

# 数学分析讲义

## 第二册

中国科学技术大学

二〇一九年十一月

# 目 录

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| <b>第 8 章 空间解析几何</b> .....     | <b>1</b>  |
| §8.1 向量与坐标系 .....             | 1         |
| 8.1.1 向量的定义与向量的加法和数乘 .....    | 1         |
| 8.1.2 向量的共线和共面 .....          | 3         |
| 8.1.3 向量的点乘和叉乘 .....          | 4         |
| 8.1.4 向量的坐标表示 .....           | 7         |
| 8.1.5 空间坐标系 .....             | 10        |
| 习题 8.1 .....                  | 12        |
| §8.2 平面与直线 .....              | 15        |
| 8.2.1 平面方程 .....              | 15        |
| 8.2.2 直线方程 .....              | 19        |
| 习题 8.2 .....                  | 22        |
| §8.3 二次曲面 .....               | 27        |
| 习题 8.3 .....                  | 34        |
| §8.4 坐标变换和其它常用坐标系 .....       | 36        |
| 8.4.1 坐标变换 .....              | 36        |
| 8.4.2 其它常用坐标系 .....           | 40        |
| 习题 8.4 .....                  | 41        |
| 第 8 章综合习题 .....               | 43        |
| <b>第 9 章 多变量函数的微分学</b> .....  | <b>45</b> |
| §9.1 多变量函数及其连续性 .....         | 45        |
| 9.1.1 平面上的点集 .....            | 45        |
| 9.1.2 多变量函数 .....             | 48        |
| 9.1.3 多变量函数的极限 .....          | 53        |
| 9.1.4 多变量函数的连续性 .....         | 56        |
| 习题 9.1 .....                  | 59        |
| §9.2 多变量函数的微分 .....           | 62        |
| 9.2.1 多变量函数的偏微商 .....         | 62        |
| 9.2.2 多变量函数的可微性 .....         | 65        |
| 9.2.3 方向导数与梯度 .....           | 68        |
| 9.2.4 复合函数的微分和一阶微分形式不变性 ..... | 70        |
| 9.2.5 向量值函数的微商和微分 .....       | 73        |
| 习题 9.2 .....                  | 77        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| §9.3 隐函数定理和逆映射定理                 | 81         |
| 9.3.1 隐函数的存在性和微商                 | 81         |
| 9.3.2 从微分的角度看隐函数定理               | 87         |
| 9.3.3 逆映射的微商                     | 89         |
| 习题 9.3                           | 91         |
| §9.4 空间曲线与曲面                     | 93         |
| 9.4.1 参数曲线                       | 93         |
| 9.4.2 参数曲面                       | 99         |
| 9.4.3 隐式曲线和隐式曲面                  | 101        |
| 习题 9.4                           | 104        |
| §9.5 多变量函数的 Taylor 公式与极值         | 106        |
| 9.5.1 二元函数的微分中值定理                | 106        |
| 9.5.2 二元函数的 Taylor 公式            | 107        |
| 9.5.3 二元函数的极值                    | 109        |
| 9.5.4 条件极值                       | 113        |
| 习题 9.5                           | 118        |
| §9.6 向量场的微商                      | 121        |
| 9.6.1 向量场                        | 121        |
| 9.6.2 梯度、散度与旋度                   | 122        |
| 9.6.3 Hamilton 算符在柱坐标系和球坐标系中的表示* | 124        |
| 习题 9.6                           | 128        |
| §9.7 微分形式*                       | 130        |
| 9.7.1 微分形式的空间                    | 130        |
| 9.7.2 微分形式的外积                    | 131        |
| 9.7.3 微分形式的外微分                   | 132        |
| 9.7.4 微分形式在高维空间的推广               | 134        |
| 习题 9.7                           | 135        |
| 第 9 章综合习题                        | 135        |
| <b>第 10 章 多变量函数的重积分</b>          | <b>138</b> |
| §10.1 二重积分                       | 138        |
| 10.1.1 平面区域的面积                   | 138        |
| 10.1.2 二重积分的基本概念与性质              | 139        |
| 10.1.3 二重积分的计算                   | 143        |
| 习题 10.1                          | 149        |
| §10.2 二重积分的换元                    | 151        |
| 10.2.1 坐标曲线和面积元素                 | 151        |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| 10.2.2 二重积分的换元            | 153        |
| 习题 10.2                   | 159        |
| §10.3 三重积分                | 161        |
| 10.3.1 三重积分的累次积分          | 161        |
| 10.3.2 三重积分的换元            | 166        |
| 10.3.3 来自物理学中的几个例子*       | 168        |
| 习题 10.3                   | 172        |
| §10.4 $n$ 重积分             | 175        |
| 习题 10.4                   | 178        |
| 第 10 章综合习题                | 178        |
| <b>第 11 章 曲线积分和曲面积分</b>   | <b>180</b> |
| §11.1 数量场在曲线上的积分          | 180        |
| 11.1.1 基本概念               | 180        |
| 11.1.2 数量场在曲线上积分的计算       | 181        |
| 习题 11.1                   | 183        |
| §11.2 数量场在曲面上的积分          | 185        |
| 11.2.1 曲面的面积              | 185        |
| 11.2.2 数量场在曲面上的积分和计算      | 188        |
| 习题 11.2                   | 190        |
| §11.3 向量场在曲线上的积分          | 192        |
| 11.3.1 曲线的定向              | 192        |
| 11.3.2 向量场在曲线上积分的定义和计算    | 193        |
| 11.3.3 Green 定理           | 199        |
| 习题 11.3                   | 205        |
| §11.4 向量场在曲面上的积分          | 207        |
| 11.4.1 双侧曲面及其定向           | 207        |
| 11.4.2 向量场在曲面上积分的定义和计算    | 210        |
| 习题 11.4                   | 217        |
| §11.5 Gauss 定理和 Stokes 定理 | 218        |
| 11.5.1 Gauss 定理           | 218        |
| 11.5.2 Stokes 定理          | 220        |
| 习题 11.5                   | 223        |
| §11.6 其他形式的曲线曲面积分*        | 225        |
| 习题 9.6                    | 230        |
| §11.7 保守场                 | 231        |
| 11.7.1 保守场与势函数            | 231        |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| 11.7.2 无源场与向量势             | 235        |
| 习题 11.7                    | 236        |
| §11.8 微分形式的积分*             | 239        |
| 11.8.1 微分形式的积分             | 239        |
| 11.8.2 全微分方程               | 240        |
| 第 11 章综合习题                 | 242        |
| <b>第 12 章 Fourier 分析</b>   | <b>244</b> |
| §12.1 函数的 Fourier 级数       | 245        |
| 12.1.1 周期函数与三角函数的正交性       | 246        |
| 12.1.2 周期函数的 Fourier 级数    | 248        |
| 12.1.3 有限区间上函数的 Fourier 级数 | 251        |
| 12.1.4 Fourier 级数的复数形式     | 256        |
| 习题 12.1                    | 257        |
| §12.2 平方平均收敛               | 260        |
| 12.2.1 基本概念                | 260        |
| 12.2.2 Bessel 不等式          | 261        |
| 12.2.3 平方平均收敛              | 262        |
| 12.2.4 广义 Fourier 级数       | 264        |
| 习题 12.2                    | 267        |
| §12.3 收敛性定理的证明*            | 269        |
| 12.3.1 Dirichlet 定理的证明     | 269        |
| 12.3.2 平方平均收敛性定理的证明        | 271        |
| 习题 12.3                    | 273        |
| §12.4 Fourier 变换           | 275        |
| 12.4.1 Fourier 积分          | 275        |
| 12.4.2 Fourier 变换          | 276        |
| 习题 12.4                    | 282        |
| 第 12 章综合习题                 | 283        |
| <b>第 13 章 反常积分和含参变量的积分</b> | <b>285</b> |
| §13.1 反常积分                 | 285        |
| 13.1.1 无穷区间上积分的收敛性         | 285        |
| 13.1.2 无穷区间上积分收敛性的一般判别法    | 287        |
| 13.1.3 无界函数积分的收敛判别法        | 291        |
| 习题 13.1                    | 293        |
| §13.2 反常多重积分*              | 295        |
| 习题 13.2                    | 298        |

---

---

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| §13.3 含参变量的积分           | 300 |
| 13.3.1 含参变量的积分及其性质      | 300 |
| 13.3.2 积分限依赖于参变量的积分及其性质 | 302 |
| 习题 13.3                 | 304 |
| §13.4 含参变量的反常积分         | 306 |
| 13.4.1 含参变量的反常积分的一致收敛性  | 306 |
| 13.4.2 含参变量反常积分的性质      | 309 |
| 13.4.3 几个重要的积分          | 312 |
| 习题 13.4                 | 316 |
| §13.5 Euler 积分          | 318 |
| 13.5.1 $\Gamma$ 函数的性质   | 318 |
| 13.5.2 $B$ 函数的性质        | 320 |
| 习题 13.5                 | 324 |
| 第 13 章综合习题              | 326 |

## 第 8 章 空间解析几何

作为多变量微积分的预备知识, 本章讲述空间解析几何的基本内容. 通过引进向量运算和坐标系, 使得我们得以用代数的方法来解决一些几何问题.

这里假设读者了解空间的一些基本几何结构和概念. 例如空间中的点、线、面等几何对象、它们之间的关系以及线段的长度或两点之间的距离等等, 因此我们不再赘述.

### §8.1 向量与坐标系

自然界的许多对象, 如长度、面积、温度、功等, 在确定一个度量单位后, 可以用实数表示, 这类只有大小的量称为**数量**. 但是有些量不仅有大小, 还有方向, 例如位移、力、力矩、速度、加速度等等. 这些量正是我们要讨论的**向量**.

#### 8.1.1 向量的定义与向量的加法和数乘

**定义 8.1** 空间中既有大小(长度)又有方向的量称为**向量**, 记为  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ . 向量  $\mathbf{a}$  的大小(长度)是一个非负实数, 记为  $|\mathbf{a}|$ . 两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ , 只要大小相等, 方向相同, 就称两者相等  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

特别, 大小为 0 的向量称为**零向量**, 记为  $\mathbf{0}$  (通常在不至于混淆时简单记为“0”), 零向量没有确定的方向. 与向量  $\mathbf{a}$  大小相等, 但方向相反的向量记为  $-\mathbf{a}$  称为  $\mathbf{a}$  的**负向量**(或**反向量**).

根据向量有大小和方向的特征, 可以用有向线段来表示一个向量. 设  $\overline{AB}$  为连接  $A, B$  两点的线段, 它的长度等于向量  $\mathbf{a}$  的大小, 从点  $A$  指向点  $B$  的方向与向量  $\mathbf{a}$  的方向相同, 我们就可以用  $\overrightarrow{AB}$  表示向量  $\mathbf{a}$ , 记为  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ , 因此  $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$ .

空间中有向线段的**平移**是指不改变线段的长度和方向的运动. 因此向量的有向线段表示实际上与有向线段的起点无关. 如果  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{A'B'}$  通过平移使之起点和终点分别重合, 则它们代表了同一个向量, 或者说两者相等  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ . 因此, 取定一个固定点  $O$ , 那么任一向量  $\mathbf{a}$  通过平移, 与一个起点为  $O$ , 终点为  $A$  的向量重合  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ .

设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是两个向量, 用同一起点  $O$  的有向线段表示它们:  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ , 则以  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  为邻边的平行四边形的对角线向量  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  就称为这两个向量的和, 记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

或简写成

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

这种求和的方法称为**平行四边形法则**(图 8.1).

两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的加法也可以用三角形法则 (图 8.2). 设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ , 以  $\mathbf{a}$  的终点  $A$  为起点, 做一有向线段使其等于  $\mathbf{b}$ :  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ , 则以  $O$  为起点,  $B$  为终点的向量  $\overrightarrow{OB}$  就是  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

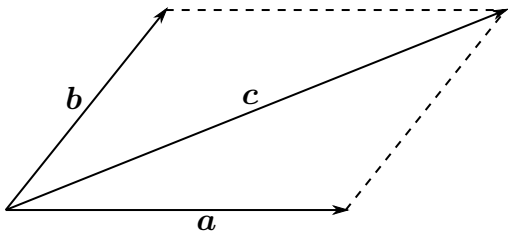


图 8.1

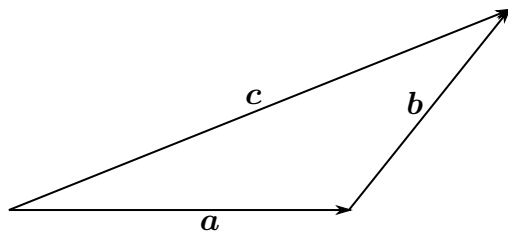


图 8.2

两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  相减的定义如下

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ , 则  $-\mathbf{b} = \overrightarrow{BO}$ , 因此

$$\overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$$

**性质 1** 向量加法满足如下性质:

- 1°  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ , (交换律)
- 2°  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ . (结合律)
- 3°  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

**证明** 从向量求和的平行四边形法则容易看出交换律成立. 而用三角形法则较易证明结合律 (图 8.3). 设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$ , 则  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ , 所以

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

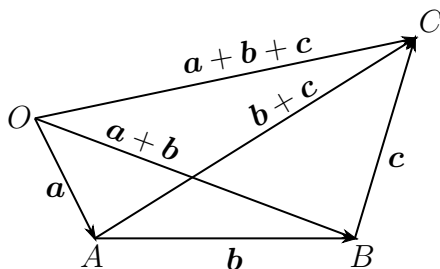


图 8.3

向量的另一个基本运算是数与向量的乘法, 称为向量的数乘. 设  $\lambda$  是一个实数,  $\lambda$  与向量  $\mathbf{a}$  相乘是一个向量, 记为  $\lambda\mathbf{a}$ , 它的长度等于  $|\lambda||\mathbf{a}|$ , 当  $\lambda > 0$  时  $\lambda\mathbf{a}$  的方向与  $\mathbf{a}$  相同, 当  $\lambda < 0$  时  $\lambda\mathbf{a}$  的方向与  $\mathbf{a}$  相反; 特别, 实数 0 乘以任意向量等于零向量,  $-1$  乘以向量  $\mathbf{a}$  等于它的负向量  $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ . 简单地说,  $\lambda\mathbf{a}$  就是把  $\mathbf{a}$  的长度伸缩  $|\lambda|$  倍, 当  $\lambda < 0$  时就表示反转  $\mathbf{a}$  的方向.

称大小等于 1 的向量为单位向量. 对于任何一个非零向量  $\mathbf{a}$ , 记同向的单位向量



$e_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ , 它可以用来表示  $\mathbf{a}$  的方向. 显然等式

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|e_a$$

将向量  $\mathbf{a}$  明确地分解为大小和方向两部分.

**性质 2** 设  $\lambda, \mu$  是实数,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是向量, 则

$$1^\circ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

$$2^\circ (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a},$$

$$3^\circ (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}).$$

以下定理来自三角形的基本性质: 两边之和大于第三边.

**定理 8.2** 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是两个向量, 则

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

等号成立当且仅当存在非负实数  $\lambda$  满足  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ .

### 8.1.2 向量的共线和共面

**定义 8.3** 一组向量, 如果通过平移使它们同处一条直线上, 那么称它们是共线的. 共线的两个非零向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  也称为是相互平行的, 用  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  表示.

一组向量, 如果通过平移使它们同处一个平面上, 那么称它们是共面的.

显然, 零向量与任意一个向量共线; 共线的向量的方向要么相同, 要么相反; 共线的向量也是共面的; 任何两个向量一定是共面. “共线”和“共面”有下列代数表示.

**定理 8.4**

1° 两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  共线, 当且仅当存在不全为零的实数  $\lambda, \mu$ , 使得

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

2° 三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面, 当且仅当存在三个不全为零的实数  $\lambda, \mu, \nu$ , 使得

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

上述两个(三个)向量的共线(共面)等价的代数表示, 称为向量的“线性相关”. 因此向量共线或共面等价于向量线性相关.

**证明** 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  共线且至少有一个不是零向量, 不妨设  $|\mathbf{a}| \neq 0$ . 因此两者的方向要么相同, 要么相反. 因此有

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}, \quad k = \pm \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

反之, 如果存在不全为零的实数  $\lambda, \mu$ , 不妨设  $\mu \neq 0$ , 因此由等式  $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = 0$  就可得到  $\mathbf{b} = -\frac{\lambda}{\mu} \mathbf{a}$ , 即两者共线.

设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面. 若其中有两个共线, 不妨设  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  共线, 由 1° 知, 存在不全为零的实数  $\lambda, \mu$  使得  $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = 0$ . 取  $\nu = 0$ , 则  $\lambda, \mu, \nu$  仍然不全为零, 且  $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = 0$ .

若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  中任何两个都不共线 (因此, 都是非零向量), 记  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ , 过  $\overrightarrow{OC}$  的终点  $C$  分别作平行于  $\overrightarrow{OB}$  的直线交  $\overrightarrow{OA}$  所在直线于  $A'$ ; 作平行于  $\overrightarrow{OA}$  的直线交  $\overrightarrow{OB}$  所在直线于  $B'$ ; 因此

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

因为  $\overrightarrow{OA'}$  与  $\overrightarrow{OA}$  共线, 所以存在  $k$  使得  $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ . 同理, 因为  $\overrightarrow{OB'}$  与  $\overrightarrow{OB}$  共线, 所以存在  $l$  使得  $\overrightarrow{OB'} = l\overrightarrow{OB}$ . 综上所述, 有  $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ .

反之, 设  $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = 0$  且  $\lambda, \mu, \nu$  不全为零. 不妨设  $\nu \neq 0$ , 因此  $\mathbf{c} = -\frac{\lambda}{\nu} \mathbf{a} - \frac{\mu}{\nu} \mathbf{b}$ , 即  $\mathbf{c}$  在  $-\frac{\lambda}{\nu} \mathbf{a}$  和  $-\frac{\mu}{\nu} \mathbf{b}$  形成的四边形的对角线上, 因此  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面.  $\square$

### 8.1.3 向量的点乘和叉乘

设  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  是两个向量, 它们的夹角定义为  $\theta = \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\theta$  的取值范围规定为 0 到  $\pi$ . 显然  $\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ , 且对于任意非 0 实数  $\lambda$ ,

$$\theta(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{若 } \lambda > 0, \\ \pi - \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{若 } \lambda < 0. \end{cases}$$

**定义 8.5** 两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的点乘  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  是一个实数, 定义为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

若其中一个向量是零向量, 则点乘规定为 0. 点乘也称作向量的内积或数量积.

从定义直接看出  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ , 当且仅当  $\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \frac{\pi}{2}$ .  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 当且仅当  $\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$ , 此时两个向量称为相互正交 (或垂直), 记为  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

从几何上看 (图 8.4),  $|\mathbf{a}| \cos \theta$  是向量  $\mathbf{a}$  在向量  $\mathbf{b}$  所在的直线上 (简称在  $\mathbf{b}$  上) 的投影向量的有向长度, 当夹角  $\theta$  是锐角时, 投影向量的方向与  $\mathbf{b}$  一致; 当夹角  $\theta$  是钝角时, 投影向量的方向与  $\mathbf{b}$  相反. 记  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  上的投影向量为  $\mathbf{a}_b$ , 则

$$\mathbf{a}_b = |\mathbf{a}| \cos \theta \mathbf{e}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b,$$

这里  $\mathbf{e}_b = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$  是  $\mathbf{b}$  的单位向量. 如同力的分解, 向量  $\mathbf{a}$  可以 (唯一) 分解为在  $\mathbf{b}$  上的

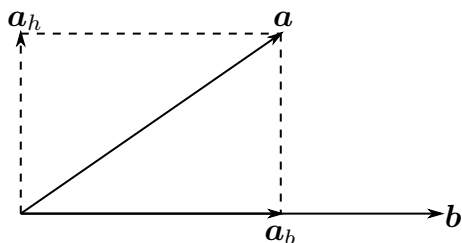


图 8.4

投影向量  $\mathbf{a}_b$  和一个与  $\mathbf{b}$  垂直的向量  $\mathbf{a}_h$  之和

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_h.$$

因此  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  是  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  方向上的投影向量的有向长度乘以  $\mathbf{b}$  的长度, 或者说是  $\mathbf{a}$  的投影向量与  $\mathbf{b}$  的点乘 (与  $\mathbf{b}$  垂直方向的分量  $\mathbf{a}_h$  对点乘没有贡献)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_b \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

从物理上看, 外力  $\mathbf{a}$  作用在物体上所做的功就是  $\mathbf{a}$  在位移  $\mathbf{b}$  方向上分力  $\mathbf{a}_b$  乘以位移的大小  $|\mathbf{b}|$ :  $W = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . 与位移方向垂直的分力, 对做功没有贡献.

**性质 3** 点乘满足下列代数性质.

1°  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ . (交换律)

2°  $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , 这里  $\lambda$  是任意实数. (结合律)

3°  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ . (分配律)

**证明** 1° 的证明是显然的. 在 2° 的证明中, 设  $\lambda \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= |\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \lambda > 0 \\ -\lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi - \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b})), & \lambda < 0 \end{cases} \\ &= \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

关于 3° 的力学含义是, 作用在同一物体上两个力所做的功等于合力所做的功 (图 8.5). 具体证明如下: 不妨设  $\mathbf{c}$  是单位向量  $|\mathbf{c}| = 1$ . 因此  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  以及  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  在  $\mathbf{c}$  上的投影向量满足

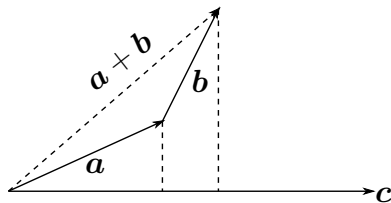


图 8.5

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_c = \mathbf{a}_c + \mathbf{b}_c,$$

所以

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})_c \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}_c + \mathbf{b}_c) \cdot \mathbf{c} \\ &= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

这样就完成了该性质的证明. □

向量的另一个重要运算称为向量的叉乘. 为此我们先引进“右手系”的概念.

设  $\{a, b, c\}$  是三个不共面向量构成的有序向量组, 并有同一个起点. 前两个向量  $a, b$  就决定了一个平面, 而  $c$  的方向指向平面的某一侧. 当右手四指顺着平面, 按照从  $a$  到  $b$  转动时, 如果右手拇指与  $c$  都指向平面的同一侧, 那么称  $\{a, b, c\}$  为右手系, 否则称为左手系. 容易看出, 如果  $\{a, b, c\}$  是右手系, 那么  $\{b, c, a\}$  和  $\{c, a, b\}$  仍是右手系. 但是  $\{b, a, c\}$  和  $\{a, b, -c\}$  都是左手系.

**定义 8.6** 两个向量  $a$  和  $b$  的叉乘是一个向量, 记为  $a \times b$ , 它的大小规定为以  $a, b$  为邻边的平行四边形的面积

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta(a, b),$$

它的方向规定为:  $a \times b$  与  $a$  和  $b$  垂直, 且向量组  $\{a, b, a \times b\}$  构成右手系 (图 8.6). 若  $a$  和  $b$  中有一个是零向量, 则两者的叉乘规定为零向量. 叉乘也称作外积或向量积.

显然, 如果两个向量平行, 那么它们的叉乘等于零向量.

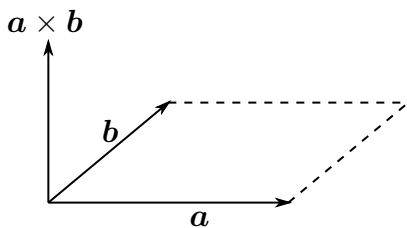


图 8.6

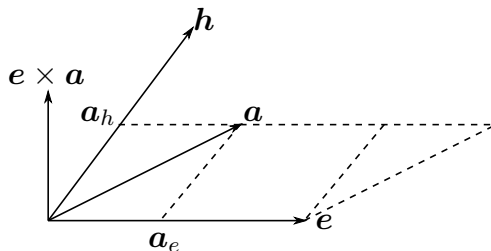


图 8.7

设  $e$  是一个单位向量,  $h$  是  $e$  与向量  $a$  所在平面上与  $e$  垂直的向量 (图 8.7). 把向量  $a$  分解为在  $e$  上的投影向量  $a_e$  和在  $h$  上的投影向量  $a_h$  之和  $a = a_e + a_h$ , 容易看出以  $e$  与  $a$  为邻边的平行四边形面积等于以  $e$  与  $a_h$  为邻边的矩形面积, 而且  $e \times a$  与  $e \times a_h$  的指向相同, 所以

$$e \times a = e \times a_h.$$

直观的说,  $e \times a$  就是将向量  $a_h$  绕  $e$  按右手法则旋转 (简称右旋)  $\frac{\pi}{2}$ . 从上述分析还可看出, 在  $e$  和  $a$  的叉乘中,  $a$  在  $e$  上的投影向量没有贡献.

