§13.3 含参变量常义积分

13.3.1 含参变量的常义积分及其性质

设二元函数 $f(x,u)$ 在区间 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 对于任给定的 $u\in[\alpha,\beta]$, 函数 $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 这时称积分

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

是含参变量 u 的常义积分. 它定义了一个函数

$$u\longmapsto\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx.$$

这一节主要目的, 就是要讨论含参变量的常义积分的性质.

定理 1 如果二元函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0, 于是

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)| &= \left|\int_a^b f(x,u)dx-\int_a^b f(x,u_0)dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|dx,\end{aligned}$$

由于 $f(x,u)$ 在闭区域 I 上连续, 必一致连续. 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在正数 δ, 只要 I 中两点 (x_1,u_1) 与 (x_2,u_2) 的距离小于 δ, 就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon.$$

特别当 $|u-u_0|<\delta$ 时, 对任意 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon,$$

从而得到

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<(b-a)\varepsilon.$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 u_0 处连续, 由 u_0 的任意性可知, $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. □

由于

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$$

可写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)dx,$$

也就是说极限运算与积分运算的次序可以交换.

例 1 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 讨论函数

$$F(t)=\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx$$

的连续性.

解 对每一个固定的 $t\in\mathbb{R}$, 二元函数

$$h(x,t)=\frac{tf(x)}{x^2+t^2}$$

都是关于 x 连续函数, 因此, $F(t)$ 是一个定义好的函数, 且是奇函数.

设 $0<\alpha<\beta$. 因为 $h(x,t)$ 在 $[0,1]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以 $F(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续, 从而 $F(t)$ 在 $t\neq 0$ 处都是连续的. 对于 $0<t<1$, 有

$$\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx=\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx+\int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx.$$

因 f 在 $[0,1]$ 上连续, 可设 $|f(x)|\leqslant M$. 因而

$$\left|\int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx\right|\leqslant \frac{t}{t^{2/3}+t^2}M=\frac{t^{1/3}}{1+t^{4/3}}M\to 0,\ \ (t\to 0^+).$$

根据第一积分中值定理的推广, 存在 $\xi \in (0, t^{1/3})$ 使得

$$\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx = f(\xi)\int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2}\,dx$$

$$= f(\xi)\arctan\frac{x}{t}\Big|_{x=0}^{x=t^{1/3}} = f(\xi)\arctan\frac{1}{t^{2/3}}.$$

因而

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

于是

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2}f(0).$$

同理

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = -\frac{\pi}{2}f(0).$$

由此可知当 $f(0)=0$ 时, $F(t)$ 在 $t=0$ 连续, 但当 $f(0)\neq 0$ 时, $F(t)$ 在 $t=0$ 不连续.

在确定了 $\varphi(u)$ 是 u 的连续函数之后, 就有可能来考察它在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的积分

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,u)dx\right] du.$$

当函数 $f(x,u)$ 在 I 上连续时, 上式右端积分等于 $f(x,u)$ 在 I 上的二重积分, 故也可写成

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,u)dx\right] du = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right] dx.$$

这便是

定理 2 如果函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积, 并有

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,u)dx\right] du = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right] dx.$$

例 2 计算 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, 0 < a < b.$

解 注意到

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^u \, du,$$

且二元函数 $h(x,u) = x^u$ 在 $[0,1] \times [a,b]$ 连续, 因而有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^u du \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^u \, dx \right) du \\ &= \int_a^b \frac{1}{u+1} x^{u+1} \Big|_0^1 du = \int_a^b \frac{1}{u+1} du \\ &= \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

现在进一步研究函数 $\varphi(u)$ 的可微性.

定理 3 设函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且对 u 有连续偏导数, 则函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 并有

$$\varphi'(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.$$

证明 令

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=g(u),$$

则 $g(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 根据定理 2, 当 $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$ 时有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^v g(u)du &= \int_\alpha^v \left(\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\right)du\\ &= \int_a^b \left(\int_\alpha^v \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}du\right)dx\\ &= \int_a^b \big(f(x,v)-f(x,\alpha)\big)dx = \varphi(v)-\varphi(\alpha).\end{aligned}$$

即,

$$\varphi(v) = \int_\alpha^v g(u)du + \varphi(\alpha).$$

由定理 1 知, $g(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 可见 $\varphi(v)$ 是 $g(v)$ 的原函数, 因此

$$\varphi'(v) = g(v).$$

这就是所要证明的公式. □

例 3 试求积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ 的值.

