学号:______ 姓名:______ 学生所在院系:______

装订线 答题时不要超过此线

# 中国科学技术大学2024-2025学年第一学期
# 《数学分析B1》期末考试试卷(A卷)

考试时间 2025.01.13　　考试形式 闭卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 16 | 24 | 10 | 10 | 10 | 10 | 12 | 8 | 100 |
| 得分 | | | | | | | | | |

一. (16分, 每小题8分) 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}\sin^2 x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t$;

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2 x}\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{5/2}}\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan x^2}{\frac{5}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

**点评**: 本题没有什么技巧, 就是用L'Hospital 法则求函数极限, 只不过分子是变上限积分与$\sqrt{x}$ 的复合函数. 过程中若能采用无穷小替换, 则可简化求极限过程.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\\ &= \int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln 2-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**点评**: 本题核心是看出求和是$x\ln(1+x^2)$ 的Riemann和, 因此极限就是该函数的积分.

二. (24分, 每小题 6 分) 计算积分

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$;

**解** 分部积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} \sin x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos x \, \mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{e}^{-x} \cos x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$$
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

**解** 考虑对称性并作变换 $x = \tan t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

**点评**: 本题首先利用对称性, 再作积分变换.大凡积分时首先观察对称性、奇偶性以简化积分.

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x \cos x}{\mathrm{e}^x + 1} dx$

**解** 利用对称性

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x \cos x}{\mathrm{e}^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x \cos x}{\mathrm{e}^x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x}{\mathrm{e}^{-x} + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x = 1.$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}$

**解** 将$[0, +\infty)$ 分解为 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$ 并对在 $[1, +\infty)$上积分换元 $x = \dfrac{1}{t}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})} + \int_0^1 \frac{t^{2025}}{(1+t^2)(1+t^{2025})} \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

**点评**: 本题首先将积分区间分开, 对其中一个做变换, 使得两个积分区间一致, 虽然是广义积分, 但是积分的性质与常义积分是一样的, 只要广义积分收敛.利用分拆区间, 分别作变换或分别作积分是一种常规方法.

三. (10分) 求解方程$y''-2y'-3y=-10\cos x$ 满足初值条件$y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

**解** 齐次方程 $y''-2y'-3y=0$的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$, 因此齐次方程基本解组为 $\mathrm{e}^{3x}$, $\mathrm{e}^{-x}$.

为求方程特解, 令$y_0(x)=a\sin x+b\cos x$, 其中 $a, b$ 待定. 代入方程并比较$\sin x, \cos x$ 前系数得 $a=1, b=2$. 因此方程的通解为

$$y(x)=\sin x+2\cos x+C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

由

$$y(0)=2+C_1+C_2=0,\ \ y'(0)=1+3C_1-C_2=1$$

解得$C_1=-\frac{1}{2}$, $C_2=-\frac{3}{2}$, 所以满足初始条件的解为

$$y(x)=\sin x+2\cos x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x},$$

**点评**: 本题的关键是求非齐次的特解, 求该特解的方法是待定系数法. 最后写出非齐次通解, 代入初始条件, 确定通解中的常数.

四. (10分) 设 $f(x)=\ln^2(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 0)$.

**解** (1) $f'(x)=2\frac{\ln(1+x)}{1+x}$, 分别将$\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ 在$x=0$ 展开并相乘得

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$c_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-1)^{n-k}=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

因此$f(0)=0, f'(0)=0,$

$$f^{(n)}(0)=(n-1)!c_{n-1}=2(n-1)!(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},\ \ (n>1).$$

**点评**: 也可以对$(1+x)f'(x)=2\ln(1+x)$继续求导, 令$x=0$, 给出$f^{(n)}(0)$的递推关系式.

五. (10分) 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛区域以及和函数.

**解**

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+2}\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}\right| = \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}x^2 \to x^2,$$

因此收敛半径$R=1$, 当 $x=\pm 1$ 时, 显然绝对收敛, 因此收敛区域为 $[-1,1]$.

记$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$, 则 $S'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=2\arctan x$,

如果看不出来, 也可继续求导

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},$$

在$[0,x]$ $(|x|\le 1)$ 上积分并注意到$S(0)=0$, $S'(0)=0$, 因此

$$S'(x)=2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan x,$$

$$S(x)=\int_0^x 2\arctan t\,\mathrm{d}t=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

因和函数在$[-1,1]$ 上连续，所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\ x\in[-1,1]$$

六. (10分) 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{1+n^2x}\right)$ 在$(0,1)$ 上的收敛性、一致收敛性及和函数的连续性.