叉乘的力学含义如下: 设  $O$  是物体上一个固定点, 并假设力  $a$  作用于物体上另一个点  $P$ , 则  $a$  可使物体沿通过  $O$  点的轴旋转, 旋转轴垂直于向量  $\overrightarrow{OP}$  和  $a$  组成的平面. 则向量  $c = \overrightarrow{OP} \times a$  称为力矩. 它指向旋转轴的方向并且大小为  $|\overrightarrow{OP}| \cdot |a| \sin \theta$  (图 8.8).

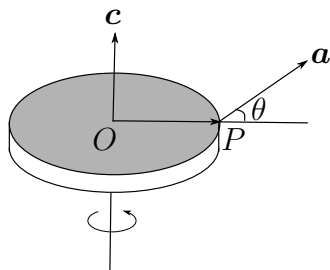


图 8.8

**注记:**  $a \times b$  的大小正是以  $a, b$  为邻边的平行四边形的面积, 而平行四边形所在

平面上的任何一个向量  $c$  (即与  $a, b$  共面) 可以表示为  $c = \lambda a + \mu b$ , 因此也与  $a \times b$  垂直, 所以称  $a \times b$  为  $a, b$  所在平面的一个法向量.

向量的叉乘运算满足如下性质:

#### 性质 4

1°  $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$ , 这里  $\lambda$  是一个实数.

2°  $a \times b = -b \times a$ , (反称性)

3°  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ . (分配律)

**证明** 1° 和 2° 可以利用定义直接验证, 我们只证明 3°. 若  $a = e$  是单位向量. 由于  $(b + c)_h = b_h + c_h$ , 而按叉乘的几何意义  $e \times b_h$ ,  $e \times c_h$  和  $e \times (b + c)_h$  分别是将向量  $b_h$ ,  $c_h$  和  $(b + c)_h$  绕  $e$  右旋  $\frac{\pi}{2}$ , 且右旋保持向量加法, 所以

$$e \times (b + c)_h = e \times (b_h + c_h) = e \times b_h + e \times c_h.$$

对于一般向量  $a$ , 有  $a = |a|e$ , 其中  $e$  是单位向量. 首先利用 1°, 再按上述证明即可知 3° 对一般向量  $a$  也成立.  $\square$

**性质 5** 称  $(a \times b) \cdot c$  为三个向量  $a, b, c$  的混合积, 则  $a, b, c$  的混合积的绝对值是以  $a, b, c$  为棱的平行六面体的体积.

**证明** 以  $a, b, c$  为棱的平行六面体 (图 8.9) 是指: 将向量表示为同一起点的有向线段时, 以三个有向线段为棱的平行六面体. 它的底面积  $S$  等于  $|a \times b|$ , 高  $h$  等于向量  $c$

在底面单位法向  $\frac{a \times b}{|a \times b|}$  上投影向量的长度, 即

$$h = \frac{|c \cdot (a \times b)|}{|a \times b|},$$

所以体积

$$V = S \cdot h = |a \times b \cdot c|.$$

需要指出的是, 数  $a \times b \cdot c$  的正负取决于向量  $a \times b$  与  $c$  的夹角, 当有序向量组  $\{a, b, c\}$  是右手系时, 夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ , 因此  $a \times b \cdot c > 0$ , 当  $\{a, b, c\}$  是左手系时, 夹角大于  $\frac{\pi}{2}$ , 所以  $a \times b \cdot c < 0$ .

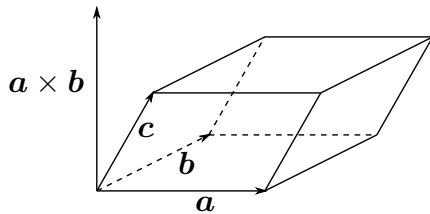


图 8.9

#### 8.1.4 向量的坐标表示

考虑空间向量全体构成的集合  $V$ , 在  $V$  中我们定义了向量的加法和数乘并证明了有关性质. 因此  $V$  是一个向量空间 (也称为“线性空间”, 详情将在《线性代数》中讨论).  $V$  中三个不共面的向量组  $\{a, b, c\}$  称为  $V$  的一组“基向量”, 简称为基.

**性质 6** 设向量组  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  是  $V$  中的一组基向量, 则  $V$  中的任一向量  $\mathbf{x}$  都可以唯一的表示为基向量  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  的线性组合

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c}$$

这里系数  $(x_1, x_2, x_3)$  称为向量  $\mathbf{x}$  在基  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  下的坐标.

**证明** 首先分以下两种情况进行讨论.

若  $\mathbf{x}$  与  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  中任意两个向量共面, 不妨设  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  共面, 则由定理 8.4 知, 存在不全为 0 的一组实数  $\lambda, \mu, \nu$  使得  $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ . 因为  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  不可能共线 (否则  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面), 因此  $\lambda \neq 0$ , 这样  $\mathbf{x}$  就可以表示成  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  (当然也是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ) 的线性组合.

若  $\mathbf{x}$  与  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  中任意两个向量都不共面, 不妨设  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ . 过  $P$  点做平行  $\overrightarrow{OA}$  的平行线, 交  $\overrightarrow{OB}$  和  $\overrightarrow{OC}$  所在平面于  $P'$  点. 一方面  $\overrightarrow{OP'}$  与  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  共面, 所以存在不全为零实数  $x_2, x_3$  使得  $\overrightarrow{OP'} = x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c}$ . 另一方面  $\overrightarrow{P'P}$  与  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  平行, 也就是共线, 因此存在实数  $x_1$  使得  $\overrightarrow{P'P} = x_1\mathbf{a}$ . 最终得

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c}.$$

假如存在另外一组坐标  $x'_1, x'_2, x'_3$ , 使得  $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{a} + x'_2\mathbf{b} + x'_3\mathbf{c}$ , 那么

$$(x_1 - x'_1)\mathbf{a} + (x_2 - x'_2)\mathbf{b} + (x_3 - x'_3)\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

由于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  不共面, 所以由定理 8.4 知  $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$ , 即坐标是唯一的.  $\square$

通过  $V$  中的一组基, 我们就建立了  $V$  中向量  $\mathbf{x}$  与坐标之间的一一对应关系. 因此可以把向量记为

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c} = (x_1, x_2, x_3)$$

这样关于向量的加法、数乘等运算, 就可以对应成坐标的运算. 例如设向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的坐标分别是  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ , 容易验证  $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}$  对应的的坐标分别是  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$  和  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ .

然而, 在计算向量的长度, 角度, 点乘和叉乘时, 若采用一般的基, 会使计算变得十分复杂. 为此, 我们取满足下列条件的向量组  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

1°  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是两两正交 (当然不共面) 的单位向量, 即它们满足  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , 这里  $\delta_{ij} = 1$ , 当  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$ , 当  $i \neq j$ .

2°  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  构成右手系, 即它们的混合积满足  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ .

并称为  $V$  的**标准正交基**. 可以证明  $V$  中的标准正交基是存在的. 以下均假定向量的坐标是在取定的一组标准正交基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  下的坐标. 因此我们有以下一系列结论.

任何一个向量  $\mathbf{x}$  在标准正交基下的坐标正是  $\mathbf{x}$  分别向基向量的投影

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

设向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的点乘可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

向量的长度和两向量的夹角为

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}| &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \\ \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \arccos\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right).\end{aligned}$$

对于叉乘, 注意到构成基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  的基向量, 不但是单位向量、相互正交, 而且还构成右手系. 因此基向量之间的叉乘满足

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

利用叉乘的分配律和反称性, 得到一般两个向量之间的叉乘

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

上式最后一个等式是一个形式的 3 阶行列式表示. 如果写成向量的坐标表示, 就有

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).\end{aligned}$$

如果再设  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , 那么不难计算, 三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的混合积为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

上式也是 3 阶行列式的几何解释. 即 3 阶行列式是一个以每一行为坐标的三个向量构成的平行六面体的体积. 行列式为正, 则三个向量形成右手系, 反之为左手系.

**例 8.1.1** 设  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$  是两个平面向量, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$  是  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  生成平行四边形的面积, 因此行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$  表示平行四边形的有向面积: 当行列式为正, 从向量  $\mathbf{a}$  往向量  $\mathbf{b}$  的旋转和  $\mathbf{e}_1$  往  $\mathbf{e}_2$  的旋转同向, 面积定义为正; 当行列式为负, 从向量  $\mathbf{a}$  往向量  $\mathbf{b}$  的旋转和  $\mathbf{e}_1$  往  $\mathbf{e}_2$  的旋转反向, 此时面积定义为负.

**例 8.1.2** 已知  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  是单位向量, 它们的夹角  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 求向量  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  与  $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$  夹角  $\phi$  的余弦.

**解** 由  $\cos \phi = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \cdot |3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|}$  直接计算得

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 1 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 1 = 1,$$

$$|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 = (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 9 + 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4 = 19,$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 3 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - 2 = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\cos \phi = \frac{1}{2\sqrt{19}}.$$

**例 8.1.3** 证明 Cauchy 不等式

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

等号成立当且仅当存在实数  $\lambda$  满足  $a_i = \lambda b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**证明** 设向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , 则 Cauchy 不等式等价于

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta)^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

而且, 等号成立当且仅当  $\cos \theta = \pm 1$ , 即  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线.

### 8.1.5 空间坐标系

如果在空间中取定一点  $O$ , 那么空间的任意一点  $P$  对应一个向量  $\overrightarrow{OP}$ , 称为点  $P$  的 **位置向量**. 这样就建立了空间中点与向量空间  $\mathbf{V}$  中的向量之间的一一对应, 如果再取定  $\mathbf{V}$  中一组标准正交基  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , 那么就建立了空间中点与向量的坐标之间的对应.

$$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \longleftrightarrow (x, y, z)$$

称点  $O$  与  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  为空间的 **直角坐标系**, 记为  $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ .  $O$  称为 **原点**,  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  称为 **坐标向量**. 三元数组  $(x, y, z)$  既称为  $P$  点的坐标, 记为  $P(x, y, z)$ , 也可以表示位置向量

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(P) = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z).$$

特别, 原点的坐标为  $O(0, 0, 0)$ , 坐标向量为  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .



过原点与  $i$  平行的直线称为  $x$  轴,  $i$  的指向为  $x$  轴的正向. 同理定义  $y$  轴,  $z$  轴以及它们各自的正向, 三者统称空间的坐标轴. 通常也用  $Oxyz$  表示空间直角坐标系.  $x$  轴和  $y$  轴所在平面称  $Oxy$  平面, 类似地有  $Oyz$  和  $Ozx$  平面. 三个坐标平面将空间分割为互不相交的 8 个区域, 这些区域称为卦限.

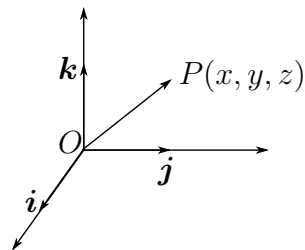


图 8.10

记三元数组全体为

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

通过坐标系  $[O; i, j, k]$ , 向量空间  $V$  与  $\mathbb{R}^3$  一一对应, 因此有时也将向量空间记为  $\mathbb{R}^3$ .

空间中有了原点, 任意一点又有了坐标, 就不难计算两个点之间的距离.

设  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$  是空间中两个点, 它们之间的距离  $|PQ|$  等于向量  $\overrightarrow{PQ}$  的长度, 因为

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

所以

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别, 原点  $O$  到点  $P(x, y, z)$  的距离为

$$|OP| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

而  $P(x, y, z)$  点的方向 (即  $\overrightarrow{OP}$  的方向) 可以由  $\overrightarrow{OP}$  与三个坐标轴的夹角 (称为向量  $\overrightarrow{OP}$  的方向角)  $\alpha, \beta, \gamma$  来刻画, 因此

$$x = |\overrightarrow{OP}| \cos \alpha, \quad y = |\overrightarrow{OP}| \cos \beta, \quad z = |\overrightarrow{OP}| \cos \gamma.$$

称方向角的余弦  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为该向量  $\overrightarrow{OP}$  的方向余弦. 不难验证, 方向余弦满足

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

因此  $\overrightarrow{OP}$  的方向余弦构成了一个单位向量  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 它指明了  $P$  点的方向.

**例 8.1.4** 设  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  是平面上两点, 线段  $\overline{AB}$  上的点  $P(x, y, z)$  将线段分成定比  $\lambda$ , 即  $\frac{|AP|}{|PB|} = \lambda$ , 求  $P$  点的坐标.

**解** 已知  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ , 即

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \lambda(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}).$$

用坐标表出, 得

$$(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) = \lambda(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

解得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

特别, 当  $\lambda = 1$  时,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

是  $A, B$  中点的坐标.

**例 8.1.5** 已知三角形的顶点  $A(1, 2, 3), B(3, 4, 5), C(-1, -2, 7)$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

**解** 设所求三角形的面积为  $S$ , 则由向量积的定义可知

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

但

$$\vec{AB} = (2, 2, 2), \quad \vec{AC} = (-2, -4, 4),$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 16\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \end{aligned}$$

所以

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{26}.$$

### 习题 8.1

1. 证明性质 2.
2. 证明性质 4 的 (1) 和 (2).
3. 判断下列结论是否成立, 并举例说明:
  - (1) 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 则  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .
  - (2) 若  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , 则必有  $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ .
  - (3) 两单位向量的数量积必等于 1, 向量积必等于一单位向量.

$$(4) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

$$(5) |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2.$$

$$(6) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{b}.$$

4. 证明  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

5. 设  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ , 证明: 对任意一点  $O$ ,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

6. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是满足  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$  的单位向量, 试求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$  的值.

7. 若向量  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  垂直于向量  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ , 向量  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  垂直于向量  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ , 求两向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  间的夹角.

8. 已知向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  互相垂直, 且  $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$ , 试计算:

$$(1) |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|;$$

$$(2) |(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})|.$$

9. 已知向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , 又  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ , 试计算:

$$(1) |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2; \quad (2) |(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2.$$

10. 已知  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , 试证

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

11. 已知  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  不共线, 且  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ , 求证:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

12. 求证:  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ .

13. 计算以向量  $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} - 3\mathbf{r}$ , 和  $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}$  为棱的平行六面体的体积, 这里  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  和  $\mathbf{r}$  是互相垂直的单位向量.

14. 已知  $\mathbf{a} = (3, -5, 8), \mathbf{b} = (-1, 1, -4)$ , 求  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  的模和方向余弦.

15. 已知  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ , 求  $\mathbf{a}$  方向的单位向量  $\mathbf{a}^0$  的坐标.

16. 已知  $xy$  平面的向量  $\mathbf{a}$  与  $x$  轴和  $y$  轴所夹的角分别是  $\mathbf{a} = 60^\circ, \mathbf{b} = 120^\circ$ , 且  $|\mathbf{a}| = 2$ , 试求  $\mathbf{a}$  的坐标.

17. 已知  $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \overrightarrow{OC} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ , 问  $A, B, C$  三点是否共线?

18. 已知  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , 且  $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$ , 计算:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \quad (2) (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}).$$

19. 已知  $\mathbf{a} = (4, -2, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$ , 试计算:

(1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ; (2)  $\sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$ ;  
(3)  $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ ; (4)  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$ .

20. 求向量  $\mathbf{a} = (2, -4, 4)$  和  $\mathbf{b} = (-3, 2, 6)$  的夹角的余弦.

21. 试求向量  $\mathbf{a} = (5, 2, 5)$  在向量  $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$  上的投影长, 即求数值  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b$ .

22. 已知向量  $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$  和  $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$ , 试求下列向量积的坐标:

(1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ; (2)  $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

23. 已知点  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, -3)$ ,  $C(5, 2, 6)$ , 求三角形  $ABC$  的面积.

24. 计算顶点为  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(5, 5, 4)$ ,  $C(3, 2, -1)$ ,  $D(4, 1, 3)$  的四面体的体积.

25. 判断下列向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是否共面?

(1)  $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 9, -11)$ ;  
(2)  $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$ ,  $\mathbf{c} = (3, -1, -2)$ .

26. 下列四点:  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 5)$ ,  $C(-1, 2, 1)$ ,  $D(2, 1, 3)$  是否在一个平面上?

27. (1) 给定点  $A(a, b, c)$ , 求它关于三个坐标平面对称点的坐标;

(2) 求定点  $(a, b, c)$  关于三个坐标轴对称点的坐标.

28. 求点  $P(4, -3, 5)$  到坐标原点以及到各坐标轴的距离.

29. 在  $yz$  平面上求一点  $P$ , 使它与三已知点  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -2, -2)$  及  $C(0, 5, 1)$  等距离.

## §8.2 平面与直线

上节我们建立了空间直角坐标系, 有了坐标系, 空间中的几何“实体”可以代数化. 首先我们讨论平面和直线的代数表示.

### 8.2.1 平面方程

几何上看, 确定空间中一个平面有两种方法, 一是过一定点并垂直一个确定方向, 二是过给定的不在一条直线上的三点. 下面我们将分别给出两种情况下平面的代数表示.

1° **平面的一般方程** 设平面过给定点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 并与向量  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  垂直. 称这个与平面垂直的方向称为**法向**, 表示法向的向量称为**法向量**. 显然, 与平面垂直、方向相反的两个向量都是法向量.

对平面上任意一点  $P(x, y, z)$ , 则  $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$ , 也就是  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$  或者

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

其中  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$  分别是  $P$  和  $P_0$  的位置向量. 注意到  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 因此平面上任意一点  $P(x, y, z)$  的坐标满足下列三元一次方程

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

或

$$ax + by + cz + d = 0,$$

其中  $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$  是一个已知数. 反之, 以满足上述方程的数组  $(x, y, z)$  为坐标的点一定在平面上.

称上述方程为**平面的一般方程**. 这样我们就把平面“过一定点并垂直一个确定方向”的几何描述, 转化为平面上任意一点的坐标必须满足的代数方程. 今后, 我们用一个三元一次方程表示平面, 变量  $x, y, z$  的系数  $(a, b, c)$  对应的向量即是平面的法向量.

平面方程的一些特殊情形是值得关注的.

(1)  $d = 0$ , 方程退化为  $ax + by + cz = 0$ , 因此  $(0, 0, 0)$  满足方程, 即平面过原点.

(2)  $c = 0$ , 此时法向量  $\mathbf{n} = (a, b, 0)$  垂直于  $z$  轴, 所以方程  $ax + by + d = 0$  表示平行于  $z$  轴的平面. 同理, 方程  $ax + az + d = 0$  与  $by + cz + d = 0$  所表示的平面就分别平行于  $y$  轴与  $x$  轴.

(3)  $a = b = 0$ , 此时法向量  $\mathbf{n} = (0, 0, c)$  平行于  $z$  轴, 所以方程  $cz + d = 0$  或者  $z = -\frac{d}{c}$  表示过点  $(0, 0, -\frac{d}{c})$  且平行于  $Oxy$  平面的平面. 同理, 方程  $x = d$  表示过点  $(d, 0, 0)$  且平行于  $Oyz$  的平面, 方程  $y = d$  表示过点  $(0, d, 0)$  且平行于  $Ozx$  的平面.

2° **三点决定的平面** 设平面过给定的三个点  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ , 因为  $\overrightarrow{P_1P_2}$  与  $\overrightarrow{P_1P_3}$  在平面上, 所以向量  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$  就是这平面的一个法向量, 对于平面上任意一点  $P(x, y, z)$ , 有

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0,$$

因此  $(x, y, z)$  满足平面的一般方程由下列行列式给出

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

特别, 对于过三个坐标轴上的三点  $(\alpha, 0, 0), (0, \beta, 0), (0, 0, \gamma)$ , 则方程为

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & y & z \\ -\alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

上述方程化简为

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

并称为平面的截距式方程, 而  $\alpha, \beta, \gamma$  分别称为平面在  $x$  轴,  $y$  轴与  $z$  轴上的截距.

**例 8.2.1** 求通过点  $P_0(3, 2, 1)$  及  $x$  轴的平面方程.

**解** 因所求平面通过  $x$  轴, 故可设这平面的方程为

$$by + cz = 0.$$

又平面过点  $P_0(3, 2, 1)$ , 所以它的坐标应满足这个方程, 即有

$$2b + c = 0$$

或  $c = -2b$ . 取  $b = 1, c = -2$  即得所求平面的方程为

$$y - 2z = 0.$$

3° **两平面的关系** 设有两平面

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

它们的法向量分别是  $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  和  $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ . 两平面的位置关系可以分为如下两种情形:

(1) 两平面平行: 即  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ , 因此存在非 0 常数  $\lambda$ , 使得  $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2$ , 或者  $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2$ . 如果再有  $d_1 = \lambda d_2$ , 那么两平面重合.

(2) 两平面相交: 定义两平面法向量  $\mathbf{n}_1$  与  $\mathbf{n}_2$  的夹角  $\theta$  为两平面相交所成的二面角, 则二面角的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

特别当  $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$ , 即  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ , 平面  $\pi_1$  与  $\pi_2$  垂直.

**例 8.2.2** 求通过  $z$  轴且与平面  $x - 2y + 5 = 0$  垂直的平面.

**解** 通过  $z$  轴的平面方程可设为

$$Ax + By = 0,$$

这平面与已给的平面  $x - 2y + 5 = 0$  垂直, 故有

$$A - 2B = 0,$$

或  $A = 2B$ . 代入所设的平面方程并消去  $B$ , 就得到

$$2x + y = 0.$$

它即是所求的平面方程.

**例 8.2.3** 求通过点  $P_1(8, -3, 1)$  与  $P_2(4, 7, 2)$  且垂直于平面  $\pi: 3x + 5y - 7z + 21 = 0$  的平面方程.

**解** 所求平面的法向量  $\mathbf{n}$  应垂直于向量  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  及平面  $\pi$  的法向量  $\mathbf{n}_1 = (3, 5, -7)$ , 因此可取

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 25(3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}),$$

故所求平面的方程为

$$3(x - 8) + (y + 3) + 2(z - 1) = 0,$$

即

$$3x + y + 2z - 23 = 0.$$

**例 8.2.4** 求两相交的平面  $x - y + z = 0$  与  $x + y - z = 0$  的夹角.

解 所给两平面的法向量是

$$\mathbf{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \mathbf{n}_2 = (1, 1, -1),$$

故其夹角  $\theta$  的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = -\frac{1}{3},$$

从而求得  $\theta = \pi - \arccos \frac{1}{3}$ .

注意, 如果将法向量  $\mathbf{n}_1$  取成它的负向量, 这时  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ , 而  $\theta = \arccos \frac{1}{3}$ , 依定义, 它仍是两平面的夹角.

4° 点到平面的距离 给定平面

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

以及平面外一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . 过点  $P_0$  作平面  $\pi$  的垂线, 记垂足为  $P_1$ , 于是  $|P_0P_1|$  即为欲求的距离. 若在平面  $\pi$  上任取一点  $P(x, y, z)$ , 并设向量  $\overrightarrow{PP_0}$  与平面  $\pi$  的法向量  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  的夹角为  $\theta$ , 则有

$$\begin{aligned} |P_0P_1| &= |PP_0| \cos \theta = \left| \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \overrightarrow{PP_0} \right| \\ &= \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

因为  $P(x, y, z)$  在  $\pi$  上, 所以  $ax + by + cz = -d$ . 于是求得点  $P_0$  到平面  $\pi$  的距离为

$$|P_0P_1| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

上式的分子相当于把  $P_0$  的坐标代入平面方程.

空间的一张平面  $\pi$ , 实际上把空间分成三个部分: “上”半部分, 也就是法向所指的那部分、“下”半部分, 即上半部分的反面, 以及平面本身. 判断一个点  $P_0$  落在哪部分, 只要看平面上任何一个点  $P$  到  $P_0$  的向量  $\overrightarrow{PP_0}$  与平面法向量的夹角是锐角、钝角或是直角, 也就是看  $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PP_0}$  是正的、负的或是零. 因为

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PP_0} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

所以

$P_0$  在平面的上半部分, 当且仅当  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d > 0$ ,

$P_0$  在平面的下半部分, 当且仅当  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d < 0$ ,

$P_0$  在平面上, 当且仅当  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ .



