k项}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\lambda_n^k\boxed{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}}^{(-\lambda_n)(\frac{n-k}{n})}$

→ 1 as n→∞ → e

$\to\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\cdot\lambda^k$

例 某产品优等品97% 一等品3%

要以90%的概率保证每箱中至少有100个优等品, 问每箱中至少放多少?

解: 设每箱装100+n个. 其中一等品数量 $X\sim B(100+n,0.03)$

$P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_{100+n}^k\,0.03^k\,0.97^{100+n-k}\ge90\%$ ⇒ 求n

3. 几何分布

独立. 重复 Bernoulli 实验.

X表示事件A首次发生的实验次数.　$X \in \{1, 2, 3 \cdots\}$

$P(A) = p$, $P(A^c) = q = 1-p$.　$P(X=k) = q^{k-1} \cdot p$

$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$

无记忆性.

$P(X = n+m \mid X > m) = P(X = n)$

$$P(X = n+m \mid X > m) = \frac{P(X = n+m, X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X = n+m)}{P(X > m)} = \frac{q^{n+m-1} \cdot p}{\sum_{k=m+1}^{\infty} q^{k-1} \cdot p} = \frac{q^{n+m-1}}{\frac{q^m}{1-q}} = q^{n-1} \cdot p = P(X=n)$$

取正整数值随机变量且有无记忆性, 则必服从几何分布

证: $P(X > n+m \mid X > m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = m+k \mid X > m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) = P(X > n) \triangleq \alpha_n$

$$P(X > n+m \mid X > m) = \frac{P(X > n+m, X > m)}{P(X > m)} \triangleq \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_m} = \alpha_n$$

$\alpha_{m+n} = \alpha_m \cdot \alpha_n$　　$\alpha_{n+1} = \alpha_n \alpha_1 = \cdots = \alpha_1^{n+1}$

$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = \alpha_1^{n-1} - \alpha_1^n = \alpha_1^{n-1}(1 - \alpha_1)$　　记 $p = 1 - \alpha_1$, $q = \alpha_1$　$X \sim G(p)$

4. 负二项分布.

独立重复 Bernoulli 实验.　X: 事件A第r次发生时的实验次数.

$X \sim f(r, p)$　　$P(A) = p$　　$X \in \{r, r+1, \cdots\}$　　$P(X=k) = C_{r-1}^{k-1} p^{r-1} q^{k-r} \cdot p$

$= C_{r-1}^{k-1} p^r q^{k-r}$

$\because \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$　　$\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) x^{k-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$　$\cdots$　$\sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$

$\Rightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} = p^r \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^r} = 1$

5. Poisson 分布

$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$　　$k = 0, 1, 2, \cdots$

$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

每次观测7.5秒, 2608次实验, 记录10094个.　平均3.87个每次

频率近似 $P(X=k)\sim e^{-3.87}\cdot\frac{3.87^k}{k!}$

独立增量性，平移增量性，普通性（极短时间内至多发生1次）

记 X_t 表示 $[0,t]$ 时刻内观测粒子数

$\sum_{k=2}^{\infty}P(X_t=k)\approx 0 \quad P(X_t=1)=\mu t+o(t)$，$P(X_t=k)\approx e^{-\mu t}\cdot\frac{(\mu t)^k}{k!}$

§3.2 独立性

$A,B\in\mathcal{F} \quad P(AB)=P(A)P(B)$

$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$

$A_i=\{X=x_i\} \quad X=\sum_i x_iI_{A_i} \quad B_j=\{Y=y_j\} \quad Y=\sum_j y_jI_{B_j}$

定义 称离散型 r.v. X,Y 相互独立是指 $\forall x_i,y_j$ $\{X=x_i\},\{Y=y_j\}$ 独立.

即 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j) \quad i=1,2\cdots,\ j=1,2,\cdots$

等价定义：离散型 r.v. X,Y 独立. $\Leftrightarrow$ 对 $\forall A,B\subset\mathbb{R}$.

$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$

证：$\Rightarrow$ $P(X\in A,Y\in B)=\sum_{\substack{x\in A\\y\in B}}P(X=x,Y=y)\overset{\text{独立}}{=}\sum_{\substack{x\in A\\y\in B}}P(X=x)P(Y=y)=\sum_{y\in B}(\sum_{x\in A}P(X=x))P(Y=y)$

$=P(X\in A)P(Y\in B)$

$\Leftarrow$ 令 $A=\{x\},B=\{y\}$ 即得

特别地，$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$ X,Y 独立.

定理 X,Y 是独立离散型 r.v. $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 则 $g(X),h(Y)$ 独立.

证：$g(X),h(Y)$ 也是离散型 r.v.

$$P(g(X)=a,h(Y)=b)=\sum_{\substack{g(x_i)=a\\h(y_j)=b\\x_i,y_j}}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{\substack{x_i,y_j\\g(x_i)=a\\h(y_j)=b}}P(X=x_i)P(Y=y_j)=\sum_{\substack{x_i\\g(x_i)=a}}P(X=x_i)\cdot\sum_{\substack{y_j\\g(y_j)=b}}P(Y=y_j)$$

$$=P(g(X)=a)P(h(Y)=b)$$

例 独立重复 Bernolli 实验. X 表示成功次数，Y 表示失败次数.

实验次数 $N\sim P(\lambda)$（参数 λ Poisson 分布）此时 X,Y 独立.

$P(X=n,Y=m)=P(X=n,Y=m\mid N=m+n)P(N=m+n)$

$$= C_{m+n}^{n} p^n q^m \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!\,m!} p^n q^m e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda q)^m}{m!} e^{-\lambda q}$$

$$P(X=n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} P(X=n \mid N=m) P(N=m) = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p}.$$

hw 3.1.1 (b.d) 3.1.2 (b)(d) 3.2.2 3.2.3

X.Y离散型r.v.

X.Y独立 $\iff P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j) \iff P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

$\iff P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)P(Y\le y)$

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立.

$\forall$可能取值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \cdots, \{X_n = x_n\}$相互独立

$\iff F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$

$x_i \to +\infty$ $F_{X_1 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_n}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \prod_{k\ne i} F_{X_k}(x_k)$

① $\{X_n, n\in I\}$ (I指标集)相互独立是指对$J\in I$, $\{X_n, n\in J\}$相互独立.

② $\{X_1, \cdots, X_n\}$, $\{Y_1, \cdots, Y_m\}$相互独立. $F(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = F_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n) F_{\vec{Y}}(y_1, \cdots, y_m)$

$g: R^n \to R$, $h: R^m \to R$, 则$g(X_1, \cdots, X_n)$, $h(Y_1, \cdots, Y_m)$相互独立.

§3.3 数学期望

r.v. 数字特征: (1) 位置参数: 期望(均值). 中位数. 众数. (2) 刻度参数: 方差. 标准差

X. $f(x) = P(X=x)$

定义: r.v. X 概率 mass function $f(x)$. 如果$\sum_x x f(x)$绝对收敛. 称$\sum_x x f(x)$为数学期望.

记作$E[X]$. e.g. $P(X=\pm k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\times 2}{\pi^2 k^2} = 1$

$\sum_{k\ne 0} k \cdot \frac{3}{\pi^2 \cdot k^2} = \sum_{k\ne 0} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k}$ 发散

例 $I_A(w)=\begin{cases}1, & w\in A\\ 0, & w\notin A.\end{cases}$

$P(I_A=1)=P(A)$ $\quad E(I_A)=1\cdot P(A)+0\cdot P(A^c)=P(A)$

随机变量函数的数学期望

$X\sim P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

$g: R\to R \quad E(g(X))=\sum_k g(x_k)\cdot P(X=x_k)$

X	-1	0	1	1.5
P	0.1	0.2	0.3	0.4

$E[X]=-1\times 0.1+0\times 0.2+1\times 0.3+1.5\times 0.4$

X^2	1	0	2.25
P	0.4	0.2	0.4

$E[X^2]=1\cdot P(X^2=1)+2.25\cdot P(X^2=2.25)$

$X\in\{x_1,x_2,\cdots\}$ $\quad A_k=\{w\mid X=x_k\}$ $\quad X=\sum_k x_k I_{A_k}$ $\quad E[X]=\sum_k x_k P(X=x_k)=\sum_k x_k\cdot E(I_{A_k})$

(X,Y) $\quad P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

$E(g(X,Y))=\sum_{i,j} g(x_i,y_j)\cdot P(X=x_i,Y=y_j)$

数学期望性质（所涉及期望存在）

(1) $X\geq 0$，则 $E[X]\geq 0$ $\quad$ (2) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ $\quad a,b\in R$

(2)证：设 $X=\sum_i x_i I_{A_i}$ $\quad A_i=\{w\mid X(w)=x_i\}$; $\quad Y=\sum_j y_j I_{B_j}$ $\quad B_j=\{w\mid Y(w)=y_j\}$

$aX+bY=\sum_i ax_i I_{A_i}+\sum_j by_j I_{B_j}=\sum_i ax_i\sum_j I_{A_i\cap B_j}+\sum_j by_j\sum_i I_{B_j\cap A_i}$

$=\sum_i\sum_j (ax_i+by_j) I_{A_i\cap B_j}$

$E(aX+bY)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_{i,j} ax_i P(A_i\cap B_j)+\sum_{i,j} by_j P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_i ax_i\sum_j P(A_i\cap B_j)+\sum_j by_j\sum_i P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_i ax_i P(A_i)+\sum_j by_j\cdot P(B_j)$

$=aE(X)+bE(Y)$

(3) 若 $X\geq Y$，则 $E(X)\geq E(Y)$ $\quad$ (4) $E(|X|)\geq |E(X)|$

(5) 若 X.Y独立，则 $E[XY]=E[X]E[Y]$. 若 X.Y满足 $E[XY]=E[X]E[Y]$，称其不相关.

证：$E[XY]=E(\sum_i x_i\cdot I_{A_i}\cdot\sum_j y_j\cdot I_{B_j})=E(\sum_{i,j}x_iy_jI_{A_i\cap B_j})=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i\cap B_j)$

$\overset{独立性}{=}\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i)P(B_j)=\sum_i x_iP(A_i)\cdot\sum_j y_j\cdot P(B_j)=E[X]\cdot E[Y]$

推广 $X_1,\cdots,X_n$ 独立. $E(\prod_{i=1}^n X_i)=\prod_{i=1}^n E(X_i)$

尽量别写成 $E(XY)^2$

(6) $[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$

证：$E((tX+Y)^2)=E(X^2t^2+2tXY+Y^2)=t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2)\ge 0$ 对 $\forall t\in R$ 成立.

若 $E(X^2)\ne 0$，判别式 $4[E(XY)]^2\le 4E(X^2)E(Y^2)$

若 $E(X^2)=0=\sum_i x_i^2P(X=x_i)$ (必有 $x_i^2\cdot P(X=x_i)=0$. $\Rightarrow P(X=0)=1$, $E[XY]=E[X^2]=E[Y^2]=0$

$\exists t_0$, s.t. $E[(t_0X+Y)^2]=0$ 　取等号 $\Leftrightarrow\exists t_0$, s.t. $P(t_0X+Y=0)=1$

4.方差

定义：X 离散型 $E(X)$. $E(X^2)$ 存在. 称 $E[(X-E(X))^2]$ 为X的方差.

记为 $Var(X)=E(X^2-2XE(X)+E(X)^2]=E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

$\sqrt{Var(X)}$ 标准差 　$E(X^k)$: k阶矩 ; $E((X-E(X))^k)$: k阶中心矩

方差性质

(1) $Var(aX)=a^2Var(X)$, $a\in R$ 　(2) 若 X.Y不相关，则 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

证：(1) $Var(aX)=E((aX)^2)-[E(aX)]^2=a^2E(X^2)-a^2E(X)^2=a^2Var(X)$

(2) $Var(X+Y)=E((X+Y)^2)-[E(X+Y)]^2$

$=E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+E(Y))^2$

$=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-E(X)^2-E(Y)^2-2E(X)E(Y)$

$=Var(X)+Var(Y)$

5.常见分布的期望.方差

(1) $X\sim B(n,p)$ 　$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=np\cdot(p+q)^{n-1}=np$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}+\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\cdot(p+q)^{n-2}+E(X)=(n^2-n)p^2+np$$

$$var(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=npq$$

(2) $X\sim G(p)$ $\quad P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\cdot p=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\cdot\left(\frac{q}{1-q}\right)'=p\cdot\frac{1-q+q}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}\cdot p=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)q^{k-1}\cdot p-\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\cdot\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''-\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$var(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

(3) $X\sim f(r,p)$ $\quad P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ $\quad k=r,r+1,\cdots$

$X=X_1+X_2+\cdots+X_r$ $\quad X_i$表示第$i-1$次成功到第i次成功所需次数.

$X_1,X_2,\cdots,X_r$独立. $\quad X_i\sim G(p)$

$EX=E(X_1+\cdots+X_r)=\frac{r}{p}$ $\qquad var(X)=\sum_{i=1}^{r}var(X_i)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

(4) Poisson分布 $\quad P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^2+\lambda.$$

$var(X)=\lambda$

hw: 3.2.5, 3.3.2, 3.3.3

§3.4 示性函数举例

$A,B\in F$ $\quad I_A(w)=\begin{cases}1, & w\in A\\ 0, & w\in A\end{cases}$ $\qquad I_{A^c}(w)=1-I_A(w)$, $I_{AB}(w)=I_A(w)I_B(w)$

$E[I_A]=P(A)$

例 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)$

证: $\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\right)=E\left(I_{\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{n}I_{A_i^c}\right)=E\left((1-I_{A_1})(1-I_{A_2})\cdots(1-I_{A_n})\right)$$

$$=E\left(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum I_{A_{i_1}}I_{A_{i_2}}\cdots I_{A_{i_k}}\right)$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots A_{i_k})$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

例 围绕花坛有52棵树，15只小鸟随机在树上建窝，每棵树上至多1只小鸟.

证明：∃连续7棵树上至少生活3只小鸟.

证：$\Omega=\{1,2,\cdots,52\}$ $I_{\{k\}}=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{棵树上有小鸟}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$X(k)=I(k)+I_{(k+1)\bmod 52}+\cdots+I_{(k+6)\bmod 52}$

$E(X)=\sum_{k=1}^{52}X(k)\underbrace{P(W=k)}_{\frac{1}{52}}=\frac{1}{52}\times7\times15=\frac{105}{52}>2$

$\therefore P(X>2)>0\Rightarrow\exists k\in\Omega\quad k\in\{X>2\}\Rightarrow\quad X(k)\geq3$

例 n把伞放在1个箱中，每个人随机拿1把，N表示拿对自己伞的人数. 讨论N的分布列及期望，方差.

解：$\Omega=\{i_1,i_2,\cdots,i_n \mid 1,\cdots,n\text{的一个排列}\}$

A_k表示第k个人拿到自己伞. $I_{A_k}=\begin{cases}1, & W\in A_k\\ 0, & W\notin A_k\end{cases}$ $N=\sum_{k=1}^{n}I_{A_k}$

$P(N=i)=C_n^i E(I_{A_1}I_{A_2}\cdots I_{A_i}I_{A_{i+1}^c}\cdots I_{A_n^c})$

$=C_n^i E(I_{A_1}I_{A_2}\cdots I_{A_i}(1-I_{A_{i+1}})\cdots(1-I_{A_n}))$

$=C_n^i\cdot\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_{n-i}^j E(I_{A_1}\cdots I_{A_i}I_{A_{i+1}}\cdots I_{A_{i+j}})$

$=C_n^i\cdot\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_{n-i}^j\cdot\frac{(n-i-j)!}{n!}$

$=\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!}\qquad j=0,1,\cdots,n$

$E(N)=\sum_{i=0}^{n}E(I_{A_i})=n\cdot\frac{1}{n}=1$

$var(N)=E(N^2)-E(N)^2=E((\sum_{i=1}^{n}I_{A_i})^2)-1=E(\sum_{i=1}^{n}I_{A_i}^2+2\sum_{i<j}I_{A_i}I_{A_j})-1$

$=1+2\cdot\frac{(n-2)!}{n!}C_n^2-1=1$

§3.5 条件分布与条件期望

(X,Y) 2-dim r.v.

分布列 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$ $\sum_{i,j}p_{ij}=1$

定义 若 $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 存在，称之为 $\overset{r.v.}{X\cdot Y}$ 的协方差记为 $\mathrm{cov}(X,Y)$

$\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$ 称为 X,Y 的相关系数.

性质：

(1) $\mathrm{cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X)$

(2) $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E[XY-E(X)Y-XE(Y)+E(X)E(Y)]$

$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(3) $\mathrm{cov}(X,a)=0,\ \forall a\in R$

(4) $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)\ \ \forall a,b\in R$

(5) $\mathrm{cov}(X+Y,Z)=\mathrm{cov}(X,Z)+\mathrm{cov}(Y,Z)$

(6) $\mathrm{Var}(X+Y)=E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-(E(X))^2-(E(Y))^2-2E(X)E(Y)$

$=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$

相关系数性质：

(1) $|\rho(X,Y)|\le 1$

(2) $|\rho(X,Y)|=1 \Leftrightarrow \exists a,b\in R,\ s.t.\ P(Y=aX+b)=1$

证：(1) $(E((X-EX)(Y-EY)))^2\le E((X-EX)^2)\cdot E((Y-EY)^2)$

即 $(\mathrm{cov}(X,Y))^2\le \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) \Rightarrow |\rho(X,Y)|\le 1$

(2) $\mathrm{Var}(X),\mathrm{Var}(Y)>0,\ E(X^2)>0$

$|\rho(X,Y)|=1 \Leftrightarrow$ Cauchy 不等式取"=" $\Leftrightarrow E[(t(X-EX)+(Y-E(Y)))^2]$ 关于 t 判别式 $=0$

$\Leftrightarrow \exists t_0,\ P(t_0(X-EX)+Y-EY=0)=1$ 即 $P(Y+t_0X-(t_0EX-EY)=0)=1$

令 $a=-t_0,\ b=t_0EX-EY$ 即可.

