by PB19000291 童新阳

ps：打√内容须熟练掌握，打*内容了解即可

数学物理方法 复习 童新阳

数学物理方法能把鬼变成人。

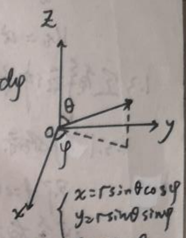
——无名氏

Chap 1 数学物理中的偏微分方程

1.1 预备知识

$dxdy = r\,dr\,d\theta$

$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$



$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

> $\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

$\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, u_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

$\Delta_3 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$ （柱坐标系）

> $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$，$x \neq 0$. $m = 0, -1, -2, \cdots$ 时，$\lim\limits_{x\to m}\Gamma(x) = \infty$

> $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$；$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$；$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

1.2 三个典型方程及其物理背景

1.2.1 理想弦的横振动方程 √

> $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)$ （$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$，$f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\rho}$. T为绳上张力，ρ为弦线密度，$g(t,x)$为力的分布密度）

> 自由振动：$f(t,x) \equiv 0$，$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ （$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$）

> 受迫振动. $\begin{cases} T u_x(t,0) + \mu(t) = 0 \\ -T u_x(t,l) + \nu(t) = 0. \end{cases}$

1.2.2 热传导方程 √

> $u_t = a^2\Delta u + \frac{1}{c\rho}f(t,x,y,z)$. （$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$，$k$为热传导系数，$c$为比热，$\rho$为质量密度，$f(t,x,y,z)$为热源密度）

> 若内部无热源：$f(t,x,y,z) \equiv 0$，$u_t = a^2\Delta u$

若为稳定温度场且内部无热源：$u_t = f(t,x,y,z) = 0$，$\Delta u = 0$

· · · · · · · · · · 有 · · ·：$u_t = 0$. $\Delta u = g(x,y,z)$.

细杆热传导问题（内无热源）：$u_t = a^2 u_{xx}$

> 边界条件：已知S上向外流出的热流密度为$q(t,x,y,z)$，则有：$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -\frac{q(t,x,y,z)}{k}$.

若热交换过程遵守牛顿定律：$q = h(u-\theta)$，$\left(k\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = h\theta$

1.2.3 扩散方程 √

> $u_t = a^2\Delta_3 u$. （u为浓度，$a = \sqrt{D}$. D为扩散系数）

1.2.4 静电场的场势方程

> $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ （φ为电势，ρ为空间电荷分布）

> 若空间无电荷分布：$\Delta\varphi = 0$

1.2.5 自由电磁波方程

> $u_{tt} = a^2\Delta u$ （$\sigma \approx 0$）　u为H或E.　$a=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$

$u_t = a^2\Delta u$ （$\sigma \gg \varepsilon$）　$a=\sqrt{\frac{1}{\mu\sigma}}$

1.3 定解条件和定解问题.

1.3.1 初始条件&初始问题.

> 即$t=0$时u的状态，

> 只含有初始条件的问题：Cauchy 问题.

> 对于同一个变量，方程中出现了几阶导就需几个初始条件（边界条件）.

1.3.2 边界条件和边值问题.

> $\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\right|_S = \varphi(x,y,z)$　（$\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \alpha^2+\beta^2>0$）

$\alpha=0$时. 第一类边界条件.　Dirichlet 条件.

$\beta=0$时. 第二类边界条件　Neumann 条件.

$\alpha\neq 0$且$\beta\neq 0$时. 第三类边界条件.　Robin 条件.

1.4 d'Alembert 公式

> 问题：$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$ $(t>0,\ -\infty<x<+\infty)$　无界弦自由振动

（半无界也可用此公式!!可能需做奇延拓/偶）

通解：$u=f(x-at)+g(x+at)$.

代入初始条件：$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$

1.5 叠加原理&齐次化原理.

1.5.1 叠加原理.

> 二阶线性微分算子 $L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$.

> 叠加原理1. 设 $Lu_i=f_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$满足：

$Lu=\sum_{i=1}^{n}c_if_i$

叠加原理2. 设 $Lu_i=f_i$ $(i=1,2,\cdots)$，且 $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$ 收敛，且L中偏导、求和可交换，则：

$Lu=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$.