## 8.2.2 直线方程

确定空间中一条直线有两种方法, 一是过一定点并沿一个给定的方向, 或过两个定点; 二是两个不平行平面的交线.

1° **点向式方程** 设直线  $L$  过已知一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  且与非零向量 (称为直线的方向向量)  $\boldsymbol{v} = (l, m, n)$  平行. 那么, 对于直线上任意一点  $P(x, y, z)$ ,  $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$  与  $\boldsymbol{v}$  共线, 即存在实数  $t$  使得

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{v}, \text{ 或 } \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v},$$

这里,  $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ ,  $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ ,  $t$  是参数. 写成分量的形式就是

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

称为直线  $L$  的参数方程. 从参数方程中消去参数  $t$  就得到  $P$  的坐标满足的方程

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

称为直线  $L$  的点向式方程, 它实际上是含有两个三元一次方程的方程组

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

前者表示平行于  $z$  轴的平面, 后者表示平行于  $x$  轴的平面, 而直线  $L$  就是它们的交线.

如果方向向量的坐标之一为零, 例如  $l = 0$ , 此时直线的方向与  $x$  轴垂直, 点向式方程

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

应理解为下述的方程组

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

如果有两个为零, 例如  $l = 0, m = 0$ , 则直线与  $z$  轴平行, 方程为

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

设直线  $L$  过两个给定点  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ , 则只要取方向向量为  $\boldsymbol{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , 就可给出直线的参数方程或点向式方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2° **两平面交线** 直线的点向式方程实际上可以看成是两个平面方程的联立. 一般情况下, 设任意两个不平行的平面  $\pi_1$  和  $\pi_2$ , 则交线  $L$  上的点既在  $\pi_1$  上, 也在  $\pi_2$  上,

因此点  $P(x, y, z)$  在交线  $L$  上当且仅当它的坐标满足三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

这个方程组称为**直线的一般方程**. 因为直线  $L$  垂直于两个平面的法向量  $\mathbf{n}_1$  和  $\mathbf{n}_2$ , 所以它的方向向量  $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ . 再从上述方程组求出一个特解  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则直线的一般方程也可以写成点向式方程.

### 3° 两直线的位置关系 给定两条直线

$$L_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1, \text{ 其中 } \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{v}_1 = (l_1, m_1, n_1),$$

$$L_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{v}_2, \text{ 其中 } \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \mathbf{v}_2 = (l_2, m_2, n_2).$$

它们的位置关系可分“共面”和“异面”两种情形.

直线  $L_1$  与  $L_2$  共面等价于  $\mathbf{v}_1 = (l_1, m_1, n_1), \mathbf{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  与  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  共面, 等价于  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$ , 用坐标表示, 就是

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

同理, 直线  $L_1$  与  $L_2$  异面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

在  $L_1$  与  $L_2$  共面情况下, 两直线方向向量  $\mathbf{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  与  $\mathbf{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  的夹角  $\theta$  就是两直线的夹角. 由

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

可得, 当  $\cos \theta = \pm 1$  时,  $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ , 因此两直线平行当且仅当

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

当  $|\cos \theta| < 1$  时两直线相交, 特别, 两直线互相垂直当且仅当

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

#### 例 8.2.5 一直线通过点 $(1, 1, 1)$ 且和两直线

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

相交, 求它的方程.

**解** 设所求直线的方程为  $\frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n}$ , 因为它与  $L_1$  相交, 所以它们是共面直线, 故有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = l - 2m + n = 0;$$

同样这直线与  $L_2$  共面, 又有

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 14l - 4m - 6n = 0.$$

从上两式可解得  $m = \frac{5}{4}l, n = \frac{3}{2}l$ . 不妨令  $l = 4$ , 于是可取  $(l, m, n) = (4, 5, 6)$ . 因此点向式方程

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{6}$$

所表示的直线就与  $L_1$  及  $L_2$  相交.

**4° 点到直线的距离** 设已知直线  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  和直线外一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 其中  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ ,  $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$ . 设向量  $\overrightarrow{P_0P_1}$  与直线方向的夹角为  $\theta$ , 则点  $P_1$  到直线  $L$  的距离  $d$  为

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{P_0P_1}| \sin \theta = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|} \\ &= \frac{\left( \begin{vmatrix} m & n \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & l \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned}$$

**5° 直线与平面的位置关系** 给定直线和平面如下

$$L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (l, m, n),$$

$$\pi: (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} = (a, b, c).$$

直线与平面的夹角定义为直线  $L$  与它在此平面  $\pi$  上的投影线所成的锐角. 若设直线的方向向量  $\mathbf{v} = (l, m, n)$  与平面的法向量  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  的夹角为  $\theta$ , 则直线与平面的交角  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$  或  $-\frac{\pi}{2} + \theta$ . 由于

$$\sin \phi = \pm \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \pm \cos \theta = |\cos \theta|,$$

所以

$$\sin \phi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

(1)、直线与平面互相垂直: 这时直线的方向向量与平面的法向量平行, 即

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

(2)、直线与平面平行: 这时直线的方向向量与平面的法向量互相垂直, 即

$$al + bm + cn = 0.$$

(3)、直线与平面相交: 这时  $\sin \phi < 1$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ . 交点  $P'(x', y', z')$  同时满足平面方程和直线方程

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + t'\mathbf{v}$$

所以

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} + t'\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

解得

$$t' = -\frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{al + bm + cn},$$

这里  $d = -\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}$ . 将  $t'$  代入直线方程, 就得到交点  $P'$  的坐标.

## 习题 8.2

1. 指出下列平面位置的特点, 并作图.

(1)  $2x + 2y + 2z = -1$ ;                      (2)  $3x - 3y + 2 = 0$ ;

(3)  $y - 3z = 0$ ;                                (4)  $3x - 2 = 0$ .

2. 试求通过点  $M_1(2, -1, 3)$  和  $M_2(3, 1, 2)$  且平行于向量  $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$  的平面的方程.

3. 设平面通过点  $(5, -7, 4)$  且在  $x, y, z$  三轴上的截距相等, 求平面方程.

4. 试判断下列方程组中各组平面的位置关系(平行,重合,相交,垂直).

(1)  $2x - 3y + 5z - 7 = 0$  与  $2x - 3y + 5z + 3 = 0$ ;

(2)  $4x + 2y - 4z + 5 = 0$  与  $2x + y + 2z - 1 = 0$ ;

(3)  $x - 3z + 2 = 0$  与  $2x - 6z + 4 = 0$ ;

(4)  $3x - y - 2z - 5 = 0$  与  $x + 9y - 3z + 2 = 0$ .

5. 求通过点  $M(3, -1, 1)$  且同时垂直于两个平面  $2x - z + 1 = 0$  和  $y = 0$  的平面方程.

6. 求通过点  $M(-5, 2, -1)$  且平行于坐标面  $Oyz$  的平面的方程.

7. 求下列各对平面的夹角:

(1)  $2x - y + z - 7 = 0$  和  $x + y + 2z - 11 = 0$ ;

(2)  $4x + 2y + 4z - 7 = 0$  和  $3x - 4y = 0$ .

8. 计算点到平面的距离  $d$ :

(1)  $M(2, -1, -1), 16x - 12y + 15z - 4 = 0$ ;

(2)  $M(9, 2, -2), 12y - 5z + 5 = 0$ .

9. 求两平行平面间的距离:

(1)  $3x + 6y - 2z - 7 = 0$  与  $3x + 6y - 2z + 14 = 0$ ;

(2)  $2x - y + 2z + 9 = 0$  与  $4x - 2y + 4z - 21 = 0$ .

10. 试判定点  $M(2, -1, 1)$  与原点在下列平面的同侧还是异侧?

(1)  $5x + 3y + z - 18 = 0$ ;

(2)  $x + 5y + 12z - 1 = 0$ .

11. 求与两平面  $x + y - 2z - 1 = 0$  和  $x + y - 2z + 3 = 0$  等距离的平面.

12. 求两平面  $2x - y + z - 7 = 0$  和  $x + y + 2z - 11 = 0$  所成两个二面角的平分面.

13. 在平面  $x + y + z - 1 = 0$  与三坐标平面所围成的四面体内求一点, 使它到四个面的距离相等.

14. 分别按下列各组条件求平面方程.

(1) 平分两点  $A(1, 2, 3)$  和  $B(2, -1, 4)$  间的线段且垂直于线段  $AB$ ;

(2) 与平面  $6x + 3y + 2z + 12 = 0$  平行, 而点  $(0, 2, -1)$  到这两个平面的距离相等;

(3) 通过  $x$  轴, 且点  $(5, 4, 13)$  到这个平面的距离为 8 个单位;

(4) 经过点  $M(0, 0, 1)$  及  $N(3, 0, 0)$  并与  $Oxy$  平面成  $\pi/3$  角.

15. 分别求出满足下列各组条件的直线方程.

(1) 过点  $(0, 2, 4)$  而与两平面  $x + 2z = 1, y - 3z = 2$  平行;

(2) 过点  $(-1, 2, 1)$  且平行于直线

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0; \end{cases}$$

(3) 过点  $(2, -3, 4)$  且和  $z$  轴垂直并相交;

(4) 过点  $(-1, -4, 3)$  并与下面两直线

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x + 3y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 - t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

都垂直.

16. 求直线  $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$  的参数方程.

17. 求直线与平面的交点.

(1)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ ,  $2x + 3y + z - 1 = 0$ ;

(2)  $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ ,  $x + 2y - 2z + 6 = 0$ .

18. 求下列直线的夹角.

(1)  $\begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0; \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$

19. 证明下列各组直线互相平行, 并求它们间的距离.

(1)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = z$  和  $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$

(2)  $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$  和  $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$

20. 证明下列各组直线垂直相交, 并求它们的交点.

(1)  $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2y - z = 1 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2z = 3; \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} 4x + y - 3z + 24 = 0, \\ z - 5 = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x + y + 3 = 0, \\ x + 2 = 0. \end{cases}$

21. 求直线和平面的夹角  $\phi$ .

(1)  $\begin{cases} 3x - 2y = 24, \\ 3x - z = -4; \end{cases}$   $6x + 15y - 10z + 31 = 0$ ;

(2)  $\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$   $x - y - z + 1 = 0$ .

22. 求点到直线的距离  $d$ .

(1)  $P_0(1, 0, -1)$ ,  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ ;

$$(2) M_0(1, 2, 3), \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + z = 3. \end{cases}$$

23. 证明下列各组直线是异面直线, 并求它们的距离(即两直线公垂线之长).

$$(1) \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{和} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2};$$

$$(2) \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

24. 试求通过直线  $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$  并垂直于平面  $x + 2y + 3z - 5 = 0$  的平面方程.

25. 求通过直线  $x = 3t + 1, y = 2t + 3, z = -t - 2$  且平行于直线  $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$  的平面方程.

26. 过直线  $\begin{cases} 5x - 11z + 7 = 0, \\ 5y + 7z - 4 = 0 \end{cases}$  作两互相垂直的平面. 其中一平面过点  $(4, -3, 1)$ , 求此二平面方程.

27. 求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x + 2y - z + 1 = 0$  上的投影.

28. 求点  $(2, 3, 1)$  在直线  $x = t - 7, y = 2t - 2, z = 3t - 2$  上的投影.

29. 求原点关于平面  $6x + 2y - 9z + 121 = 0$  对称的点的坐标.

30. 求点  $(1, 2, 3)$  关于直线  $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$  对称的点的坐标.

31. 试求  $\lambda$ , 使两直线  $\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{-3}$  与  $\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z+14}{7}$  相交, 并求出交点和由此两直线确定的平面方程.

32. 一直线通过点  $(-3, 5, -9)$ , 且与两直线

$$\begin{cases} y = 3x + 5, \\ z = 2x - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y - 7 = 0, \\ 5x - z + 10 = 0 \end{cases}$$

相交, 求其方程.

33. 求直线  $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  在平面  $x + y + z = 0$  上的投影直线的方程.

34. 写出垂直于平面  $5x - y + 3z - 2 = 0$ , 且与它的交线在  $Oxy$  平面上的平面方程.

35. 求由原点到直线  $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$  的垂线方程.



### §8.3 二次曲面

平面和直线是空间中最简单的面和线. 平面上任意一点的坐标必须满足一个三元一次方程. 反之, 满足一个(三元)一次方程的点所形成的几何图形就是一个平面. 对于直线也是如此, 只是直线对应的方程是由两个一次方程联立的方程组.

换一个角度看, 如果视空间中的点为“动点”, 那么在没有任何约束的时候, 动点是完全自由的, 此时动点有三个“自由度”. 当增加一个约束条件, 例如动点的坐标满足一个一次方程, 则动点被限制在一个平面上, 其自由度只有两个. 如果增加两个约束条件, 例如动点的坐标满足两个一次方程, 那么动点只能在一条直线上运动. 自由度只能有一个.

如果把一次方程的约束条件推广到一般情形, 即设动点的坐标满足一般的三元方程  $F(x, y, z) = 0$ , 那么动点的自由度仍然是两个, 动点就限制在一张曲面上. 如果动点坐标满足两个方程  $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ , 则动点就被限制在一条曲线上. 例如

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

所表示的是空间的球面. 而两个联立方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0$$

给出的是一个  $Oxy$  平面上的圆. 因此, 我们把满足方程

$$F(x, y, z) = 0$$

的点构成的图像看成是空间中的一张曲面, 也称为方程所表示的**隐式曲面**, 同理方程组

$$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$$

代表的是空间中一条曲线, 也称为**隐式曲线**.

以二次方程表示的曲面, 称为**二次曲面**. 下面我们将罗列一些常见的二次曲面.

#### 1. 柱面

首先以**圆柱面**作为一个例子. 几何上看圆柱面上任何一点到一条给定直线的距离是一个常数. 不妨取这条直线为  $z$  轴, 此时圆柱面上任何一点  $(x, y, z)$  在  $z$  轴上的投影为  $(0, 0, z)$ , 距离等于  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , 因此这样的圆柱面方程为

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c, \text{ 或 } x^2 + y^2 = c^2,$$

它是由平行于  $z$  轴并到  $z$  轴的距离为  $c$  的直线组成.

**注记** 这里必须指出: 今后, 除非特别说明, 我们总是在空间看问题的, 使用的总是空间坐标系, 一个点的坐标总是  $(x, y, z)$ , 也可以是特殊情况  $(x, y, 0)$  等等, 但不能是

$(x, y)$ . 因此即使方程不含  $z$ , 也要看成是关于  $(x, y, z)$  的方程. 例如  $x^2 + y^2 = c^2$  是对  $(x, y, z)$  的约束, 因此是一个圆柱面. 当然限制在  $Oxy$  平面上, 它表示一个圆. 站在空间的角度,  $Oxy$  平面上的圆是一个圆柱面与  $Oxy$  平面的交线, 其方程必须写作

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

一般地, 设  $L$  是  $Oxy$  坐标平面上的一条曲线, 曲线上点的坐标满足方程

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

取一条垂直于这个坐标面 (即平行于  $z$  轴) 且与  $L$  相交的直线, 则当此直线沿曲线  $L$  平行移动时所构成的曲面称为柱面,  $L$  称为柱面的准线, 动直线称为它的母线. 若在柱面上任取一点  $P(x, y, z)$ , 则其投影点  $P_1(x, y, 0)$  就在曲线  $L$  上.

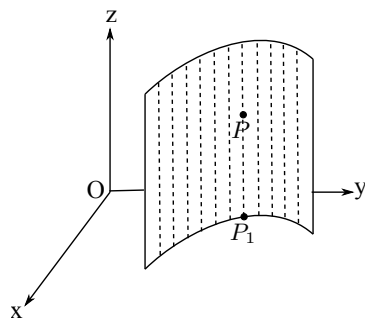


图 8.11

因此有  $F(x, y) = 0$ , 反之, 任一满足  $F(x, y) = 0$  的点  $P(x, y, z)$  必在过点  $P_1(x, y, 0)$  的母线上, 即在柱面上. 故以  $L$  为准线, 母线与  $z$  轴平行的柱面方程是

$$F(x, y) = 0$$

同样, 方程  $G(y, z) = 0$  表示母线平行于  $x$  轴的柱面, 而方程  $H(z, x) = 0$  就表示母线平行于  $y$  轴的柱面. 以下给出母线平行于  $z$  轴的几个二次柱面的方程.

椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

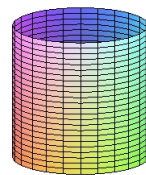


图 8.12

椭圆柱面与垂直于其母线的平面的交是一个椭圆.

双曲柱面:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

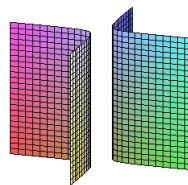


图 8.13

双曲柱面与垂直于其母线的平面的交是一个双曲线.

抛物柱面:

$$y^2 = 2px,$$

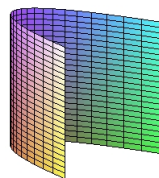


图 8.14

抛物柱面与垂直于其母线的平面的交是一个抛物线.

## 2. 旋转曲面

所谓旋转曲面, 就是一条曲线绕空间的一条直线旋转所得的曲面. 先看一个简单例子, 设  $Oyz$  平面上的椭圆

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

绕  $z$  轴旋转, 所得曲面称为旋转椭球面, 其上的任意一点  $P(x, y, z)$  有如下特点:

首先, 点  $P$  在过该点并与  $z$  轴垂直的一个圆上, 该圆的圆心在  $z$  轴、半径为  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

其次,  $P$  是椭圆上的点  $(0, \pm r, z)$  绕  $z$  轴旋转得到的, 所以

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

这就是旋转椭球面的方程.

对于一般情形, 设在  $yz$  平面上给定一条曲线

$$L: \begin{cases} F(y, z) = 0 \quad (y > 0) \\ x = 0 \end{cases},$$

把  $L$  绕  $z$  轴旋转得到一个旋转曲面, 在曲面上任取一点  $P(x, y, z)$ , 过点  $P$  作垂直于  $z$  轴的截面, 它与旋转曲面的交线为中心在  $z$  轴上、半径为  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  的圆. 这个圆是平面曲线  $L$  上的点  $(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z)$  在绕  $z$  轴旋转时所形成的圆, 故有  $F(+\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ , 或  $F(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ . 因而点  $P$  的三个坐标  $x, y, z$  满足方程

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

这里, 对于正负号, 上述方程表示至少有一种情况成立. 反之, 满足这个方程的点  $P$  必在此旋转曲面上, 所以它即是要求的旋转曲面的方程.

如果  $L$  绕  $y$  轴旋转, 所得旋转面的方程为

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

同理, 可以得到其他坐标平面上的曲线绕轴的旋转所得旋转曲面的方程.

例 8.3.1 设  $L$  是  $Oxz$  平面上的双曲线 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

$L$  绕  $z$  轴旋转所得的称为旋转单叶双曲面, 方程是:  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$

$L$  绕  $x$  轴旋转所得的称为旋转双叶双曲面, 方程是:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$

例 8.3.2  $Oyz$  平面上的抛物线 
$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$
 绕  $z$  轴旋转所得的称为旋转抛物面,

方程是:  $x^2 + y^2 = 2pz;$

例 8.3.3  $Oyz$  平面上的直线 
$$\begin{cases} y = \frac{z}{a} \\ x = 0 \end{cases}$$
 绕  $z$  轴旋转所得的称为圆锥面, 方程是:  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

### 3. 椭球面

椭球面的代数方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0),$$

显然, 椭球面上任意一点  $P(x, y, z)$  不但满足方程, 同时限制在

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c;$$

范围内. 椭球面的一个特点是它与平面  $z = h$ , ( $0 \leq |h| < c$ ) 相截(与平面  $x = h$  ( $0 \leq |h| \leq a$ ) 或  $y = h$  ( $0 \leq |y| \leq b$ ) 相截的情形类似), 截口是椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h, \end{cases}$$

在椭球面的方程中, 若  $a, b, c$  有两个相等, 例如  $a = b$ , 则它就表示  $yz$  平面上的椭圆绕  $z$  轴旋转而成的旋转椭球面, 若  $a = b = c$  就得到球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

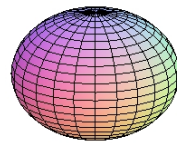


图 8.15

### 4. 双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

定义的曲面称为单叶双曲面. 它与平面

$z = h$  相交截面是一个椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

与平面  $y = h$  (或者  $x = h$ ) 相交的截面是双曲线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

当  $h = \pm b$  时, 则上述方程退化两个一次方程

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

它表示平面  $y = b$  截此双曲面所得截线是一对相交于点  $(0, b, 0)$  的直线.

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

定义的曲面称为双叶双曲面. 它与平面

$z = h$  ( $|h| \geq c$ ) 的交线由以下方程组描

述:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases}$$

当  $h = \pm c$  时, 交线退化为两点  $(0, 0, \pm c)$ , 称为双曲面的顶点: 当  $|h| > c$  时, 截线是椭圆, 并随  $|h|$  的增加而逐渐变大.

双叶双曲面与平面  $y = h$  (或  $x = h$ ) 的交线是双曲线:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2} \\ z = h. \end{cases}$$

其实轴平行于  $z$  轴, 虚轴平行于  $x$  轴的双曲线.

在双叶双曲面的方程中, 若  $a = b$ , 它就表示在  $yz$  平面上的双曲线

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

绕  $z$  轴旋转而成的旋转曲面, 并称为双叶旋转双曲面.

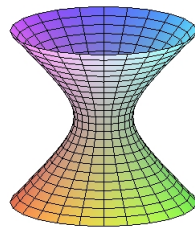


图 8.16

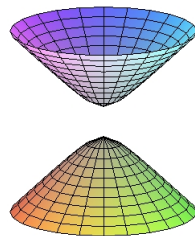


图 8.17

### 5. 二次锥面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

所表示的曲面称为二次锥面. 方程有明显的齐性: 如果  $(x_0, y_0, z_0)$  满足方程, 那么对任意  $\lambda \neq 0$ ,  $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$  也满足方程. 因此, 如果点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  落在锥面上, 那么通过坐标原点  $O$  与点  $P_0$  的直线  $L$  就全部落在锥面上. 事实上, 取直线  $L$  的方向向量为  $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ , 这样  $L$  的方程为

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t.$$

根据锥面方程的齐性,  $(x, y, z)$  满足方程. 通过上述分析, 锥面是由通过原点  $O$  的一些直线所构成. 构成锥面的直线称为这锥面的母线, 这些母线所通过的点  $O$  称锥面的顶点.

用平行于  $Oxy$  坐标面的平面  $z = h$  截锥面所得的截线是一个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}.$$

若用平行  $Ozx$  坐标平面或  $Oyz$  坐标平面的平面去截锥面, 所得的截口都是双曲线.

如果  $a = b$ , 二次锥面就是圆锥面, 它的方程为

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

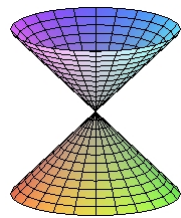


图 8.18

### 6. 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a > 0, b > 0$$

定义的曲面称为椭圆抛物面. 平面  $z = h > 0$  与椭圆抛物面的交线是一个椭圆: 若用平面  $y = h$  或  $x = h$  去截椭圆抛物面, 所得截线是一个抛物线.

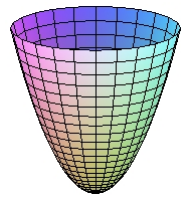


图 8.19

### 7. 双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

定义的曲面称为双曲抛物面, 它的形状像马鞍, 所以也称作马鞍面. 用平面  $z = h$  去截马鞍面, 所得截线的方程为

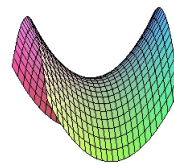


图 8.20

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

当  $h > 0$  时, 这是实轴平行  $x$  轴, 虚轴平行  $y$  轴的双曲线. 当  $h = 0$  时, 这是坐标面  $Oxy$  上两条相交于原点的直线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

当  $h < 0$  时, 它也是双曲线, 但实轴平行于  $y$  轴, 虚轴平行于  $x$  轴.