X	-1	0	1
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$Y=X^2$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^3)-E(X)E(Y)=0$

X,Y相互独立 $\Rightarrow$ $cov(X,Y)$ 反之不对

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 协方差矩阵 $\Sigma=(cov(X_i,X_j))_{n\times n}$

$$=\begin{pmatrix} cov(X_1,X_1) & \cdots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_2,X_1) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ cov(X_n,X_1) & \cdots & cov(X_n,X_n) \end{pmatrix}$$

$$var(\sum_{i=1}^n X_i)=E((\sum_{i=1}^n(X_i-EX_i))^2)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n cov(X_i,X_j)$$

例 独立重复实验. 实验有r种可能的结果. X_k表示n次实验中第k个结果出现次数.

$(X_1,\cdots,X_r)$

$a_1+\cdots+a_r=n$时, $P(X_1=a_1,X_2=a_2,\cdots,X_r=a_r)=C_n^{a_1}C_{n-a_1}^{a_2}\cdots C_{a_r}^{a_r}\cdot p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$

$$=\frac{n!}{a_1!\cdots a_r!}p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$$

多项分布

$X_1\sim B(n,p_1)$ $\quad (X_1,X_2)\sim(n,(p_1,p_2,1-p_1-p_2))$

$X_1+X_2\sim B(n,p_1+p_2)$

计算 $Cov(X_i,X_j)$ $\quad \rho(X_i,X_j)$

$Var(X_i+X_j)=varX_i+varX_j+2cov(X_i,X_j)$ $\quad X_i+X_j\sim B(n,p_i+p_j)$

$var(X_i+X_j)=n(p_i+p_j)(1-(p_i+p_j))$

$cov(X_i,X_j)=\frac{1}{2}(var(X_i+X_j)-varX_i-varX_j)=\frac{1}{2}(n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)-np_i(1-p_i)-np_j(1-p_j))$

$=-np_ip_j$

$$\rho(X_i,X_j)=\frac{-np_ip_j}{\sqrt{np_i(1-p_i)\cdot np_j(1-p_j)}}=-\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

例

X \ Y	-1	0	2	f_X
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=\sum_{x,y}xy\,P(X=x,Y=y)-\sum_x x\cdot P(X=x)\cdot\sum_y y\cdot P(Y=y)$

2	$\frac{2}{18}$	0	[illegible]/18	$\frac{5}{18}$
3	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
f_Y	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	

$= \frac{41}{324}$

条件期望

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad (B_i \cap B_j = \phi)$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \quad E(I_A) = \sum_{i=1}^{n} E(I_A|B_i)P(B_i) \quad B_i = \{w \mid Y(w_i) = y_i\}$

定义 $(X, Y) \quad P(Y=y) > 0$

$f_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$ 在 $Y=y$ 条件下，X 的条件分布列

$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x \mid Y=y)$ 条件分布函数.

$E[X|Y=y] = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)$ 称 $Y=y$ 时 X 的条件期望.

记 $\psi(y) = E(X|Y=y) \quad \psi(Y(w))$ 是一个 r.v.

例 重复射击. 命中可能性为 p. S_i: 第 i 次射中的射击次数.

$i = 1, 2, \cdots, j-1$

(1) $P(S_1 = i \mid S_2 = j) = \frac{P(S_1=i, S_2=j)}{P(S_2=j)} = \frac{p^2 \cdot (1-p)^{j-2}}{C_{j-1}^{1} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{j-2}} = \frac{1}{j-1}$ (均匀分布)

(2) $\underbrace{E[S_1 \mid S_2 = j]}_{\psi(S_2) = \frac{S_2}{2} \text{ r.v.}} = \sum_{i=1}^{j-1} i \cdot \frac{1}{j-1} = \frac{j(j-1)}{2} \cdot \frac{1}{j-1} = \frac{j}{2}$

$P(\psi(S_2) = j) = P(S_2 = 2j) = C_{2j-1}^{1} p^2 (1-p)^{2j-2}$

命题 $\psi(X) = E[Y|X]$，则 $E(\psi(X)) = E(Y)$

证: $E[\psi(X)] = \sum_x \psi(x) P(X=x) = \sum_x E(Y|X=x) \cdot P(X=x)$

$= \sum_x (\sum_y y P(Y=y \mid X=x)) \cdot P(X=x)$

$= \sum_x (\sum_y y \cdot \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} \cdot P(X=x))$

$= \sum_x \sum_y y \cdot P(X=x, Y=y)$

$= \sum_y y P(Y=y) = E(Y)$

$E(Y) = \sum_x E(Y|X=x) P(X=x)$

定理 X.Y相互独立时，$E(Y|X)=E(Y)$

$$\psi(x)=E(Y|X=x)=\sum_y y\cdot P(Y=y|X=x)=\sum_y y\cdot P(Y=y)=E(Y)$$

$$\frac{P(Y=y,X=x)}{P(X=x)}=\frac{P(Y=y)\cancel{P(X=x)}}{\cancel{P(X=x)}}$$

hw: 3.4.2, 3.4.4, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5

定理 $g(x)$, $h(y)$一元函数. $E(g(X))$, $E(h(Y))$存在，则$E(g(X)h(Y)|X)=g(X)E(h(Y)|X)$

证：令 $r_1(x)=E(g(X)h(Y)|X=x)$, $r_2(x)=E(h(Y)|X=x)$

$$r_1(x)=\sum_y g(x)h(y)\cdot f_{Y|X}(y|x)=g(x)\sum_y h(y)f_{Y|X}(y|x)=g(x)\cdot r_2(x)$$

定理 $\psi(X)=E[Y|X]$, $E(\psi(X)g(X))$, $E(Yg(X))$存在，则$E(\psi(X)g(X))=E(Yg(X))$存在

（对$\forall$适当的$g(x)$都有上式成立，定义$E[Y|X]=\psi(X)$）

证：$E(\psi(X)g(X))=\sum_x \psi(x)g(x)P(X=x)=\sum_x\left(\sum_y y f_{Y|X}(y|x)\right)g(x)\cdot P(X=x)$

$$=\sum_x\sum_y y\cdot g(x)\cdot P(X=x,Y=y)=E(Yg(X))$$

例 X_i $i=1,2,\cdots$ 独立同分布 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p=q$ $N\sim P(\lambda)$

$P(N=n)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$, $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 求$E(X|N)$, $E(N|X)$, $E(X)$, $Var(X)$

解：$f_{X|N}(x|n)=C_n^x p^x q^{n-x}$

$$f_{N|X}(n|x)=\frac{P(N=n,X=x)}{P(X=x)}=\frac{P(X=x|N=n)\cdot P(N=n)}{\sum_{n\geq x}P(X=x|N=n)\cdot P(N=n)}=\frac{C_n^x\cdot \cancel{p^x}q^{n-x}\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum_{m\geq x}C_m^x\cdot\cancel{p^x}q^{m-x}\cdot\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{x!}(n-x)!}q^{n-x}\cdot\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}}{\sum_{m\geq x}\frac{\cancel{m!}}{\cancel{x!}(m-x)!}q^{m-x}\cdot\frac{\lambda^m}{\cancel{m!}}}=\frac{q^{n-x}\cdot\lambda^n}{(n-x)!}\cdot\frac{1}{\lambda^x e^{q\lambda}}=\frac{(\lambda q)^{n-x}}{(n-x)!}e^{-\lambda q}$$

$$\downarrow\ \sum_{m\geq x}\frac{(\lambda q)^{m-x}\cdot\lambda^x}{(m-x)!}$$

$B(n,p)$类似X

$E(X|N=n)=\sum_x x\cdot f_{X|N}(x|n)=\sum_x x\cdot C_n^x p^x q^{n-x}=np$ $\quad E(X|N)=Np$

$$E(N|X=x)=\sum_{n\geq x}n\cdot f_{N|X}(n|x)=\sum_{n\geq x}n\cdot\frac{(\lambda q)^{n-x}}{(n-x)!}e^{-\lambda q}\overset{k=n-x}{=\!=}\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)\cdot\frac{(\lambda q)^k}{k!}e^{-\lambda q}$$

$$=\lambda q+x$$

$$E(X)=E(E(X|N))=E(Np)=\lambda p$$

$$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}E(X^2\mid N=n)\,P(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}E((\sum_{i=1}^{n}X_i)^2)\,P(N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(var(\sum_{i=1}^{n}X_i)+(E(\sum_{i=1}^{n}X_i))^2)\cdot P(N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n\,var(X_1)+(np)^2)\cdot P(N=n)$$

$$=var(X_1)E(N)+p^2E(N^2)$$

$$var(X)=E(X^2)-E(X)^2=var(X_1)E(N)+E(X_1)^2var(N)$$

$B\in F$, $P(B)>0$ $\quad E(X\mid B)=\sum x\cdot\dfrac{P((X=x)\cap B)}{P(B)}$

§3.6 母函数

一. 随机变量的和.

$X\sim f_X$, $Y\sim f_Y$, $Z=X+Y$.

$$f_Z(z)=P(Z=z)=P(\bigcup_x(\{X=x\}\cap\{Y=z-x\}))=\sum_x P(X=x,Y=z-x)$$

$$=\sum_y P(Y=y,X=z-y)$$

若X.Y独立. $f_Z(z)=\sum_x P(X=x)P(Y=z-x)=\sum_x f_X(x)f_Y(z-x)=f_X*f_Y(z)$ 卷积

二. 母函数(生成函数)

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=G_a(x)$ —— $\{a_n\}$的母函数.

$\{a_n\}.\{b_n\}$ $\quad(a*b)_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\triangleq c_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}x^kx^{n-k})=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)$$

X取非负整数值 $\quad P_k=P(X=k)$ $\quad\sum_{k=0}^{\infty}P_ks^k$ 称为X的概率母函数. 记为$G_X(s)$.

性质: ① 收敛半径 ($G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$) $\quad R\geq 1$

② 母函数与分布列一一对应 $\quad G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P_ks^k$, $P_k=\dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$

③ 若$\sum_{k=0}^{\infty}(P_ks^k)'$在$s=1$处收敛, $G_X'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_ks^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P_k=E(X)$

若$E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$存在, $G_X^{(n)}(1)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)s^{k-n}P_k$

$= E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$

三.常见分布的母函数.

(1) $X\sim B(n,p)$, $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,\cdots,n$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}\cdot s^k = (ps+q)^n$

(2) $X\sim G(p)$ $\quad p_k = q^{k-1}p$, $k=1,2\cdots$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^n q^{k-1}ps^k = \frac{ps}{1-qs}$

(3) $X\sim P(\lambda)$ $\quad p_k = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^n e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}s^k = e^{-\lambda+\lambda s}$

四.独立随机变量的和

$X_1,\cdots,X_n$取非负整数值,相互独立. $Y=\sum_{i=1}^n X_i$, X_i母函数$G_i(s)$, 则$G_Y(s)=\prod_{i=1}^n G_i(s)$

证: $G_i(s)=\sum_k s^k P(X_i=k) = E[s^{X_i}]$

$G_Y(s) = E[s^Y] = E[s^{X_1+\cdots+X_n}] = \prod_{i=1}^n E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$

例:掷5颗骰子,求点数和为15的概率.

解: X_i 第i颗骰子点数. X_i, $i=1,2,3,4,5$相互独立.

$Y=\sum_{i=1}^5 X_i$ $\quad G_i(s)=\frac{1}{6}(s+s^2+\cdots+s^6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{s(1-s^6)}{1-s}$

$G_Y(s)=\frac{1}{6^5}s^5(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$

$= \frac{1}{6^5}s^5(1-5s^6+10s^{12}\cdots)(\sum_{k=0}^{\infty}C_{-5}^k(-s)^k)$

s^{15}系数为 $\frac{1}{6^5}(C_{-5}^{10}\cdot(-1)^{10}-5C_{-5}^4)$ $\quad P(Y=15)=s^{15}$系数

hw 3.7.8, 5.1.1 (a)(b), 5.1.2, 5.1.4

随机个独立同分布r.v.之和. $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布. 取非负整数值.

N与X_i独立.取正整数值. $Y=\sum_{i=1}^N X_i$. 求$G_Y(s)$.

$G_Y(s)=\sum_y s^y P(Y=y)=E[s^Y]\overset{\text{重期望公式}}{=}E(E[s^Y|N])=\sum_n E[s^Y|N=n]\cdot P(N=n)$

$=\sum_n E[s^{X_1+\cdots+X_n}|N=n]\cdot P(N=n)=\sum_n E[s^{X_1+\cdots+X_n}]\cdot P(N=n)$

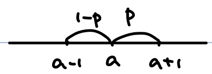
$=\sum_n(\prod_{k=1}^n G_{X_k}(s))\cdot P(N=n)=\sum_n(G_{X_1}(s))^n P(N=n) = G_N(G_{X_1}(s))$

$G_X(s)=E[s^X]$ 矩母函数 $\sum E(X^k)s^k$

(X,Y) 取非负整数值. $p_{ij}=P(X=i,Y=j)$

$G(s,t)=\sum_{i,j} s^i t^j P(X=i,Y=j)=E[s^X t^Y]$　　X,Y 独立 $\Leftrightarrow G(s,t)=G_X(s)G_Y(t)$

§3.7 随机游动

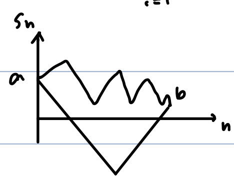


(n,S_n)

一. S_0 初始位置

$P(X_i=1)=p$, $P(X_i=-1)=q=1-p$　　$S_n=S_0+\sum_{i=1}^n X_i$　　X_i, $i=1,2,\cdots$ 独立

例 无限制 $S_0=a$. 求 $P(S_n=b)$



$\begin{cases} l+r=n \\ r-l=b-a \end{cases}$　$\Rightarrow r=\frac{n+b-a}{2}$　$l=\frac{n-b+a}{2}$　轨道数 C_n^r

轨道 $p^r q^l$: r 右移次数, l 左移次数.

$P(S_n=b)=C_n^{\frac{n+b-a}{2}}\, p^{\frac{n+b-a}{2}}\, q^{\frac{n-b+a}{2}}$

例2 带吸收壁随机游动.

$P(X_i=1)=p$　　$P(X_i=-1)=q=1-p$　若 $S_n=S_0+\sum_{i=1}^n X_i=0$ $(\exists n)$, 则对 $k\geq n$, $S_k=0$.

计算质点 $t=0$ 时位于 k 最终被 0 吸收的概率.

解: $p_0=1$, $p_N=0$

A_k 从 k 出发被 0 吸收事件.