叠加原理3. 设 $Lu=f(M,M_0)$ （M：自变量组；M_0：参数组），$U(M)=\int_V u(M,M_0)\,dM_0$收敛，且偏导与积分可交换，则：$L[U(M)]=\int_V f(M,M_0)\,dM_0$

1.5.2 齐次化原理 (冲量原理).

> 齐次化原理 1.

设 $w(t,M;\tau)$ 满足: $\begin{cases} w_{tt}=Lw \ (t>\tau) \\ w|_{t=\tau}=0, \quad w_t|_{t=\tau}=f(\tau,M) \end{cases}$, 则 $\begin{cases} u_{tt}=Lu+f(t,M) \ (t>0) \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$

的解为: $u=\int_0^t w(t,M;\tau)\,d\tau$

> 齐次化原理 2.

设 $w(t,M,\tau)$ 满足: $\begin{cases} w_t=Lw \ (t>\tau) \\ w|_{t=\tau}=f(\tau,M) \end{cases}$, 则 $\begin{cases} u_t=Lu+f(t,M) \ (t>0) \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解为

$u=\int_0^t w(t,M;\tau)\,d\tau$

Chap 2 分离变量法.

2.1 有界弦的自由振动.

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<l, \ t>0) \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\varphi(x), & u_t(0,x)=\phi(x) \end{cases}$

特征范围!!

非自由振动.

设 $u(t,x)=X(x)T(t)$ ......

固有值: $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$, $n=1,2,\cdots$ 固有函数 $X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ ......

求固有值和固有函数的边值问题称为固有值问题

2.2 极坐标下 $\Delta_2 u=0$ 的边值问题.

$\begin{cases} \Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$

$\Rightarrow u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)$

根据实际情况判断 A_n, B_n, C_n, D_n 是否为0!

2.3 固有值问题的施-刘理论.

> 对于一般的二阶齐次线性偏微分方程 $L_tu+c(t)L_xu=0 \ (a\le x\le b)$ 分离变量.

$\Rightarrow \begin{cases} L_xX(x)+\lambda X(x)=0 & ① \\ L_tT(t)-\lambda c(t)T(t)=0 & ② \end{cases}$ 其中, ①再附上 a、b 两点的边界条件即构成

一个一般形式的固有值问题.

将①改写: $b_0(x)y''(x)+b_1(x)y'(x)+b_2(x)y(x)+\lambda y(x)=0$

设 $\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}\exp\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\}$, $k(x)=\rho(x)b_0(x)$, $q(x)=-\rho(x)b_2(x)$, 则有:

$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$. 即施-刘型方程/自共轭方程.

> 假定：1. $[a,b]$上，$k(x)$, $k'(x)$, $\rho(x)$连续．$q(x)$则在(a,b)上连续
  2. $x\in(a,b)$时，$k(x)>0$, $\rho(x)>0$, $q(x)\geq 0$. $a.b$最多是$k(x)$、$\rho(x)$的一级零点，$q(x)$在端点处至多有一级极点，

> 施-刘定理.

$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0\ (a<x<b)$ 的固有值&固有值函数满足：

$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) \\ \text{五种边界条件之任一} \end{cases}$

1. 可数性． ∃可数无穷个$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$. 每个$\lambda_i$相应的线性无关的固有值函数有且只有一个（对于周期性边界成立）.

2. 非负性． $\lambda_n\geq 0$. ∃$\lambda=0$的充要条件：$q(x)=0$，且$a.b$端都不取第一、三类边界条件．此时，相应的固有值函数为常数．

3. 正交性 设λ_m、λ_n不同，则相应的固有值函数$y_m(x)$、$y_n(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交：$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\,dx=0$

4. 完备性． 对于∀有一阶连续导数及分段二阶连续导数的函数$f(x)$，只要满足固有值问题中的边界条件，即可按固有函数系$y_n(x)$展开为绝对一致收敛的广义傅里叶级数：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)y_n(x)$

其中，$f_k=\frac{1}{\|y_k(x)\|^2}\int_a^b\rho(x)f(x)y_k(x)\,dx$，$k=1,2,\cdots$

$$\|y_k(x)\|^2=\int_a^b\rho(x)y_k^2(x)\,dx$$

2.4 非齐次情形．

2.4.1 边界条件齐次的非齐次发展方程的混合问题.