用平面  $x = h$  去截, 所得截线的方程为

$$\begin{cases} y^2 = b^2 \left( \frac{h^2}{a^2} - z \right), \\ x = h. \end{cases}$$

当  $h = 0$  时, 截线是坐标面  $Oyz$  上顶点为原点的抛物线, 且张口朝下. 当  $|h| > 0$  时, 截线也都是张口朝下的抛物线, 只是随  $|h|$  的增大, 抛物线的顶点随之升高. 用平面  $y = h$  去截, 截线是张口向上的抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 \left( z + \frac{h^2}{b^2} \right), \\ y = h. \end{cases}$$

至此我们已经介绍了椭圆、双曲、抛物等三种柱面、椭球面、单叶和双叶两种双曲面、二次锥面、椭圆和双曲两种抛物面共九类曲面, 它们都是二次曲面. 事实上, 一个一般的三元二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

所表示的二次曲面, 可通过坐标的平移和旋转, 使之成为上述九类标准的二次曲面以及其他形式的二次柱面(如一对相交平面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  或一对平行平面:  $x^2 - a^2 = 0$  等)和其他一些退化形式(如直线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  等). 坐标的平移和旋转将在下节介绍.

### 习题 8.3

1. 指出下列方程中哪些是旋转曲面, 它们是怎样产生的.

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1; \quad (2) x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$(3) x^2 + 2y^2 + 34z^2 = 1; \quad (4) x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$$

$$(5) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = -1; \quad (6) x^2 - y^2 - z^2 = 1;$$

$$(7) x^2 + y^2 = 4z; \quad (8) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3z.$$

2. 指出下列方程在平面直角坐标系  $Oxy$  和空间直角坐标系  $Oxyz$  中分别表示怎样的几何图形.

$$(1) x = 2; \quad (2) y = x + 1;$$

$$(3) x^2 + y^2 = 4; \quad (4) x^2 - y^2 = 1;$$

$$(5) y = x^2 + 1; \quad (6) \begin{cases} 5x - y + 1 = 0, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 2; \end{cases} \quad (8) \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

3. 求下列旋转曲面的方程, 并指出它们的名称.

$$(1) \text{曲线} \begin{cases} y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{绕 } z \text{ 轴旋转一周};$$

$$(2) \text{曲线} \begin{cases} y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi), \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{绕 } x \text{ 轴旋转一周};$$

$$(3) \text{曲线} \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{绕 } y \text{ 轴旋转一周};$$

4. 求  $Oyz$  平面上的直线  $y - 2z + 1 = 0$  绕  $Oyz$  平面上的直线  $y = z$  旋转所得旋转曲面的方程.



5. 求直线  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$  上的投影直线  $L_0$  的方程, 并求  $L_0$  绕  $y$  轴旋转一周所成曲面的方程.

6. 画出下列各组曲面所围成的立体图形.

(1)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$

(2)  $z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0, x + y - 1 = 0;$

(3)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$

(4)  $x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = 1;$

(5)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$

7. 考察曲面  $x^2 - y^2 - z^2 = 9$  在下列平面上的截痕.

(1)  $z = 0;$  (2)  $x = 0;$

(3)  $y = 0;$  (4)  $x = 5.$

8. 一动点  $P(x, y, z)$  到原点的距离等于它到平面  $z = 4$  的距离, 试求此动点  $P$  的轨迹, 并判定它是什么曲面.

9. 建立通过两曲面  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  和  $x^2 = y^2 + z^2$  的交线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面方程.

10. 已知一球面经过点  $(0, -3, 1)$  且与  $Oxy$  平面交成圆周  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$ , 试求其方程.

11. 建立单叶双曲面  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1$  与平面  $x - 2z + 3 = 0$  的交线在  $xy$  平面上的投影的曲线方程.

12. 问在  $xy$  平面中方程  $xy = h$  ( $h$  是或正, 或负, 或为零的常数) 表示怎样的曲线? 在空间坐标系中方程  $xy = z$  表示什么曲面? 试用截面法研究它的图形.

## §8.4 坐标变换和其它常用坐标系

### 8.4.1 坐标变换

空间中两个不同的右手直角坐标系, 其中一个可以通过平移和旋转与另一个重合, 平移使它们的原点重合, 旋转使它们相应的坐标轴重合. 换言之两个不同的直角坐标系, 相差适当的平移和旋转. 以下我们要讨论的是, 空间中一个点, 在不同坐标系下坐标之间的变换关系.

设  $\mathbb{F} = [O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$  和  $\mathbb{F}' = [O'; \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}']$  是空间两个不同的右手直角坐标系, 空间一点  $P$  在两个坐标系下的坐标表示分别为  $P(x, y, z)$  和  $P(x', y', z')$ . 为求  $(x, y, z)$  与  $(x', y', z')$  之间的关系, 我们分为两种情况分别讨论.

#### 1、平移

设坐标系  $\mathbb{F}$  和  $\mathbb{F}'$  的坐标轴方向相同, 原点不同, 即  $O' \neq O$ ,  $\mathbf{i} = \mathbf{i}', \mathbf{j} = \mathbf{j}', \mathbf{k} = \mathbf{k}'$ . 这时坐标系  $\mathbb{F}'$  是坐标系  $\mathbb{F}$  经过平移得到, 平移向量为  $\overrightarrow{OO'}$ .

设点  $P$  在两个坐标系的坐标分别为  $(x, y, z)$  和  $(x', y', z')$ , 则

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{O'P} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

利用  $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$ , 并设  $\overrightarrow{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  ( $(a, b, c)$  是点  $O'$  在坐标系  $\mathbb{F}$  下的坐标), 可得

$$x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k},$$

因此得到平移时的坐标变换

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

**例 8.4.1** 下面方程刻划的是什么图形?

$$4x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 16x - 50y - 16z - 43 = 0.$$

**解** 利用配方, 原方程可以化为

$$4(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 + 4(z - 2)^2 - 100 = 0,$$

将坐标原点平移至  $(2, 1, 2)$ , 即令

$$x' = x - 2, \quad y' = y - 1, \quad z' = z - 2,$$

代入上式得

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{25} = 1,$$

可见原方程表示中心在点  $(2, 1, 2)$  的一个旋转椭球面.

## 2、旋转

现在我们假设两个(右手)坐标系  $\mathbb{F}$  和  $\mathbb{F}'$  的原点相同, 但坐标轴方向不同. 设两个坐标系的基向量  $\{i, j, k\}$  和  $\{i', j', k'\}$  之间的夹角由下表给出:

|      | $i$        | $j$       | $k$        |
|------|------------|-----------|------------|
| $i'$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $j'$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $k'$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

其中, 表中的每一行分别表示向量  $i', j', k'$  在坐标系  $\mathbb{F}$  中与三个坐标向量  $i, j, k$  的方向角. 因此向量  $i', j', k'$  可以由它们在  $i, j, k$  中的方向余弦来表示,

$$i' = \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k,$$

$$j' = \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k,$$

$$k' = \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k.$$

由于  $i', j', k'$  是两两正交的单位向量, 因此有

$$\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \beta_i \cos \beta_j + \cos \gamma_i \cos \gamma_j = \delta_{ij}$$

其中  $\delta_{ij} = 1$ , 当  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  当  $i \neq j$ . 注意到, 表中的每一列分别表示向量  $i, j, k$  在坐标系  $\mathbb{F}'$  中的方向角. 例如向量  $i$  与  $\mathbb{F}'$  三个坐标向量的方向角为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . 因此也可以得到向量  $i, j, k$  在  $\mathbb{F}'$  中的余弦表示.

设空间中一点  $P$  在两个坐标系  $\mathbb{F}$  和  $\mathbb{F}'$  中的坐标分别为  $(x, y, z), (x', y', z')$ , 我们有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= xi + yj + zk \\ &= x'i' + y'j' + z'k' \\ &= x'(\cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k) \\ &\quad + y'(\cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k) \\ &\quad + z'(\cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k) \\ &= (x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3)i \\ &\quad + (x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3)j \\ &\quad + (x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3)k, \end{aligned}$$

于是得到用坐标  $(x', y', z')$  表达坐标  $(x, y, z)$  的公式

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3,$$

$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3,$$

$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3.$$

同样也可以导出用坐标  $(x, y, z)$  表达坐标  $(x', y', z')$  的公式

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1,$$

$$y' = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2,$$

$$z' = x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3.$$

它们都是空间直角坐标系旋转的坐标变换公式.

特别, 当坐标系旋转保持一个轴不动, 这里不妨设  $z$  轴保持不动, 即

|      | $i$                      | $j$                      | $k$             |
|------|--------------------------|--------------------------|-----------------|
| $i'$ | $\alpha$                 | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $j'$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\alpha$                 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $k'$ | $\frac{\pi}{2}$          | $\frac{\pi}{2}$          | 0               |

对应的原坐标于新坐标之间的变换为

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha,$$

$$y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

$$z = z'.$$

一个一般的二次方程表示的曲面, 经过坐标适当的旋转和平移变换, 可以化简曲面方程表示, 进而看出该曲面正是§8.3 中所介绍的椭圆、双曲、抛物等三种柱面、椭球面、单叶和双叶两种双曲面、二次锥面、椭圆和双曲两种抛物面共九类曲面. 下面我们举例说明.

**例 8.4.2** 将直角坐标系  $Oxy$  绕  $z$  轴沿反时针方向旋转  $\frac{\pi}{4}$ , 得新坐标系  $Ox'y'z'$ , 试表示新旧坐标间的变换关系, 并将方程  $xy = z$  变换为新坐标系下的方程.

**解** 新旧坐标系坐标轴之间的夹角如下表所示:

|      | $i$              | $j$             | $k$             |
|------|------------------|-----------------|-----------------|
| $i'$ | $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $j'$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $k'$ | $\frac{\pi}{2}$  | $\frac{\pi}{2}$ | 0               |

于是得旧坐标与新坐标的变换关系为

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{3\pi}{4} + z' \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\y &= x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} + z' \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\z &= x' \cos \frac{\pi}{2} + y' \cos \frac{\pi}{2} + z' \cos 0 = z' .\end{aligned}$$

将这变换式代入到方程  $xy = z$  得

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = z' .$$

由上一节知道, 这个新方程所表示的几何图形是一个马鞍面.

### 例 8.4.3 利用坐标变换化简方程

$$\begin{aligned}45x^2 + 45y^2 - 8z^2 - 54xy + 36\sqrt{2}x \\- 108\sqrt{2}y + 32z + 184 = 0,\end{aligned}$$

并指出它是什么曲面.

**解** 先利用坐标系的旋转, 消去方程中的  $xy$  项. 由于  $x^2$  与  $y^2$  的系数相等, 可将坐标系  $Oxyz$  绕  $z$  轴沿反时针方向旋转  $\frac{\pi}{4}$  得到新坐标系  $Ox'y'z'$ , 于是有坐标变换

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad z = z' .$$

将变换式代入到原方程并整理得

$$9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 - 36x' - 72y' + 16z' + 92 = 0,$$

配方后给出

$$9(x' - 2)^2 + 36(y' - 1)^2 - 4(z' - 2)^2 + 36 = 0.$$

若将原点再平移至  $(2,1,2)$  得新坐标系  $O''x''y''z''$ , 于是有

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' - 1, \quad z'' = z' - 2.$$

从而所给方程可化简成

$$9x''^2 + 36y''^2 - 4z''^2 = -36,$$

或写成

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} - \frac{z''^2}{9} = -1$$

它表示一个双叶双曲面.

### 8.4.2 其它常用坐标系

无论是直角坐标系还是一般坐标系, 都是通过确定原点和空间三个不共面的向量构成的. 这样构成的空间坐标系称为线性坐标系. 它们的特征之一是, 一个坐标分量等于常数对应面的都是平面. 下面我们要介绍的极坐标系、柱坐标系和球坐标系, 都是常用的坐标系, 但不再是线性坐标系.

#### 1. 平面的极坐标系

在平面上取定一点  $O$  (称为极点), 从极点引一条射线  $Ox$  (称为极轴), 再选定一个长度单位和角度的正向 (通常取极轴正向的逆时针方向), 这样就构成了平面上的极坐标系. 对于平面上任意一点  $P$ , 用  $r$  表示  $P$  到极点  $O$  的距离 (线段  $\overline{OP}$  的长度或向量  $\overrightarrow{OP}$  的大小),  $\theta$  表示从极轴到向量  $\overrightarrow{OP}$  的正向夹角 (幅角), 则数组  $(r, \theta)$  可以用来确定点  $P$  在空间的位置, 并称为  $P$  点的极坐标. 这里,  $r$  的取值范围为  $[0, +\infty)$ ,  $\theta$  的取值范围为  $[0, 2\pi)$ .

如果在平面直角坐标系  $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}]$  中, 取原点为极坐标系的极点,  $x$  轴为极轴, 那么平面上任意一点  $P$  的直角坐标和极坐标之间的关系 (变换) 如下:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} .$$

$P$  的位置向量可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}.$$

不难发现,  $r = \text{常数}$  是平面上以原点为圆心的同心圆,  $\theta = \text{常数}$  是从原点出发的射线.

#### 2. 柱面坐标系

设空间取定直角坐标系  $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ . 对任意一点  $P(x, y, z)$ , 位置向量  $\overrightarrow{OP}$  在  $Oxy$  平面的投影向量

$$\overrightarrow{OP_1} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

用极坐标表示

$$\overrightarrow{OP_1} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j},$$

因此, 位置向量可表示为

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + z\mathbf{k} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

或者

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

其中  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $-\infty < z < +\infty$ . 这样就给出了空间的柱面坐标系. 数组  $(r, \theta, z)$  称为点  $P$  的柱面坐标. 在柱面坐标系中,  $r = c$  (正的常数) 表示以  $c$  为半径的圆柱面  $x^2 + y^2 = c^2$ ,  $\theta = \theta_0$  (常数) 是以  $z$  轴为边的半平面.

### 3. 球面坐标系

下面我们讨论空间的球面坐标系. 设位置向量  $\overrightarrow{OP}$  与  $z$  轴的方向角为  $\theta$ ,  $\overrightarrow{OP}$  在  $Oxy$  平面的投影向量为  $\overrightarrow{OP_1}$ , 则

$$z = |OP| \cos \theta, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + |OP| \cos \theta \mathbf{k}.$$

将点  $P_1$  用  $Oxy$  平面的极坐标表示出, 设  $\varphi$  是  $\overrightarrow{OP_1}$  在  $Oxy$  平面上的幅角, 则

$$\overrightarrow{OP_1} = |OP_1| \cos \varphi \mathbf{i} + |OP_1| \sin \varphi \mathbf{j}.$$

令  $r = |OP| = |\mathbf{r}|$ , 则  $|OP_1| = |OP| \sin \theta$ , 因此

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k},$$

或

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

其中  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . 数组  $(r, \theta, \varphi)$  称为点  $P$  的球面坐标, 所形成的坐标系称为球面坐标系.

## 习题 8.4

1. 通过坐标系的平移, 化简方程  $x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2y + z - 1 = 0$ , 并指出曲面的类型.
2. 通过坐标变换, 化简方程  $xy - x + y + z + 1 = 0$ , 并指出曲面的类型.
3. 通过坐标旋转, 化简方程  $5x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz - 5 = 0$ , 并指出它是什么曲面.
4. 将下列方程按要求做相应的变换:
  - (1)  $x^2 - y^2 = 25$  转换成柱面坐标系方程和球面坐标系方程;
  - (2)  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$  转换成柱面坐标系方程和球面坐标系方程;
  - (3)  $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$  转换成球面坐标系方程;
  - (4)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  转换成球面坐标系方程;
  - (5)  $r^2 + 2z^2 = 4$  转换成球面坐标系方程;
  - (6)  $\rho = 2 \cos \phi$  转换成柱面坐标系方程;
  - (7)  $x + y = 4$  转换成柱面坐标系方程;
  - (8)  $x + y + z = 1$  转换成球面坐标系方程;
  - (9)  $r = 2 \sin \theta$  转换成直角坐标系方程;

(10)  $r^2 \cos 2\theta = z$  转换成直角坐标系方程;

(11)  $\rho \sin \phi = 1$  转换成直角坐标系方程.

5. 将  $Ozx$  平面上抛物线  $z = 2x^2$  绕  $z$  轴旋转一周, 写出所生成的曲面在柱面坐标系中的方程.

6. 将  $Ozx$  平面上双曲线  $2x^2 - z^2 = 2$  绕  $z$  轴旋转一周, 写出所生成的曲面在柱面坐标系中的方程.

7. 已知  $Oxy$  平面上以原点为圆心,  $a$  为半径的圆的参数方程表示为

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

求  $Oxy$  平面上以点  $P_0(x_0, y_0)$  为圆心,  $a$  为半径的圆的一个参数方程表示.

8. 已知  $Oxyz$  空间中以原点为圆心,  $a$  为半径的球的参数方程表示为

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos u, \end{cases} \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi)$$

求  $Oxyz$  空间中以点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为圆心,  $a$  为半径的球的一个参数方程表示.

9. 求抛物球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的一个参数方程表示.

10. 利用双曲函数, 给出双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的一个参数方程表示.

11. 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

的一个参数方程表示.



## 第 8 章综合习题

1. 设  $O$  为一定点,  $A, B, C$  为不共线的三点. 证明: 点  $M$  位于平面  $ABC$  上的充分必要条件是存在实数  $k_1, k_2, k_3$  使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1 \overrightarrow{OA} + k_2 \overrightarrow{OB} + k_3 \overrightarrow{OC}, \text{ 且 } k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

2. 证明: 向量  $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  线性相关.

3. 证明: 三维空间中四个或四个以上的向量一定线性相关.

4. 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  为一组基,

(1) 证明:  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$  为一组基;

(2) 设  $\tilde{\mathbf{c}} = 3\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ . 问当  $x$  取何值时,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{c}}$  共面?

5. 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ . 试求  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$  和  $|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$ .

6. 证明不等式  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

7. 求准线为  $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 1, \end{cases}$  母线方向为  $(2, 1, 1)$  的柱面的一般方程.

8. 求准线为  $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 1, \end{cases}$  顶点坐标为  $(2, 1, 1)$  的锥面的一般方程.

9. 求直线  $x - 1 = y = z$  绕  $x = y = 1$  旋转所得旋转面的参数方程和一般方程.

10. 求圆  $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转所得旋转面的参数方程和一般方程.

11. 将坐标系  $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  绕  $\mathbf{e}_1$  逆时针旋转角度  $\alpha$  后得到新坐标系  $[O, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3]$ , 再将坐标系  $[O, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3]$  绕  $\mathbf{e}_2$  逆时针旋转角度  $\beta$  后得到的新坐标系为  $[O, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3]$ . 求  $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  与  $[O, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3]$  之间的坐标变换公式.

12. 已知椭球面的三个半轴长分别为  $a, b, c$ , 三条对称轴方程分别为

$$3 - x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2} = 3 - y = \frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 3 - z,$$

求椭球面的一般方程.

13. 设在球面坐标系中有两点  $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$  和  $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$ ,  $d$  是这两点之间的直线距离. 证明:

$$d = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2[1 - \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \phi_1 \sin \phi_2 - \cos \phi_1 \cos \phi_2]}.$$

14. 设在球面  $\rho = a$  上有两个点  $(a, \theta_1, \phi_1)$  和  $(a, \theta_2, \phi_2)$ . 证明这两个点之间的球面距离是  $a\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq \pi$ ), 其中  $\gamma$  满足

$$\cos \gamma = \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2.$$

## 第 9 章 多变量函数的微分学

在本章中,我们将讨论定义在高维空间的多变量(亦称多元、如二元、三元等等)函数的极限、连续、可微等基本概念.一般来说,所讨论的内容一旦在二元、三元情况下被证明成立,则不难推广到更多变量的情形中去.因此本章将以讨论二元和三元的情形为主,一些向定义在一般度量空间上函数的推广将在第三册中讨论.

### §9.1 多变量函数及其连续性

多变量函数是定义在平面等高维空间点集上的函数.记  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , 其中  $\mathbb{R}^2$  中点  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 因此记该点为  $M(x, y)$ . 推而广之, 记  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ 为有序实数组 } (x_1, \dots, x_n) \text{ 的集合}\}$ , 因此  $\mathbb{R}^n$  空间中点的坐标表示为  $M(x_1, \dots, x_n)$ .  $\mathbb{R}^n$  中部分点构成的集合称为点集. 相对于直线上的点集, 空间点集显然要复杂的多. 这里简单介绍关于平面点集的基本概念与特点.

#### 9.1.1 平面上的点集

1° 距离与邻域  $\mathbb{R}^2$  中的两个点  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$  之间的距离定义为

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

这样定义的距离可类比于直线上的绝对值, 它满足距离的三要素, 即

- (1) 正定性:  $\rho(M_1, M_2) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $M_1 = M_2$ .
- (2) 对称性:  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ .
- (3) 三角不等式:  $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$ .

有了距离, 就可以定义一点的邻域:

$$B(M_0, r) = \{M \mid \rho(M, M_0) < r\}$$

这是一个以  $r$  为半径的不包含边界的圆盘, 有时也记为  $B_r(M_0)$ . 如果去掉圆心, 这样的点集记为

$$B_-(M_0, r) = \{M \mid 0 < \rho(M, M_0) < r\}.$$

称为  $M_0$  的“附近”. 有时把点集

$$S(M_0, r) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}$$

也叫做  $M_0(x_0, y_0)$  的邻域. 它是一个不包含边界的方形. 方形邻域和圆形邻域并没有本质的差别, 我们可以根据需要随意选择. 这两种邻域的表达方式, 都可以看成是一维情形以一点为中心的开区间的推广.

一个平面点集  $E$  称为**有界的**, 如果存在一个正数  $R$ , 使  $E \subset B(O, R)$  ( $O$  为坐标原点). 否则称为**无界集**. 对于有界非空点集  $E$ , 它的直径记为

$$\text{diam } E = \sup\{\rho(M', M'') \mid M', M'' \in E\}.$$

**2° 内点、外点和边界点** 设  $E \subset \mathbb{R}^2$  是一个点集,  $\mathbb{R}^2$  中不属于  $E$  的部分, 称为  $E$  的**余集**, 记为  $E^c$ . 显然  $(E^c)^c = E$ . 平面上的点可以按照它们与  $E$  的关系分成三种(图9.1).

- (1) 如果存在正数  $r$ , 使  $B(M, r) \subset E$ , 那么称  $M$  为  $E$  的**内点**;
- (2) 如果存在  $r > 0$ , 使  $B(M, r) \subset E^c$ , 那么称  $M$  为  $E$  的**外点**;
- (3) 如果对任何  $r > 0$ ,  $B(M, r)$  中既有  $E$  的点, 又有  $E^c$  的点, 那么称  $M$  为  $E$  的**边界点**.

$E$  的全体内点组成的集合叫  $E$  的**核**, 记成  $E^\circ$ .  $E$  的全体边界点的集合称为  $E$  的**边界**, 记成  $\partial E$ .  $E$  的边界点可以在  $E$  中, 也可以在  $E^c$  中.

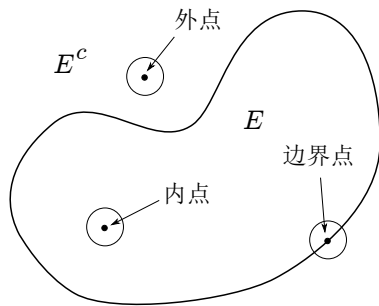


图 9.1

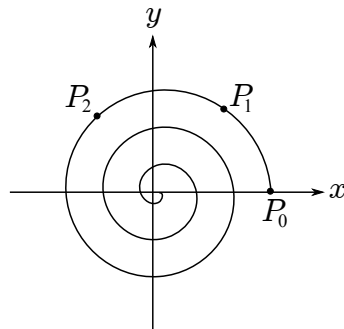


图 9.2

**3° 孤立点与聚点** 设  $M \in \mathbb{R}^2$ , 如果存在正数  $r$  使  $B(M, r) \cap E = \{M\}$ , 那么称  $M$  是  $E$  的**孤立点**. 显然  $E$  的孤立点必是  $E$  的边界点. 对于空间中一点  $M$ , 如果对任意  $r > 0$ ,  $B_-(M, r)$  中都有  $E$  中的点, 那么称  $M$  为  $E$  的**聚点**. 注意,  $E$  的聚点可以是  $E$  中的点, 也可以不是  $E$  中的点.  $E$  的内点必定是  $E$  的聚点. 如果  $M \in \partial E$  但不是  $E$  的孤立点, 那么  $M$  必是  $E$  的聚点. 由此可知边界点或是孤立点, 或是聚点. 聚点则包括了集合的内点和非孤立的边界点.

