2024 微分方程引论期末考试（B 卷，回忆版）*

赵立丰

2025 年 1 月 10 日

1. (25 分)(i) 用分离变量法解波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = (f(x)+1)e^{-t}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l \\ u(0,t) = e^{-t}, u_x(l,t) = 0, t \ge 0 \end{cases}$$

(ii) 证明解的唯一性.

2. (15 分)(柳斌习题 2.5.19) 记 $B^+(R) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0, |x| < R\}$. 求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), x \in B^+(R) \\ u|_{\partial B^+(R)} = g(x) \end{cases}$$

的 Green 函数，并将 u 用 Green 函数表示出来.

3. (15 分)φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支光滑函数，u 是

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

的解.

(i) 用 Fourier 变换解出 u.

(ii) 是否存在正整数 N 和常数 $c > 0$ 满足 $lim_{t\to\infty} t^N |u(t,x)| = c$?

4. (10 分)Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中开集，$u \in C^2(\Omega)$. 若对任意 $B_r(x) \in \Omega$，都有

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

证明：u 是调和函数.

*整理：KosmosX，kosmosx117@gmail.com，侵删.

5. (15 分) 令 $Q_T=(0,l)\times(0,T]$，证明

$$\begin{cases}\partial_t u-\partial_{xx}u-\frac{2}{l-x+1}\partial_x u-\frac{2}{(l-x+1)^2}u=0,0<x<l,t>0\\ u(x,0)=0,0\le x\le l\\ u(0,t)=0,(u_x+u)(l,t)=0,t\ge 0\end{cases}$$

在 $C^{1,2}(Q_T)\bigcap C(\overline{Q_T})$ 上只有零解.

6. (15 分)φ,ψ 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支光滑函数，u 是

$$\begin{cases}\partial_{tt}-\Delta u=0\\ u(x,0)=\varphi(x),\partial_t u(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

(i) 求 u 的 Fourier 变换，并证明存在 $C>0$，满足对任意区间 $I\subset\mathbb{R}$，有

$$||\int_I udt||_{H^2}\le C(||\varphi||_{H^1}+||\psi||_{L^2})$$

其中 $||f||_{H^k}=|||\xi|^k\hat{f}(\xi)||_{L^2}$.

(ii) 我们有等价的定义 $||f||_{H^2}=||\Delta f||_{L^2}$，$||f||_{H^1}=||\nabla f||_{L^2}$. 用能量估计证明 (i) 中结论.

(iii)φ,ψ 具有紧支集 $E=B_R(0)$，求 E 的决定区间和依赖区间.

7. (15 分)Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开集，$x_0\in\partial\Omega$，$u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}\backslash\{x_0\})$ 是

$$\begin{cases}\Delta u=0,x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega\backslash\{x_0\}}=g(x)\\ lim_{x\to x_0}|u(x)|\le M_0\end{cases}$$

的解. 证明：$sup_{x\in\Omega}|u(x)|\le max\{M_0,sup_{x\in\partial\Omega\backslash\{x_0\}}|g(x)|\}$.