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = f(t,x) & (t>0,\ x_1<x<x_2) \\ \alpha_1 u_x(t,x_1) - \beta_1 u(t,x_1) = 0 & (\alpha_1^2+\beta_1^2>0) \\ \alpha_2 u_x(t,x_2) + \beta_2 u(t,x_2) = 0 & (\alpha_2^2+\beta_2^2>0) \\ u(0,x)=\varphi(x), & u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$$

1. 固有函数法．
将已知函数按固有函数展开，再比较级数等式两边的系数．
若$f(t,x)$不依赖于t（$f(t,x)=f(x)$），可用特解法求解.

2. 齐次化原理法．

2.4.1 一般非齐次混合问题．

> 方程与边界条件均非齐次

> 先把边界条件齐次化，再利用叠加原理，令$u=v+w$，可将其化为关于w的边界条件齐次的混合问题（2.4.1）

> 有时要具体问题具体分析，如：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}\ (0<x<l) \\ u(t,0)=0,\ u(t,l)=\sin\omega t \\ u(0,x)=u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

观察边界条件，可设 $v=X(x)\sin\omega t$，$X(0)=0, X(l)=1$

再令 $u=v+w$ 解 w.

2.4.3 泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u=f(x,y,z) \\ u|_s=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

泊松方程第一类边值问题

可利用特解法求解，即找到特解 v 使得 $\Delta_3 v=f(x,y,z)$，再利用叠加原理.

Chap 3 特殊函数

3.1 Bessel 函数

> 柱坐标系下对三个典型方程分离变量，都可能出现 ν 阶 Bessel 方程：

$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\quad(\nu\geq 0)$

特解：$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ $(\nu\in\mathbb{R})\Rightarrow$ 第一类 ν 阶 $(\nu>0)$ / $-\nu$ 阶 $(\nu<0)$ Bessel 函数 $J_\nu(x)$ $J_{-\nu}(x)$

通解：1. $\nu\notin\mathbb{Z}$ 时：$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$

2. 对一切 $\nu\geq 0$：$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$

> 一些性质.

$\lim_{x\to 0}J_\nu(x)=0$，$\lim_{x\to+\infty}J_\nu(x)=0$

$\lim_{x\to 0}J_{-\nu}(x)=\infty\quad(\nu\notin\mathbb{Z})$

$\lim_{x\to 0}N_\nu(x)=\infty$，$\lim_{x\to\infty}N_\nu(x)=0$

$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$

$J_\nu(-x)=(-1)^nJ_\nu(x)$

3.2 Bessel 函数的性质.

3.2.1 母函数与积分表示.

> $\exp\left\{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n\quad(0<|\zeta|<+\infty)$

左端称为整阶 Bessel 函数列 $\{J_n(x)\}$ 的母函数或生成函数

> $J_n(x)$ 的积分表示：

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{i(x\sin\theta-n\theta)\}\,d\theta$$

> 加法公式：$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)$

3.2.2 微分关系和递推公式

> 微分关系：$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right)= x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$

$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right)= x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

特别：$J_0'(x)=J_{-1}(x)=-J_1(x)$

> 递推关系：$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$

$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x)$

> 一般来说，形如 $\int x^{p} J_{q}(x)\,dx$ 的积分，p.q 为整数，$p+q\geq 0$

若 $p+q$ 为奇数，则积分可用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示

偶数 $\int J_0(x)\,dx$

3.2.3 渐近公式、衰减振荡性和零点

> $|x|$ 很大时，
$$\begin{cases} J_{\nu}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ N_{\nu}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$
衰减振荡函数

> $J_0(x)$ 是偶函数，$J_1(x)$ 是奇函数

> $J_{\nu}(x)$ 有无穷多个零点，且关于原点对称分布

$J_{\nu}'(x)$ 也有无穷多个零点.

更一般地，$J_{\nu}(x)+h\,x J_{\nu}'(x)=0$ 有无穷多个实根.