#### 4° 平面点列的极限

设  $\{M_n\}$  是平面点列. 如有  $M_0 \in \mathbb{R}^2$ , 使  $\lim \rho(M_n, M_0) = 0$ , 则称点列  $\{M_n\}$  为**收敛点列**.  $M_0$  称为点列的**极限**. 记成  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ . 设这些点的坐标分别为  $M_n(x_n, y_n)$ ,  $M_0(x_0, y_0)$ , 则只要注意到显然的不等式

$$|x_n - x_0|, |y_n - y_0| \leq \rho(M_n, M_0) \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

则可证明  $\lim M_n = M_0$  的充要条件是  $\lim x_n = x_0$  和  $\lim y_n = y_0$ . 因此求点列的极限就

是求点的坐标分量组成的数列的极限, 所以并不需要新的方法.

但是, 与直线上的数列不同的是, 平面上有极限的点可以以更自由的方式收敛于一点, 例如点列  $M_n(e^{-n/4} \cos n, e^{-n/4} \sin n)$ , 显然  $P_n \rightarrow O(0, 0)$  但趋于的方式是以螺旋形式进行的 (图9.2).

平面上的有界点列满足如下性质, 它是实数连续性在  $\mathbb{R}^2$  上的体现, 读者不妨自证.

**定理 9.1** 平面上的有界点列必有收敛的子列.

**5° 开集与闭集** 设  $E \subset \mathbb{R}^2$ , 若  $E = E^\circ$ , 即  $E$  中的点都是  $E$  的内点, 则称  $E$  是一个开集. 若  $E$  的余集  $E^c$  是开集, 则称  $E$  是闭集. 例如, 半平面  $x > 0$ , 邻域  $B(M, r), B_-(M, r)$  等是开集. 整个平面  $\mathbb{R}^2$  和空集  $\emptyset$  也是开集, 因为它没有不是内点的点. 但是  $\mathbb{R}^2$  和  $\emptyset$  互为余集, 因此也是闭集, 空间中, 只有这两个集合有这种特殊性.

设  $E \subset \mathbb{R}^2$ , 记  $\bar{E} = E \cup \{E \text{ 的所有聚点}\}$  并称为  $E$  的闭包. 例如  $B(M, r)$  的闭包为  $\bar{B}(M, r) = \{M \mid \rho(M, M_0) \leq r\}$ , 是一个包含边界的圆盘.

**性质 1** 两个开集的并集和交集仍是开集; 两个闭集的并集和交集也都还是闭集.

**性质 2**  $E \subset \mathbb{R}^2$  是开集, 当且仅当  $\partial E \cap E = \emptyset$ .

因为边界点不是内点, 所以当  $E$  是开集时,  $\partial E \cap E = \emptyset$ . 反之, 任给  $M \in E$ , 因为  $E$  与它的边界没有公共点, 所以  $M$  不是边界点, 故必是内点.

**性质 3**  $E \subset \mathbb{R}^2$  是闭集, 当且仅当  $\partial E \subset E$ .

由于  $\partial E = \partial E^c$  所以当  $E$  是闭集时,  $E^c$  是开集, 由性质 2 可知,  $\partial E^c \cap E^c = \emptyset$ , 也就是  $\partial E \cap E^c = \emptyset$ , 所以  $\partial E \subset E$ . 这样的推导是完全可逆的.

**性质 4**  $E \subset \mathbb{R}^2$  是闭集, 当且仅当  $E = \bar{E}$ , 即闭集包含其全部聚点.

这是因为聚点或是内点, 或是边界点, 所以必在  $E$  中, 故闭集包含其全部聚点. 反之, 因为一个点集的边界点由其聚点或是  $E$  中的孤立点组成, 所以聚点在  $E$  中, 就意味着  $E$  包含其全部边界点.

**6° 集合的连通性** 平面上一个集合的连通性定义如下

**定义 9.2** 对于平面点集  $E \subset \mathbb{R}^2$ , 如果任意将  $E$  分解成两个不相交的非空子集的并集  $E = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  时, 其中至少有一个子集含有另一个子集的凝聚点, 那么称  $E$  为连通的.

这里, 我们更感兴趣的是一种特殊的连通性, 称为道路连通性.

**定义 9.3** 设  $E \subset \mathbb{R}^2$  是一个平面点集, 如果对于  $E$  中任意两点  $P$  和  $Q$ , 在  $E$  中存在一条连续曲线将  $P$  和  $Q$  连接起来, 那么称  $E$  为道路连通的, 或弧连通的.

一般来说, 连续曲线是下列参数方程表示函数的图像

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

其中  $x(t), y(t)$  是  $[\alpha, \beta]$  上连续函数. 连接两点  $P$  和  $Q$  即表示  $P = (x(\alpha), y(\alpha))$ ,  $Q = (x(\beta), y(\beta))$ . 曲线也可以分段由参数方程表示 (如连续的折线). 如果连续曲线没有自相交, 那么称曲线为一条**简单曲线**或 Jordan 曲线, 如果曲线的两个端点重合, 那么称为**闭曲线**. 当曲线由上述参数方程表示时, 所谓简单曲线即是满足对任意  $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$ , 有  $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ . 而闭曲线的条件为  $(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta))$ .

可以证明, 道路连通集一定是连通的. 具体证明可以采取这样的方法: 将  $E$  任意分解成两个非空不相交集  $E = A \cup B$ , 分别取  $A, B$  中任意的点  $M_1$  和  $M_2$ . 因为  $E$  是道路连通的, 因此在  $E$  中存在连接两点的连续曲线  $L: \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$ ,  $\mathbf{r}(\alpha) = M_1, \mathbf{r}(\beta) = M_2$ .

设  $t_0 = \inf\{t \mid \mathbf{r}(t) \in B\}$ . 如果  $\mathbf{r}(t_0) \in A$ , (此时  $t_0 < \beta$ ). 任给  $\varepsilon > 0$ , 有  $\delta > 0$ , 使当  $0 < t - t_0 < \delta$  时有  $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon/2, |y(t) - y(t_0)| < \varepsilon/2$ . 由  $t_0$  的取法可知, 有  $t_0 < t' < t_0 + \delta$  使  $\mathbf{r}(t') \in B$ . 即在  $O(\mathbf{r}(t_0), \varepsilon)$  中有  $B$  中的点  $\mathbf{r}(t')$ . 所以  $\mathbf{r}(t_0)$  是  $B$  的聚点. 如果  $\mathbf{r}(t_0) \in B$ , 证明类似.

本教材所说的连通性, 特指是上述道路连通的. 连通的开集称为**开区域**, 开区域的闭包称为**闭区域**, 统称为**区域**.

如果区域  $D$  内任一条简单闭曲线的内部还在  $D$  内, 那么称  $D$  是**单连通**的, 即区域没有空洞. 反之, 就称  $D$  是**多连通**的 (图9.3).

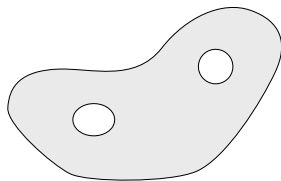


图 9.3

### 9.1.2 多变量函数

这里我们将从一般的集合  $X$  到集合  $Y$  的映射出发, 定义多个变量函数 (即从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}$  的映射)、向量值函数 (即从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的映射) 以及隐函数.

**1° 映射** 设有两个集合  $X, Y$  及一个规则  $f$ . 任意给定  $X$  中一个元素  $x$ , 都可以按照规则  $f$ , 找到  $Y$  中唯一确定的元素  $y$  (记成  $y = f(x)$ ) 与  $x$  对应, 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的一个映射, 记成

$$f: X \rightarrow Y.$$

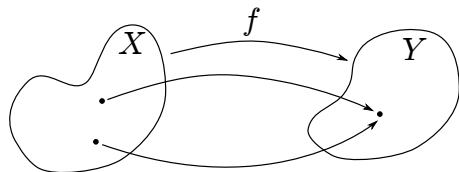


图 9.4

定义中的“唯一”的含义,是指对每一个  $x$  只能对应一个  $y$ , 不能对应两个或更多的值 ( $y$  称为是  $x$  在  $f$  下的像,  $x$  称为  $y$  的原像), 但是不同的  $x$  可以对应同一个  $y$ .

如果映射是一一对应, 即一个像只有一个原像. 这时可以定义一个  $f(X) \subset Y$  (称为  $Y$  的原像) 到  $X$  的映射:

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X.$$

它的映射规则  $f^{-1}$  是: 任给  $y \in f(X)$ , 必有唯一  $x \in X$  使  $y = f(x)$ . 这个  $x$  就是  $y$  在  $f^{-1}$  下的象. 即是说如果  $y = f(x)$ , 那么  $x = f^{-1}(y)$ . 这时称  $f$  为可逆映射,  $f^{-1}$  称为  $f$  的逆映射.

两个映射可以复合成一个新的映射. 设

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z.$$

则  $f$  和  $g$  可以复合成一个新的映射

$$g \circ f: X \rightarrow Z$$

称  $f \circ g$  为  $f$  和  $g$  的复合映射.

**2° 多变量函数**  $n$  维 (实) 数组空间  $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  中的点  $\mathbf{x}$ , 也可以对应一个向量, 即

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

这里

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

为  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基. 这时向量  $\mathbf{x}$  的长度  $|\mathbf{x}|$ 、或者点  $\mathbf{x}$  到原点的距离  $\rho(\mathbf{0}, \mathbf{x})$  为

$$|\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

设  $D \subset \mathbb{R}^n$ . 则从  $D$  到直线上的映射  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  称为一个  $n$  元函数. 因为  $\mathbb{R}^n$  中的点有坐标  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 所以可以写成  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ .

特别, 当  $n = 2$  时, 就是二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

如果把  $z$  所在的数轴的原点与  $Oxy$  平面的原点放在一起, 使之垂直于平面并与  $Oxy$  平面中的  $x$  轴和  $y$  轴形成右手系, 这样就得到一个三维空间  $Oxyz$ , 而点集

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

就是一张三维空间的曲面 (图9.5). 这张曲面也可看成具有三个自由度的三维空间中的点  $(x, y, z)$  受到一个约束  $z = f(x, y)$  所形成的.

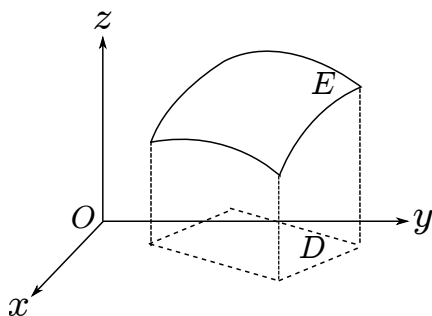


图 9.5

例如, 函数  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x^2 - y^2$  等, 就是常见的二次曲面 (图8.6)

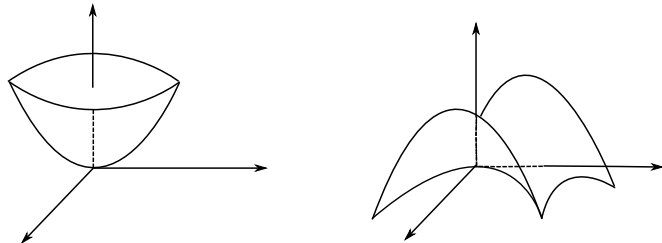


图 9.6

除了上述在直角坐标系下函数的几何表示外, 我们引进一种称为等值线 (或等值面) 的概念, 它提供了关于函数的另一种几何直观. 以二元函数为例, 在自变量  $(x, y)$  所在的  $Oxy$  平面, 取那些使得函数  $z = f(x, y)$  等于某一固定常数的点, 如  $z = c$ , 则集合

$$L_c = \{(x, y) | f(x, y) = c\}$$

通常是  $Oxy$  平面上一条或几条曲线, 或退化成一点. 称为函数在给定值的等值线 (或等高线). 取定不同的值, 就得到不同的等值线. 特别, 如果均匀地取一组值  $c_1 = h, c_2 = 2h, \dots, c_n = nh, \dots$ , 那么对应的等值线密集的地方, 说明函数变化大. 等值线相对稀疏的地方, 说明函数变化较为平缓. 下图分别是函数  $z = x^2 + y^2$  和



$z = x^2 - y^2$  的等高线, 对比一下图9.6, 我们同样得到较直观的几何图像.

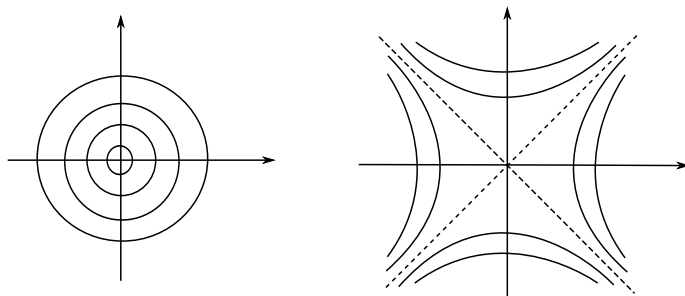


图 9.7

利用这样的方法, 可以在平面上绘制等高线 (或等温线) 地图.

**3° 多变量函数的复合** 观察一个例子

$$z = f(x, y) = e^{xy} \sin(x^2 + y^2)$$

如果引进新的变量

$$u = xy, \quad v = x^2 + y^2$$

那么原函数是相对简单函数  $u = xy$ ,  $v = x^2 + y^2$ , 与  $z = e^u \sin v$  的复合. 或者说, 若干较为简单的函数, 通过某种变量关联, 复合 (装配) 成一个较为复杂的函数.

一般来说, 多变量函数的复合有多种形式, 例如, 设

$$z = f(u, v) \quad (u, v) \in D, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (x, y) \in \tilde{D}$$

则复合函数为以  $x, y$  为自变量的二元函数

$$z = f(u(x, y), v(x, y))$$

只要复合是在域内进行, 即当  $(x, y) \in \tilde{D}$  时,  $(u(x, y), v(x, y)) \in D$  即可.

当二元函数  $z = f(x, y)$  和一元函数  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  复合后, 就是一个新的一元函数

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)).$$

几何上也可以把这样的复合看成是将函数  $z = f(x, y)$  (也就是  $Oxyz$  空间的一张曲面, 不妨记为  $S$ ), 限制在  $Oxy$  平面上区域  $D$  中的一条曲线  $L: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$  上, 其结果  $z = f(x(t), y(t))$  是曲面  $S$  上的一条曲线.

**4° 向量值函数** 即是一个从  $n$  维空间  $\mathbb{R}^n$  到  $m$  维空间  $\mathbb{R}^m$  的映射

$$\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

或  $n$  维空间到  $m$  维空间中点与点之间的对应

$$\mathbf{f}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

这里向量值函数  $f$  的每个分量

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

都是  $(x_1, \dots, x_n)$  的多元函数. 取定空间坐标系后, 分别记  $\{\mathbf{e}_i\}$  和  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$  是  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^m$  的标准正交基, 则

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = y_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_m\hat{\mathbf{e}}_m.$$

特别当  $m = n$  时, 如果映射可逆, 那么称为相同维数空间之间的变换. 例如当  $m = n = 2$  时, 就是平面上一个区域  $(u, v) \in D$  到另一个平面区域  $(x, y) \in D'$  的变换

$$f: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

因此平面的极坐标和直角坐标之间可以看成是  $(r, \theta)$  与  $(x, y)$  之间的变换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad 0 < r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$

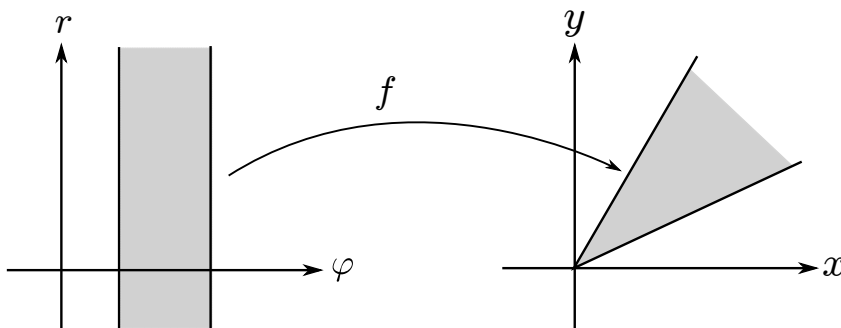


图 9.8

常用到的向量值函数是  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  的映射

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$$

或

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

以及  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  的映射

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

或

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D$$

这里,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  是三维空间在直角坐标系中的三个单位坐标向量. 以上两类向量值函数在三维空间  $\mathbb{R}^3$  中的像分别是曲线和曲面, 因此又叫空间曲线和曲面的参数方程表示, 所表示的曲线曲面分别称为参数曲线和参数曲面.

## 9.1.3 多变量函数的极限

**定义 9.4** 设  $z = f(x, y)$  是定义在平面点集  $D$  上的二元函数,  $M_0 = (x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点, 又设  $a$  是一个数. 如果对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $M = (x, y) \in D$  满足

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

或者

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad 0 < |y - y_0| < \delta$$

时, 有

$$|f(M) - a| < \varepsilon,$$

那么称当  $M$  趋于  $M_0$  时  $f(M)$  以  $a$  为极限, 记成

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a.$$

如果用“增量”的语言 (即设  $\Delta x, \Delta y$  是两个增量), 那么函数在  $M_0 = (x_0, y_0)$  极限就是

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = a$$

因为  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  满足

$$|\Delta x|, |\Delta y| \leq \rho \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

所以, 极限也可以表示成

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = a.$$

类似单变量情形, 可以定义极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = a, \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$$

等等, 此处不再赘述.

**例 9.1.1** 求证

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0$$

**证明** 利用不等式

$$|2x^2y| \leq x^4 + y^2$$

可得

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2}|y|,$$

所以, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 2\varepsilon$ , 当  $0 < |x| < \delta$ ,  $0 < |y| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^4 + y^2} - 0 \right| < \frac{1}{2}\delta < \varepsilon$$

**例 9.1.2** 求证

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

**证明** 利用极坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 则

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = r |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq 2r$$

所以, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ , 当  $0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 2r < 2\delta < \varepsilon$$

从二元函数极限的定义可以看出, 只是把一元函数极限定义中直线上点的距离(绝对值)换成平面上点的距离即可. 所以有关极限的性质可以用同样的方法加以证明. 以下罗列若干性质

**定理 9.5** 设  $f(x, y)$  在平面区域  $D$  上有定义,  $(x_0, y_0)$  是  $D$  的一个聚点, 则函数极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = a$$

的充分必要条件是, 对任何收敛于  $(x_0, y_0)$  的点列  $(x_n, y_n)$ ,  $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = a$$

**定理 9.6** 设  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  在  $M_0 = (x_0, y_0)$  的附近  $B_-(M_0, r) = \{M \mid 0 < \rho(M, M_0) < r\}$  有定义, 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = a \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = b$$

那么

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = a \pm b$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = ab$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

**定理 9.7** 设  $f(x,y)$  在  $M_0 = (x_0, y_0)$  的附近  $B_-(M_0, r)$  有定义, 且在  $M_0$  处有有限极限  $a$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  在  $0 < |t - t_0| < l$  有定义, 使得  $\{(x(t), y(t)) | 0 < |t - t_0| < l\} \in B_-(M_0, r)$ , 且  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$ , 则

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t)) = a$$

定理 9.7 说明, 只要极限存在, 则平面上的点沿任何路径 (曲线) 趋于  $(x_0, y_0)$  时, 极限都是存在而且等于函数在该点的极限.

**例 9.1.3** 求证下列极限不存在

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

**证明** 取  $y = kx^2$  ( $(x, y)$  平面中的抛物线), 则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2},$$

即当  $(x, y)$  沿着不同的抛物线趋向  $(0, 0)$  时, 函数有不同的极限, 所以极限不存在.

从这个例子可以看出, 证明一个函数极限不存在的有效方法, 是当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时, 观察沿不同路径函数的极限情况. 类似于通过观察左右极限讨论单变量函数极限不存在的方法.

但是多变量函数的极限与单变量函数的极限仍然有些不能类比的性质, 例如, 我们一般不讨论二元函数的单调性. 多变量函数极限的另一个特点是所谓累次极限问题. 设函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  附近有定义, 先后对  $x, y$  求极限,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

如果上述极限存在, 那么称之为函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处的**累次极限**. 在一般情况下, 多变量函数的极限与累次极限没有什么必然的关系.

**例 9.1.4** 讨论下列函数在  $(0, 0)$  的极限和累次极限.

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

**解** 因为  $|f(x, y)| \leq |x|$  对任何  $(x, y)$  成立, 所以容易证明其极限为 0, 且  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  却不存在.

**例 9.1.5** 讨论下列函数

$$f(x, y) = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

的极限和累次极限.

**解** 显然,  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . 但是,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  和  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  都不存在.

如同单变量情形, 如果当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时, 函数  $f(x, y)$  的极限是零, 那么称函数  $f(x, y)$  是当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  (或  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$ ) 时的无穷小量.

一般情况下, 如果

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{\rho^k} = C \text{ (常数)}$$

当  $C \neq 0$  时, 那么称  $f(x, y)$  当  $\rho \rightarrow 0$  时是与  $\rho^k$  同阶的无穷小量, 记为  $f(x, y) = O(\rho^k)$ . 如果  $C = 0$  (即上述极限为零), 那么说  $f(x, y)$  当  $\rho \rightarrow 0$  时是比  $\rho^k$  更高阶的无穷小量, 记为  $f(x, y) = o(\rho^k)$ . 同样, 我们可以进行两个无穷小量之间的比较, 设

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0 \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = 0$$

如果  $f$  和  $g$  之比  $\frac{f}{g}$  的极限是一个非零的常数, 那么说明  $f$  和  $g$  在  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时是同阶无穷小量, 如果极限为零, 那么说明  $f$  是比  $g$  更高阶的无穷小量. 这些概念与一元函数时类似, 不再赘述.

最后, 上述关于二元函数极限的定义不难推广到向量值函数  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$  情形, 只要将定义中刻画两点之间距离换成

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [(x_i - x_i^0)^2 + (y_i - y_i^0)^2]} < \delta$$

或者

$$0 < |x_1 - x_1^0| < \delta, \dots, 0 < |x_n - x_n^0| < \delta$$

将  $|f(M) - a| < \varepsilon$  换成

$$|\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) - \mathbf{a}| < \varepsilon$$

即可, 这里, 极限值  $\mathbf{a}$  当然是向量, 绝对值就是向量的长度.

#### 9.1.4 多变量函数的连续性

二元函数连续性的定义如下

**定义 9.8** 设  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的领域  $B(M_0, r) = \{M \mid \rho(M, M_0) < r\}$  有定义, 如果对任意的正数  $\varepsilon > 0$ , 存在一个正数  $\delta > 0$ , 当  $(x, y) \in D$  满足

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

或者

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$$

时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

也就是说极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

或

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0),$$

那么称  $f$  在  $(x_0, y_0)$  连续. 如果  $f$  在区域  $D$  的每一个点连续, 就称  $f$  在  $D$  上连续.

**例 9.1.6** 在定义域  $xy > -1$  内, 证明下列函数在  $(0, 0)$  处是连续的

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}, & xy \neq 0, \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

**证明** 因为

$$\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1 + u)^{\frac{1}{u}} = 1$$

所以, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta' > 0$ , 使得

$$|\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}} - 1| < \varepsilon$$

取  $\delta = \sqrt{\delta'} > 0$ , 则当  $0 < |x| < \delta$ ,  $0 < |y| < \delta$  时,  $|xy| < \delta^2 = \delta'$ , 有

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |\ln(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} - 1| < \varepsilon$$

当  $x = 0$  或  $y = 0$  时,  $f(0, y) = f(x, 0) = 1$ , 所以上述不等式仍然成立.

根据定义, 不难看出, 如果函数  $f(x, y)$  在一点  $(x_0, y_0)$  连续, 那么  $f(x, y_0)$  作为  $x$  的函数, 在  $x_0$  处连续. 同样,  $f(x_0, y)$  作为  $y$  的函数, 在  $y_0$  处连续. 但反之不然, 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

显然  $f(x, 0) = 0$ , 所以对  $x$  连续,  $f(0, y) = 0$ , 所以对  $y$  也是连续的. 但是, 函数在直线  $x = y$  上, 除原点  $(0, 0)$  之外有  $f(x, x) = 1$ . 也就是说当  $(x, y)$  沿着这条直线接近原点时, 函数是不连续的. 所以函数  $f(x, y)$  在原点不连续.

设函数  $f$  在区域  $D$  内连续, 根据定义, 对任意一个正数  $\varepsilon$ , 针对一点  $(x_0, y_0) \in D$ , 存在正数  $\delta$  使得其他点  $(x, y)$  只要与  $(x_0, y_0)$  的距离小于  $\delta$  时, 两者的函数值的差就小于  $\varepsilon$ , 一般来说, 刻画两点距离的尺度  $\delta$  会因点  $(x_0, y_0)$  的不同而不同. 如果存在一个统一的尺度来刻画任何两点的距离时, 那么称这样的连续为**一致连续**.