**解** 对$x\in(0,1)$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{1+n^2x}\right)\sim\dfrac{1}{1+n^2x}\sim\dfrac{1}{n^2x}$ 因此收敛.

对任意的 $\delta>0$, 当 $x\in[\delta,1)$ 时, $0<\ln\left(1+\dfrac{1}{1+n^2x}\right)<\dfrac{1}{1+n^2x}<\dfrac{1}{n^2\delta}$,

因此内闭一致收敛, 因此在$(0,1)$ 上连续.

**点评**: 本题关键是证明内闭一致收敛性. 证明内闭一致收敛时, 采用Weierstrass方法.

学生所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

装订线 答题时不要超过此线

七. (12分, 每小题6分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}$ $(n \geq 1)$,

(1) 证明数列$\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

**证明** (1) 对任意的 $1 > \varepsilon > 0$, 取 $a = \frac{\varepsilon}{2}$, 则

$$u_n = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}$$

其中

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} < a = \frac{\varepsilon}{2} \ (n \geq 1),$$

当 $x \in [a, 1]$ 时 $1 + \sin x \geq 1 + \sin a$ 所以

$$0 < \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} \leq \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin a)^n} = \frac{1-a}{(1+\sin a)^n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

所以存在$N > 0$, 当 $n > N$ 时

$$0 < \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

即当 $n > N$ 时 $0 < u_n < \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

**也可直接利用不等式 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, 因此**

$$0 < u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{2}{\pi}x)^n} = \frac{1}{n-1}\frac{\pi}{2} \to 0.$$

(2) 对 $x \in [0,1]$ $(1+\sin x)^n < (1+\sin x)^{n+1}$, 因此 $u_n$ 递减, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 再由$1 + \sin x \leq 1 + x$ $(x \in [0,1])$, 所以

$$u_n \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^n} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

其中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 发散, 推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛.

**要证明级数条件收敛, 就是要证明技术本身收敛, 但通项取绝对值后发散. 所以难点在证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.**

八. (8分, 每小题4分) (1) 设 $0<\alpha<1$, $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上非负、连续, 且

$$f(x) \leq \alpha+\int_1^x\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \ (x \geq 1),$$

求证: $f(x) \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \quad (x \geq 1)$.

(2) 设 $\alpha>0$, $f(x)$ 在$[0,1]$ 上单调增. 求证

$$\int_0^1(1-x)^\alpha f(x) \mathrm{d}x \leq \alpha \int_0^1(1-x)^{\alpha-1} x f(x) \mathrm{d}x .$$

**证明** (1) 设 $F(x)=\alpha+\int_1^x\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$, 则 $F(x)$可导, $F(1)=\alpha$, $f(x) \leq F(x)\ (x \geq 1)$,

$$F'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \leq\left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 .$$

$$\frac{F'(x)}{F^2(x)} \leq \frac{1}{x^2}, \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{F(x)} \leq 1-\frac{1}{x},$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq F(x)<\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{x}}<\frac{\alpha}{1-\alpha}\ (x \geq 1).$$

**点评**: 虽然$f(x)$ 并不一定可到, 但是连续, 所以右边记为$F(x)$ 是可导的（连续函数的变上限积分）, 因此重点放在$F(x)$ 上, 通过解方程给出

$$f(x) \leq F(x)<\frac{\alpha}{1-\alpha}\ (x \geq 1)$$

学生所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

装订线 答题时不要超过此线

(2)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x)^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}x \\
&= f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x]\,\mathrm{d}x \\
&= f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\int_0^1 (x(1-x)^\alpha)'\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

**点评**: 本题左边减右边, 出现一个因子$1-(\alpha+1)x$, 因此将积分分为两个区间$\left[0,\frac{1}{1+\alpha}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{1+\alpha},1\right]$. 在$\left[0,\frac{1}{1+\alpha}\right]$上, $1-(\alpha+1)x>0, f(x)<f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)$, 在$\left[\frac{1}{1+\alpha},1\right]$上,$1-(\alpha+1)x<0, f(x)>f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)$. 因此就可推出结果.