B 第1步右移

$p_k=P(A_k)=P(A_k|B)P(B)+P(A_k|B^c)P(B^c)$

$=P(A_{k+1})P(B)+P(A_{k-1})P(B^c)=p\cdot p_{k+1}+q\,p_{k-1}$

$\Rightarrow (p_{k+1}-p_k)=\frac{q}{p}(p_k-p_{k-1})$

$p_k=p_k-p_{k-1}+p_{k-1}-p_{k-2}+\cdots+p_1-p_0+p_0$

$=(\frac{q}{p})^{k-1}(p_1-p_0)+\cdots+(p_1-p_0)+p_0=p_0+\frac{(p_1-p_0)(1-(\frac{q}{p})^k)}{1-\frac{q}{p}}$

记 $r=\frac{q}{p}$. $p_N=0\Rightarrow 1+\frac{(p_1-p_0)(1-r^N)}{1-r}=0\Rightarrow p_1-p_0=-\frac{1-r}{1-r^N}$

若 $r=1$, $p_k=p_0+k(p_1-p_0)$　　$p_N=0\Rightarrow 1+N(p_1-p_0)=0$

$$P_k=\begin{cases}\dfrac{r^k-r^N}{1-r^N} & r=\dfrac{q}{p}\neq 1\\ 1-\dfrac{k}{N} & r=1\end{cases}$$

从K出发被 $X=N$ 吸收的概率: $q_k=\begin{cases}\dfrac{1-r^k}{1-r^N}, & r\neq 1\\ \dfrac{k}{N}, & r=1\end{cases}$

记 X_k 为从K出发到被 $X=0$ 吸收时的移动次数 求 $D_k=E[X_k]$

解: $D_k=E(X_k|B)P(B)+E(X_k|B^c)P(B^c)$

$P(X_k=x|B)=P(X_{k+1}=x-1)$

$P(X_k=x|B^c)=P(X_{k-1}=x-1)$

$E(X_k|B)=\sum_x x\cdot P(X_k=x|B)=\sum_x \overset{(x-1)+1}{x}\, P(X_{k+1}=x-1)=E(X_{k+1})+1$

$E(X_k|B^c)=E(X_{k-1})+1$

$\Rightarrow D_k=(D_{k+1}+1)\cdot p+(D_{k-1}+1)\cdot q \quad \Rightarrow D_k=pD_{k+1}+qD_{k-1}+1$

$p(D_{k+1}-D_k)-q(D_k-D_{k-1})=-1$

$p((D_{k+1}-D_k)-(D_k-D_{k-1}))-(q-p)(D_k-D_{k-1})=-1 \qquad pD''(k)-(q-p)D'(k)=-1$

特解 $\tilde{D}_k=\begin{cases}\dfrac{k}{q-p}, & r=\dfrac{q}{p}\neq 1\\ -k^2, & r=1\end{cases}$

$U_k=D_k-\tilde{D}_k \qquad U_k$ 满足 $U_k=pU_{k+1}+qU_{k-1}$

$$D_k=\begin{cases}\dfrac{1}{q-p}\left(k-N\cdot\dfrac{1-r^k}{1-r^N}\right), & r\neq 1\\ kN-k^2, & r=1\end{cases}$$

无限制随机游走一般性质: $S_n=S_0+\sum_{i=1}^{n}X_i$

1.空间齐次性 $P(S_n=j|S_0=a)=P(S_n=j+b|S_0=a+b)$

证: $P(S_n=j+b|S_0=a+b)=\dfrac{P(S_n-S_0=j-a,\ S_0=a+b)}{P(S_0=a+b)}=P(S_n-S_0=j-a)$

$P(S_n=j|S_0=a)=P(S_n-S_0=j-a)$

2.时间齐次性. $P(S_n=j|S_0=a)=P(S_{m+n}=j|S_m=a)$

证: $P(S_{n+m}=j|S_m=a)=\dfrac{P(S_{n+m}=j,\ S_m=a)}{P(S_m=a)}=\dfrac{P(S_{n+m}-S_m=j-a,\ S_m=a)}{P(S_m=a)}=P(S_{m+n}-S_m=j-a)$

$=P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a\right)\overset{\text{同分布}}{=\!=}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=j-a\right)=P(S_n=j|S_0=a)$

3. Markov性.(马氏性) $P(S_{n+m}=j \mid S_0, S_1, \cdots, S_m) = P(S_{n+m}=j \mid S_m)$

证: $\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_m) = P(S_{n+m}=j \mid S_0=x_0, S_1=x_1, \cdots, S_m=x_m)$

$$= \frac{P(S_{n+m}=j, S_0=x_0, \cdots, S_m=x_m)}{P(S_0=x_0, \cdots, S_m=x_m)} = \frac{P(S_{n+m}-S_m=j-x_m, S_0=x_0, \cdots, S_m=x_m)}{P(S_0=x_0, \cdots, S_m=x_m)}$$

$= P(S_{n+m}-S_m=j-x_m)$

$$\psi(x_m) = P(S_{n+m}=j \mid S_m=x_m) = \frac{P(S_{n+m}-S_m=j-x_m, S_m=x_m)}{P(S_m=x_m)} = P(S_{n+m}-S_m=j-x_m)$$

$\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_m) = \psi(x_m)$, $\varphi(S_0, S_1, \cdots, S_m) = \psi(S_m)$

二. 轨道计数. $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$

(i, S_i) 的连线称为一条轨道.

$(0, a) \longrightarrow (n, b)$ 轨道数 $C_n^{\frac{n+b-a}{2}}$ $n, b-a$ 同奇偶

$N_n(a, b)$ 表示 n 步从 a 到 b 轨道数.

$N_n^0(a, b)$ 表示 n 步从 a 出发, 经过 0 点到 b 点的轨道数.

引理1 $N_n(a, b) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+b-a}{2}}, & n, b-a \text{同奇偶} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

引理2 (反射定理) $a, b > 0$ $N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$

从 a 到 b 经过原点的轨道与从 $-a$ 到 b 的轨道一一对应.

定理3 (投票定理) $b > 0$ n 与 b 同奇偶. 从 0 出发, 到达 b 且不再到达 0 点, 轨道数为 $\frac{b}{n} N_n(0, b)$

证: 第1步向右. 所求轨道数 $= N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}^0(1, b)$

$$= C_{n-1}^{\frac{n-1+b-1}{2}} - N_{n-1}(-1, b)$$

$$= C_{n-1}^{\frac{n+b-2}{2}} - C_{n-1}^{\frac{n-1+b+1}{2}} \underline{\underline{\text{化简}}} \frac{b}{n} C_n^{\frac{n+b}{2}} = \frac{b}{n} N_n(0, b)$$

例 甲 a 票 乙 b 票 $a > b$. 求计票过程中, 甲票数始终领先的概率?

解: X_i 取 $1, -1$. 第 i 票投给甲, $X_i = 1$; 第 i 票投给乙, $X_i = -1$.

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 要求 $S_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots, a+b$ 的概率.

$$P(S_1, S_2, \cdots, S_n > 0, S_0 = 0, S_{a+b} = a-b) = \frac{\text{从0到} a-b \text{不过原点轨道数}}{N_{a+b}(0, a-b)} \overset{\text{Thm3}}{=} \frac{a-b}{a+b}$$

定理4 $S_0=0$ 不再经过原点.

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0,\ S_n=b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$$

证: $S_n=b$ 不过原点, 轨道数 $\frac{|b|}{n}N_n(0,b)$

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0,S_n=b)=\frac{|b|}{n}N_n(0,b)\,p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}$$

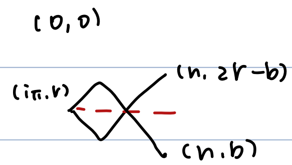
$$P(S_1,\cdots,S_n\neq 0,S_0=0)=\sum_b P(S_1,\cdots,S_n\neq 0,\ S_0=0,S_n=b)$$

$$=\sum_b\frac{|b|}{n}P(S_n=b)=\frac{1}{n}\sum_b|b|\cdot P(S_n=b)=\frac{1}{n}E(|S_n|)$$

游走最大值 记 $M_n=\max\{S_i: 0\le i\le n\}$

定理: $S_0=0,\ r\ge 1$

$$P(M_n\ge r,S_n=b)=\begin{cases}P(S_n=b) & b\ge r\\ \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}P(S_n=2r-b) & b<r\end{cases}$$



证: 记 $A=\{(0,0)\to(n,b)$ 且经过某点$(i,r)\}$

对$\forall\ \pi\in A$. 可得 π' 从(i_π,r)翻转. π' 是从$(0,0)$到 $(n,2r-b)$的轨道 $\pi\longleftrightarrow\pi'$

$\#A=N_n(0,2r-b)$

$$\frac{P(\pi)}{P(\pi')}=\frac{p^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}}{p^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

$$P(M_n\ge r,S_n=b)=N_n(0,2r-b)P(\pi)=\underbrace{P(S_n=2r-b)}_{P(\pi')\cdot N_n(0,2r-b)}\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

↑
每条路径发生的概率×满足条件的路径数

hw 3.9.3, 3.9.4, 3.9.5, 3.10.1

$$P(M_n\ge r)=\sum_{b<r}P(M_n\ge r,S_n=b)+P(S_n\ge r)$$

$$=\sum_{b<r}\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}P(S_n=2r-b)+P(S_n\ge r)$$

$$\overset{2r-b=c}{=}\sum_{c=r+1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{c-r}P(S_n=c)+P(S_n\ge r)$$

$$=P(S_n=r)+\sum_{c=r+1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^{c-r}\right)P(S_n=c)$$

$p=q=\frac{1}{2}$时. $P(M_n\ge r)=P(S_n=r)+\sum_{c=r+1}^{\infty}2P(S_n=c)$

定理(首达时) $S_0=0$. 在n时刻首次到达b的概率. $f_n(b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$

证：不妨设 $b>0$.　$f_n(b)=P(M_{n-1}=S_{n-1}=b-1,\ X_n=1) \overset{独立}{=} P(M_{n-1}=S_{n-1}=b-1)\cdot p$

$=p\cdot\left(P(M_{n-1}\geq b-1,\ S_{n-1}=b-1)-P(M_{n-1}\geq b,\ S_{n-1}=b-1)\right)$

$=p\left(P(S_{n-1}=b-1)-\left(\frac{q}{p}\right)P(S_{n-1}=b+1)\right)$

$=p\left(C_{n-1}^{\frac{n+b-2}{2}}p^{\frac{n+b-2}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}-\frac{q}{p}\cdot C_{n-1}^{\frac{n+b}{2}}p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b-1}{2}}\right)$

$=\frac{\frac{n+b}{2}}{n}P(S_n=b)-\frac{\frac{n-b}{2}}{2n}P(S_n=b)$

$=\frac{b}{n}P(S_n=b)$

定理　$S_0=0$, $p=\frac{1}{2}$, $T_{2n}=\max\{2k \mid S_{2k}=0,\ k=1,2,\cdots,n\}$

$P(T_{2n}=2k)=P(S_{2k}=0)\cdot P(S_{2n-2k}=0)$

证：$P(T_{2n}=2k)=P(S_{2k}=0,\ S_{2k+1},\cdots,S_{2n}\neq 0)$

$=P(S_{2k}=0)P(S_{2k+1},\cdots,S_{2n}\neq 0 \mid S_{2k}=0)$

$\overset{Markov}{=}P(S_{2k}=0)P(S_1,\cdots,S_{2(n-k)}\neq 0 \mid S_0=0)$

$=P(S_{2k}=0)P(S_1,\cdots,S_{2(n-k)}\neq 0)$

$P(S_1,\cdots,S_{2n-2k}\neq 0)=\sum_b P(S_1,\cdots,S_{2n-2k}\neq 0,\ S_{2n-2k}=b)$

$=\sum_b \frac{|b|}{2n-2k}P(S_{2n-2k}=b)$

$=2\sum_{b>0}\frac{b}{2n-2k}C_{2n-2k}^{\frac{2n-2k+b}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k}\sum_{b>0}\frac{(n-k+b)-(n-k-b)}{2n-2k}C_{2n-2k}^{\frac{2n-2k+b}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k}C_{2n-2k}^{n-k}=P(S_{2n-2k}=0)$

反正弦律

$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, $n\to\infty$　　$P(S_{2k}=0)=C_{2k}^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{(2k)!}{k!\,k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sim\frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{4\pi k}}{\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}\cdot 2\pi k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, $k\to\infty$.

$P(S_{2n-2k})\sim\frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}$　　$P\left(\frac{T_{2n}}{2n}\leq x\right)\sim\sum_{k\leq nx}\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}=\sum_{k\leq nx}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$

$\sim\int_0^x\frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}du$

$=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$　（$\frac{T_{2n}}{2n}$ 渐近分布）

§4. 连续型 r.v.

§4.1 密度函数独立性

$X: \Omega \to R$

$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $f(t) \ge 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, $f(x)$ 称为概率密度函数. p.d.f

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

定义: $X_1, \cdots, X_n$ 定义在 (Ω, F, P) 上连续型 r.v.

$P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x_i) \quad \forall x_i \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 称 $X_1, \cdots, X_n$ 独立.

若 X_i p.d.f 为 $f_i(x)$, $(X_1, \cdots, X_n)$ 联合 p.d.f $f(x_1, \cdots, x_n)$

$X_1, \cdots, X_n$ 独立 $\Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$\Rightarrow$: $X_1, \cdots, X_n$ 独立. $P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \cdots, t_n)\,dt_1 \cdots dt_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i)\,dt_i$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)\,dt_1 \cdots dt_n$$

对 $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ 成立. 故 $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$\Leftarrow$: $P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)\,dt_1 \cdots dt_n$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i)\,dt_i = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$$

定理 $g_1, \cdots, g_n$ 是一元 Borel 可测函数, $X_1, \cdots, X_n$ 独立 r.v. 则 $g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)$ 相互独立.

证: $\forall x_i$, $B_i = \{x \mid g_i(x) \le x_i\} \in B(R)$

$$P(g_1(X_1) \le x_1, \cdots, g_n(X_n) \le x_n) = P(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) = \prod_{i=1}^{n} (g(X_i) \le x_i)$$

§4.2 数学期望

离散型 $E(X) = \sum_x x P(X = x)$

连续型 $\sum_x x P(x < X \le x + \Delta x) \sim \sum_x x f(x) \Delta x \sim \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

定义：r.v. X 有 p.d.f. $f(x)$ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|x|dx$ 收敛.

记 $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ 称为 X 的数学期望

定理：若 X. $g(X)$ 都是连续型 r.v. X p.d.f. 为 $f(x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)dx<+\infty$.

则 $E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

引理：X 为非负连续型 r.v. $E(X)$ 存在. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X>x)dx=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx$.

一般. $E(X)=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_{0}^{+\infty}F(-x)dx$

证：X 的 p.d.f. 记为 $f(x)$.

$$\int_0^{+\infty}P(X>x)dx=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}f(t)dt\,dx=\int_0^{+\infty}dt\int_0^t f(t)dx=\int_0^{+\infty}tf(t)dt$$

一般. $\int_0^{+\infty}F(-x)dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{-x}f(t)dt\right)dx=\int_{-\infty}^{0}dt\int_0^{-t}f(t)dx=\int_{-\infty}^{0}-tf(t)dt$

$$\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_0^{+\infty}F(-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=E[X]$$

证：$E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

$$E(g(x))=\int_0^{+\infty}P(g(x)>y)dy-\int_0^{+\infty}P(g(x)<-y)dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{\{x:g(x)>y\}}f(x)dx\,dy-\int_0^{+\infty}\int_{\{x:g(x)<-y\}}f(x)dx\,dy$$

$$=\int_{\{g(x)>0\}}dx\int_0^{g(x)}f(x)dy-\int_{\{g(x)<0\}}dx\int_0^{-g(x)}f(x)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

hw：4.1.1(c)，4.1.4，4.2.2，4.2.3，4.3.3，4.3.5

定义：$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx$（绝对收敛时） X 的 k 阶矩

$E((X-E(X))^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(x))^k f(x)dx$（绝对收敛时） X 的 k 阶中心矩

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$，$Var(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$

§4.3 常用连续型分布

一. [a,b]上均匀分布 $X \sim U([a,b])$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

二. 指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

电子元件寿命独立发生的事件的间隔.

$N(t)$ $[0,t]$时段内的粒子数.

$N(t)$、$N(t+s)-N(t)$ 独立. $P(N(h)=1) \approx \lambda h$, $N(t) \sim P(\lambda t)$

X表示第1个粒子观测到的时刻: $P(X \le t) = P(N(t) \ge 1) = 1 - P(N(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X \le x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\lambda x) e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

无记忆性

定理: X取非负实数值的连续型r.v. 则X指从指数分布 $\Leftrightarrow P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$ $t, s > 0$

$\Rightarrow$: 设 p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$

$$P(X > s) = \int_s^{+\infty} f(x) dx = e^{-\lambda s}$$

$$P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

$\Leftarrow$: 记 $G(s) = P(X > s)$ 则 $G(s+t) = G(s)G(t)$

$$G(s+\Delta s) = G(s) G(\Delta s)$$

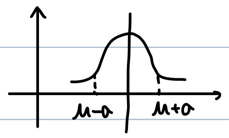
$$\frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \frac{G(s)(G(\Delta s) - 1)}{\Delta s}$$

令 $\Delta s \to 0$ $G'(s) = G(s) G'(0) \Rightarrow G(s) = e^{G'(0)s} \Rightarrow F(s) = 1 - e^{G'(0)s}$ 为指数分布.

三. 正态分布 Normal distribution

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, $N(0,1)$ 标准正态分布 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



钟形曲线 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$

$\max f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$\mu \pm \sigma$ 曲线拐点 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu f(x) dx = 0 + \mu = \mu$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} d(\sigma t+\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2\sigma^2 + 2\mu\sigma t + \mu^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} d\frac{t^2}{2} + \mu^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$Var(X) = \sigma^2$

$N(0,1)$: $\Phi(a) + \Phi(-a) = 1$

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0.6826$, $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0.9974$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $aX+b$ 也服从正态分布.

$a>0$ 时, $P(aX+b \le y) = P(X \le \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$ $a<0$ 时同理.

$\Rightarrow f_{aX+b}(y) = f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$ 则 $aX+b \sim N(a\mu+b, (\sigma a)^2)$

特别 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ $P(X \le x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma})$

四. Γ分布

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1} d(\lambda x) = 1$$

背景: 第n个独立事件发生时间 $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ $N(x) \sim P(\lambda x)$

$P(T_n \le x) = P(\overset{\text{发生数}}{N(x)} \ge n) = 1-\sum_{k=0}^{n-1} P(N(x)=k) = 1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\cdot \frac{(\lambda x)^k}{k!}$

密度：上式求导得 $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\cdot\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= \frac{(\lambda x)^{n-1}\lambda}{(n-1)!}e^{-\lambda x} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$E(X) = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{\alpha}e^{-\lambda x}d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}$

$E(X^2) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$ $\quad Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

注：$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, $x>0$ 收敛 分部积分得 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ $\quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

五. Beta分布 $X \sim B(a,b)$ $\quad a,b>0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1} = \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{a}{a+b}$

$E(X^2) = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)}$

六. Cauchy分布

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in R$ $\quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散 $\Rightarrow E(X)$ 不存在.