**定义 9.9** 设  $f$  在区域  $D$  内连续, 对任意的正数  $\varepsilon > 0$ , 存在一个正数  $\delta > 0$ , 对区域  $D$  中任意两点  $(x, y)$  和  $(x', y')$ , 只要他们的距离满足

$$0 < \rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < \delta,$$

或者

$$0 < |x' - x| < \delta, \quad 0 < |y' - y| < \delta$$

时, 就有

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $D$  内**一致连续**.

**定理 9.10** 类似于单变量情形, 二元连续函数有如下性质:

1° 连续函数的和、差、积、商 (分母不为零时) 也是连续函数.

2° 设  $z = f(u, v)$  在  $D$  中连续,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  在  $\Delta$  中连续, 则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  连续, 只要复合是在域内进行. 即对任意的  $(x, y) \in \Delta$ , 有  $(u(x, y), v(x, y)) \in D$ .

3° (介值定理) 如果连续函数  $f(M)$  的定义域  $D$  是 (道路) 连通的, 那么对于任意两点  $M_1, M_2 \in E$ ,  $f$  在  $D$  中取到  $f(M_1)$  和  $f(M_2)$  之间的所有值.

4° 有界闭集上的连续函数可以取到最大值和最小值.

5° 有界闭集上的连续函数, 一定是一致连续的.

以上性质对其它多变量的连续函数也是成立的.

**证明** 这里只给出 3° 和 5° 的证明, 其他性质的证明类似于单变量情形.

关于 3° 的证明可以这样进行: 不妨设  $f(M_1) < f(M_2)$ , 取任意的  $c$  满足  $f(M_1) < c < f(M_2)$ , 因为  $D$  连通, 作  $D$  中一条连接  $M_1$  和  $M_2$  的连续曲线

$$L: \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

使  $\mathbf{r}(\alpha) = M_1$ ,  $\mathbf{r}(\beta) = M_2$ , 由复合函数的连续性可知  $f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 因  $f(\mathbf{r}(\alpha)) = f(M_1) < c < f(M_2) = f(\mathbf{r}(\beta))$ , 故由一元连续函数的介值定理可知



必有  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  使  $f(\mathbf{r}(t_0)) = c$ . 这种证明方法是把问题限制在一条连接  $M_1$  和  $M_2$  的曲线上, 高维问题因而就化为一维问题.

关于 5° 的证明采取反证法. 如果函数  $f(x, y)$  在有界闭集上连续, 但不是一致连续的, 那么对于某一个  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任意的正整数  $n$ , 在  $D$  中存在两个点列  $\{(x_n, y_n)\}$  和  $\{(x'_n, y'_n)\}$ , 虽然有

$$0 < |x'_n - x_n| < \frac{1}{n}, \quad 0 < |y'_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

但是

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x_n, y_n)| \geq \varepsilon_0$$

由于有界闭集中的点列必有收敛子列, 所以  $\{(x_n, y_n)\}$  和  $\{(x'_n, y'_n)\}$  各存在一个序号相同的收敛子列  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$  和  $\{(x'_{n_k}, y'_{n_k})\}$ . 由公式

$$0 < |x'_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k}, \quad 0 < |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

可知, 两个子列收敛于同一个点  $(x_0, y_0)$ . 但是

$$\varepsilon_0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) - f(x_{n_k}, y_{n_k})| = |f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = 0$$

矛盾. 所以,  $f$  在  $D$  上是一致连续的.

### 习题 9.1

1. 证明:  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ,  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
2. 证明: 两个开集的交集和并集仍是开集, 两个闭集的交集和并集仍是闭集.
3. 证明满足  $y > ax + b$  的所有点  $(x, y)$  是一个开集. 在坐标轴上画出它的范围, 并求它的边界点应满足的关系.
4. 设  $\lim M_n = M_0$ ,  $\lim M'_n = M'_0$ . 求证:  $\lim \rho(M_n, M'_n) = \rho(M_0, M'_0)$ .
5. 证明, 平面上收敛的点列必然是有界的.
6. 证明集合  $E = \{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$  是连通的但不是道路连通的.
7. 确定并画出以下函数的定义域, 并指出它们是否是区域, 是否是闭区域.

$$(1) z = \sqrt{x + y};$$

$$(2) z = \sqrt{x - 2y^2};$$

$$(3) z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x}}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}};$$

$$(4) z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)};$$

$$(5) z = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$(6) z = \sqrt{\cos x \sin y};$$

$$(7) u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

$$(8) u = \sqrt{2az - x^2 - y^2 - z^2} \quad (a > 0).$$

8. 画出函数  $z = \cos(2x + y)$  的略图以及对应于  $z = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$  的等高线.
9. 一个变量的一般形式的  $n$  次多项式共有  $n + 1$  项单项式  $x^0, x^1, \dots, x^n$ , 如果对于两个变量而言, 单项式定义为  $x^k y^l$ , 次数定义为  $k + l$ , 问一般形式的  $n$  次二元多项式一共有多少项, 推广到  $k$  个变量的情形呢?
10. 设  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , 求  $f(1, 1), f(y, x), f(1, \frac{y}{x}), f(u, v), f(\cos t, \sin t)$ .
11. 设  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x, \\ 0, & y < x, \end{cases}$  又  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$  求  $F(t) = f(\cos t, \sin t)$ .
12. 设  $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$ , 求  $f(2, 3), f(x, y)$ .
13. 设  $f(x, y) = x^y, \varphi(x, y) = x + y, \psi(x, y) = x - y$ , 求  $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \varphi[f(x, y), \psi(x, y)], \psi[\varphi(x, y), f(x, y)]$ .
14. 判断下列各题极限是否存在, 若有极限, 求出其极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2};$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4};$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)};$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(9) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1};$$

$$(10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy + 1} - 1}{x + y};$$

$$(11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2};$$

$$(12) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}.$$

15. 若  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ , 问沿怎样的方向  $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ , 下列极限存在.

$$(1) \lim_{\rho \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2 - y^2}};$$

$$(2) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy.$$

16. 证明: 当极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$  存在时,

$$(1) \text{ 若 } y \neq y_0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \text{ 存在, 则 } \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A;$$

$$(2) \text{ 若 } x \neq x_0 \text{ 时, } \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \text{ 存在, 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A.$$

17. 研究下列函数的连续性:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y; \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

18. 证明函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  沿着过此点的每一射线  $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha, (0 \leq t < +\infty)$  连续, 即  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$ . 但此函数在点  $(0, 0)$  并不连续.
19. 设  $f(x, y)$  在  $D \subset \mathbb{R}^2$  上分别对  $x$  和  $y$  连续, 且关于变量  $y$  是单调的, 证明:  $f(x, y)$  在  $D$  上连续.
20. 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  对任意  $(x, y) \in D$ , 令  $f(x, y) = x$ . 称其为  $D$  在  $x$  轴的投影函数. 证明投影函数是连续函数, 但是它不一定将闭集映成闭集.
21. 给出二元函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处收敛的 Cauchy 收敛准则完整的描述并证明之.
22. 设  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续,  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  在  $(u_0, v_0)$  处连续. 用  $\varepsilon - \delta$  语言证明复合函数  $f(x(u, v), y(u, v))$  在  $(u_0, v_0)$  处连续.
23. 设  $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], (x, y) \neq (1, 1)$ , 证明函数连续但不一致连续.

## §9.2 多变量函数的微分

### 9.2.1 多变量函数的偏微商

我们知道, 函数  $y = f(x)$  在一点的导数刻画的是函数在这点的“变化率”. 然而, 对于二元函数  $z = f(x, y)$  来说, 它在一点的变化率可以来自不同的方向和以不同的方式, 这里, 首先讨论函数沿着坐标轴方向的变化率.

**定义 9.11** 设  $z = f(x, y)$  在  $M_0(x_0, y_0)$  的邻域中有定义, 如果函数沿  $x$  方向变化率的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 那么称它为  $z = f(x, y)$  在  $M_0$  关于  $x$  的偏微商 (或偏导数), 记为  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  或者  $f'_x(x_0, y_0)$ . 类似地, 如果极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在, 那么称极限值为  $f(x, y)$  在  $M_0$  关于  $y$  的偏微商, 记为  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  或者  $f'_y(x_0, y_0)$ . 这里  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  分别表示自变量的增量.

如果在区域  $D$  的每一点  $z = f(x, y)$  都有关于  $x$  的偏微商, 那么  $f'_x(x, y)$  定义了  $D$  上一个二元函数, 称为  $f(x, y)$  关于  $x$  的偏导函数, 或简称  $f(x, y)$  关于  $x$  的偏微商. 类似也可定义关于  $y$  的偏微商  $f'_y(x, y)$ .

从几何上看, 在坐标系  $Oxyz$  中, 用平行于  $x$  轴的平面  $y = y_0$  去截曲面  $z = f(x, y)$ , 就得到平面  $y = y_0$  上的一条曲线  $z = \phi(x) = f(x, y_0)$ , 而  $f'_x(x_0, y_0)$  就是这条截口曲线在  $M_0$  切线的斜率. 同样,  $f'_y(x_0, y_0)$  是平面  $x = x_0$  上曲线  $z = \psi(y) = f(x_0, y)$  在  $M_0$  切线的斜率.

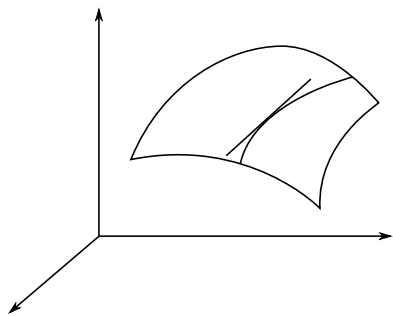


图 9.9

因此, 求函数对某个变量的偏导数和单变量函数的求导无异, 只要认准了对那个变量求导, 而在求导过程中将其它变量视为常数即可. 所以求偏导数并不需要新的方法. 例如对于两个函数  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  乘积的偏导数, 就是根据单变量函数乘积求导的规则进行计算

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x}.$$

关于  $y$  的偏导数的计算完全类似.

## 例 9.2.1 考虑如下函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

的偏导数.

根据偏导数的定义, 不难验证, 它在原点的两个偏导数存在而且等于0, 但是在 §9.1 中已经证明了该函数在原点是不连续的. 这个例子说明, 虽然函数在一点的偏导数存在, 但不能保证函数在该点连续.

这种现象从几何上看不难理解, 因为偏导数的存在只是函数沿着  $x$  轴 (或  $y$  轴) 一个方向上的一种性态. 而连续性则不然, 它是函数在一点的邻域内的一种性态. 尽管如此, 如果加强条件, 仍然可以从偏导数提供的信息, 得出函数的连续性甚至更强的结果, 有关内容将在下一节讨论.

设函数  $z = f(x, y)$  在所定义的区域中每一点都有偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , 其结果是二元函数. 如果它们仍然有偏导数, 那么可以继续对它们求偏导, 就得到了 **高阶偏微商** 或 **高阶偏导数**. 例如, 二元函数有四种可能的二阶偏微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \text{ 或记为 } f''_{11}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \text{ 或记为 } f''_{12}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \text{ 或记为 } f''_{21}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \text{ 或记为 } f''_{22}. \end{aligned}$$

对不同自变量分别求导的高阶偏导数称为 **混合偏导数**, 如上述  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  等. 类似可以定义更高阶的偏微商  $\frac{\partial^n f}{\partial y^j \partial x^i}$ ,  $i \geq 0, j \geq 0, i + j = n$ , 并称  $n$  为偏导数的阶.

需要注意的是, 即使混合偏导数  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  和  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  都存在, 也不能保证两者一定相等. 下面的定理告诉我们, 只要这两个混合偏导数是连续的, 那么两者一定相等, 也就是说对不同变量求导的次序可以交换.

**定理 9.12** 若  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  中有定义, 如果  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  连续, 那么两者相等, 即求导的次序可交换.

**证明** 微商是差商的极限, 所以我们采用的证明方法是用二阶混合差分的相等来导出二阶混合偏微商的相等. 任取  $M_0 = (x_0, y_0) \in D$  及  $B(M_0, r) \subset D$ . 取

$h = \Delta x \neq 0, k = \Delta y \neq 0$  使  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B(M_0, r)$ . 令

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

是  $f(x, y)$  分别对于  $y$  和  $x$  的一阶差分. 容易验证, 如果  $\varphi(x)$  和  $\psi(y)$  分别对  $x$  和  $y$  再进行差分, 那么差分的结果是都等于  $f(x, y)$  的二阶混合差分 (下列第二个等式的右端)

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) &= \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \\ &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

由一元函数的微分中值公式可知有

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) &= h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \\ &= h(f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)) \\ &= hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \eta_1 k), \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_1, \eta_1 < 1$ . 类似存在  $0 < \theta_2, \eta_2 < 1$ , 使得

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = hkf''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \eta_2 k),$$

故有

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \eta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \eta_2 k).$$

令  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , 由混合偏导数的连续性即可证明定理. □

推而广之, 只要  $z = f(x, y)$  的  $n$  阶偏导数都是连续的, 那么它的  $n$  阶偏导数与求导的次序无关. 这个结论对于一般多元函数也是成立的, 不再赘述.

关于其他多变量函数的偏导数的定义, 与二元函数情形完全一样. 设  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  是  $n$  元函数, 其偏导数的定义由下列极限给出

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

有关混合偏导数的可交换性与二元函数无异.

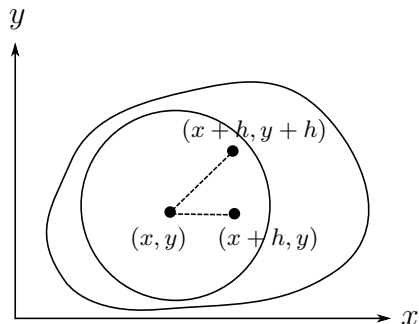


图 9.10

## 9.2.2 多变量函数的可微性

对于单变量函数  $y = f(x)$ , 在一点  $x_0$  可微意味着在该点附近函数的增量满足

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

这里  $\Delta x = x - x_0$  是自变量的增量, 余项  $o(\Delta x)$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小量:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

从几何上看, 在  $x_0$  附近, 函数  $y = f(x)$  所表示的曲线可以由  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  表示的直线近似, 且误差是一个比  $\Delta x = x - x_0$  更高阶的无穷小量:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ 当 } x \rightarrow x_0$$

这条直线  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  正是曲线  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的切线.

换一种角度看,  $f(x)$  在一点  $x_0$  的增量  $\Delta f$  是自变量的增量  $h = \Delta x$  (这里, 为了方便, 用  $h$  代替  $\Delta x$ ) 的函数, 即  $\Delta f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ . 因此它在  $x_0$  可微意味着  $\Delta f(h)$  可以表示为一个关于  $h$  的 (齐次) 线性函数  $\mathcal{A}(h) = f'(x_0)h$  与关于  $h$  的高阶无穷小量之和

$$\Delta f(h) = \mathcal{A}(h) + o(h)$$

通常将  $\Delta f$  的线性部分  $\mathcal{A}$  记为  $df$ , 即  $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$ , 并称之为  $f(x)$  在  $x_0$  的微分. 特别, 对于特殊的函数  $f(x) = x$ , 有  $f'(x) = 1$ , 则微分  $df(h) = dx(h) = h$ , 由此可以发现对一般的函数  $f(x)$ , 有

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) dx(h).$$

由于  $x_0$  和  $h$  的任意性, 可以将  $f(x)$  的微分表示成

$$df(x) = f'(x)dx$$

以上讨论可以自然地推广到多个变量的函数. 这里, 我们着重讨论二元函数的微分.

**定义 9.13** 设  $f(x, y)$  是定义在区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的二元函数, 如果在  $D$  中一点  $(x_0, y_0)$  的附近, 函数  $f(x, y)$  可以近似于过  $(x_0, y_0)$  的一个平面

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\rho)$$

那么称  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微. 这里,  $a, b$  是常数,  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

如果函数  $f(x, y)$  在  $D$  中每一点都可微, 那么称函数在  $D$  中可微.

引进  $h = \Delta x = x - x_0, k = \Delta y = y - y_0, \rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ , 那么

$$\Delta f(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y) = ah + bk + o(\rho),$$

即  $f(x, y)$  的增量表示成自变量的增量  $h, k$  的 (齐次) 线性函数  $\mathcal{A}(h, k) = ah + bk$  与  $\rho$  的高阶无穷小量之和. 记

$$df(h, k) = \mathcal{A}(h, k) = ah + bk.$$

并称为  $f(x, y)$  的**微分**. 特别对函数  $f(x, y) = x$ , 有  $\Delta f(h, k) = x + h - x = h$ , 对应的  $a = 1, b = 0, o(\rho) = 0$ , 所以  $df(h, k) = dx(h, k) = h$ , 对函数  $f(x, y) = y$ , 同理可得  $dy(h, k) = k$ , 那么对一般的函数  $f(x, y)$ , 有

$$df = a dx + b dy.$$

根据可微的定义, 我们直接得到下列结果.

**定理 9.14** 设函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微, 则

1°  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续.

2°  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  两个偏导数都存在, 且  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ , 因此  $f(x, y)$  的微分为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

**证明** 因为  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微, 所以

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + o(\rho)$$

令  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ , 得  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \rightarrow 0$ , 即  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续.

取  $k = 0$ , 则  $\rho = |h|$ , 在等式

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = ah + o(|h|)$$

两边除以  $h$  并令  $h \rightarrow 0$  得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a$$

所以  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  关于  $x$  的偏导数存在, 而且  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$ . 同理可证对  $y$  的偏导数也存在且满足  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ .  $\square$

然而, 与单变量情形不同的是, 即使多变量函数的偏导数都存在, 仍不能保证函数的可微性. 例 9.2.1 中所给出的函数在  $(0, 0)$  关于  $x$  和  $y$  的两个偏导数都存在, 但在  $(0, 0)$  不连续, 当然更不可能可微. 如果增加对偏导数的条件, 那么有

**定理 9.15** 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内存在两个偏导数

1° 如果偏导数  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  在  $D$  内有界, 那么  $f$  在  $D$  内连续.

2° 如果偏导数  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  在  $D$  内连续, 那么  $f$  在  $D$  内可微.



**证明** 设存在常数  $M$  使得  $|f'_x(x, y)| < M$ ,  $|f'_y(x, y)| < M$ . 任取一内点  $(x, y) \in D$ , 只要取增量  $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta y$  足够小, 就一定能够使得  $(x + h, y + k)$  (以及  $(x + h, y)$  和  $(x, y + k)$ ) 落在  $D$  中以  $(x, y)$  为中心的圆盘内 (图9.10). 于是

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x, y) &= [f(x + h, y + k) - f(x + h, y)] \\ &\quad + [f(x + h, y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

分别对第一个方括号内第二个变量和第二个方括号内第一个变量运用微分中值定理

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x + h, y) &= kf'_y(x + h, y + \theta_2 k) \\ f(x + h, y) - f(x, y) &= hf'_x(x + \theta_1 h, y) \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ . 由此得

$$\begin{aligned} |f(x + h, y + k) - f(x, y)| &= |kf'_y(x + h, y + \theta_2 k) + hf'_x(x + \theta_1 h, y)| \\ &\leq M(|h| + |k|) \end{aligned}$$

显然, 当  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  时  $f(x + h, y + k) - f(x, y) \rightarrow 0$ , 即函数  $f$  在  $(x, y)$  处连续.

当  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  在  $D$  中连续时, 有

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x, y) - hf'_x(x, y) - kf'_y(x, y) \\ = k[f'_y(x + h, y + \theta_2 k) - f'_y(x, y)] + h[f'_x(x + \theta_1 h, y) - f'_x(x, y)] \end{aligned}$$

而当  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{|k[f'_y(x + h, y + \theta_2 k) - f'_y(x, y)] + h[f'_x(x + \theta_1 h, y) - f'_x(x, y)]|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ \leq |f'_y(x + h, y + \theta_2 k) - f'_y(x, y)| + |f'_x(x + \theta_1 h, y) - f'_x(x, y)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此, 函数  $f$  可微. □

最后, 根据定义, 读者可以自行证明对于两个可微函数  $f, g$  的线性组合和两者的乘积, 有

$$d(af + bg) = a df + b dg, \quad d(fg) = g df + f dg.$$

**注记** 将微分推广到  $n$  元函数, 首先要了解什么是  $\mathbb{R}^n$  上的(齐次)线性函数. 这里给出一个简单描述. 设  $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 若  $\mathcal{A}$  满足

$$\mathcal{A}(a\mathbf{h} + b\mathbf{k}) = a\mathcal{A}(\mathbf{h}) + b\mathcal{A}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$$

则称之为  $\mathbb{R}^n$  上(齐次)线性函数. 记  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 则对任意的

$$\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + \dots + h_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

由线性性可知

$$\mathcal{A}(\mathbf{h}) = h_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \cdots + h_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$$

记  $a_i = \mathcal{A}(\mathbf{e}_i)$ , 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{h}) = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n$$

反之, 给定一组数  $a_1, \cdots, a_n$ , 令  $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = a_i, i = 1, \cdots, n$ , 就确定了  $\mathbb{R}^n$  上的一个线性函数.  $n$  元函数  $u = f(x_1, \cdots, x_n)$  的微分就定义为  $df = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n$ . 同样可以证明  $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , 因此

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

### 9.2.3 方向导数与梯度

多变量函数可微的一个自然结果是函数对各个自变量的偏导数存在, 对二元函数  $f(x, y)$ , 即是沿着  $x$  和  $y$  轴方向分别可导. 事实上, 在平面上这两个方向并无特别之处, 因此自然考虑函数  $f(x, y)$  在任意方向上的可导问题, 这就是方向导数, 即当动点 (自变量) 沿一条直线接近某一固定点  $(x, y)$  时, 函数  $f(x, y)$  的变化率.

设  $L$  是过  $(x, y)$  的一条射线,  $L$  与  $x$  轴的正向夹角为  $\alpha$ , 所以  $L$  的方向向量  $\mathbf{e}$  可以用方向余弦表示

$$\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j}, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

所以  $L$  上的任意动点可以表示成为  $(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta)$ , 而且参数  $t$  增加的方向就是  $\mathbf{e}$  的方向. 函数  $f(x, y)$  沿直线  $L$  成为了  $t$  的函数  $f(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta)$ .

**定义 9.16** 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta) - f(x, y)}{t}$$

存在, 那么称极限值为  $f$  在点  $(x, y)$  沿方向  $\mathbf{e}$  的方向导数, 记为  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x, y)$ .

特别当  $\mathbf{e} = \mathbf{i}$  或  $= \mathbf{j}$  (即  $\alpha = 0$  或  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) 时, 上面的定义就是函数  $f$  两个偏导数的定义, 所以说偏导数是沿  $x$  轴和  $y$  轴的方向导数.

当函数  $f(x, y)$  可微时, 在

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + o(\rho)$$

中取  $h = t \cos \alpha, k = t \cos \beta, \rho = \sqrt{h^2 + k^2} = |t|$  后, 两边同除以  $t$ , 再令  $t \rightarrow 0$ , 不难得到下列定理

**定理 9.17** 设  $f(x, y)$  是平面区域  $D$  上的可微函数, 则  $f(x, y)$  在  $D$  中任何一点沿任何方向  $\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j}$  的方向导数都存在, 而且有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

记

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}.$$

这是一个由函数的偏导数所决定的向量, 称为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的 **梯度**. 因此函数沿任何方向的方向导数为该方向与函数的梯度的内积

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \text{grad} f \cdot \mathbf{e}.$$

设  $\theta$  是  $\text{grad} f$  和  $\mathbf{e}$  的夹角, 则  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = |\text{grad} f| \cos \theta$ , 也就是说,  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处沿方向  $\mathbf{e}$  的方向导数等于梯度在方向  $\mathbf{e}$  上的投影. 由此可见, 方向导数的大小取决于求导方向与梯度的夹角.

**例 9.2.2** 求函数  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  沿  $\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j}$  的方向导数.

**解** 首先求两个偏导数

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

如果记  $(x, y)$  到原点的直线与  $x$  轴正向的夹角为  $\tau$ , 那么

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \tau, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \tau.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{e}} &= \frac{\partial r}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial y} \sin \alpha \\ &= \cos \tau \cos \alpha + \sin \tau \sin \alpha = \cos(\alpha - \tau). \end{aligned}$$

由于函数  $r$  是平面位置向量  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  的长度, 上面的结果说明, 函数  $r$  沿向径  $\mathbf{r}$  本身指向的方向导数是 1, 而沿与向径指向垂直方向的方向导数是 0.