3.3 Bessel 方程的固有值问题

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0 \quad (0<x<a,\ \nu\geq 0) \\ \alpha y(a)+\beta y'(a)=0 \\ y(0) 有界. \end{cases}$$
$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy')+\left(\lambda x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$

$k(x)=x,\ q(x)=\frac{\nu^2}{x},\ \rho(x)=x$

令 $\lambda=\omega^2\ (\omega\geq 0) \Rightarrow$ 通解：$y(x)=A J_{\nu}(\omega x)+B N_{\nu}(\omega x)$

由 $y(0)$ 有界 $\Rightarrow B=0.\quad y(x)=J_{\nu}(\omega x)$

由 a 端边界条件 $\Rightarrow$ 有无穷个正实零点，依次记为 $\omega_1, \omega_2, \cdots$

可得 $\begin{cases} 固有值\ \lambda_n=\omega_n^2 \\ 固有函数\ y_n(x)=J_{\nu}(\omega_n x)\end{cases}$

对于 $\omega_m\neq\omega_n$，$J_{\nu}(\omega_m x)$ 与 $J_{\nu}(\omega_n x)$ 带权 $\rho(x)=x$ 正交：$\int_0^a xJ_{\nu}(\omega_n x)\cdot J_{\nu}(\omega_m x)\,dx=0$

> 令 $N_{\nu}^2=\|J_{\nu}(\omega x)\|^2=\int_0^a xJ_{\nu}^2(\omega x)\,dx$

对于第一类边界条件，$J_{\nu}(\omega a)=0$. $\quad N_{\nu 1}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$

二 $\quad J_{\nu}'(\omega a)=0 \quad N_{\nu 2}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]J_{\nu}^2(\omega a)$

三 $\quad J_{\nu}'(\omega a)=-\frac{J_{\nu}(\omega a)}{\omega h} \quad N_{\nu 3}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\left(\frac{a}{\omega h}\right)^2\right]J_{\nu}^2(\omega a)$

> $J_{\nu}(\omega_n x)$ 是完备正交系.

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n J_{\nu}(\omega_n x).\quad f_n=\frac{1}{N_{\nu}^2}\int_0^a xf(x)J_{\nu}(\omega_n x)\,dx$

3.4 Legendre 方程的固有值问题. 球形域三维稳态问题

> $\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$

$(0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$

对具有(轴)对称性的问题，解与 φ 无关. 方程化为 $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$

令 $u = R(r)\Theta(\theta)$. $\Rightarrow \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \lambda\Theta(\theta) = 0$ Legendre 方程

令 $x = \cos\theta$ ($x \in [-1,1]$)，记 $\Theta(\theta) = y(x) \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \lambda y = 0$ (*)

$k(x) = 1-x^2,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1$

> 令 $\lambda = l(l+1)$. 若 $l \notin \mathbb{Z}$，则方程在 $[-1,1]$ 上无非零有界解.

若 $l = n = 0, 1, 2, \cdots$，则 $\begin{cases} \text{固有值: } \lambda_n = n(n+1) \\ \text{固有函数: } y_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \end{cases}$

对 $y_n(x)$ 添加常系数，$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{x^n}(x^2-1)^n$ Legendre 多项式. 仍是固有值问题的非零解

$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(2n-2k)!}{2^n \cdot k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$.

性质：n 为偶数(奇数)时，$P_n(x)$ 为偶(奇)函数.

$\{P_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是 $[-1,1]$ 上的正交系 $(\rho(x) = 1)$

$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad (m \ne n)$

特别地：$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

> 固有值问题的解：$\begin{cases} (*),\ -1 < x < 1 \\ |y(\pm 1)| < +\infty \end{cases}$

$u = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}R_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$

固有值问题的解：$\begin{cases} (*),\ 0 < x < 1 \\ y(0) = 0\ (\text{或 } y'(0) = 0),\ |y(1)| < +\infty \end{cases}$

$y(0) = 0$: $\lambda_n = (2n+1)(2n+2)$, $y_n(x) = P_{2n+1}(x)$

$y'(0) = 0$: $\lambda_n = 2n(2n+1)$, $y_n(x) = P_{2n}(x)$

3.5 Legendre 多项式的母函数和递推公式

> $w(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$. $w(x,t)$ 是 Legendre 多项式的母函数或生成函数

> Schläfli 公式 (Legendre 多项式的积分表达式)：

$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-x)^{n+1}}du$.