$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\quad F(x) = P(X\le x) = P(\theta\le\arctan x) = \frac{\arctan x+\frac{\pi}{2}}{\pi}$

§4.4 连续型随机向量.

(X,Y) 分布 $F(x,y) = P(X\le x, Y\le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

$f(u,v)\ge 0$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = 1$ 称(X,Y)为连续型随机向量. $f(u,v)$联合概率密度.

$P(a\le X\le b, c\le Y\le d) = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$, $P((X,Y)\in D) = \iint_D f(x,y)dxdy$

边缘分布 $P(X\le x) = P(X\le x, Y<+\infty) = \int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right)du$

X概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

Y概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

例 (X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$上均匀分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

(1) 求边缘分布的概率密度 (2) $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$ 求$E(\rho)$.

解:(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\,dy=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\quad -R\le x\le R.$

$f_Y(y)=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\quad -R\le y\le R$

(2) $P(\rho\le x)=\frac{\pi x^2}{\pi R^2}=\frac{x^2}{R^2}$ ρ密度 $f_\rho(x)=\frac{2x}{R^2}$

$E(\rho)=\int_0^R x\cdot\frac{2x}{R^2}\,dx=\frac{2}{3}R$

二. 期望, 协方差

定理: $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Borel可测函数. (X,Y)连续型随机变量.

$g(X,Y)$是连续型r.v. 期望存在. 则$E(g(X,Y))=\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$.

$f(x,y)$为(X,Y)的联合概率函数.

特别地, $g(X,Y)=aX+bY$.

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

hw: 4.4.3, 4.4.5, 4.5.4, 4.5.6, 4.5.7, 4.5.9

$E[X]=\iint_{\mathbb{R}^2} x f(x,y)\,dx\,dy$ (绝对收敛时)

$\mathrm{Var}(X)=\iint_{\mathbb{R}^2}(x-E[X])^2 f(x,y)\,dx\,dy$ $\quad\mathrm{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

例 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right)$ $N(0,1;0,1;\rho)$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right)dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2 - \frac{x^2}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dy \qquad u = \frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY]$$

$$= \iint_{R^2} xy \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right) dx dy$$

$$= \iint_{R^2} xy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy$$

$$= \iint_{R^2} [x(y-x\rho) + \rho x^2] f(x,y)\, dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(y-\rho x)}_{奇} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dy + \rho \iint_{R^2} x^2 f(x,y)\, dx dy$$

$$= \rho \cdot E(X^2) = \rho\,(Var(X) + E(X)^2) = \rho$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

一般 $N(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q(x,y)\right)$$

$$Q(x,y) = \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}, \quad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

(1) $f_X(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(2) $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \rho$

(3) $\rho = 0$时 $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$

不相关

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 独立.

相关系数 $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

1° $|\rho| \le 1$ $\quad E[XY] \le (E(X^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (E(Y^2))^{\frac{1}{2}}$

2° $|\rho| = 1 \Leftrightarrow \exists\, a, b \in R$, s.t. $P(Y = aX + b) = 1$

三.连续型随机向量条件分布.

$f_Y(y)>0$, $f_Y(y)\Delta y>0$

$$\lim_{\Delta y\to 0} P(X\le x \mid y\le Y\le y+\Delta y) = \lim_{\Delta y\to 0} P(X\le x \mid y<Y\le y+\Delta y)$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{P(X\le x,\ y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} du \int_{y}^{y+\Delta y} f(u,v)\,dv \cdot \frac{1}{\Delta y}}{\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{y}^{y+\Delta y} f(u,v)\,dv \cdot \frac{1}{\Delta y}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,du} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,du$$

定义

(1)给定 $Y=y$ 条件下, X 的条件密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $(f_Y(y)>0)$

$f_X(x)>0$ 可定义 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

(2) $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,du$ $P(X\le x\mid Y=y)$ 给定 $Y=y$ 条件下, X 的条件分布函数.

$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)\,dv$ 给定 $X=x$ 条件下, Y 的条件分布函数.

(3) 条件期望

$\psi(x)=E[Y\mid X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy$ $\psi(X)=E[Y|X]$

例 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$ 求 $f_{X|Y}(x|y)$

解: $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left((x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)^2\right)$$

给定 $Y=y$ 条件下, $X\sim N\left(\mu_1+\rho\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$

例 $(X,Y)\sim U(D)$　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$　求 $f_{X|Y}(x|y)$

解: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}dx=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}$　$(-r\le y\le r)$

$-r\le y\le r$ 时, $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}\cdot\frac{\pi r^2}{2\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & -\sqrt{r^2-y^2}\le x\le\sqrt{r^2-y^2}\\ 0 & 其他\end{cases}$

$Y=y$ 条件下, X 服从 $[-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2}]$ 上的均匀分布.

例 (X,Y) 联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$　求 $f_{Y|X}(y|x)$

$P(X^2+Y^2\le 1\mid X=x)$

解: $0<x<1$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x\frac{1}{x}dy=1$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{x}\quad 0<y<x$$

$$P(X^2+Y^2\le 1\mid X=x)=P(-\sqrt{1-x^2}\le Y\le\sqrt{1-x^2}\mid X=x)$$

$$=\begin{cases}P(0\le Y\le x\mid X=x) & 0<x\le\frac{\sqrt2}{2}\\ P(0\le Y\le\sqrt{1-x^2}\mid X=x) & \frac{\sqrt2}{2}<x<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\frac{1}{x}dy=1 & 0<x\le\frac{\sqrt2}{2}\\ \int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{x}dy=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \frac{\sqrt2}{2}<x<1\end{cases}$$

例 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立, 且均服从 $(0,1)$ 上均匀分布.

$N=\min\{n\mid\sum_{i=1}^n X_i>1\}$　求 $E[N]$.

解: $N(x)=\min\{n\mid\sum_{i=1}^n x_i>x\}$　$m(x)=E(N(x))=E(E(N(x)\mid X_1))$

$$E(N(x)\mid X_1=y)=\begin{cases}1, & y>x\\ 1+m(x-y), & y\le x\end{cases}$$

$m(x)=E(E(N(x)|X_1))=\int_0^1 E(N(x)|X_1=y)f_{X_1}(y)dy$

$=\int_0^x 1+m(x-y)dy+\int_x^1 1dy = 1+\int_0^x m(t)dt$ $\begin{cases} m'(x)=m(x) \\ m(0)=1 \end{cases}$

hw: 4.6.4, 4.6.8, 4.6.9, 4.6.10

§4.5 随机变量的函数.

一. X的密度f(x)

g(x)是连续函数. g(x)是否为连续型.

$X\sim U[0,2]$

$Y=g(X)$ $g(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1<x\le 2 \end{cases}$

则 $P(Y\le y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{y}{2}, & 0\le y<1 \\ 1, & y>1 \end{cases}$

定理 (1) X概率密度为f(x). Y=g(X)严格单调连续函数. 有连续导数.

则 Y=g(x)的概率密度 $f_Y(y)=f(g^{-1}(y))\cdot|g^{-1}(y)'|$

(2) g(x)在不重叠区间段 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 上严格单调, 每小段上确定反函数 $x=h_i(y)$,

$i=1,2,\cdots,n$, $h_i(y)$有连续导数, 则 $f_Y(y)=\sum_i f(h_i(y))|h_i'(y)|$

证: (1) $P(Y\le a)=P(X\in\{x|g(x)\le a\})=\int_{\{x|g(x)\le a\}} f(x)dx \overset{y=g(x)}{=\!=} \int_{-\infty}^a f(g^{-1}(y))|g^{-1}(y)'|dy$

$f_Y(a)=f(g^{-1}(a))\cdot|g^{-1}(a)'|$

(2) $E_i(a)=\{x|x\in I_i, g(x)\le a\}$

$P(Y\le a)=P(X\in\bigcup_i E_i(a))=\sum_i P(X\in E_i(a))=\sum_i\int_{E_i(a)} f(x)dx$

$\overset{y=g(x)}{=\!=}\sum_i\int_{-\infty}^a f(h_i(y))|h_i'(y)|dy$

$Y\sim f_Y(y)=\sum_i f(h_i(y))|h_i'(y)|$

例 r.v. X 分布函数 $F(x)$ 严格增，连续函数，则 $Y=F(X)\sim U([0,1])$

证：$P(F(X)\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=\begin{cases}0, & y<0\\ F(F^{-1}(y))=y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

$F(X)$ 密度 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

注：$\theta\sim U([0,1])$，对 $\forall$ 严格增分布函数 $F(x)$，可定义一个 r.v. 服从 $F(x)$。

$X=F^{-1}(\theta)$ $\quad P(X\le x)=P(F^{-1}(\theta)\le x)=P(\theta\le F(x))=F(x)$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 求 $Y=e^X$ 的概率密度。$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

二. (X_1,X_2) 联合密度 $f(x_1,x_2)$

$Y_1=g_1(X_1,X_2)$，$Y_2=g_2(X_1,X_2)$

满足 (1) $\begin{cases}y_1=g_1(x_1,x_2)\\ y_2=g_2(x_1,x_2)\end{cases}$ 可以确定逆映射 $\begin{cases}x_1=h_1(y_1,y_2)\\ x_2=h_2(y_1,y_2)\end{cases}$

(2) $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\ne 0$ $\qquad g_1,g_2$ 有连续偏导数.

则 (Y_1,Y_2) 有联合密度 $f_Y(y_1,y_2)=f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\cdot|J|^{-1}$

证：$P(Y_1\le y_1,Y_2\le y_2)=P(g_1(X_1,X_2)\le y_1,g_2(X_1,X_2)\le y_2)$

$$=\iint\limits_{\substack{g_1(x_1,x_2)\le y_1\\ g_2(x_1,x_2)\le y_2}} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

$$\xlongequal[x_2=h_2(u,v)]{x_1=h_1(u,v)}\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}f(h_1(u,v),h_2(u,v))\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$f_Y(y_1,y_2)=f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\cdot|J|^{-1}$

例 (X,Y) $\quad X,Y$ 相互独立，服从 $N(0,1)$

令 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ $\qquad \theta=\begin{cases}\arctan\frac{Y}{X}, & X>0,Y>0\end{cases}$

求 R,Θ 分布. $\begin{cases} \pi+\arctan\frac{Y}{X}, & X<0 \\ 2\pi+\arctan\frac{Y}{X}, & X>0, Y<0 \end{cases}$

解: (X,Y) 联合密度 $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

(R,Θ) 联合密度 $\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\cdot r\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}$ $\quad R,\Theta$ 独立.

$\Theta \sim U([0,2\pi])$ $\quad R = f_R(r) = r\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}\ (r\geq 0)$ $\quad F_R(r) = 1-e^{-\frac{r^2}{2}} = u_2 \Rightarrow r = \sqrt{-2\ln(1-u_2)}$

注: $u_1, u_2 \sim U([0,1])$ 相互独立.

$\Theta = 2\pi u_1$ $\quad X = \sqrt{-2\ln u_2}\cos(2\pi u_1)$

$\updownarrow$ 独立 $\quad$ 独立, 服从 $N(0,1)$

$R = \sqrt{-2\ln u_2}$ $\quad Y = \sqrt{-2\ln u_2}\sin(2\pi u_1)$

例 $(X,Y) \sim f(x,y)$ 联合密度. 求 $Z=X+Y$ 分布.

解法1 $(X+Y,X)$ 联合分布 $\Rightarrow$ $X+Y$ 边缘分布.

解法2 $P(X+Y\leq a) = \iint\limits_{x+y\leq a} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{a-x}f(x,y)\,dy$

若 X,Y 独立. $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$P(X+Y\leq a) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{a-x}f_X(x)f_Y(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{a}f_X(x)f_Y(t-x)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{a}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(t-x)\,dx\right)dt$$

$X+Y$ 概率密度 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(t-x)\,dx = f_X * f_Y(t)$

例 顺序统计量

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布. 分布函数 $F(x)$.

$X_{i_1}(w) < X_{i_2}(w) < \cdots < X_{i_n}(w)$

$X_{i_k}(w) = X_k^*(w)$ $\quad X_1^* = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ $\quad X_n^* = \max\{X_1,\cdots,X_n\}$

求 X_k^* 的概率密度.

解：$w \in (X_k^* \le x) \Leftrightarrow X_1(w), \cdots, X_n(w)$ 中至少有 k 个 $\le x$.

$A_m = \{w \mid X_1(w), \cdots, X_n(w)$ 中恰好 m 个 $\le x\}$

$P(A_m) = C_n^m (F(x))^m (1-F(x))^{n-m}$

$P(X_k^* \le x) = \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i (F(x))^i (1-F(x))^{n-i}$

X_k^* 密度 $f_k(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=k}^{n} C_n^i (F(x))^i (1-F(x))^{n-i}\right)$

$$= \sum_{i=k}^{n} \left(C_n^i \cdot i \cdot F(x)^{i-1} (1-F(x))^{n-i} \cdot f(x) - C_n^i (n-i) F(x)^i (1-F(x))^{n-i-1} f(x)\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$$

§4.6 多元正态分布.

二元正态 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right)$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\quad \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov(X_1, X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & cov(X_2, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$\det \Sigma \triangleq |\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2) > 0$

正定对称矩阵.

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) = (\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T$$

推广 $\quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \Sigma$ n 阶正定对称矩阵 $\quad \vec{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$

$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right)$ 是 n 元随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 密度函数.

验证：$\int_{R} f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = 1 \quad \Sigma$ 正定. 对称矩阵

$\exists$ 正定矩阵 B $(B^T B = I_n)$ s.t. $\Sigma = B^T \Lambda B$. $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Sigma^{-1} = B^{-1} \Lambda^{-1} (B^T)^{-1} = B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B$ $\quad$ 作变量代换 $\vec{y} = (\vec{x}-\vec{\mu})B^{-1}$, $\vec{x} = \vec{y}B + \vec{\mu}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{R^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\vec{y}B)B^T\Lambda B B^T \vec{y}^T\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{R^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\lambda_k}\right) dy_1 \cdots dy_n = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \cdot \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y_k^2}{2\lambda_k}} dy_k = 1$$

$\lambda_1 \cdots \lambda_n$

$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)B + \vec{\mu}$, $x_i = \mu_i + \sum_{j=1}^n y_j B_{ji}$

$\vec{Y} = (\vec{X} - \vec{\mu})B^{-1}$ $\quad f_Y(y_1, \cdots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\lambda_k}\right)$

$Y_1, \cdots, Y_n$ 独立1元标准正态

$\exists A$ 非退化, s.t. $\vec{X} = \vec{Y}A + \mu$.

定义 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 服从n元标准正态, 则 $\vec{X} = \vec{Y}A + \mu$ 服从参数为 $\mu, \Sigma = A^T A$ 的n元正态分布

定理 $\vec{X} = (X_1, \cdots, X_n) \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$

则 (1) $E[\vec{X}] = \vec{\mu}$ (2) Σ 为协方差矩阵 (3) $\vec{X}$ 的各分量相互独立 $\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \Sigma_{ii}, & i = j \end{cases}$

证: (1) $E[X_i] = \int_{R^n} x_i \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right) dx_1 \cdots dx_n$

$\vec{Y} = (\vec{X} - \vec{\mu})B^{-1}$

$$= \int_{R^n} \left(\mu_i + \sum_{k=1}^n b_{ki} y_k\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\lambda_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \mu_i$$

(2) $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \int_{R^n} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right) dx_1 \cdots dx_n$

$$= \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^n y_k B_{ki}\right)\left(\sum_{l=1}^n y_l B_{lj}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i}\right) dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \sum_{k=1}^n B_{ki}B_{kj} \int_{R^n} y_k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i}\right) dy_1 \cdots dy_n = \sum_{k=1}^n B_{ki}B_{kj}\lambda_k$$

$$= (B^T \Lambda B)_{ij}$$

hw: 4.7.2, 4.7.5, 4.7.9, 4.9.3, 4.9.7

(3) "$\Leftarrow$" $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad |\Sigma| = \prod_{i=1}^n \Sigma_{ii}$ $\quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$

$$(\vec{x} - \vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})^T = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\Sigma_{ii}}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\Sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\Sigma_{ii}}} \triangleq f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

说明$X_1,\cdots,X_n$独立

定理2 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$ D n阶非退化矩阵，则 $\vec{Y}=\vec{X}\cdot D\sim N(\vec{\mu}D, D^T\Sigma D)$

$\vec{X}=\vec{Y}\cdot D^{-1}$

证：$f_{\vec{Y}}(y_1,\cdots,y_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot|\Sigma|}}\exp(-\frac{1}{2}(\vec{Y}D^{-1}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{Y}D^{-1}-\vec{\mu})^T)\cdot|D^{-1}|$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot|D^T\Sigma D|}}\exp(-\frac{1}{2}(\vec{Y}-\vec{\mu}D)D^{-1}\Sigma^{-1}(D^{-1})^T(\vec{Y}-\vec{\mu}D)^T)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot|D^T\Sigma D|}}\exp(-\frac{1}{2}(\vec{Y}-\vec{\mu}D)(D^T\Sigma D)^{-1}(\vec{Y}-\vec{\mu}D)^T)$$

$\vec{Y}\sim N(\vec{\mu}D, D^T\Sigma D)$

定理3 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$

$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$ Σ_{11} l阶正定矩阵 $\vec{X}=(\vec{X}^{(1)},\vec{X}^{(2)})$ $\vec{X}^{(1)}=X_1,\cdots,X_l$

Σ_{22} n-l阶正定矩阵 $\vec{\mu}=(\vec{\mu}^{(1)},\vec{\mu}^{(2)})$

则 $\vec{X}^{(1)}\sim N(\vec{\mu}^{(1)},\Sigma_{11})$ l元正态正布，$\vec{X}^{(2)}\sim N(\vec{\mu}^{(2)},\Sigma_{22})$ n-l元正态分布.