上述结果不难推广到三维空间. 设  $f(x, y, z)$  是三维空间某个区域  $V$  中的可微函数,

$$\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

是单位向量  $\mathbf{e}$  的方向余弦,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是  $\mathbf{e}$  与三个坐标轴正向的夹角, 则在  $V$  中,  $f(x, y, z)$  的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

对于可微的三元函数  $f(x, y, z)$ , 其梯度定义为

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

因此, 方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{e}.$$

#### 9.2.4 复合函数的微分和一阶微分形式不变性

设  $u = f(\xi, \zeta)$  定义在区域  $\tilde{D}$  上,  $\xi = \phi(x, y)$ ,  $\zeta = \psi(x, y)$  定义在区域  $D$  上. 为了使复合函数  $u = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$  有意义 (即复合在域内进行), 要求  $(\phi(x, y), \psi(x, y)) \in \tilde{D}$  对任何  $(x, y) \in D$  成立. 以下总是作这样的假设.

**定理 9.18** 设  $u = f(\xi, \zeta)$  在区域  $\tilde{D}$  中可微,  $\xi = \phi(x, y)$ ,  $\zeta = \psi(x, y)$  在区域  $D$  中可微, 则复合函数  $u = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$  在  $D$  中可微.

**证明** 根据假设, 增量  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\zeta$  分别可以表示成增量  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  的线性函数与  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  的无穷小量的和:

$$\Delta\xi = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + o(\rho),$$

$$\Delta\zeta = \psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x, y) = b_1 \Delta x + b_2 \Delta y + o(\rho).$$

同样,  $\Delta u$  可以表示成  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\zeta$  的线性函数与  $\tilde{\rho} = \sqrt{\Delta\xi^2 + \Delta\zeta^2}$  的无穷小量的和:

$$\Delta u = f(\xi + \Delta\xi, \zeta + \Delta\zeta) - f(\xi, \zeta) = c_1 \Delta\xi + c_2 \Delta\zeta + o(\tilde{\rho})$$

因此, 当  $u$  作为  $x, y$  的函数时, 将增量  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\zeta$  的表达式代入, 得

$$\Delta u = (c_1 a_1 + c_2 b_1) \Delta x + (c_1 a_2 + c_2 b_2) \Delta y + (c_1 + c_2) o(\rho) + o(\tilde{\rho}),$$

此时

$$\tilde{\rho} = \sqrt{[a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + o(\rho)]^2 + [b_1 \Delta x + b_2 \Delta y + o(\rho)]^2}.$$

显然, 当  $\rho \rightarrow 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ) 时,  $\tilde{\rho} \rightarrow 0$ , 而且  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho}$  是有界的:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\rho}^2}{\rho^2} &\leq \left[ |a_1| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |a_2| \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right]^2 \\ &\quad + \left[ |b_1| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |b_2| \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right]^2 \leq M. \end{aligned}$$

因此  $o(\tilde{\rho})$  是  $\rho \rightarrow 0$  时的无穷小量:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\tilde{\rho})}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \frac{\tilde{\rho}}{\rho} = 0$$

综合以上结果, 有

$$\Delta u = (c_1 a_1 + c_2 b_1) \Delta x + (c_1 a_2 + c_2 b_2) \Delta y + o(\rho),$$

即复合函数  $u = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  作为  $x, y$  的函数, 它的增量可以表示成  $x, y$  的增量  $\Delta x, \Delta y$  的线性函数与  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  的一个高阶无穷小量之和. 这样我们就证明了复合函数也是可微的.  $\square$

上面的结果不仅证明了复合函数的可微性, 同时也给出可微的复合函数偏导数的计算. 根据定理9.14, 有

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & a_2 &= \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ b_1 &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, & b_2 &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ c_1 &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, & c_2 &= \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

而从定理证明的最后部分可以发现

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1 a_1 + c_2 b_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c_1 a_2 + c_2 b_2.$$

所以, 有

**推论 9.19** 设  $u = f(\xi, \zeta)$  在区域  $\tilde{D}$  中可微,  $\xi = \varphi(x, y), \zeta = \psi(x, y)$  在区域  $D$  中可微, 则复合函数  $u = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  在  $D$  中偏导数满足下列链式法则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}$$

函数  $u = f(\xi, \zeta) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  既是变量  $\xi, \zeta$  的函数, 也是变量  $x, y$  的函数, 因此关于它的微分有两种表示方式, 其一是  $d\xi, d\zeta$  的线性组合, 其二是  $dx, dy$  的线性组合

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta, \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \end{aligned}$$

注意到, 当  $\xi, \zeta$  分别是  $x, y$  的函数时

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \end{aligned}$$

即函数  $u$  关于两组自变量  $\xi, \zeta$  和  $x, y$  的微分形式是相等的. 这就是所谓的一阶微分形式的不变性.

上述讨论并不局限于两个变量情形, 事实上, 对于  $n$  个变量情形, 结论也成立, 例如设  $u = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ ,  $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 则

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

因此关于  $u$  的微分形式也是不变的

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi_m} d\xi_m \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

总之, 对于复合函数求偏导数, 不管中间有几层复合, 几层中间变量, 只要认准了对哪一个变量求偏导, 按照链式法则进行求导即可.

**例 9.2.3** 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $y = \varphi(x, r)$ ,  $z = \psi(x, y, r)$ . 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}$ .

**解** 这里经过复合后, 把  $u$  当成自变量  $x, r$  的二元函数

$$u = u(x, r) = f(x, \varphi(x, r), \psi(x, y, r)).$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_x + f'_y \varphi'_x + f'_z (\psi'_x + \psi'_y \varphi'_x), \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= f'_y \varphi'_r + f'_z (\psi'_y \varphi'_r + \psi'_r). \end{aligned}$$

**例 9.2.4** 置于原点的电荷  $q$  产生的电位是  $u = \frac{q}{r}$ , 这里  $r$  是点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  到原点的距离  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 当  $r \neq 0$  时, 求它在空间任意一点处的梯度及沿方向  $\mathbf{r}$  的变化率, 并证明函数  $u$  满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

**解** 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -q \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -q \frac{1}{r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -q \frac{x}{r^3},$$

利用函数关于自变量的对称性, 不难得到  $u$  分别关于  $y, z$  的一阶偏导数. 因此根据梯度的运算法则, 立即得到

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \frac{q}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)' \operatorname{grad} r = -\frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -q \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

记  $\mathbf{r}$  方向上的单位向量为  $\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , 则电位  $u$  沿方向  $\mathbf{r}$  的变化率为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{r}^0 = \operatorname{grad} u \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{q}{r^2}.$$

继续对  $u$  求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3}\right) = q \frac{-r^3 + 3r^2 x r'_x}{r^6} = -q \frac{1}{r^3} + q \frac{3x^2}{r^5}.$$

由函数对于自变量的对称性又得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -q \frac{1}{r^3} + q \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -q \frac{1}{r^3} + q \frac{3z^2}{r^5}.$$

所以  $u = \frac{q}{r}$  ( $r \neq 0$ ) 满足 Laplace 方程. 称满足 Laplace 方程的函数称为调和函数.

### 9.2.5 向量值函数的微商和微分

考虑向量值函数 (或参数曲线)

$$t \mapsto \mathbf{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

如果下列极限存在

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

那么称之为  $\mathbf{r}(t)$  关于  $t$  的导数. 根据定义, 向量值函数的导数还是一个向量.

从几何上看, 设曲线上两点  $M_0$  和  $M$  对应的位置向量分别是  $\mathbf{r}(t_0)$  和  $\mathbf{r}(t)$ . 于是割线向量  $\overrightarrow{M_0 M} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ , 故  $\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$  就与  $\overrightarrow{M_0 M}$  共线, 并指向参数的增加方向. 当  $t \rightarrow t_0$  时,  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  的导数  $\mathbf{r}'(t_0)$  就是曲线在  $M_0$  的切向量, 切向量的方向指向参数增加的方向.

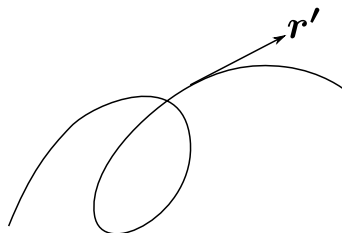


图 9.11

在直角坐标系下, 向量值函数 (或曲线的参数方程表示) 为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

容易验证,  $\mathbf{r}(t)$  可导当且仅当它的分量函数可导, 且

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}(t)\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}(t)\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}(t)\mathbf{k}.$$

若它可继续求导, 则有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}(t) \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2}(t) \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2}(t) \mathbf{k},$$

等等. 如果将  $t$  是视作时间变量,  $\mathbf{r}(t)$  视作一个质点的位置向量, 那么它的一阶导数和二阶导数分别表示质点运动的速度向量和加速度向量.

类似于函数情形, 可以引进向量的微分  $d\mathbf{r}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$  或

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

向量值函数的导数(微分)运算与向量的代数运算满足如下关系:

**性质 7** 设  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{b}(t)$  是向量值函数,  $f(t)$  是数量函数, 则

$$1^\circ \frac{d}{dt}(f\mathbf{a}) = f \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{df}{dt} \mathbf{a},$$

$$2^\circ \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt},$$

$$3^\circ \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

向量值函数的微分运算也满足类似的关系.

**证明** 我们只证明  $3^\circ$ . 设  $\mathbf{a}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + y_1(t)\mathbf{j} + z_1(t)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b}(t) = x_2(t)\mathbf{i} + y_2(t)\mathbf{j} + z_2(t)\mathbf{k}$ , 要证明  $3^\circ$  中的等式两边相等, 只要证明两边的每个分量函数相等, 对第一个分量函数, 直接计算有

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \right] \cdot \mathbf{i} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}) = \frac{d}{dt}(y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= y_1' z_2 + y_1 z_2' - y_2' z_1 - y_2 z_1' \\ &= (y_1' z_2 - y_2' z_1) + (y_1 z_2' - y_2 z_1') \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{i}. \end{aligned}$$

同理可证明两边其他分量也相等. □

**例 9.2.5** 设  $\mathbf{a}(t)$  是定长的向量值函数:  $|\mathbf{a}(t)| = c$  (常数), 或  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = c^2$ , 则由

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

可知, 定长的向量值函数与它的切向量垂直.

**例 9.2.6** 一个质点的动量矩定义为

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

其中  $m$  为质点的质量,  $\mathbf{r}$  是质点的位置向量,  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  是速度,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  是动量. 则质点的动量矩随时间的变化率为

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$



上式右边第一项为 0, 因此将牛顿第二定律

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

代入右边的第二项得

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

这里  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  称之为力  $\mathbf{F}$  对坐标原点的力矩, 所以动量矩的变化率等于力矩.

上述计算中一个明显的事实是, 我们采用的是固定的直角坐标系, 三个坐标向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  与变量无关. 一旦采用其他坐标系, 则对应的坐标向量可能与变量有关, 因此对于向量求导时, 必须要考虑对坐标向量的导数. 以下以二维空间为例.

设  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  是二维空间  $\mathbb{R}^2$  直角坐标系中两个固定的坐标向量. 在极坐标表示下

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = r(t) \cos \theta(t)\mathbf{i} + r(t) \sin \theta(t)\mathbf{j}.$$

这里极坐标  $r = r(t), \theta = \theta(t)$  是  $t$  的函数. 取  $\mathbf{r}$  方向上一个单位向量以及逆时针与之垂直的另一个单位向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta(t)\mathbf{i} + \sin \theta(t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta(t)\mathbf{i} + \cos \theta(t)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

两者构成在一点  $(x(t), y(t))$  处的坐标系. 不难算出它们的导数分别是

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= -\cos \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

此时, 一个质点的位置向量在坐标系  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$  中可以表示成

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r.$$

它的速度向量和加速度向量分别是

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

与直角坐标系下速度和加速度的表示相比较, 上式直接反映出速度和加速度分别在切向和径向方向的分解.

对于依赖两个变量的向量 (即曲面的参数方程表示)

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D.$$

它的偏导数定义为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

它的微分是

$$\begin{aligned}d\mathbf{r}(u, v) &= dx(u, v)\mathbf{i} + dy(u, v)\mathbf{j} + dz(u, v)\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv.\end{aligned}$$

最后, 有了上述讨论, 不难将求导和微分推广到更一般的情形.

设映射  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 写成分量的形式有

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

其中的每一个分量都是一个  $n$  元函数. 我们定义  $\mathbf{f}$  的微分就是对每一个分量的微分, 因此有

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (df_1(\mathbf{x}), \dots, df_m(\mathbf{x})).$$

利用  $n$  元函数微分的规则

$$df_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

并利用线性代数中关于矩阵的运算, 我们有

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

并称之为向量值函数  $\mathbf{f}$  的 Jacobi 矩阵.

当  $n = m$  时, Jacobi 矩阵为方阵, 它的行列式简记为

$$\det \mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)},$$

并称之为函数的 Jacobi 行列式.

特别, 对于  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  可微的向量值函数

$$\mathbf{f} = (x(u, v), y(u, v)), \quad \text{或} \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

$$\mathbf{J}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

对于向量值函数的复合求导, 我们以二维平面到二维平面上的映射为例说明. 设

$$\xi = \xi(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v); \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

这是平面间的两个映射  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  和  $(u, v) \rightarrow (\xi, \zeta)$ , 复合后就得到映射  $(x, y) \rightarrow (\xi, \zeta)$ , 写成分量形式就是

$$\xi = \xi(u(x, y), v(x, y)), \quad \zeta = \zeta(u(x, y), v(x, y)).$$

因此  $\xi, \zeta$  分别对  $x, y$  的偏导数就是复合函数的偏导数. 特别注意到

$$\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

这就是映射的 Jacobi 行列式之间的链式法则, 请读者自行验证.

## 习题 9.2

1. 求下列各函数在指定点的偏微商:

(1) 设  $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $f'_x(3, 4)$ ;

(2) 设  $f(x, y) = \sin x^2 y$ , 求  $f'_x(1, \pi)$ ;

(3) 设  $f(x, y) = \ln[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}]$ , 求  $f'_x(1, y), f'_y(1, y)$ .

2. 求下列各函数对于每个自变量的偏微商:

(1)  $z = \frac{xe^y}{y^2}$ ;

(2)  $z = 3^{-\frac{y}{x}}$ ;

(3)  $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ ;

(4)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;

(5)  $u = \arctan \frac{x+y}{x-y}$ ;

(6)  $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ ;

(7)  $u = x^{y^z}$ ;

(8)  $u = xe^{-z} + \ln(x + \ln y) + z$ .

3. 设  $f(x, y) = \int_1^{x^2 y} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ .

4. 设  $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$  考察函数  $f(x, y)$  在原点  $(0, 0)$  的偏导数.

5. 证明函数  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  连续但偏导数不存在.

6. 求曲面  $z = \frac{x^2+y^2}{4}$  与平面  $y = 4$  的交线在点  $(2, 4, 5)$  处的切线与  $Ox$  轴的正向所成的角度.

7. 求曲线  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \\ x = 1 \end{cases}$  上点  $(1, 1, \sqrt{3})$  处的切线分别与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正向的夹角.

8. 证明函数  $u = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$  满足热传导方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

9. 在下列各题中, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$(1) z = \frac{x-y}{x+y};$$

$$(2) z = \arctan \frac{x+y}{1-xy};$$

$$(3) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$(4) z = \sin^2(ax + by);$$

$$(5) z = y^{\ln x};$$

$$(6) z = \arcsin(xy).$$

10. 设  $u = e^{xyz}$ , 求  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$ .

11. 设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 证明当  $r \neq 0$  时有

$$(1) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r};$$

$$(2) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2};$$

$$(3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = 0.$$

12. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明函数的二阶偏导数存在, 但所有二阶偏导数 (特别是两个混合偏导数) 在  $(0, 0)$  不连续, 且  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$  (这个例子说明, 在函数在一点分别对  $x$  和  $y$  求导的次序不能交换, 其原因是不连续引起的).

13. 求下列函数的微分, 或在给定点的微分

$$(1) z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(2) z = \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(3) u = \frac{s+t}{s-t};$$

$$(4) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(5) z = \sin(xy) \text{ 在点 } (0, 0);$$

$$(6) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \text{ 在点 } (0, 0), (1, 1);$$

14. 设  $f$  和  $g$  是两个可微函数. 利用微分的定义和定理 9.14, 证明  $d(fg) = gdf + fdg$ . (即首先分别写出  $f$  和  $g$  的增量的表达式, 分析  $fg$  的增量的表达式).

15. 根据可微的定义证明, 函数  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  在原点处不可微.

16. 证明函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  连续且偏导数存在, 但在此

点不可微.

17. 证明函数  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  连续且偏导数存在, 但偏导数在点  $(0, 0)$  不连续, 而  $f$  在原点  $(0, 0)$  可微.

18. 对下列函数, 求出关于  $x$  和  $y$  的所有一阶和二阶 (含混合) 偏导数.

(1)  $z = u \ln v$ , 其中  $u = x^2$ ,  $v = \frac{1}{1+y}$ ;

(2)  $z = u \arctan v$ , 其中  $u = \frac{xy}{x-y}$ ,  $v = x^2y + y - x$ .

19. 求下列复合函数的偏导数或导数.

(1) 设  $u = e^t + \arctan(t^2 + 1)$ ,  $t = xy$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ;

(2) 设  $u = e^{xyz}$ ,  $x = rs$ ,  $y = \frac{r}{s}$ ,  $z = r^s$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial s}$ ;

(3) 设  $u = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = e^{t+s+r}$ ,  $y = 4(s^2 + t^2)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ;

(4) 设  $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$ ,  $y = a \sin x$ ,  $z = \cos x$ , 求  $\frac{du}{dx}$ ;

20. 求下列复合函数的偏导数或导数, 其中各题中的  $f$  均有连续的二阶偏导.

(1) 设  $u = f(x, y)$ ,  $x = t^3$ ,  $y = 2t^2$ , 求  $\frac{du}{dt}$ ;

(2) 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = e^t$ , 求  $\frac{du}{dt}$ ;

(3) 设  $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ;

(4) 设  $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ;

21. 求函数  $u = xyz$  在点  $(1, 2, -1)$  沿方向  $\mathbf{l} = (3, -1, 1)$  的方向微商.

22. 试求函数  $z = \arctan \frac{y}{x}$  在圆  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  上一点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  处沿该圆周逆时针方向上的方向微商.

23. 求函数  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  在点  $(1, 1, -1)$  的梯度和最大方向微商.

24. 设  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 试求 (1)  $\text{grad} \frac{1}{r^2}$ ; (2)  $\text{grad} \ln r$ .

25. 设  $u = f(t)$ ,  $t = \varphi(xy, x + y)$ , 其中  $f, \varphi$  分别具有连续的二阶导数及偏导数, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

26. 设  $z = f(xy)$ ,  $f$  为可微函数. 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

27. 设  $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ ,  $f$  为可微函数. 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

28. 证明函数  $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$  满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

其中  $\varphi, \psi$  有连续的二阶微商.

29. 若  $u = F(x, y)$ ,  $F$  任意二阶偏导存在, 而  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ . 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

30. 试证: 方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  经变化  $\xi = x + y, \eta = 3x - y$  后变成  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ . (其中二阶偏导数均连续)

31. 试证: 方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos x - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 x - \frac{\partial u}{\partial y} \sin x = 0$  经变换  $\xi = x - \sin x + y, \eta = x + \sin x - y$  后变成  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ . (其中二阶偏导数均连续)

32. 设变换  $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$  可把方程  $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  简化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ . 求常数  $a$ . (其中二阶偏导数均连续)

33. 求方程  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$  满足条件  $z(x, x^2) = 1$  的解  $z = z(x, y)$ .

34. 设  $u = u(x, y)$ , 当  $y = x^2$  时有  $u = 1, \frac{\partial u}{\partial x} = x$ , 求当  $y = x^2$  时的  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

35. 设  $u = u(x, y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  以及条件  $u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2$ , 求  $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$ . (其中二阶偏导数均连续)

36. 求下列复合函数的微分  $du$

(1)  $u = f(t), t = x + y;$

(2)  $u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = \frac{x}{y};$

(3)  $u = f(x, y, z), x = t, y = t^2, z = t^3;$

(4)  $u = f(x, \xi, \eta), \xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 + y^2 + z^2;$

(5)  $u = f(\xi, \eta, \zeta), \xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy.$

37. 求在球坐标下的 Laplace 方程的形式.

38. 求直角坐标和极坐标的坐标变换  $x = x(r, \theta) = r \cos \theta, y = y(r, \theta) = r \sin \theta$  的 Jacobi 行列式.

### §9.3 隐函数定理和逆映射定理

除了  $y = f(x)$ ,  $z = f(x, y)$  等函数的表达方式外, 大量变量之间的函数关系是通过方程 (或方程组) 给出的, 它们的图像称为 **隐式曲线** 或 **隐式曲面**. 例如平面上直线由方程  $ax + by + c = 0$  给出, 半径为1的圆周由方程  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  给出. 一般地, 如果方程

$$F(x, y) = 0$$

在某个范围内能够确定变量  $x$  和  $y$  之间的函数关系  $y = y(x)$  或  $x = x(y)$ , 那么称这样的函数是由方程确定的**隐函数** 或称为函数的**隐表示**. 注意, 当我们关注方程  $F(x, y) = 0$  时, 并不假定变量  $x$  和  $y$  中哪一个比另一个处于优先地位.

在直线方程中, 可以解出  $y$  是  $x$  的线性函数 (或者  $x$  是  $y$  的线性函数). 在确定单位圆的方程中, 可以分别围绕北极点  $(0, 1)$ , 局部地解出表示上半圆的函数  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ , 以及围绕南极点  $(0, -1)$ , 局部地解出表示下半圆的函数  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

但是, 在绝大多数情况下, 方程所确定的函数关系 (即使是局部) 是无法通过显式解出的, 甚至是否存在也成为问题. 例如方程  $\sin(x + y) + 2x + y = 0$  就无法用初等函数给出显式解,  $x^2 + y^2 = 0$  的解只是平面上一个点, 而方程  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  根本无实数解.

因此有必要通过直接研究函数  $F(x, y)$  本身, 了解方程  $F(x, y) = 0$  是否隐含着某种变量之间的函数关系, 并从方程中直接给出函数 (或曲线、曲面) 的可微性 (或切线、切平面) 等性质, 而不是从方程中具体求出函数表示, 再研究函数的性质.

#### 9.3.1 隐函数的存在性和微商

首先要解决隐函数的存在性问题. 为此我们做如下分析: 设函数  $F(x, y)$  是区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的可微函数,  $(x_0, y_0) \in D$  满足  $F(x_0, y_0) = 0$  (表明方程  $F(x, y) = 0$  至少有一对解), 假如方程  $F(x, y) = 0$  在  $(x_0, y_0)$  附近存在隐函数, 不妨设为  $y = f(x)$ , 那么

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

对恒等式两边利用复合函数的求导, 得

$$F'_x + F'_y f'(x) = 0,$$

所以, 隐函数的导数应该具有如下形式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

因此, 方程  $F(x, y) = 0$  存在可导隐函数的条件是函数  $F(x, y)$  有连续的偏导数, 且  $F'_y(x, y)$  (或  $F'_x(x, y)$ ) 在  $(x_0, y_0)$  处不等于零.

**定理 9.20** (隐函数存在定理) 设区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $M_0(x_0, y_0) \in D$ . 如果  $F(x, y)$  在  $D$  中有定义并满足:

1°  $F(x, y) \in C^1(D)$ , 即  $F(x, y)$  在区域  $D$  中有连续的偏导函数;

2°  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

3°  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

那么存在  $M_0$  的一个矩形邻域  $(a, b) \times (c, d) \subset D$ , 使得对每一个  $x \in (a, b)$ , 方程  $F(x, y) = 0$  存在唯一解  $y = f(x)$ , 满足  $y_0 = f(x_0)$ , 且  $y = f(x)$  连续并有下列微商

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

如果条件 3° 改为  $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 那么存在类似上述结果的隐函数  $x = g(y)$ .