> 对一切 n 有 $P_n(1) = 1$; $|x| \le 1$ 时，$|P_n(x)| \le 1$

> 其他性质：$\int_0^1 P_n(x)dx = 0$

$m < n$ 时，$\int_{-1}^{1}x^m P_n(x)dx = 0$

> 递推公式：$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \\ nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0 \\ nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0 \\ P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x) \end{cases}$

3.6 函数的 Fourier - Legendre 展开.

> $\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$

> 若 $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 内任意实值函数，且满足 1. $(-1,1)$ 内分段光滑，则

2. $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ 有限

$f(x)$ 可展开为 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x)$, $C_n=\frac{1}{N_n^2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$

> 对于 $f(\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(\cos\theta)$. 令 $x=\cos\theta$，有:

$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=0$

故 $\{P_n(\cos\theta), n=0,1,2,\cdots\}$ 在 $[0,\pi]$ 上带权 $\sin\theta$ 正交，且

$\|P_n(\cos\theta)\|^2=\int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$

故有: $A_n=\frac{1}{\|P_n(\cos\theta)\|^2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\arccos x)P_n(x)\,dx$

> 补充: $t^n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}P_n(x)\,dx$, $|t|<1$, $n=0,1,2,\cdots$

Chap 4 积分变换方法.

4.1 用 Fourier 变换解题.

4.1.1 Fourier 变换.

> 若 $f(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑，且在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积 ($\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 存在).

则 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换. ($F[f]$).

$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$ 为 $F(\lambda)$ 的反 Fourier 变换 ($F^{-1}[F(\lambda)]$)

> 性质: 1. 线性性. $F[C_1 f+C_2 g]=C_1F[f]+C_2F[g]$

2. 频移特性. $F[f(x)e^{i\lambda_0 x}]=F(\lambda+\lambda_0)$

3. 微分关系 若 $f^{(m)}(\pm\infty)=0$ 且 $F[f^{(k)}(x)]$ 存在，则 $F[f^{(k)}(x)]=(-i\lambda)^k F[f]$

$m=0,1,2,\cdots,k-1$

有个负号!!!

4. 卷积性. $f*g=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\cdot g(\xi)\,d\xi$.

$F[f*g]=F[f]\cdot F[G]$. $F^{-1}[F(\lambda)\cdot G(\lambda)]=F^{-1}[F(\lambda)]*F^{-1}[G(\lambda)]$

> 高维 Fourier 变换.

$F(\lambda,\mu,\nu)=\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\exp\{i(\lambda x+\mu y+\nu z)\}\,dx\,dy\,dz$. ($F[f]$)

$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\mu,\nu)\exp\{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)\}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$.

性质：$F[\frac{\partial f}{\partial x}] = -i\lambda F[f]$　$(f(\pm\infty, y, z) = 0)$

$F[\frac{\partial f}{\partial y}] = -i\mu F[f]$　$(f(x, \pm\infty, z) = 0)$

$F[\frac{\partial f}{\partial z}] = -i\nu F[f]$　$(f(x, y, \pm\infty) = 0)$

$F[\Delta_3 f] = -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) F[f]$

> 补充：常微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解，　$y = [\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C] e^{-\int p(x)dx}$

> 解决半直线上的问题.

正弦变换：$\begin{cases} \bar{f}_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin\lambda x \, dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \bar{f}_s(\lambda) \sin\lambda x \, dx \end{cases}$　余弦变换：$\begin{cases} \bar{f}_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos\lambda x \, dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \bar{f}_c(\lambda) \cos\lambda x \, dx \end{cases}$

正/余弦变换后微分性质等要具体问题具体分析，与常规 Fourier 变换不同.

4.2 用 Laplace 变换解题.

定义：$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

必须选取在 $(0, +\infty)$ 上变化的自变量（常是时间变量）作为积分变量

> 微分关系：$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0)$

> 常用 Laplace 变换：

$f(t)$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{f(t)}{t}$	$f(t)*g(t)$ $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$t^n f(t)$	$e^{at} f(t)$	$f(t-\tau)$
$F(p)$	$\frac{F(p)}{p}$	$\int_p^{+\infty} F(s)ds$	$F(p)\cdot G(p)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$	$F(p-a)$	$e^{-p\tau} F(p)$
$f(t)$	$\frac{t^n}{n!}$	$e^{\lambda t}$	$\sin\omega t$	$\cos\omega t$	$f(at)$	$\frac{1}{a} f(\frac{t}{a})$
$F(p)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$	$F(ap)$

Chap 5　基本解和解的积分表达形式.

