复习 2

要点:

1. **高阶导数的** Leibniz **公式**;
2. **复合函数的求导的链式法则**;
3. **微分中值定理**;
4. Taylor **公式**;
5. **单调性**, **凸性**, **极值**.

例 1 求 a, b 的值, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & -1<x<0,\\ ax+b, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在定义域中处处可导.

解 此函数显然在 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上可导. 只需它在 $x=0$ 也可导. 首先要保证它在 $x=0$ 连续. 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b,$$

所以 $b=0$. 因此 $f(0)=0$.

因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

故 $f'_-(0)=1$.

又因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a.$$

故 $f'_+(0)=a$. 于是必须 $a=1$ 才能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

例 2 设 $f(x)=x^n|x|$ (n 是自然数). 求证: $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

证明

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^{n+1}}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{n+1}}{x}=0.$$

故, $f'(0)=0$. 利用归纳法可证 $f^{(n)}(0)=0$. 因为

$$f_-^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(n+1)!x}{x}=-(n+1)!,$$

$$f_+^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(n+1)!x}{x}=(n+1)!.$$

故, $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

例 3 求 $(\sin x\cos x)^{(n)}$

解 因为 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$, 所以

$$
\begin{aligned}
(\sin x\cos x)^{(n)} &= \frac{1}{2}(\sin(2x))^{(n)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2}) \\
&= 2^{n-1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 求证: 对于 $[0,1]$ 上的任意 x_1,x_2 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

证明 不妨设 $f(0)=f(1)=0$, 否则考虑 $g(x)=f(x)-f(0)$. 再设 $x_1<x_2$. 若 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$, 则根据微分中值定理, 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)(x_2-x_1)|\leqslant\frac{1}{2}|f'(\xi)|<\frac{1}{2}.$$

下面设 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$. 即, $x_2>x_1+\frac{1}{2}$.

由于 $|f'(x)|<1$, 有 $(x+f(x))'=1+f'(x)>0$, 即, 函数 $x+f(x)$ 严格递增. 故,

$$0<x+f(x)<1,\ (0<x<1). \tag{1}$$

类似地, 函数 $-x+f(x)$ 严格递减. 故,

$$-1<-x+f(x)<0,\ (0<x<1). \tag{2}$$

若 $f(x_2) > f(x_1)$, 由 (1), 有

$$f(x_2) < 1 - x_2 < 1 - (x_1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - x_1. \tag{3}$$

由此, 及 (1) 的左端, 得

$$f(x_2) - f(x_1) < \frac{1}{2} - (x_1 + f(x_1)) \leqslant \frac{1}{2}.$$

若 $f(x_2) < f(x_1)$, 由 (2), 有

$$f(x_1) < x_1 < x_2 - \frac{1}{2}.$$

故,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &< x_2 - \frac{1}{2} - f(x_2) \\ &= (x_2 - f(x_2)) - \frac{1}{2} \\ &< 1 - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

故, 总有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}.$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数, 且 $f(0)=f'(0)$, $f(1)=f'(1)$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f''(\xi)$.

证明 令 $g(x)=e^x(f(x)-f'(x))$. 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 且 $g(0)=g(1)=0$. 故, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$. 即,

$$e^{\xi}(f'(\xi)-f''(\xi))+e^{\xi}(f(\xi)-f'(\xi))=0.$$

故, $f(\xi)=f''(\xi)$.

例 6 证明

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

且右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换成更大的数.

证明 设

$$f(x) = x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{1}{6}\sin 2x.$$

则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x.$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin 2x = \frac{4}{3}\sin x(1 - \cos x) > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

这说明 $f'(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格递增. 故, $f'(x) > f'(0) = 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 从而 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格递增. 于是, $f(x) > f(0) = 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 即,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

当 $x \to 0^+$ 时, 上式左右两端极限都是 1, 故, $\frac{4}{3}$ 不能换成更大的数.

例 7 设 $a \in (0,1)$, $b_1 = 1 - a$,

$$b_{n+1} = \frac{b_n e^{b_n}}{e^{b_n} - 1} - a, \ n = 1, 2, \cdots .$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明; 若收敛, 则求极限.

解 显然数列 $\{b_n\}$ 是正数列, 下面证明它收敛. 设

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}, \ x > 0.$$

则

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2} > 0, \ (x > 0).$$

因而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增. 由 $f(0+0) = 1$, 知

$$f(x) > 1, \ (x > 0).$$

另外, 函数 $\frac{x}{e^x - 1}$ 在 $x > 0$ 上单调递减, 且值域为 $(0,1)$. 故, 存在唯一的 $b > 0$ 使得

$$\frac{b}{e^b - 1} = a. \tag{1}$$

因为 $f(b) > 1$, 所以

$$\frac{be^b}{e^b - 1} > 1.$$

即,

$$1 < f(b) = b\left(\frac{1}{e^b - 1} + 1\right) = \frac{b}{e^b - 1} + b = a + b.$$

于是

$$b_1 = 1 - a < b.$$

假设 $b_n < b$. 则

$$b_{n+1} = f(b_n) - a < f(b) - a = (a + b) - a = b.$$

于是总有 $b_n < b$.

又

$$b_2 = f(1 - a) - a > 1 - a = b_1$$

根据 f 的递增性, 可知 $\{b_n\}$ 严格递增. 故, $\{b_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = t$. 则

$$t = f(t) - a = \frac{te^t}{e^t - 1} - a.$$

即,

$$\frac{t}{e^t - 1} = a.$$

由 b 的定义知, 有 $t = b$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

例 8 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的二阶可微函数, $f(0)=f(1)$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明 因为 $f(0)=f(1)$, 所以由 Rolle 定理, 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f'(x_0)=0$. 命

$$g(x)=(1-x)^2f'(x).$$

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $g(1)=0, g(x_0)=0$. 仍由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(x_0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即

$$(1-\xi)^2f''(\xi)-2(1-\xi)f'(\xi)=0.$$

故,

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

例 9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 记 $A_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$. 则

$$\begin{aligned}A_n^2&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n+1-k}{n^2}\right)\\&\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2+\frac{n+1}{n^2}}{2}\right)^2=\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\right)^{2n}\\&\to e\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_n^2&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n+1-k}{n^2}\right)\\&\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{n}\\&\to e\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

故, $A_n^2\to e$. 因而 $A_n\to\sqrt{e},(n\to\infty)$.

证法 2　因为 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ (x>0)$, 所以

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2},\ k=1,2,\cdots,n.$$

上式对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和, 得

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{n+1}{2n}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sqrt{e}.$$