证：$|\Sigma|=|\Sigma_{11}|\cdot|\Sigma_{22}|$ $\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{pmatrix}$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot|\Sigma_{11}|\cdot|\Sigma_{22}|}}\exp[-\frac{1}{2}(\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)},\vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)})\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\\ \vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot|\Sigma_{11}|\cdot|\Sigma_{22}|}}\exp[-\frac{1}{2}((\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)})\Sigma_{11}^{-1}(\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)})^T+(\vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)})\Sigma_{22}^{-1}(\vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)})^T)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^l\cdot|\Sigma_{11}|}}\exp(-\frac{1}{2}(\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)})\Sigma_{11}^{-1}(\vec{X}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)})^T)\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-l}\cdot|\Sigma_{22}|}}\exp(-\frac{1}{2}(\vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)})\Sigma_{22}^{-1}(\vec{X}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)})^T)$$

$f_1(x_1,\cdots,x_l)=\int_{R^{n-l}}f(x_1,\cdots,x_n)dx_{l+1}\cdots dx_n$

注：$(X_1,X_2,\cdots,X_l)$与$(X_{l+1},\cdots,X_n)$独立.

$p(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n)=p(X_1\le x_1,\cdots,X_l\le x_l)\,p(X_{l+1}\le x_{l+1},\cdots,X_n\le x_n)$

定理4. $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$

$\vec{X}=(\vec{X}^{(1)},\vec{X}^{(2)})$, $\vec{\mu}=(\vec{\mu}^{(1)},\vec{\mu}^{(2)})$, $\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$，则 $\vec{X}^{(1)}\sim N(\vec{\mu}^{(1)},\Sigma_{11})$

证：$\begin{pmatrix}I_l & 0\\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I_{n-l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_l & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\\ 0 & I_{n-l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\end{pmatrix}$

令 $\vec{Y}=(\vec{Y}^{(1)},\vec{Y}^{(2)})=\vec{X}\begin{pmatrix}I_l & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\\ 0 & I_{n-l}\end{pmatrix}\triangleq\vec{X}D\sim N(\vec{\mu}D,D^T\Sigma D)$

$\therefore \vec{Y}^{(1)}\sim N(\vec{\mu}^{(1)},\Sigma_{11})$，即 $\vec{X}^{(1)}\sim(\vec{\mu}^{(1)},\Sigma_{11})$

定理5　$\vec{X}\sim N(\mu,\Sigma)$　$A_{n\times m}$矩阵　$n>m$　$\mathrm{rank}(A)=m$　$\vec{Y}=\vec{X}A\sim N(\vec{\mu}A,A^T\Sigma A)$

证：$D=(A,B)$　补充 B s.t. $|D|\neq 0$.

$Z=\vec{X}\cdot D=(\vec{X}A,\vec{X}B)\sim N(\vec{\mu}D,D^T\Sigma D)$，$\vec{\mu}D=(\vec{\mu}A\ \ \vec{\mu}B)$　$D^T\Sigma D=\begin{pmatrix}A^T\\ B^T\end{pmatrix}\Sigma(A\ \ B)$

$=\begin{pmatrix}A^T\Sigma A & A^T\Sigma B\\ B^T\Sigma A & B^T\Sigma B\end{pmatrix}$

由定理4. $\vec{X}A\sim N(\vec{\mu}A,A^T\Sigma A)$

特别地，$m=1$.　$\vec{X}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\ (a_1\cdots a_n)\Sigma\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right)$

χ^2分布.

$X_1,\cdots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$ 相互独立.　$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\mu$　记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 样本均值.

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 样本方差　$E(S^2)=\sigma^2$

密度函数 $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})2^{\frac{d}{2}}}x^{\frac{d}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$，$x>0$. 自由度为d的$\chi^2$分布. $\chi^2(d)$

引理　$Y_1,\cdots,Y_n$相互独立，服从$N(0,1)$，$X=\sum_{i=1}^n Y_i^2\sim\chi^2(n)$

证：$P(Y_1^2\le x)=P(-\sqrt{x}\le Y_1\le\sqrt{x})=\Phi(\sqrt{x})-\Phi(-\sqrt{x})$

$f_1(x)=\varphi(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\varphi(-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$　$\Rightarrow Y_i^2\sim\chi^2(1)$

归纳法，假设 $Y_1^2+\cdots+Y_k^2\sim\chi^2(k)$，记密度函数为$f_k(x)$

$f_{k+1}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(u)f_1(x-u)\,du$　　$u>0$，$x-u>0$

$=\int_0^x\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}}u^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}(x-u)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x-u}{2}}\,du$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x u^{\frac{k}{2}-1}(x-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k+1}{2}-1} B(\tfrac{k}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k+1}{2})2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k+1}{2}-1} \quad \therefore Y_1^2+\cdots+Y_{k+1}^2 \sim \chi^2(k+1)$$

定理 $X_1,\cdots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ 相互独立.

则 (1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ (2) $\bar{X}$与S^2相互独立 (3) $S^2 \cdot \frac{n-1}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

证: (2) 令 $Y_i = \frac{X_i-\mu_i}{\sigma}$, $i=1,\cdots,n$ Y_i $i=1,\cdots,n$ 相互独立. 服从 $N(0,1)$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{X_i-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(\bar{X}-\mu), \quad \sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma} - \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$$

引入正交阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \\ \vdots & * \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \end{pmatrix} \triangleq (\vec{a_1}^T, \vec{a_2}^T, \cdots, \vec{a_n}^T)$ $\quad \vec{a_i}\cdot\vec{a_j} = 0,\ i\neq j.\ |\vec{a_i}|=1$

$\vec{Z} = \vec{Y}\cdot A$ $\quad \vec{Y} \sim N(\vec{0}, I_n)$ $\quad \vec{Z} \sim N(\vec{0}A, A^T I_n A) = N(\vec{0}, I_n)$

$\underline{Z_1 = \sqrt{n}\bar{Y}}$ $\quad Z_1^2+\cdots+Z_n^2 = \vec{Z}\cdot\vec{Z}^T = \vec{Y}AA^T\vec{Y}^T = \vec{Y}\vec{Y}^T = Y_1^2+\cdots+Y_n^2$

$$\underline{\sum_{i=2}^n Z_i^2} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Z_1^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y}+\bar{Y})^2 - n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})\bar{Y}}_{=0} + n\bar{Y}^2 - n\bar{Y}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2 = \underline{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} \sim \chi^2_{n-1} \ (3)$$

Z_1与$Z_2,\cdots,Z_n$独立. $\Rightarrow$ $\bar{Y}$. S^2独立.

§5 特征函数及应用

§5.1 数学期望.

离散型 $\sum_i x_i p(X=x_i)$ 绝对收敛

连续型 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$.

一般 $\begin{cases} \text{Riemann-Stieltjes积分} \\ (\Omega,\mathcal{F},P)\ \text{Lebesgue积分}. \end{cases}$

一. Riemann-Stieltjes积分

$[a,b]$ $\quad T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ $\quad \xi_i \in [x_{i-1},x_i)$

$$S_T = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \qquad \|T\| = \max_i |x_i-x_{i-1}|$$

若 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S_T$ 有与分割取点方式无关的极限. 称$f(x)$关于$g(x)$在$[a,b]$ R-S可积.

$\int_a^b f(x)dg(x)$　$g(x)$单调有界　$f(x)\in C[a,b]$　R-S积分存在

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim\limits_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dg(x)$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dF(x) < \infty$，其中 $F(x)$ 是 r.v. X 的分布函数，称 $E(X)$ 存在．$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$

连续型：$dF(x)=F(x)-F(x-0)$　离散型：$dF(x)=f(x)dx$

二．(Ω, F, P)　$X:\Omega\to R$ 可测函数．

抽象积分．

定义 1° 简单随机变量（只取有限个值）

$A_i=\{w \mid X(w)=x_i\}$　$X=\sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$　定义 $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i)$

2° 对非负随机变量 X．

$A_n=\{w \mid X>n\}$　$A_{ni}=\{w \mid \frac{i-1}{2^n}\le X<\frac{i}{2^n}\}$

$X_n=\sum_{i=1}^{n\cdot 2^n}\frac{i-1}{2^n} I_{ni}+nI_{A_n}$　$X_n\uparrow$　$|X_n-X|<\frac{1}{2^n}\to 0$

定义 $E(X)=\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)$

3° 一般随机变量 X．　$X=X^+-X^-$．　$X^+=\max\{X,0\}$　$X^-=\max\{-X,0\}$

若 $E(X^+)$，$E(X^-)$ 都存在，定义 $E(X)=E(X^+)-E(X^-)$

记号 $\int_\Omega X(w)\,dp=E(X)$

hw: 4.9.4，4.9.6，4.10.1，4.10.2

性质：(1) $E[C]=C$　(2) $X\ge 0$，则 $E(X)\ge 0$

(3) $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$　(4) 若 $P(X\ge a)=1$，则 $E[X]\ge a$

E"连续性"

$X_n(w)\to X(w)$　对 $w\in\Omega_0$，$P(\Omega_0)=1$

(1) 单调收敛　$0\le X_n\le X_{n+1}$　$\forall n$，$w\in\Omega$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n]=E[X]$

(2) 控制收敛 $\exists$ r.v. Y s.t. $|X_n| \le Y$ 且 $E[Y] < \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

(3) 有界收敛 若 $|X_c| \le C$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

定理 X, Y 相互独立. $E(|X|), E(|Y|) < \infty$ 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

1° 若 X, Y 是简单的 r.v. $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}$ $XY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j I_{A_i B_j}$

$E[XY] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(A_i B_j) \overset{独立}{=\!=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(A_i)P(B_j) = \sum_i x_i P(A_i) \sum_j y_j P(B_j) = E[X]E[Y]$

2° 若 $X, Y \ge 0$. X_n 单调增收敛于 X；Y_n 单调增收敛于 Y. 可以取 X_n 与 Y_n 独立.

$E[X_n Y_n] = E[X_n]E[Y_n]$ 令 $n \to +\infty$ 由单调收敛定理，$E[XY] = E[X]E[Y]$

3° 一般 $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$.

$E[XY] = E[X^+Y^+ - X^-Y^+ - X^+Y^- + X^-Y^-] = (E[X^+] - E[X^-])(E[Y^+] - E[Y^-]) = E[X]E[Y]$

$E[g(X)] = \int_\Omega g(x)\,dP = \int_\Omega g(x)\,dF(x)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$ $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$

1° $g(x)$ 简单可测函数 2° $g(x) \ge 0$ 3° 一般.

定理：若 X, Y 同分布 $\Leftrightarrow \forall$ 有界连续函数 g, $E[g(X)] = E[g(Y)]$

证：

"$\Rightarrow$" $E[g(x)] = \int_R g(x)\,dF(x)$ $E[g(y)] = \int_R g(y)\,dF(y) \Rightarrow E[g(X)] = E[g(Y)]$

"$\Leftarrow$" $F_X(x) = P(X \le x) = E[I_{\{X \le x\}}] = E[I_{(-\infty, x]}(X)]$

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \le x \\ -\frac{1}{\varepsilon}t + 1 + \frac{x}{\varepsilon}, & x < t < x+\varepsilon \\ 0, & t \ge x+\varepsilon \end{cases}$$

$F_X(x) = E[I_{(-\infty,x]}(X)] \le E[g_\varepsilon(X)] = E[g_\varepsilon(Y)] \le F_Y(x+\varepsilon)$ 令 $\varepsilon \to 0$，$F_X(x) \le F_Y(x)$

同理 $F_Y(x) \le F_X(x)$，则 X, Y 同分布.

定理 $k > 0$ $E(|X|^k) < \infty$. 则对 $\forall 0 < r < k$, $E(|X|^r) < \infty$ 且 $(E|X|^r)^{\frac{1}{r}} \le (E|X|^k)^{\frac{1}{k}}$

证：$|X|<1$时，$|X|^r<1$；$|X|\ge 1$时，$|X|^r\le |X|^k$

$$E|X|^r=\int_\Omega |X|^r dp=\int_{|X|<1}|X|^r dp+\int_{|X|\ge 1}|X|^r dp\le 1+\int_\Omega |X|^k dp<\infty.$$

Jensen inequality：$g(x)$凸函数，则$E[g(x)]\ge g(E[x])$

$g(x)=x^{\frac{k}{r}}$，$x>0$ 凸函数 $g(E|X|^r)\le Eg(|X|^r)\Rightarrow (E|X|^r)^{\frac{1}{r}}\le (E|X|^k)^{\frac{1}{k}}$

§5.2 特征函数

离散型 $G[S^X]=\sum p(X=j)s^j$ 推广 $M(t)=E[e^{tX}]$ 矩母函数.

$e^{tX}=1+tX+\frac{(tX)^2}{2!}+\cdots+\frac{(tX)^n}{n!}+\cdots \Rightarrow E(e^{tX})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n \quad E(X^n)=M^{(n)}(0)$

性质：若$M(t)<\infty$（当$|t|<r$）

则 (1) $E[X^k]=M^{(k)}(0)$ (2) 若X.Y相互独立，$M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$

(3) $M_X(t)=M_Y(t)$，则X.Y同分布.

例 $X\sim N(0,1)$

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}e^{\frac{t^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx=e^{\frac{t^2}{2}}$$

$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Y=\sigma X+\mu$

$M_Y(t)=E[e^{tY}]=E[e^{t\sigma X+t\mu}]=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

联合矩母函数$(X_1,\cdots,X_n)$ $M(t_1,\cdots,t_n)=E[e^{t_1X_1+\cdots+t_nX_n}]$

若$X_1,\cdots,X_n$相互独立. $M(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i)$

$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)\pi}$，$E[X]$不存在. 缺点：$M(t)$不一定存在

特征函数：$\varphi(t)=E[e^{itX}]$

注：X.Y是r.v. $X+iY$是复值r.v $E[X+iY]\triangleq E[X]+iE[Y]$

$Z_1=X_1+iY_1$，$Z_2=X_2+iY_2$独立. $\Leftrightarrow (X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$相互独立.

$\Leftrightarrow p(X_1\le a, Y_1\le b, X_2\le c, X_2\le d) = p(X_1\le a, Y_1\le b)\cdot p(X_2\le c, Y_2\le d)$

$\varphi(t)=E[\cos(tX)+i\sin(tX)]=E[\cos(tX)]+iE[\sin(tX)]$ 存在

定理 特征函数 $\varphi(t)$ 满足

(1) $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\le 1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$ (2) $\varphi(t)$ 是一致连续的函数.

(3) $\varphi(t)$ 非负定. 对 $\forall t_1,\cdots,t_n\in R$, $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$, $\sum_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\cdot z_k\cdot\bar{z}_j\ge 0$

证: (1) $\varphi(0)=E[e^0]=1$ $|\varphi(t)|=|E(e^{itX})|\le E(|e^{itX}|)=1$

$\varphi(-t)=E[e^{-tiX}]=E[\overline{e^{itX}}]=\overline{\varphi(t)}$

(2) $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|=|E(e^{i(t+h)X}-e^{itX})|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t+h)x}-e^{itx}\,dF(x)\right|$

$\le\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|\cdot|e^{ihx}-1|\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ihx}-1|\,dF(x)$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, $|h|<\delta$ 时, $|e^{ihx}-1|<\varepsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\,dF(x)=E[\varepsilon]=\varepsilon$

$\therefore|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$

(3) $\sum_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\,z_k\cdot\bar{z}_j=\sum_{k,j=1}^{n}E[e^{i(t_k-t_j)X}]\,z_k\bar{z}_j=E\left(\sum_{k,j=1}^{n}e^{it_kX}\cdot z_k\cdot\overline{e^{it_jX}}\cdot\bar{z}_j\right)$

$=E\left(\sum_{k=1}^{n}e^{it_kX}z_k\overline{\sum_{j=1}^{n}e^{it_jX}z_j}\right)=E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kX}z_k\right|^2\right)\ge 0$

hw: 5.6.2, 5.6.4, 5.7.2, 5.7.3

定理: 若 $E(|X|^k)<\infty$, 则 $\varphi^{(j)}(0)=i^jE[X^j]$ $j\le k$

$\varphi(t)=1+(it)E[X]+\frac{(it)^2}{2!}E[X^2]+\cdots+\frac{(it)^k}{k!}E[X^k]+o(t^k)$

证: $j\le k$ $\frac{d^je^{itx}}{dt^j}=(ix)^je^{itx}$

$|(ix)^je^{itx}|\le|x|^j$ $E(|X|^j)<\infty$ 故可交换 $E[\,]$.求导顺序.

$\varphi^{(j)}(t)=E\left[\frac{d^je^{itX}}{dt^j}\right]=E[(iX)^je^{itX}]\Rightarrow\varphi^{(j)}(0)=i^jE[X^j]$

Taylor 公式. $\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k+o(t^k)$

$=1+(it)E[X]+\frac{(it)^2}{2!}E[X^2]+\cdots+\frac{(it)^k}{k!}E[X^k]+o(t^k)$

定理3 X_1, X_2相互独立. 则 $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.