5.1　δ 函数.

> 定义：$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in (a,b) \\ 0, & 0 \notin (a,b) \end{cases}$　若集中量在 $x = \xi$ 处，则有 $\int_a^b \delta(x-\xi) dx = \begin{cases} 1, & \xi \in (a,b) \\ 0, & \xi \notin (a,b) \end{cases}$

> 性质：$\int_a^b \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$，$0 \in (a,b)$　特别地：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$

> 对称性：$\delta(x) = \delta(-x)$. $\delta(x)$ 是偶函数.

$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$，$a \neq 0$

> 卷积单位函数：$\delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x)$

> δ 函数的导数：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0)$

一般地：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$

> δ 函数的 Fourier 变换：　$F[\delta(x)] = 1$

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda x \, d\lambda$

> 三维 δ 函数

$$\iiint_V \delta(M)\,dM = \begin{cases} 1, & (0,0,0)\in V \\ 0, & (0,0,0)\notin V \end{cases}$$

运算性：$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(\xi,\eta,\zeta)$

对称性：$\delta(M)=\delta(-M)$，　$\delta(M-M_0)=\delta(M_0-M)$

Fourier变换：$F[\delta(M)]=1$

5.2 场势方程的边值问题

5.2.1 $Lu=0$ 型方程的基本解

$Lu=\delta(M)$ 的解是 $Lu=f(M)$ 的基本解（点源函数）

定理1. 若 $f(M)$ 连续，$U(M)$ 满足 $LU=\delta(M)$，则 $u=U*f=\iiint U(M-M_0)f(M_0)\,dM_0$

满足 $Lu=f(M)$

求得点源的场，就可求得任意分布的场

> $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的解为 $u=-\frac{1}{4\pi r}$　r 是任一点与点源的距离.

对于分布为 $\rho(M)$ 的电场，$u=U*[-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(M_0)}{r(M,M_0)}dM_0$　$r=\sqrt{(x-\xi)^2+\cdots}$

5.2.2 Green 函数及其物理意义

对于 I_1：$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y,z)\\ u|_S=\varphi(x,y,z)\end{cases}$，为求其解，考虑 I_2：$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\\ G|_S=0.\end{cases}$

G为 Green 函数

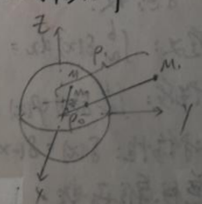
I_1 的解：$u(M_0)=-\iint_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}dS+\iiint_V Gf(M)\,dM$　(*)

5.2.3 用镜像法求 Green 函数.

1) 半平面的 Green 函数.

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\ z>0\\ G|_{z=0}=0.\end{cases}$$

设 $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ 为 $z>0$ 空间任一点，设 M_0 与 M_1 关于 $z=0$ 对称，则：



$G=u_1+u_2=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_1)}$

对于 $\begin{cases}\Delta u=0\ (z>0)\\ u|_{z=0}=\varphi(x,y)\end{cases}$，$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial G}{\partial z}=\cdots$，$f(M)=0$.

代入(*)：$u(M_0)=-\iint_{z=0}\frac{\varphi(x,y)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}dx\,dy$.

2) 球形域上的 Green 函数.

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),\ x^2+y^2+z^2<R^2\\ G|_S=0.\end{cases}$$

$G=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{q}{r(M,M_1)}]$，$q=\frac{R}{\rho_0}$.　$\rho_0\cdot\rho_1=R^2$

对于 $\begin{cases}\Delta u=0\ (x^2+y^2+z^2<R^2)\\ u|_S=\varphi(x,y,z)\end{cases}$

将 $r(M,M_0)$、$r(M,M_1)$ 用 r,φ 表示，则 $G(M;M_0)=G(r,\varphi)$

$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S=\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_S=\cdots$

代入(*)，$u(M_0)=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\cdot\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\cdots\cdots$

5.2.4 二维情形

$\Delta_2 u=\delta(x,y)$

解为 $u=\frac{1}{2\pi}\ln r$　r 是 M 与点源的距离

对于 I_4：$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y)\\ u|_l=\varphi(x,y)\end{cases}$

解为 $u(\xi,\eta)=-\int_l\varphi(M)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}dl+\iint_D G(M;M_0)f(M)dA$

二维情形下，镜像法仍适用！

$\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi,y-\eta),\ y>0\\ G|_{y=0}=0.\end{cases}$

圆：$\rho_0\cdot\rho_1=R^2$.