解 考虑含参变量的积分

$$I(u)=\int_0^1 \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}dx,\ u\in[0,1].$$

这个积分的被积函数 $\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$ 及其关于 u 的偏微商 $\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$ 都在 $[0,1]^2$ 上连续, 由定理 3 就有

$$\begin{aligned}
I'(u)&=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}dx\\
&=\frac{1}{1+u^2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{u}{1+x^2}-\frac{u}{1+ux}\right)dx\\
&=\frac{1}{1+u^2}\left[\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}u-\ln(1+u)\right].
\end{aligned}$$

将此式的两端关于 u 从 0 到 1 积分得

$$
\begin{aligned}
I(1)-I(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}u-\ln(1+u)\right]du \\
&= \frac{\ln 2}{2}\arctan u\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+u^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}du \\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2-I(1).
\end{aligned}
$$

又 $I(0)=0$, 故所求积分的值为

$$
I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.
$$

例 4 设 $n \in \mathbb{Z}$. 求证: 函数 $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$ 满足 Bessel 方程:

$$x^2 I''(x) + xI'(x) + (x^2 - n^2)I(x) = 0.$$

证明 二元函数 $f(\varphi, x) = \cos(n\varphi - x\sin\varphi)$ 关于 x 的偏导数 $f'_x = \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)$ 及二阶偏导数 f''_{xx} 都是连续函数. 因此在积分号下求导, 并分部积分, 可得

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\cos\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi \\ &\qquad + \int_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)\,d\varphi\Big] \\ &= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}$$

$$I''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

因此

$$\begin{aligned} x^2 I''(x) + xI'(x) &= \frac{nx}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\varphi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi \\ &\quad - \frac{x^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{nx}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\varphi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi - x^2 I(x). \end{aligned}$$

另外, 根据 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\int_0^{\pi} (n - x\cos\varphi) \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \big(\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\big)'\, d\varphi = 0$$

即,

$$\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\varphi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = nI(x).$$

于是有

$$x^2 I''(x) + xI'(x) = n^2 I_n(x) - x^2 I(x).$$

例 5 设 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数. 求证:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^1 f^x(t)\,dt\right)^{1/x} = e^{\int_0^1 \ln f(t)\,dt}.$$

证明 记 $g(x)=\left(\int_0^1 f^x(t)\,dt\right)^{1/x}$. 则 $\ln g(x)=\dfrac{1}{x}\ln\int_0^1 f^x(t)\,dt$.

由 L'Hospital 法则, 并在积分号下求导数, 积分号内求极限, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln g(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\int_0^1 f^x(t)\,dt}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\int_0^1 f^x(t)\ln f(t)\,dt\Big/\int_0^1 f^x(t)\,dt\\ &= \int_0^1 \ln f(t)\,dt.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = e^{\int_0^1 \ln f(t)\,dt}.$$

13.3.2 积分限依赖于参变量的积分

在实际应用中, 经常要遇到这样的情形, 不仅被积函数含有参变数, 积分限也含有参变数, 这时积分可写成

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx.$$

我们有

定理 4 设函数 $f(x,u)$ 在矩形区域 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 在 $[\alpha,\beta]$ 上函数 $a(u)$ 及 $b(u)$ 连续, 并且 $a\leqslant a(u)\leqslant b,\quad a\leqslant b(u)\leqslant b$, 则

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0, 并将参变量积分 $\psi(u)$ 写成

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)dx+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)dx+\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)dx.$$

右端第二个积分由于上下限都是常数, 所以它关于 u 是连续的, 于是有

$$\lim_{u\to u_0}\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)dx=\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)dx.$$

而第一个与第三个积分有估计值

$$\left|\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)dx\right|\leqslant M|a(u)-a(u_0)|,$$

$$\left|\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)dx\right|\leqslant M|b(u)-b(u_0)|,$$

其中 M 是连续函数 $|f(x,u)|$ 在区域 I 上的最大值. 因为 $a(u),b(u)$ 在点 u_0 连续, 所以当 $u\to u_0$ 时, 这两个积分趋于零. 于是

$$\lim_{u\to u_0}\psi(u)=\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)dx=\psi(u_0).$$

定理 5 设函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续且对 u 有连续的偏微商, 在 $[\alpha,\beta]$ 上函数 $a(u)$ 及 $b(u)$ 可微, 并且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b,\quad a\leqslant b(u)\leqslant b,$$

则函数 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且有

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u).$$

证明 令

$$F(u,y,z)=\int_{y}^{z}f(x,u)dx,$$

其中 $y=a(u)$, $z=b(u)$, 于是 $\psi(u)$ 是由 $F(u,y,z)$ 与 $y=a(u)$, $z=b(u)$

复合而成的复合函数, 由复合函数的可微性及链式法则, 有

$$\begin{aligned}\psi'(u) &= \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{du} \\ &= \int_y^z \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx + f(z,u)\frac{dz}{du} - f(y,u)\frac{dy}{du},\end{aligned}$$

将 $y = a(u), z = b(u)$ 代入上式就得到

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx + f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u).$$

例 6 设 $I(u)=\int_u^{u^2}\frac{\sin ux}{x}dx$, 求 $I'(u)$.

解 由于 $x=0$ 是 $\frac{\sin ux}{x}$ 的可去间断点, 故 $\frac{\sin ux}{x}$ 对任意 x,u 都是连续的, 且对 u 有连续的偏微商, 故由定理 5 有

$$
\begin{aligned}
I'(u)&=\int_u^{u^2}\cos ux\,dx+2u\frac{\sin u^3}{u^2}-\frac{\sin u^2}{u}\\
&=\frac{\sin ux}{u}\bigg|_u^{u^2}+\frac{2\sin u^3}{u}-\frac{\sin u^2}{u}\\
&=\frac{3\sin u^3-2\sin u^2}{u}.
\end{aligned}
$$

也可以先用变换:

$$I(u)=\int_{u^2}^{u^3}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{u^3}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^{u^2}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

再求导.