证: $\varphi_{X_1+X_2}(t) = E[e^{it(X_1+X_2)}] = E[e^{itX_1}\cdot e^{itX_2}] = E[e^{itX_1}]\cdot E[e^{itX_2}] = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)$

推广到 $X_1, \cdots, X_n$独立. $Y = X_1 + \cdots + X_n$. $\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)$

例 $\varphi(t)$是r.v. X 的c.f. $\varphi^n(t)$也是1个c.f. $|\varphi(t)|^2 = \varphi(t)\cdot\overline{\varphi(t)}$是c.f.

$a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. $\{\varphi_n(t)\}$是一列特征函数. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t)$也是特征函数.

因为 $\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x)$也是分布函数. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\,a_nF_n(x)$

$f(t) = \cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

例 $\varphi(t)$是随机变量X的特征函数. 则 $1-|\varphi(2t)|^2 \leq 4(1-|\varphi(t)|^2)$

证: $\mathrm{Re}(1-\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1-\cos tx\; dF(x)$

$1-\cos tx = 2\sin^2\frac{tx}{2} \geq 2\sin^2\frac{tx}{2}\cos^2\frac{tx}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 tx = \frac{1}{4}(1-\cos(2tx))$

$\mathrm{Re}(1-\varphi(2t)) \leq 4\,\mathrm{Re}(1-\varphi(t))$ $|\varphi(t)|^2$也是特征函数.

故 $1-|\varphi(2t)|^2 \leq 4(1-|\varphi(t)|^2)$

二. 常见分布的c.f.

1. Bernoulli 分布

X	0	1
P	1-p	p

$\varphi(t) = E[e^{itX}] = 1-p+p\cdot e^{it}$

2. 二项分布 $B(n,p)$ $\varphi(t) = (1-p+p\cdot e^{it})^n$

3. 指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x>0$

$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty}\lambda\cos(tx)e^{-\lambda x}\,dx + i\int_0^{+\infty}\lambda\sin(tx)e^{-\lambda x}\,dx$

$= \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2} + \dfrac{i\lambda t}{\lambda^2+t^2} = \dfrac{\lambda}{\lambda-it}$

4. $N(0,1)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

奇

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx+\underline{i\sin tx})\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-x\sin tx\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\,d\,e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cos tx\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-t\varphi(t)$$

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=-t\Rightarrow\ln\varphi(t)=-\frac{t^2}{2}+c\Rightarrow\varphi(t)=ce^{-\frac{t^2}{2}}\ \text{又}\ \varphi(0)=1\Rightarrow c=1\qquad\therefore\ \varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$Y\sim N(\mu,a^2)$ $Y=aX+\mu,\ X\sim N(0,1)$

$$\varphi_Y(t)=E[e^{itY}]=E[e^{it(aX+\mu)}]=e^{it\mu}\varphi_X(at)=e^{it\mu-\frac{(at)^2}{2}}$$

三.反转公式和唯一性定理

定理：X的分布函数为F(x)，特征函数为$\varphi(t)$.

则对$\forall a<b$. $\frac{F(b)+F(b-0)}{2}-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$

证：$I(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}dF(x)\right)dt$$

$|e^{-i(a-b)t}-1|=\left|\int_0^{(b-a)t}e^{ix}dx\right|\le(b-a)t$

$$\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}\right|=\frac{|e^{-ibt}(e^{-i(a-b)t}-1)|}{|t|}\le\frac{|(b-a)t|}{|t|}=|b-a|$$

由Fubini定理

$$I(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}dt\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}-\int_0^{-T}\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}dt\right)dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}-\frac{e^{it(a-x)}-e^{it(b-x)}}{it}dt\right)dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}dt\,dF(x)\qquad a<b$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ 0, & a=0\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}=\operatorname{sgn}a\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{T\to+\infty}I_T=\int_{-\infty}^{a}0\,dF(x)+\int_{\{a\}}\frac{1}{2}dF(x)+\int_a^b1\,dF(x)+\int_{\{b\}}\frac{1}{2}dF(x)+\int_b^{+\infty}0F(x)$$

$$=\frac{1}{2}(F(a)-F(a-0))+F(b-0)-F(a)+\frac{1}{2}(F(b)-F(b-0))$$

$$=\frac{F(b)+F(b-0)}{2}-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}$$

定理(唯一性)：分布函数由特征函数唯一确定.

证：设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体. 任取 $a,b\in C_F$, $a<b$

$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$. 取 $\{a_n\}\subset C_F$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}F(b)-F(a_n)=F(b)$ 唯一确定

若 $a\notin C_F$. 可找到一列 $\{b_n\}\in C_F$. $F(x)$ 右连续. $\lim\limits_{n\to\infty}F(b_n)=F(a)$

定理. 若特征函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, 则 $\varphi(t)$ 对应的分布函数 $F(x)$ 可导.

证：设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体.

任取 $a\in R$. $\{b_n\}\downarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=a$, $b_n\in C_F$.

$$\begin{aligned}\left|F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\right| &= \lim_{T\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)dt\right| \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)\right|dt \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{|e^{-ita}|\cdot|1-e^{it(a-b_n)}|}{|it|}|\varphi(t)|dt \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}|a-b_n|\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|dt\to 0\ (n\to+\infty)\end{aligned}$$

$F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\to F(a)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}=0 \Rightarrow F(a)=F(a-0)$. $a\in C_F$

$$\begin{aligned}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x} &= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt\end{aligned}$$

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)\right|\le\left|\frac{e^{-ita}(1-e^{-it\Delta x})}{it\Delta x}\varphi(t)\right|\le\varphi(t)$$

由DCT. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ita}\varphi(t)dt=F'(a)$

hw: 5.8.5(e), 5.8.9, 5.9.2, 5.9.5, 5.9.8

二. 多元特征函数

$(X_1,\cdots,X_n)$ 联合分布 $F(x_1,\cdots,x_n)$

定义: $E[e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}]\triangleq\varphi(t_1,\cdots,t_n)$

$\varphi(0,\cdots,0)=1$ $\quad|\varphi(t_1,\cdots,t_n)|\le 1$ $\quad\varphi(-t_1,\cdots,-t_n)=\overline{\varphi(t_1,\cdots,t_n)}$

定理 $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$是$\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$的特征函数.

假设$\vec{X}$在$V=\{a_i\le x_i\le b_i,i=1,\cdots,n\}$的表面上取值的概率为0.

$$P(a_k\le X_k\le b_k,k=1,\cdots,n)=\lim_{\substack{T_k\to+\infty\\k=1,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-ia_kt_k}-e^{-ib_kt_k}}{it_k}\varphi(t_1,\cdots,t_n)\,dt_1\cdots dt_n$$

例 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=E[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}]$ $\quad Y=\sum_{k=1}^{n}t_kX_k\sim N(\sum_{k=1}^{n}t_k\mu_k,\vec{t}\Sigma\vec{t}^T)$

$\varphi_Y(s)=E[e^{isY}]=E[e^{is\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}]=\exp(is\sum_{k=1}^{n}t_k\mu_k-\frac{1}{2}s^2\vec{t}\Sigma\vec{t}^T)$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\varphi_Y(1)=\exp(i\vec{t}\vec{\mu}^T-\frac{1}{2}\vec{t}\Sigma\vec{t}^T)$

Σ协方差矩阵

$\mathrm{rank}\,\Sigma=r\le n$

$n=1$ $\quad r=0$ $\quad \sigma^2=0$ $\quad P(X=\mu)=1$

$n=2$ $\quad r=0$ $\quad P((X_1,X_2)=(\mu_1,\mu_2))=1$; $r=1$ $\quad(X_1,X_2)$在平面内某条曲线上取值.

$\mathrm{rank}\,\Sigma<n$, $(X_1,\cdots,X_n)$退化到R^n的一个r维子空间内取值.

性质: 1. $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$是$(X_1,\cdots,X_n)$的c.f. $E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$存在, 记$s=k_1+\cdots+k_n$

则 $$\left.\frac{\partial^s\varphi}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right|_{\vec{t}=\vec{0}}=i^s\cdot E[X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}]$$

2. $X_1,\cdots,X_n$相互独立 $\Leftrightarrow\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)$

"$\Rightarrow$" $\varphi(t_1,\cdots,t_n)=E[\prod_{k=1}^{n}e^{it_kX_k}]=\prod_{k=1}^{n}E[e^{it_kX_k}]$

"$\Leftarrow$" 由反转公式可得. $P(a_k\le X_k\le b_k,k=1,\cdots,n)=\prod_{k=1}^{n}P(a_k\le X_k\le b_k)$

四. $\{F_n(x)\}$一列分布函数 对应 c.f. $\{\varphi_n(t)\}$ 收敛性之间的关系.

例 $\Omega=[0,1]$ P Lebesgue测度.

$X_n=\frac{1}{n}$ $F_n(x)=P(X_n\le x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n}\\ 1, & x\ge\frac{1}{n}\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 左连续.

定义 $\{F_n(x)\}$ $F(x)$为分布函数.

若在$F(x)$的连续点处成立$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$, 则称$F_n(x)$弱收敛于$F(x)$. 记$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

记为$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

分布函数列弱收敛于分布函数,极限是唯一的.

定理(连续性定理)

(1) 分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于分布函数$F(x)$

则 $\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)$

(2) $\varphi_n(t)$是$F_n(t)$对应的特征函数. $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$且$\varphi(t)$在$t=0$处连续.

则$\varphi(t)$也是某分布函数$F(x)$的特征函数. 且$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

例 $X_n\sim N(0,n)$ $\varphi_n(t)=e^{-\frac{nt^2}{2}}\longrightarrow\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$ 不是特征函数.

§5.3 两个极限定理

大数定律 (law of large numbers) LLN

中心极限定理 (central limit theory) CLT

多次实验中 事件A发生频率 稳定于$P(A)$

$X_n=\begin{cases}1 & A\text{发生}\\ 0 & A\text{不发生}\end{cases}$ $\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\to P(A)$

依概率收敛　X_n服从弱大数定律；几乎处处收敛　X_n服从强大数律

定义　$\{X_n\}$ r.v.序列．分布函数$F_n(x)$，X的分布函数$F(x)$．

若$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$，称$X_n$依分布收敛于$X$．记作$X_n \xrightarrow{D} X$．

定理　$X_1,\cdots,X_n\cdots$独立同分布 r.v.序列　$E[X_i]=\mu$．$S_n=X_1+\cdots+X_n$，则$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} \mu$

证：$X=\mu$的特征函数$\varphi(t)=e^{i\mu t}$．　$\frac{S_n}{n}$的特征函数记为$\varphi_n(t)$

$\varphi_n(t)=E[e^{it\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}]=E[\prod_{k=1}^{n} e^{i\cdot\frac{t}{n}X_k}] \xlongequal{独立同分布} (\varphi_{X_1}(\frac{t}{n}))^n=(1+i\mu\cdot\frac{t}{n}+o(\frac{t}{n}))^n$

$\therefore \frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} \mu$　　　$\to e^{i\mu t}=\varphi(t) \Rightarrow F_n \xrightarrow{W} F$

定理（中心极限定理）　$\{X_n\}$独立同分布　$E[X_k]=\mu$，$Var(X_k)=\sigma^2$，$k=1,2,\cdots$

$S_n=X_1+\cdots+X_n$，则$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} Y$　　$Y\sim N(0,1)$

证：Y的特征函数$\varphi_Y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

令$Z_k=\frac{X_k-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$的特征函数$\varphi_Z(t)=1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n})$

$E[Z_k]=0$　$E[Z_k^2]=\frac{1}{n}$

$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\sum_{k=1}^{n} Z_k$的特征函数记为$\varphi_n(t)$．$\varphi_n(t)=(\varphi_Z(t))^n=(1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n}))^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$

由连续性定理，$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$的分布函数收敛于$e^{-\frac{t^2}{2}}$对应分布函数．

第7章　极限定理

§7.1　几种收敛性

一．定义：X．$\{X_n\}$在(Ω,F,P)定义的r.v.

1°　几乎处处收敛（以概率1收敛）

如果$P(\{w:\lim_{n\to\infty}X_n(w)=X(w)\})=1$，称$X_n$几乎处处收敛于$X$．　$X_n \xrightarrow{a.s.} X$

2°　r阶平均收敛．

设$E[|X_n|^r]<+\infty$．若$\lim_{n\to\infty}E(|X_n-X|^r)=0$．称$X_n$ r阶平均收敛于X．　$X_n \xrightarrow{L^r} X$

$r=1$　平均收敛；$r=2$　均方收敛

3° 依概率收敛.

若对 $\forall \varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} p(|X_n-X|>\varepsilon)=0$, 称 X_n 依概率收敛于 X. $X_n \xrightarrow{P} X$.

4° 依分布收敛

X_n 的分布函数 $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$ X 的分布函数. 称 X_n 依分布收敛于 X. $X_n \xrightarrow{D} X$

二. 四种收敛关系

定理 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \overset{①}{\Rightarrow} (X_n \xrightarrow{P} X) \overset{③}{\Longrightarrow} (X_n \xrightarrow{D} X)$

$(X_n \xrightarrow{r} X) \overset{②}{\Rightarrow} (X_n \xrightarrow{P} X)$

引理1 $X_n \xrightarrow{P} X$, 则 $X_n \xrightarrow{D} X$.

证: 设 X_n 的分布函数为 $F_n(x)$, X 的分布函数为 $F(x)$.

对 $\forall \varepsilon>0$, $F_n(x)=p(X_n\le x)=p(X_n\le x, X\le x+\varepsilon)+p(X_n\le x, X>x+\varepsilon)$

$\le p(X\le x+\varepsilon)+p(|X_n-X|>\varepsilon)=F(x+\varepsilon)+p(|X_n-X|>\varepsilon)$

$F(x-\varepsilon)=p(X\le x-\varepsilon)=p(X\le x-\varepsilon, X_n\le x)+p(X\le x-\varepsilon, X_n>x)$

$\le p(X_n\le x)+p(|X_n-X|>\varepsilon)=F_n(x)+p(|X_n-X|>\varepsilon)$

$F(x-\varepsilon)-p(|X_n-X|>\varepsilon)\le F_n(x)\le F(x+\varepsilon)+p(|X_n-X|>\varepsilon)$

令 $n\to\infty$, $F(x-\varepsilon)\le \liminf\limits_{n\to\infty} F_n(x)\le \limsup\limits_{n\to\infty} F_n(x)\le F(x+\varepsilon)$

若 x 为 $F(x)$ 连续点, 令 $\varepsilon\to 0^+$. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ $\therefore X_n \xrightarrow{D} X$

反之不成立:

X	1	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_n=-X$

X_n	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_n \xrightarrow{D} X$ $|X_n-X|=2$ 故 $X_n \not\xrightarrow{P} X$.

引理 (Markov 不等式) $E[|X|^r]<\infty$, 则对 $\forall a>0$, $p(|X|^r>a)\le \frac{E(|X|^r)}{a}$. $|X|^r\ge a\,1_{(|X|^r>a)}$

$E[|X|^r]\ge E[a\cdot I_{(|X|^r>a)}]=a\,p(|X|^r>a)$

引理 $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

证: $\lim\limits_{n\to+\infty} E[|X_n-X|^r]=0$ $(r\geq 1)$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq \dfrac{E[|X_n-X|]^r}{\varepsilon^r}\to 0$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ $\qquad X_n(w)\to X(w) \Leftrightarrow \forall k>0, \exists n, \forall m>n$ 时, $|X_m(w)-X(w)|<\frac{1}{k}$.

$X_n \xrightarrow{a.s} X \Leftrightarrow P(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{k}\})=1$

hw: 5.10.1, 5.10.3, 5.10.4, 7.2.1, 7.2.2

§7.1 12种收敛

定理1 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X)$ $\Rightarrow$ $(X_n \xrightarrow{P.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{D.} X)$

$(X_n \xrightarrow{r.} X)$ $\Rightarrow$

引理2 $X_n \xrightarrow{P.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D.} X$

引理3 $X_n \xrightarrow{r.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P.} X$ $(r \geq 1)$

引理4 下列结论等价

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

(2) $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$

(3) $\forall \varepsilon > 0$. $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0$

(4) $\forall \varepsilon > 0$. $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0$

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$P(\{w \mid \lim_{n\to\infty} X_n(w) \neq X(w)\}) = 0$$

$\lim_{n\to\infty} X_n(w) \neq X(w)$ $\exists k, \forall n, \exists n_0 > n$, s.t. $|X_{n_0}(w) - X(w)| > \frac{1}{k}$.

$\{w \mid \lim_{n\to\infty} X_n(w) \neq X(w)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0$. $\exists k$ s.t. $\varepsilon > \frac{1}{k}$.

若 $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}$ 则 $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

$\therefore P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0$

(3) $\Rightarrow$ (2) 取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$ 显然成立.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} |X_m - X| > \varepsilon$ $B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right)$$

引理5 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P.} X$.