$G=\frac{1}{2\pi}\ln r+\frac{1}{2\pi}\ln r_1\cdot\frac{\rho_0}{a}$.

解为：$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}[-\ln r(M,M_0)+\ln r(M,M_1)]$

对于：$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y),\ y>0\\ u|_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$　$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{y=0}=-\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0}=\cdots$

代入(*)，$u=\cdots$

圆内问题类似

5.3 $u_t=Lu$ 型方程柯西问题的基本解.

II_1：$\begin{cases}U_t=LU\ (t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty)\\ U|_{t=0}=\delta(x,y,z)\end{cases}$ 的解是 II_2：$\begin{cases}u_t=Lu+f(t,x,y,z)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)\end{cases}$ 的基本解.

解为：$u(t,x,y,z)=U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau$

对于 $\begin{cases}U_t=a^2\Delta U\\ U|_{t=0}=\delta(x,y,z)\end{cases}\Rightarrow U(t,x,y,z)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left\{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right\}$，$u=\cdots\cdots$

5.4. $u_{tt}=Lu$ 型方程柯西问题的基本解.

5.4.1 柯西问题解的积分表式

III_1：$\begin{cases}U_{tt}=LU\ (t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty)\\ U|_{t=0}=0,\ U_t|_{t=0}=\delta(M)\end{cases}$ 的解是 III_2：$\begin{cases}u_{tt}=Lu+f(t,x,y,z)\\ u|_{t=0}=\varphi(M),\ u_t|_{t=0}=\psi(M)\end{cases}$ 的基本解

解为：$u(t,x,y,z)=\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)]+U(t,M)*\psi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau$

对于 $\begin{cases}U_{tt}=a^2\Delta U\\ U|_{t=0}=0,\ U_t|_{t=0}=\delta(x,y,z)\end{cases}\Rightarrow U(t,x,y,z)=\frac{1}{4\pi a r}\delta(r-at)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta u\\ u|_{t=0}=\varphi\\ u_t|_{t=0}=\psi\end{cases}$ 的解：$u(t,x,y,z)=tM_{at}(\psi)+\frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)]$.　$M_{at}(\psi)=\frac{1}{4\pi(at)^2}\iint_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS$.

S_{at} 是以 (x,y,z) 为中心，at 为半径的球面，M 是 ψ 在 S_{at} 上的均值

5.4.2 降维法.

利用三维问题的解解二维问题.

对于 $\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (t>0, -\infty < x, y < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), & u_t|_{t=0} = \psi(x,y) \end{cases}$

$$\iint_{S_{at}} \psi(\xi,\eta)\, dS = 2at \iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\, d\sigma}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

D_{at} 是 S_{at} 在 ξ,η 面上的投影区域 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \le a^2t^2$

$$\Rightarrow M_{at}(\psi) = \frac{1}{4\pi a^2t^2} \iint_{S_{at}} \psi(\xi,\eta)\, dS = \cdots$$

$$u(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}[t M_{at}(\varphi)] + t M_{at}(\psi)$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi a} \iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\, d\xi\, d\eta$$

对于 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \\ u|_{t=0} = \delta(M) \end{cases}$, $U(t,x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}, & x^2+y^2 \le a^2t^2 \\ 0 & x^2+y^2 > a^2t^2 \end{cases}$

5.4.4 推迟势公式.

$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t,x,y,z), t>0; & -\infty < x,y,z < +\infty \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

解为: $u = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{V_{at}} \frac{f(t-\frac{r}{a}, \xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ V_{at}: 以 (x,y,z) 为球心, at 为半径

$\frac{r}{a}$ 是离 (x,y,z) 距离为 r 的点上的外力的影响传到 (x,y,z) 所需时间

(推迟了 $\frac{r}{a}$)