证：$\forall \varepsilon>0$. $P(|X_n-X|>\varepsilon) \le P(\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_n-X|>\varepsilon) \to 0$

反之不成立：$\Omega=(0,1)$

$X_1=1$. $X_2=\begin{cases}1, & 0<w\le\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<w<1\end{cases}$ $X_3=\begin{cases}0, & 0<w\le\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<w<1.\end{cases}$ $X_4=I_{\{(0,\frac{1}{3}]\}}$

$X_5=I_{\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\}}$

$n=\frac{k(k-1)}{2}+i$，则 $X_n=I_{\{(\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}]\}}$ $X_6=I_{\{(\frac{2}{3},1)\}}$

$E[|X_{\frac{k(k-1)}{2}+i}-0|^r]=1\cdot\frac{1}{k}\to 0$.

$P(|X_n-0|>\varepsilon)=\frac{1}{k}\to 0$ 故 $X_n\xrightarrow{P.}0$ 但 $X_n\xrightarrow{a.s.}0$ 不成立.

$X_n\xrightarrow{r}X \not\Rightarrow X_n\xrightarrow{a.s.}X$. $X_n\xrightarrow{a.s.}X \not\Rightarrow X_n\xrightarrow{r}X$.

定理6

(1) $X_n\xrightarrow{D.}c$ (常数)，则 $X_n\xrightarrow{P.}c$

(2) $X_n\xrightarrow{P.}X$ 且 $\exists$ 常数 k. s.t. $P(|X_n|\le k)=1$. $\forall n$，则 $X_n\xrightarrow{r}X$. $r\ge1$

(3) 若对 $\forall\varepsilon\ge0$. $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n-X|>\varepsilon)<\infty$，则 $X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

证：(1) 记 $X=c$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ 1, & x\ge c\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0$. $P(|X_n-c|>\varepsilon)=P(\{X_n<c-\varepsilon\}\cup\{X_n>c+\varepsilon\})=P(X_n<c-\varepsilon)+P(X_n>c+\varepsilon)$

$=1-F_n(c+\varepsilon)+P(X_n<c-\varepsilon)\to 1-F_n(c+\varepsilon)=0$

(2) 验证：$P(|X|\le k)=1$

$\forall\varepsilon>0$. $P(|X|\le k+\varepsilon)=P(|X|\le k+\varepsilon, |X_n|\le k)\ge P(|X_n-X|\le\varepsilon, |X_n|\le k)\to 1$

令 $\varepsilon\to0^+$. 故 $P(|X|\le k)=1$.

$E(|X_n-X|^r)=E(|X_n-X|^r 1_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}})+E(|X_n-X|^r 1_{\{|X_n-X|<\varepsilon\}})$

$\le(2k)^r\cdot P(|X_n-X|>\varepsilon)+\varepsilon^r\to\varepsilon^r$ 令 $\varepsilon\to0^+$. 有 $X_n\xrightarrow{r}X$.

(3) $P(\bigcup_{m=n}^{\infty}|X_n-X|>\varepsilon)\le\sum_{m=n}^{\infty}P(|X_n-X|>\varepsilon)\to0$. (当 $n\to\infty$ 时) $X_n\xrightarrow{a.s.}X$

引理7 $X_n\xrightarrow{P.}X \Leftrightarrow \{X_n\}$ 的任意子列 $\{X_{n(m)}\}$ 可以找到几乎处处收敛的子列 $\{X_{n(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$

证："$\Rightarrow$" 任取子列 $\{X_{n(m)}\}_{m=1}^{\infty}$，$\lim_{m\to\infty}P(|X_{n(m)}-X|>\varepsilon)=0$.

$\{\varepsilon_k\}$ $k\to\infty$ 时. $\varepsilon_k\to0$. $P(|X_{n(m)}-X|>\varepsilon_k)\to0$ 当 $m\to\infty$ 时

$\exists n(m_k)$. $P(|X_{n(m_k)}-X|>\varepsilon_k)<\frac{1}{k^2}$. 选取 $n(m_k)$ 递增

$\sum P(|X_{n(m_k)}-X|>\varepsilon_k)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$ 故 $X_{n(m_k)}\xrightarrow{a.s.}X$.

"$\Leftarrow$" 反证. 假设"$X_n \xrightarrow{P} X$"不成立.

$\exists \varepsilon_0$. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_0) \neq 0$. 从而对 ε_0, $\exists \delta_0 > 0$. $\forall n$, $\exists m > n$

$P(|X_m - X| > \varepsilon_0) > \delta_0$ 即有无穷多个 m. s.t. $P(|X_m - X| > \varepsilon_0) > \delta_0$

可以构成一个子列. 此子列无几乎处处收敛于 X 的子列. 矛盾!

定理 8 (Skorokhod 表示定理)

$\{X_n\}$. X 在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 定义分布函数分别为 $\{F_n(x)\}$. $F(x)$.

$X_n \xrightarrow{D} X$, 则

(1) $\exists (\Omega', \mathcal{F}', P')$ 以及在此空间上定义的 r.v. Y_n. Y. 其中 Y_n 的分布函数为 $F_n(x)$. Y 的分布函数为 $F(x)$. (2). $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$

证: $F(x)$ 是分布函数. $F^{-1}(y) = \sup\{x \mid F(x) < y\}$

可验证 $(F(x) < y \Leftrightarrow x < F^{-1}(y))$ or $(F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y))$

"$\Rightarrow$" $\lim\limits_{u\to x^+} F(u) = F(x) < y$. $\exists \delta$. s.t. $F(x+\delta) < y$. $x < x+\delta \leq F^{-1}(y)$

"$\Leftarrow$" $x < F^{-1}(y) = \sup\{x \mid F(x) < y\}$ $\exists x^* = \dfrac{x + F^{-1}(y)}{2} > x$.

s.t. $F(x) \leq F(x^*) < y$.

$\Omega' = (0,1)$ $\mathcal{F}' = \mathcal{B}((0,1))$ P' Lebesgue 测度 $U \sim (0,1)$ 上均匀分布

令 $Y_n = F_n^{-1}(U)$ $Y = F^{-1}(U)$ $Y_n = F_n^{-1}(U) \leq x \Leftrightarrow U \leq F_n(x)$

$P'(Y_n \leq x) = P'(U \leq F_n(x)) = F_n(x)$, $P'(Y \leq x) = P'(U \leq F(x)) = F(x)$

hw: 7.3.3 (a)(b), 7.3.7, 7.3.8, 7.3.10

(2) 证明 $Y_n(w) \xrightarrow{a.s.} Y(w)$.

$F(x)<y \Leftrightarrow x<F^{-1}(y)$ $\quad F(x)\ge y \Leftrightarrow x\ge F^{-1}(y)$

对 $\forall \varepsilon>0, w\in\Omega'$, $\exists x\in C_F$. $Y(w)-\varepsilon<x<Y(w)$

$x<Y(w) \Leftrightarrow F(x)<w$

$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$. $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)<w$ 当n充分大时, $F_n(x)<w$

$\therefore x<F_n^{-1}(w)$ $\quad Y(w)-\varepsilon<x<F_n^{-1}(w)=Y_n(w)$ $\quad n\to+\infty,\ \varepsilon\to 0^+$. $\liminf\limits_{n\to\infty}Y_n(w)>Y(w)$

取 $w<w'<1$, $\exists x\in C_F$, $Y(w')<x<Y(w')+\varepsilon$ $\quad w<w'\le F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$

n充分大时, $w<w'\le F_n(x)$

由逆映射定义, $Y_n(x)\le x<Y(w')+\varepsilon$, $\limsup\limits_{n\to\infty}Y_n(w)\le Y(w')$

若w是$Y(w)$的连续点. $w'\downarrow w$. 故 $Y(w)\le\liminf\limits_{n\to\infty}Y_n(w)\le\limsup\limits_{n\to\infty}Y_n(w)\le Y(w)$

$Y(w)$单调增加, 不连续点至多可数个.

$P'(\lim\limits_{n\to\infty}Y_n(w)=Y(w))=P'(Y(w)$连续点$)=1$

定理 $X_n\xrightarrow{D}X \Leftrightarrow \forall$有界连续函数 $g(x)$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}E[g(X_n)]=E[g(X)]$

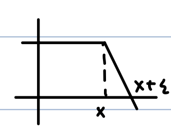
证: "⇒" 由表示定理 $\exists Y_n, Y$. $Y_n\xrightarrow{a.s.}Y$ $\quad F_{Y_n}(x)=F_{X_n}(x)$

$E[g(X_n)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,dF_{X_n}(x)=E[g(Y_n)]$ $\quad g(Y_n)\xrightarrow{a.s.}g(Y)$ $\quad g$有界

由DCT. $\lim\limits_{n\to\infty}E[g(Y_n)]=E[g(Y)] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}E[g(X_n)]=E[g(X)]$

"⇐" 要证 $F_{X_n}(x)\xrightarrow{w}F_X(x)$ 即 $P(X_n\le x)\xrightarrow{w}P(X\le x)$ 即 $E(I_{\{X_n\le x\}})\longrightarrow E(I_{\{X\le x\}})$

定义: $g_{x,\varepsilon}(t)=\begin{cases}1, & t\le x\\ 0, & t>x+\varepsilon\\ \frac{-t+x}{\varepsilon}+1, & x<t\le x+\varepsilon\end{cases}$ 为有界连续函数.



$P(X_n\le x)\le E(g_{x,\varepsilon}(X_n))\longrightarrow E[g_{x,\varepsilon}(X)]\le E[I_{\{X\le x+\varepsilon\}}]=P(X\le x+\varepsilon)$

另一方面, $P(X_n\le x)\ge E[g_{x-\varepsilon,\varepsilon}(X_n)]\to E[g_{x-\varepsilon,\varepsilon}(X)]\ge E[I_{\{X\le x-\varepsilon\}}]\ge P(X\le x-\varepsilon)$

当n充分大时, $P(X\le x-\varepsilon)\le P(X_n\le x)\le P(X\le x+\varepsilon)$

若 x 是$F(x)$连续点. 令 $\varepsilon\to 0$. $F(x)\le\liminf\limits_{n\to\infty}F_n(x)\le\limsup\limits_{n\to\infty}F_n(x)\le F(x)$

$\therefore \lim F_n(x)=F(x)$, $x\in C_F$

§7.3 辅助结论

一. 不等式

1. $h(x)$ 非负可测函数. $a>0$ X r.v. 则 $P(h(x)\ge a)\le \frac{E[h(x)]}{a}$.

证: $E(h(x))<+\infty$ $E[h(x)]\ge E[I_{\{h(x)\ge a\}}\cdot a]=a\,P(h(x)\ge a)$

(1) $P(|x|\ge a)\le \frac{E[|x|^r]}{a^r}$ Markov

(2) $P(|x-E(x)|\ge a)\le \frac{E(|x-E(x)|^2)}{a^2}=\frac{Var(x)}{a^2}$ Chebyshev

2. Hölder $p,q>1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $E(|XY|)\le (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$

3. Minkovski $(E|X+Y|^p)^{\frac{1}{p}}\le (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}+(E|Y|^p)^{\frac{1}{p}}$

4. $E(|X+Y|^r)\le C_r(E|X|^r+E|Y|^r)$

证: $r>1$ $g(x)=x^r$ 在 $(0,+\infty)$ 凸函数. $E\left(\frac{|X+Y|}{2}\right)^r\le E\left(\frac{|X|+|Y|}{2}\right)^r\le \frac{1}{2}(E|X|^r+E|Y|^r)$

$E(|X+Y|^r)\le 2^{r-1}(E|X|^r+E|Y|^r)$

$0<r\le 1$ 时, $|X+Y|^r\le(|X|+|Y|)^r\le\frac{|X|+|Y|}{(|X|+|Y|)^{1-r}}=\frac{|X|}{(|X|+|Y|)^{1-r}}+\frac{|Y|}{(|X|+|Y|)^{1-r}}\le|X|^r+|Y|^r$

$$C_r=\begin{cases}2^{r-1}, & r>1\\ 1, & 0<r\le 1\end{cases}$$

二. 运算性质

定理: $X_n\xrightarrow{*}X$, $Y_n\xrightarrow{*}Y$ $*$表示 a.s., P., r.

则 (1) $X_n\xrightarrow{*}X$, $X_n\xrightarrow{*}Y$, $P(X=Y)=1$

(2) $X_n+Y_n\xrightarrow{*}X+Y$, $X_nY_n\xrightarrow{*}XY$. → 对 r 不成立

(3) 依分布收敛时, (1)(2) 不成立.

证: (1) $X_n\xrightarrow{P}X$, $X_n\xrightarrow{P}Y$. $|X-Y|\le|X-X_n|+|X_n-Y|$

任取 $\varepsilon>0$, $\{|X-Y|>\varepsilon\}\subset\{|X-X_n|>\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|X_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2}\}$.

$w\in\{|X-X_n|>\frac{\varepsilon}{2}\}\cap\{|X_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2}\}$, 则 $w\in\{|X-Y|\le\varepsilon\}$

$P(|X-Y|>\varepsilon)\le P(|X-X_n|>\frac{\varepsilon}{2})+P(|Y-X_n|>\frac{\varepsilon}{2})\to 0\ (n\to\infty)$

由 ε 任意性, $P(|X-Y|>0)=0$.

$X_n\xrightarrow{r}X$, $X_n\xrightarrow{r}Y$.

$E[|X-Y|^r] \le E[|X-X_n|^r + |Y-X_n|^r] \longrightarrow 0$ $\therefore P(|X-Y|=0)=1$

(2) $X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y.$

$\forall \varepsilon>0,\ P(|X_n+Y_n-(X+Y)|>\varepsilon) = P(|(X_n-X)+(Y_n-Y)|>\varepsilon) \le P(|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2})$

$\longrightarrow 0$

$X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y,\ X_nY_n \xrightarrow{P} XY$

$X_nY_n - XY = (X_n-X)(Y_n-Y) + X(Y_n-Y) + Y(X_n-X)$

对 $\forall \varepsilon>0,\ P(|X_n-X|\cdot|Y_n-Y|>\varepsilon) \le P(|X_n-X|\ge\sqrt{\varepsilon}) + P(|Y_n-Y|\ge\sqrt{\varepsilon}) \to 0$

$\lim\limits_{k\to\infty} P(|X|<k)=1$，对上述 $\varepsilon>0, \exists M.$ s.t. $P(|X|\ge M)<\frac{\varepsilon}{4}$

$P(|X(Y_n-Y)|>\varepsilon) = P(|X(Y_n-Y)|>\varepsilon,\ |X|\le M) + P(|X(Y_n-Y)|>\varepsilon,\ |X|>M)$

$\le P(|Y_n-Y|>\frac{\varepsilon}{M}) + P(|X|>M) \longrightarrow P(|X|>M)\quad n\to\infty$

再令 $M\to+\infty$. $P(|X(Y_n-Y)|>\varepsilon)\longrightarrow 0$

(3) X $\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$ $X_n=(-1)^nX \xrightarrow{D} X$ $X_n+Y_n=0 \not\xrightarrow{D} X+X$

$Y_n=(-1)^{n+1}X \xrightarrow{D} X$

定理 $X_n \xrightarrow{D} X,\ Y_n \xrightarrow{P} c$ (常数)，则 $X_n+Y_n \xrightarrow{D} X+c.$

证: $F_n(t) = P(X_n+Y_n\le t) = P(X_n+Y_n\le t,\ |Y_n-c|\le\varepsilon) + P(X_n+Y_n\le t,\ |Y_n-c|>\varepsilon)$

$\le P(X_n\le t-c+\varepsilon) + P(|Y_n-c|>\varepsilon)$

$P(X_n\le t-c+\varepsilon) = P(X_n\le t-c+\varepsilon,\ |Y_n-c|\le\varepsilon) + P(X_n\le t-c+\varepsilon,\ |Y_n-c|>\varepsilon)$

$\le P(X_n+Y_n\le t) + P(|Y_n-c|>\varepsilon)$

$P(X_n+Y_n\le t) \ge P(X_n\le t-c-\varepsilon) + P(|Y_n-c|>\varepsilon)$ → 取等号

三. Borel-Cantelli 引理

$\{A_n\}$ 事件 $\bigcap\limits^{\infty} \bigcup\limits^{\infty} A_m = \limsup A_n \triangleq \{A_n\ \text{i.o.}\}$ infinitely often

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \liminf_{n\to\infty} A_n = \{A_n^c \ i.o.\}^c$$

定理: $\{A_n\}$ 事件列

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则 $P(A_n \ i.o.) = 0$

(2) 若 $\{A_n\}$ 相互独立，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \iff P(A_n \ i.o.) = 1$

证: (1) $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \le \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) \to 0 \quad n\to\infty$

$$P(A_n \ i.o.) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) = 0$$

(2) "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" $P(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m) = 1 - P(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c)$. $P(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c) = \lim_{r\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{r} A_m^c) = \lim_{r\to\infty} \prod_{m=n}^{r} (1 - P(A_m))$

$$\le \lim_{r\to\infty} \prod_{m=n}^{r} e^{-P(A_m)} = \lim_{r\to\infty} e^{-\sum_{m=n}^{r} P(A_m)} \longrightarrow 0$$

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) = 1$$

若不加独立条件: $\Omega = (0,1) \quad A_n = (0, \frac{1}{n}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 而 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \phi$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_n - X| > \varepsilon) = 0 \iff P(|X_n - X| > \varepsilon \ , i.o) = 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

例 $\{X_n\}$ 独立同分布 $E(X_i) = \mu \quad E(X_i^k) < \infty$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu$

证: 不妨设 $\mu = 0$ ($\mu \ne 0$, $S_n' = \frac{S_n - n\mu}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$)

$$E[S_n^4] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]^4 + \sum_{i\ne j} E(X_i^2 X_j^2) + \sum_{i\ne j\ne k} E(X_i^2 X_j X_k) + \sum_{i\ne j} E(X_i^3 X_j) + \sum_{i\ne j\ne k\ne l} E(X_i X_j X_k X_l)$$

$$= nE(X^4) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4!}{2\cdot 2} (E[X_i^2])^2 \le (n + 3n(n-1))E(X^4) \le c\cdot n^2 E(X^4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E((\frac{S_n}{n})^4)}{\varepsilon^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\cdot n^2 E(X_i^4)}{n^4 \varepsilon^4} < \infty$$

$P(\frac{S_n}{n} > \varepsilon \ \ i.o) = 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

hw: 7.11.2 (2), 7.11.4, 7.11.7, 7.11.8

§7.3 大数定律

Khinchin LLN $\{X_n\}$ 独立同分布. $E[X_n] = \mu$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. $\frac{S_n}{n} - \mu = \frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{D} 0$ (常数)

则 $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{P} 0$.

Bernoulli LLN

X_n	1	0
	p	$1-p$

$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{P} p(X_n=1)$

Chebyshev LLN

$\{X_n\}$两两不相关, $Var(X_n)<K$, 则 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n} \xrightarrow{P} 0$

证: 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. 对$\forall \varepsilon>0$, $P(|\frac{S_n-ES_n}{n}|>\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}E[(\frac{S_n-ES_n}{n})^2] = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i-EX_i)^2]$

$\le \frac{K\cdot n}{n^2\varepsilon^2} \to 0$

Markov LLN

$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0$, 则 $\frac{S_n-ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0$

定理 $\{X_n\}$独立.

$Y_{n,k}=\begin{cases} X_k, & |X_k|\le n \\ 0, & |X_k|>n \end{cases}$　记 $a_n=\sum_{k=1}^{n} E(Y_{n,k})$, $b_n=n$

$S_n=X_1+\cdots+X_n$

满足 (1) $\sum_{k=1}^{n} P(|X_k|>n) \to 0$ (2) $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(Y_{n,k}^2) \to 0$ 则 $\frac{S_n-a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$

证: 记 $S_n^*=\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}$, 对$\forall \varepsilon>0$, $P(|S_n-S_n^*|>\varepsilon) \le P(S_n\ne S_n^*) \le P(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_k\ne Y_{n,k}\})$

$\le \sum_{k=1}^{n} P(X_k\ne Y_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} P(|X_k|>n) \to 0$

$\therefore S_n \xrightarrow{P} S_n^*$　$P(|\frac{S_n^*-a_n}{b_n}|>\varepsilon) = P(|\frac{S_n^*-E(S_n^*)}{n}|>\varepsilon) \le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}Var(S_n^*) \to 0$

$\frac{S_n-a_n}{n} = \frac{S_n-S_n^*}{n} + \frac{S_n^*-a_n}{n} \xrightarrow{P} 0$

二.强大数律 SLLN

$\{X_n\}$　$S_n=X_1+\cdots+X_n$　$\{a_n\}$　$b_n>0$　$b_n\uparrow+\infty$ 若 $\frac{S_n-a_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ 称$\{X_n\}$服从强大数律.

B-C引理.不等式★

定理 $\{X_n\}$独立同分布(即i.i.d.) $E(X_i^2)<\infty$, $E[X_i]=\mu$

则 (1) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{2} \mu$ (2) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} \mu$

证：(1) $E(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|^2)=\frac{1}{n^2}E((\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu))^2)\overset{独立}{=}\frac{1}{n^2}Var(X_1)\cdot n\to 0$

(2) 取 $n_k=k^2$

$$P(|\frac{S_{n_k}}{n_k}-\mu|>\varepsilon)\le\frac{1}{(n_k\varepsilon)^2}E((S_{n_k}-n_k\mu)^2)=\frac{1}{(n_k\varepsilon)^2}n_k Var(X_1)=\frac{1}{k^2\varepsilon^2}Var(X_1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|\frac{S_{n_k}}{n_k}-\mu|>\varepsilon)\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Var(X_1)}{k^2\varepsilon^2}<\infty\Rightarrow P(\{|\frac{S_{n_k}}{n_k}-\mu|>\varepsilon\}\ i.o.)=0\Rightarrow\frac{S_{n_k}}{n_k}-\mu\xrightarrow{a.s.}0$$

分类讨论 若 $X_1\ge 0$，$\forall n,\exists k,k^2\le n<(k+1)^2$

$$\mu\xleftarrow{a.s}\frac{S_{k^2}}{(k+1)^2}\le\frac{S_n}{n}\le\frac{S_{(k+1)^2}}{k^2}=\frac{S_{(k+1)^2}}{(k+1)^2}\cdot\frac{(k+1)^2}{k^2}\xrightarrow{a.s.}\mu\quad 则\ \frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mu$$

X_1 不定号 $X_1=X_1^+-X_1^-$

$$X_1^+=\begin{cases}X_1, & X_1\ge 0\\ 0, & X_1<0\end{cases},\quad X_1^-=\begin{cases}-X_1, & X_1<0\\ 0, & X_1\ge 0\end{cases}$$

$E[|X_1|]<\infty$，$E[X_1^+]$，$E[X_1^-]<\infty$，$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k^+}{n}\xrightarrow{a.s.}E[X_1^+]$，$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k^-}{n}\xrightarrow{a.s.}E[X_1^-]$

相减可得 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}E(X_1^+-X_1^-)$

独立情形

定理 $\{X_n\}$ 相互独立，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2}<\infty$，$S_n=X_1+\cdots+X_n$，则 $\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{a.s.}0$

Kolmogrov 强大数律.

(1) 先证 Kolmogrov 不等式，$\{X_n\}$ 独立，$Var(X_i)<\infty$，$\forall i$，

对 $\forall\varepsilon>0$，$P(\max_{1\le m\le n}|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$

记 $\tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)$

$$\{\max_{1\le m\le n}\sum_{k=1}^{m}|X_k-EX_k|>\varepsilon\}=\bigcup_{m=1}^{n}\{|\tilde{S}_1|<\varepsilon,|\tilde{S}_2|<\varepsilon,\cdots,|\tilde{S}_{m-1}|<\varepsilon,|\tilde{S}_m|\ge\varepsilon\}\triangleq\bigcup_{m=1}^{n}A_m$$

$$P(\max_{1\le m\le n}|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)|\ge\varepsilon)=\sum_{m=1}^{n}P(A_m)$$

$$E[\tilde{S}_n^2]=E[(\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i))^2]=E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)^2)=Var(X_i)$$

$$E[\tilde{S}_n^2]\ge E(\tilde{S}_n^2\cdot\sum_{m=1}^{n}I_{A_m}]=\sum_{m=1}^{n}E(\tilde{S}_n^2\cdot I_{A_m})$$

$$=\sum_{m=1}^{n}E(\tilde{S}_m^2\cdot I_{A_m}+\sum_{i=m+1}^{n}(X_i-EX_i)^2 I_{A_m})+2E[\underbrace{\tilde{S}_m\cdot I_{A_m}\cdot\sum_{i=m+1}^{n}(X_i-EX_i)}_{独立}]=0$$

$$\ge\sum_{m=1}^{n}E(\tilde{S}_m^2\cdot I_{A_m})\ge\sum_{m=1}^{n}\varepsilon^2P(A_m)\Rightarrow\sum_{m=1}^{n}P(A_m)\le\frac{1}{\varepsilon^2}E[\tilde{S}_n^2]$$ 得证.

(2) 证 Kolmogrov 强大数律. (SLLN)

对 $\forall \varepsilon>0$. 令 $Y_n=\frac{\tilde{S}_n}{n}$.

$$P(\max_{2^m\le n<2^{m+1}}|Y_n|>\varepsilon)\le P(\max_{2^m\le n<2^{m+1}}|\tilde{S}_n|>2^m\cdot\varepsilon)\le P(\max_{1\le n<2^{m+1}}|\tilde{S}_n|>2^m\cdot\varepsilon)$$

$$\le\frac{1}{(2^m\varepsilon)^2}\sum_{i=1}^{2^{m+1}-1}Var(X_i)$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}P(\max_{2^m\le n<2^{m+1}}|Y_n|>\varepsilon)\le\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(2^m\varepsilon)^2}\sum_{i=1}^{2^{m+1}-1}Var(X_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}Var(X_i)\sum_{m=m(i)}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}},\ m(i)=\min\{m:i<2^{m+1}\}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}Var(X_i)\cdot\frac{\frac{1}{2^{2m(i)}}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Var(X_i)}{2^{2m(i)}}=\frac{16}{3\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Var(X_i)}{2^{2m(i)+2}}<\infty$$

hw: 7.4.1, 7.11.17, 7.11.20

又 $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{Var(X_i)}{i^2}<+\infty$. $2^{m(i)}\le i<2^{m(i)+1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{Var(X_i)}{2^{2m(i)+2}}<\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{Var(X_i)}{i^2}<+\infty$

$P(\max_{2^m\le n<2^{m+1}}|Y_n|\ge\varepsilon\ \ i.o.)=0$ $\quad P(|Y_n|\ge\varepsilon,\ i.o.)=0$ $\quad Y_n\xrightarrow{a.s.}0$

定理 $\{X_n\}$ i.i.d. $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ $\quad\frac{S_n}{n}-\mu\xrightarrow{a.s.}0\Leftrightarrow E[X_n]=\mu$

引理 $X\ge0$. 则 $E(X^k)=\int_0^{+\infty}kx^{k-1}P(X>x)\,dx$

证: $\int_0^{+\infty}kx^{k-1}P(X>x)\,dx=\int_0^{+\infty}kx^{k-1}\int_\Omega I_{\{X>x\}}dP\,dx=\int_\Omega\int_0^{+\infty}kx^{k-1}I_{\{X>x\}}\,dx\,dP$

$$=\int_\Omega\int_0^X kx^{k-1}dx\,dP=\int_\Omega X^k\,dP.$$

$$E|X_n|=\int_0^{+\infty}P(|X_n|>x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}P(|X_n|>x)\,dx\ge\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)$$

$$E|X_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)+P(|X_n|\in(n-1,n])\le\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)+1$$

证明 i.i.d. 情形下 SLLN

"$\Rightarrow$" $\frac{X_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}\xrightarrow{a.s.}0$ $\quad$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}P(|\frac{X_n}{n}|>\varepsilon)<\infty$

取 $\varepsilon=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)<\infty$ $\quad E[X_n]$存在 $\quad E[\frac{S_n}{n}]=E[X_1]=\mu$.

"$\Leftarrow$" 令 $Y_n=\begin{cases}X_n, & |X_n|\le n\\ 0, & |X_n|>n\end{cases}$

$P(X_n\ne Y_n)=P(|X_n|>n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\ne Y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>n)<\infty$

$\Rightarrow P(X_n\ne Y_n\ i.o.)=0$ $\quad$ 验证 $\frac{\sum_{k=1}^{n}Y_k}{n}\xrightarrow{a.s.}\mu$ $\quad\{Y_n\}$ 独立.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(Y_n)}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(Y_n^2)}{n^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2p(k-1\le|X_n|<k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2p(k-1\le|X_n|<k)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\le\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}\right)p(k-1\le|X_n|<k)\le 2+\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p(k-1\le|X_n|<k)$$

$$\le 2+E|X_n|<\infty$$

$$\Rightarrow\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mu\qquad\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mu$$

§7.4 中心极限定理

$\{X_n\}$ i.i.d. $S_n=X_1+\cdots+X_n$ $\quad\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$

Feller CLT + $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le k\le n}\frac{\sigma_k^2}{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}=0$

Lindeberg条件: $\{X_n\}$独立. $a_k=E[X_k]$. $b_k^2=Var(X_k)$ $\quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$ $\quad F_k(x)$为X_k的分布函数.

对$\forall\varepsilon>0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\varepsilon B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left((X_k-a_k)^2I_{\{|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\}}\right)=0$$

注记: (1) $\{X_n\}$满足Lindeberg条件, 则$\max\limits_{1\le k\le n}\left|\frac{X_k-a_k}{B_n}\right|\xrightarrow{P}0$

(2) L条件成立, 则Feller条件成立. $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le k\le n}\frac{b_k^2}{B_n^2}=0$

证: (1) $\forall\varepsilon>0$. $p\left(\max\limits_{1\le k\le n}\left|\frac{X_k-a_k}{B_n}\right|>\varepsilon\right)=p\left(\max\limits_{1\le k\le n}|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\right)$

$$=p\left(\bigcup_{1\le k\le n}|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\right)\le\sum_{k=1}^{n}p(|X_k-a_k|>\varepsilon B_n)$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}E\left[\frac{(X_k-a_k)^2}{\varepsilon^2B_n^2}1_{\{|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\}}\right]\longrightarrow 0$$

(2) $\max\limits_{1\le k\le n}\frac{b_k^2}{B_n^2}=\frac{1}{B_n^2}\max\limits_{1\le k\le n}E((X_k-a_k)^2)$

$$=\frac{1}{B_n^2}\max_{1\le k\le n}\left(E((X_k-a_k)^2\cdot I_{\{|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\}})\right.$$

$$\left.+E((X_k-a_k)^2I_{\{|X_k-a_k|\le\varepsilon B_n\}})\right)$$

$$\le \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} E((X_k-a_k)^2 I_{\{|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\}}) + \varepsilon^2 \to 0 \quad (令\ \varepsilon\to 0)$$

定理 Lindeberg－Feller CLT

$\{X_k\}$ 独立随机变量列 $E[X_k]=a_k$, $Var(X_k)=b_k^2$. $B_n^2=\sum_{k=1}^{n} b_k^2$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

满足 Lindeberg 条件. 则 $\frac{S_n-E[S_n]}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$

证：令 $X_{nk} = \frac{X_k-a_k}{B_n}$, $k=1,2,\cdots,n$

$E(X_{nk})=0$. $E(X_{nk}^2)=\frac{b_k^2}{B_n^2}$, X_{nk} 的特征函数为 $\varphi_{nk}(t)$.

$\frac{S_n-E(S_n)}{B_n}$ 特征函数记为 $\varphi_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)$. 下面证明 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$\varphi_{nk}(t)=E[e^{itX_{nk}}]=1+\frac{i^2t^2}{2}E[X_{nk}^2]+r_{nk}(t)$$

tips: X 的特征函数 $\varphi(t)=E[e^{itx}]$

(1) $\left|e^{it}-1-\frac{it}{1}-\frac{(it)^2}{2!}\right| \le \frac{|t|^3}{3!}$ (2) $\left|e^{it}-1-it-\frac{(it)^2}{2!}\right| \le |e^{it}-1-it|+\frac{t^2}{2} \le \frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}=t^2$

$$|r_{nk}(t)|=\left|E\left(e^{itX_{nk}}-\left(1+itX_{nk}+\frac{i^2t^2}{2}X_{nk}^2\right)\right)\right|$$

$$\le E((tX_{nk})^2\wedge|t^3X_{nk}^3|)$$

$$\le E(|t^3X_{nk}^3|\cdot I_{\{|X_{nk}|\le\varepsilon\}}+|t^2X_{nk}^2|\cdot I_{\{|X_{nk}|>\varepsilon\}})$$

$$\le |t^3|\cdot\varepsilon E(X_{nk}^2)+t^2E[X_{nk}^2\cdot I_{\{|X_{nk}|>\varepsilon\}}]$$

tips: $|a_k|\le 1$, $|b_k|\le 1$, $|a_1\cdots a_n-b_1\cdots b_n|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2b_k^2}{2B_n^2}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\varphi_{nk}(t)-\left(1+\frac{t^2b_k^2}{2B_n^2}\right)\right| = \sum_{k=1}^{n}|r_{nk}| \le \varepsilon\cdot|t|^3\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{B_n^2}+t^2\sum_{k=1}^{n}E[X_{nk}^2 I_{\{X_{nk}>\varepsilon\}}]$$

$$=\varepsilon\cdot|t|^3+t^2\cdot\frac{1}{B_n^2}\cdot E[(X_k-a_k)^2 I_{\{|X_k-a_k|>\varepsilon B_n\}}]\to 0 \quad 令\ \varepsilon\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{nk}(t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2b_k^2}{2B_n^2}\right)$$

tips: $e^{x(1-x)}\le 1+x\le e^x$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2b_k^2}{2B_n^2}\right)\le\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{t^2b_k^2}{2B_n}}=e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2b_k^2}{2B_n^2}\right)\ge\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{tb_k^2}{2B_n^2}+\frac{tb_k^2}{4B_n^2}}\right)$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{t^4}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k^2}{B_n^2}\right)^2\right)$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\exp\left(-\underbrace{\max_{1\le k\le n}\frac{b_k^2}{B_n^2}}_{\to 0}\cdot\frac{t^4}{4}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{B_n^2}}_{=1}\right)$$

$$\to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

定理 Lyapunov CLT $\{X_n\}$ 独立. 若 $\exists\,\delta>0$. s.t. $\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E(|X_k-a_k|^{2+\delta})\to 0$

则 $\frac{S_n-ES_n}{B_n}\xrightarrow{D}N(0,1)$