**证明** 首先证明隐函数的存在性. 证明过程中, 将反复利用函数连续性的基本性质.

不妨设  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . 由  $F'_y(x, y)$  的连续性可知, 存在一个以  $(x_0, y_0)$  为中心的矩形闭邻域  $[a', b'] \times [c, d]$ , 使得

$$F'_y(x, y) > 0, \quad (x, y) \in [a', b'] \times [c, d].$$

因此, 对任何给定的  $x \in [a', b']$ ,  $F(x, y)$  在  $[c, d]$  上关于  $y$  是严格单调增的, 特别在  $x_0 \in [a', b']$ , 有

$$F(x_0, c) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, d),$$

由  $F(x, y)$  对  $x$  的连续性可知, 存在一个以  $x_0$  为中心的公共区间  $[a, b] \subset [a', b']$ , 使得

$$F(x, c) < 0 < F(x, d), \quad x \in [a, b].$$

同时成立. 再因为  $F(x, y)$  对  $y$  的连续性和严格单调性, 对每一个  $x \in [a, b]$ , 由介值定理知, 存在  $[c, d]$  中唯一的一点, 记为  $f(x)$  ( $c < f(x) < d$ ,  $x \in [a, b]$ ), 使得  $F(x, f(x)) = 0$ . 这种对应关系给出的函数  $y = f(x)$  就是方程确定的隐函数.

特别, 对  $x_0 \in [a, b]$ , 也有唯一的  $f(x_0) \in [c, d]$ , 使得  $F(x_0, f(x_0)) = 0$ . 但由条件 2° 知,  $y_0$  也满足  $F(x_0, y_0) = 0$ , 因此由唯一性便可知  $y_0 = f(x_0)$ .

最后要证明隐函数  $y = f(x)$  连续并有连续的导函数. 对任意的  $x \in (a, b)$ , 取增量  $h$  充分小, 使得  $x+h \in (a, b)$ . 记  $k = f(x+h) - f(x)$ , 则  $F(x, f(x)) = 0$ ,  $F(x+h, f(x+h)) = 0$ , 也就是  $F(x+h, f(x) + k) = 0$ . 类似定理 9.15 的证明, 并记  $y = f(x)$ , 有

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h, y+k) - F(x, y) \\ &= [F(x+h, y+k) - F(x+h, y)] + [F(x+h, y) - F(x, y)], \end{aligned}$$

右端第一个方括号内只是第二个变量不同, 而第二个方括号内只是第一个变量不同. 因



此分别对第二个变量和第一个变量使用微分中值定理.

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x+h, y) &= kF'_y(x+h, y+\theta_2k) \\ F(x+h, y) - F(x, y) &= hF'_x(x+\theta_1h, y) \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ . 因此

$$kf'_y(x+h, y+\theta_2k) + hf'_x(x+\theta_1h, y) = 0$$

由于偏导数  $F'_x, F'_y$  的连续性以及  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 首先得到在  $(x_0, y_0)$  的一个邻域内,  $\frac{F'_x}{F'_y} \leq M$  有界, 所以

$$|k| = \frac{|F'_x|}{|F'_y|}|h| \leq M|h|,$$

当  $h \rightarrow 0$  时, 就有  $k = f(x+h) - f(x) \rightarrow 0$ , 这样我们就证明了  $f(x)$  的连续性. 其次

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'_x(x+\theta_1h, y)}{F'_y(x+h, y+\theta_2k)} \\ &= - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \end{aligned}$$

即  $f(x)$  可导, 且  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$  连续. 至此我们就完成了定理的证明.  $\square$

### 例 9.3.1 设方程

$$F(x, y) = \sin(x+y) + 2x + y = 0$$

确定  $y$  是  $x$  的函数, 在  $(x, y) = (0, 0)$  附近, 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**解** 显然,  $(x, y) = (0, 0)$  满足方程. 根据定理

$$F'_x(x, y) = \cos(x+y) + 2, \quad F'_y(x, y) = \cos(x+y) + 1$$

且  $F'_y(0, 0) \neq 0$ , 所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(x+y) + 2}{\cos(x+y) + 1} = -1 - \frac{1}{\cos(x+y) + 1}.$$

于是把  $y$  当成  $x$  的函数, 继续求导

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{d}{dx} \frac{1}{\cos(x+y) + 1} \\ &= -\frac{\sin(x+y)}{(1 + \cos(x+y))^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \\ &= \frac{\sin(x+y)}{(1 + \cos(x+y))^3}. \end{aligned}$$

**例 9.3.2** 考虑方程

$$F(x, y) = y^3 - x = 0$$

在点  $(0, 0)$  处,  $F(0, 0) = 0$ ,  $F'_y(0, 0) = 0$ . 然而, 方程在  $(0, 0)$  附近确实存在隐函数 (可以直接从方程中解出来)

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

但是在  $x = 0$  处不可导. 这个例子说明定理中条件  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$  只是充分条件.

**例 9.3.3** 考虑方程 (对应的曲线称为 Descartes 叶形线. 图9.12)

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

对函数  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$  的两个变量分别求导得

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax$$

注意到原点  $(0, 0)$  虽然满足方程  $F(0, 0) = 0$ , 但是  $F'_x(0, 0) = 0$ ,  $F'_y(0, 0) = 0$ . 所以定理在  $(0, 0)$  失效. 从图形上看, 曲线在点  $(0, 0)$  处自相交, 因此, 在这一点附近, 任何给定的  $x$  (或  $y$ ), 都无法做到单值地对应一个  $y$  (或  $x$ ). 也就是说隐函数不可能存在.

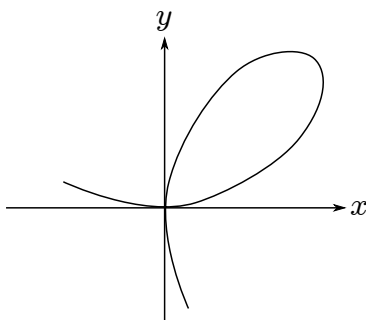


图 9.12

对于曲线上满足  $y^2 - ax \neq 0$  的那些点  $(x, y)$  处, 隐函数是存在的, 它的导数是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

当  $y' = 0$ , 即  $x^2 - ay = 0$  时, 联系原方程, 解得

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}$$

它是隐函数的驻点, 对本例子来说也是极值点和极值. 所以, 即使没有得到函数的显表示, 也能求出极值点和极值.

上述例子还说明一个事实: 若一般曲线  $F(x, y) = 0$  自相交, 则在交点处  $F(x, y)$  的两个偏导数一定为 0, 否则只要一个不为 0, 就会存在隐函数, 这显然是不可能的.

定理 9.20 是二维空间中由方程  $F(x, y) = 0$  确定隐函数的存在性定理. 除此之外, 还有下列三种典型情形, 其隐函数的存在性证明本质上与定理 9.20 是一样的, 我们将着重给出隐函数导数的推导过程, 有关隐函数的几何解释将在下节讨论.

## 1° 考虑三维空间的一个方程

$$F(x, y, z) = 0$$

如果存在一个解  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , 并在  $(x_0, y_0, z_0)$  附近, 存在隐函数  $z = f(x, y)$ , 那么

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

同样, 对这个恒等式两边分别对  $x$  和  $y$  求导, 则有

$$F'_x + F'_z f'_x = 0; \quad F'_y + F'_z f'_y = 0.$$

从中可以解得, 隐函数  $z = f(x, y)$  的两个偏导数如下

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

因此, 这种情况下隐函数存在的条件是:  $F(x, y, z)$  有连续的偏导数,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , 且

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

当然, 如果  $F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  或  $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 那么隐函数就是  $y = f(x, z)$  或  $x = f(y, z)$ . 综合而言, 只要方程存在一个解  $(x_0, y_0, z_0)$  且在该点处函数  $F(x, y, z)$  的梯度不为零  $\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  (等价于  $F'_x, F'_y, F'_z$  不全为零, 或者  $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$ ), 那么在  $(x_0, y_0, z_0)$  附近就一定存在隐函数.

## 2° 考虑三维空间由两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

上述两个方程给出三个变量的两个约束, 如果有一个解  $(x_0, y_0, z_0)$ , 而且在  $(x_0, y_0, z_0)$  的附近, 存在一个隐函数

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

代入方程组, 就有两个恒等式

$$F(x, y(x), z(x)) = 0, \quad G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

对  $x$  求导, 并解出  $y'(x)$ ,  $z'(x)$ ,

$$y'(x) = -\frac{F'_x G'_z - F'_z G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y}, \quad z'(x) = -\frac{F'_x G'_y - F'_y G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y}.$$

因此, 隐函数存在的一个条件是:  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$  有连续的偏导数,  $(x_0, y_0, z_0)$  满足方程组, 且在这一点处 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

其他情况类似. 综合而言, 当向量  $\text{grad } F \times \text{grad } G \neq 0$  时, 隐函数就一定存在.

### 3° 考虑四维空间由两个方程构成的方程组

设

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

确定了隐函数  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , 代入方程组, 并分别对  $x$  和  $y$  求偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

由上述线性方程组, 解出  $u, v$  对  $x$  的导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}.$$

类似可得到  $u, v$  对  $y$  的导数

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}.$$

当然, 此种情况下隐函数存在的条件是  $F(x, y, u, v)$ ,  $G(x, y, u, v)$  有连续的偏导数, 方程组至少有解  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  且在该点处满足

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

**例 9.3.4** 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $e^z - xyz = 0$  所确定的隐函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解** 设  $F(x, y, z) = e^z - xyz$ , 故得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z - xy.$$

代入上述公式给出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

或利用  $e^z = xyz$  可化简成

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

关于计算隐函数的高阶微商, 只需对这个隐函数所满足的恒等式多次运用复合函数的微商法则求导即可. 下面仅举两例以见一般.

**例 9.3.5** 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  所确定的隐函数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

解 将所给方程对  $x$  与  $y$  求偏微商得

$$ax + cz \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad by + cz \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax}{cz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{by}{cz}.$$

再将上述等式分别对  $x, y$  求偏微商就得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{a}{cz} + \frac{ax}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{b}{cz} + \frac{by}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{by}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

将  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  的表达式代入并化简后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{abxy}{c^2z^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}. \end{aligned}$$

例 9.3.6 方程组

$$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  的邻域中确定  $u$  和  $v$  是  $x, y$  的函数, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

解 设方程组已确定隐函数组

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

方程组的两个方程对  $x$  求导, 得到

$$\begin{cases} 2uu'_x - v'_x + 1 = 0, \\ u'_x + 2vv'_x = 0. \end{cases}$$

于是解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{1+4uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+4uv}.$$

### 9.3.2 从微分的角度看隐函数定理

因为假设了  $F(x, y)$  的偏导数连续, 所以  $F(x, y)$  可微. 因此, 对函数  $F(x, y)$  进行微分, 有

$$dF = F'_x dx + F'_y dy.$$

当方程  $F(x, y) = 0$  给出隐函数  $y = y(x)$  时, 有  $F(x, y(x)) \equiv 0$ , 因此微分得

$$dF = F'_x dx + F'_y dy = 0,$$

如果存在隐函数  $x = x(y)$ , 也同样得到上述等式. 这就是说当变量  $x, y$  受方程  $F(x, y) = 0$  约束, 彼此不再独立时, 那么变量  $x, y$  的改变量  $dx, dy$  也不再独立, 而是满足线性方程  $F'_x dx + F'_y dy = 0$ . 只要其中一个系数不为零, 不妨设  $F'_y \neq 0$ , 则得到隐函数的微分

$$dy = y'(x) dx = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} dx.$$

如果考虑三维空间的一般曲线

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

对函数  $F(x, y, z)$  和  $G(x, y, z)$  进行微分并考虑如下方程组

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0, \quad G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz = 0$$

不妨设 Jacobi 行列式  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$ , 则方程组有唯一解

$$dy = -\frac{F'_x G'_z - F'_z G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y} dx, \quad dz = -\frac{F'_x G'_y - F'_y G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y} dx.$$

即是隐函数  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  的微分, 而  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$  则是存在这种形式隐函数的充分条件.

对于一般情形, 设映射

$$\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

在  $D$  上可微,  $\mathbf{F}$  的函数值是  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 因此可以写成分量形式  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ , 其中每个  $F_i$  是一个  $m+n$  元函数.

如果  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , 且下列 Jacobi 行列式满足

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq \mathbf{0}$$

那么, 存在隐函数  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ . 对等式

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

进行微分, 得

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial y_j} dy_j = 0$$

.....

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_n}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_n}{\partial y_j} dy_j = 0$$

由线性方程组的相关理论可知, 从上述方程中可以唯一解出  $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$ , 而且它们是  $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$  的线性函数, 所以给出了隐函数

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = y_n(x_1, \dots, x_m)$$

的微分, 其中关于  $dx_i$  的系数就是隐函数对  $x_i$  的偏导数, 这里  $i = 1, \dots, m$ .

关于一般映射的隐映射定理, 将在第三册详细讨论.

### 9.3.3 逆映射的微商

首先回忆有关一元函数的反函数以及导数. 设  $y = f(x)$  有连续的导函数,  $f'(x_0) \neq 0$ , 不妨设  $f'(x_0) > 0$ , 因为导函数连续, 所以在  $x_0$  的一个邻域  $(a, b)$  内,  $f'(x) > 0$ . 这说明函数在  $(a, b)$  内严格单调增, 所以反函数  $x = f^{-1}(y)$  存在.

现在, 我们从另一个角度考虑. 令  $F(x, y) = y - f(x)$ , 并考虑方程

$$F(x, y) = y - f(x) = 0,$$

因为  $F'_x(x_0, y_0) = -f'(x_0) \neq 0$ , 根据隐函数定理, 存在隐函数  $x = x(y)$ , 记为  $x = f^{-1}(y)$ , 而且他的导数是

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = \frac{1}{f'(x)},$$

所以

$$\frac{df^{-1}}{dy} \frac{df}{dx} = 1.$$

关于逆映射微分的一般结果, 将在第三册详细讨论, 这里以二维平面到二维平面的映射为例.

设两个函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

都是  $Oxy$  平面中区域  $D$  上有连续偏导数的函数. 一方面可以看成是一种特殊地向量值函数:  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  (即自变量所在空间的维数与值域的维数相等). 另一方面可看成是平面到自身的一个映射.

最简单的例子是所谓的仿射变换

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy$$

其中  $a, b, c, d$  是常数. 该映射可逆的条件是系数所构成的二阶行列式满足

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

对于一般映射  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , 设方程组

$$F(x, y, u, v) = u - u(x, y) = 0, \quad G(x, y, u, v) = v - v(x, y) = 0.$$

根据隐函数存在定理, 映射可逆的充分条件是

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

在方程中直接对  $u$  求导, 得方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

由此就可以解出逆射的偏微商

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}.$$

同样, 如果将方程组对  $v$  求导, 就得到

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}.$$

**定理 9.21** 设映射  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  有连续的偏导数. 若在某一点  $(x_0, y_0)$  处, 有  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \neq 0$ , 则在  $(u_0, v_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  附近, 存在逆映射  $(u, v) \rightarrow (x, y): x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , 而且逆映射可导, 其偏导数的 Jacobi 行列式满足

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$$

可见, 可逆映射的 Jacobi 行列式有相当于一元函数反函数的导数的特征.

**例 9.3.7** 求极坐标变换  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  的逆变换的偏微商.

**解** 将此变换中的  $r, \theta$  看成是  $x, y$  的函数两边对  $x$  求导得

$$\cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1,$$

$$\sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

它是关于  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  的二元一次联立方程. 解之得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

同理可得

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$



## 习题 9.3

1. 证明下列方程在指定点的附近对  $y$  有唯一解, 并求出  $y$  对  $x$  在该点处的一阶和二阶导数

(1)  $x^2 + xy + y^2 = 7$ , 在  $(2, 1)$  处. (2)  $x \cos xy = 0$ , 在  $(1, \frac{\pi}{2})$  处.

2. 求由下列方程所确定的隐函数的导数.

(1)  $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ; (2)  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;

(3)  $x^y = y^x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . (4)  $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(5)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  (6)  $F(x, x+y, x+y+z) = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(7)  $F(xz, yz) = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

3. 找出满足方程  $x^2 + xy + y^2 = 27$  的函数  $y = y(x)$  的极大值与极小值.

4. 试求由下列方程所确定的隐函数的微分.

(1)  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ , 求  $dz$ ; (2)  $xyz = x + y + z$ , 求  $dz$ ;

(3)  $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$ , 求  $du$ ; (4)  $F(x-y, y-z, z-x) = 0$ , 求  $dz$ .

5. 证明: 当  $1 + xy = k(x - y)$  (其中  $k$  为常数) 时有等式

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

6. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$  所确定的隐函数, 试证:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

7. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$  所确定的隐函数, 试证: 不论  $\varphi$  为

怎样的可微函数, 都有  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$ .

8. 设  $z = x^2 + y^2$ , 其中  $y = y(x)$  为由方程  $x^2 - xy + y^2 = 1$  所定义的函数, 求  $\frac{dz}{dx}$  及

$$\frac{d^2z}{dx^2}.$$

9. 设  $y = f(x + t)$ , 而  $t$  是由方程  $y + g(x, t) = 0$  所确定的  $x, y$  的函数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

10. 设  $x = x(z)$ ,  $y = y(z)$  是方程组  $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$  所确定的隐函数组, 求

$$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz},$$

11. 设  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  是由下列方程组所确定的隐函数组, 求  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ .

$$(1) \begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1, \\ u + v + x + y = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2y). \end{cases}$$

12. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

$$(1) \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v); \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v. \end{cases}$$

13. 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f, \varphi$  都具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ . 求  $\frac{du}{dx}$ .

14. 设  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  是由方程  $z = xf(x + y)$  和  $F(x, y, z) = 0$  所确定的函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数. 求  $\frac{dz}{dx}$ .

15. 设  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  是由方程  $F(x, y, u, v) = 0$  和  $G(x, y, u, v) = 0$  所确定的隐函数, 其中  $F$  和  $G$  都具有一阶连续偏导数. 求  $du, dv$ .

16. 函数  $u = u(x, y)$  由方程组  $u = f(x, y, z, t)$ ,  $g(y, z, t) = 0$ ,  $h(z, t) = 0$  定义, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

## §9.4 空间曲线与曲面

本节将应用导数, 讨论三维空间中用参数方程表示和隐函数表示的曲线和曲面的切线、切平面等几何性质.

### 9.4.1 参数曲线

设参数曲线的参数方程表示如下

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

1° **切向量与切线方程** 根据 §9.2.5, 曲线在一点  $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  的切向量为

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}.$$

如果  $x'(t), y'(t), z'(t)$  连续, 那么称曲线是 **光滑曲线**. 如果曲线连续, 且分成有限光滑线段, 那么称曲线是 **逐段光滑的**. 当曲线上一点处的切向量不为零时 (即对应一个参数值  $t_0$ , 有  $|\mathbf{r}'(t_0)| \neq 0$ ), 称该点为曲线的 **正则点**. 否则称为 **奇点**. 如果曲线的所有点都是正则点 (即对任何  $t$ ,  $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ ), 称曲线为 **正则曲线**.

有了切向量, 则过曲线上点  $M_0 = M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  的切线方程为

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

这里, 用  $(X, Y, Z)$  表示切线上点的坐标. 曲线的法平面 (即过  $M_0$  且与切线垂直的平面) 方程为

$$x'(t_0)(X - x(t_0)) + y'(t_0)(Y - y(t_0)) + z'(t_0)(Z - z(t_0)) = 0.$$

这里, 用  $(X, Y, Z)$  表示法平面上点的坐标.

#### 例 9.4.1 证明圆柱螺旋线

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt, \quad -\infty < t < \infty$$

在每一点的切向量与  $z$  轴的夹角是常数.

**解**  $z$  轴的方向向量是  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , 所以夹角的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}'| |\mathbf{k}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2° **弧长** 与计算平面曲线的弧长方法一样, 空间曲线的弧长可以用曲线内接折线的长作为近似值, 令折线越来越密, 如果极限存在, 就定义其为曲线的弧长. 对于光滑或分

段光滑曲线, 这样的极限可以用定积分计算.

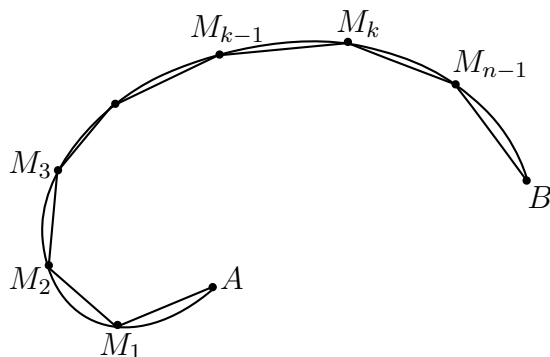


图 9.13

具体过程如下. 对参变量  $t$  作分割:

$$T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

记  $\mathbf{r}(t_i)$  的终点为  $M_i, i = 1, \cdots, n$ . 这样就得到曲线  $L$  上一条内接折线  $AM_1M_2 \cdots M_{n-1}B$  (图9.13), 折线的总长度为

$$\begin{aligned} l(T) &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}. \end{aligned}$$

对每一个分量分别使用微分中值定理, 并得

$$l(T) = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} \Delta t_i,$$

其中  $t_{i-1} < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_i, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . 注意到上式并不是严格的 Riemann 和的形式, 因此需要做必要的修正, 使其近似一个 Riemann 和.

因为  $x'(t), y'(t), z'(t)$  是连续的, 所以  $f(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\eta) + z'^2(\zeta)}$  是定义在三维闭区间  $[\alpha, \beta]^3$  上的三元连续函数, 因此一致连续, 故对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 > 0$ . 当  $\|T\| < \delta_1$  时, 对任何  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in [t_{i-1}, t_i]^3 (i = 1, 2, \cdots, n)$  都有

$$\left| \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\xi_i)} - \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i) + z'^2(t_i)} \right| < \varepsilon.$$

因此

$$\left| l(T) - \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(t_i)| \Delta t_i \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon(\beta - \alpha).$$

也就是说,  $l(T)$  与 Riemann 和  $\sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(t_i)| \Delta t_i$  相差很小. 又因  $|\mathbf{r}'(t)|$  在  $[\alpha, \beta]$  上的连续, 所以可积.  $|\mathbf{r}'(t)|$  在  $[\alpha, \beta]$  上的 Riemann 和的极限正是  $|\mathbf{r}'(t)|$  在  $[\alpha, \beta]$  上的积分. 这

样对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 就是存在  $\delta_2 > 0$ , 当  $\|T\| < \delta_2$  时

$$\left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(t_i)| \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . 于是当  $\|T\| < \delta$  时就有

$$\left| l(T) - \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon(\beta - \alpha + 1).$$

因此  $L$  的弧长  $l$  定义为

$$l = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} l(T) = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

当曲线  $L$  是逐段光滑曲线时, 可以逐段考虑曲线的弧长, 对应上式右边的积分, 也就是在  $[\alpha, \beta]$  上的分段积分.

平面曲线  $L: \mathbf{r} = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$  可以看成特殊的空间曲线  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t), y(t), 0)$ , 因此弧长为

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

如果平面曲线是由显表示  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  给出, 令

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x), 0), \quad x \in [a, b],$$

其中  $x$  视为参数, 那么弧长为

$$l = \int_a^b |\mathbf{r}'(x)| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

这与我们在第一册中利用微元法得到的结果一致.

**3° 弧长参数** 设  $L$  是正则曲线 ( $|\mathbf{r}'(t)| > 0$ ), 在  $L$  上取一动点  $M(t)$ , 则从起点  $A$  到动点  $M(t)$  的弧  $\widehat{AM}$  的长度为

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

这是一个变上限积分给出的函数, 显然  $s(t) > 0$ ,  $s(\alpha) = 0$ , 且

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = |\mathbf{r}'(t)| > 0,$$

即函数  $s(t)$  是严格单调增的, 所以存在反函数  $t = t(s)$ . 这样, 曲线可以以弧长作为参数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$$

或者

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

因为弧长  $s$  是一个几何量, 它是曲线本身所固有的, 因此我们把曲线以弧长作为参数的参数方程称为曲线的 **自然方程**.

分别对  $t$  和  $s$  微分, 得

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{r}'(s) ds$$

利用

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

就得到一个重要结论,

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

即在自然参数方程表示中,  $\mathbf{r}(s)$  对弧长  $s$  的微商, 是曲线  $L$  在点  $M(s)$  处的单位切向量, 并指向弧长增加的方向. 写成分量即是

$$|\mathbf{r}'(s)|^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

或

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

这里, 把  $ds$  看成是弧长的微元长度, 则  $dx, dy, dz$  分别是  $ds$  在三个坐标轴上的投影, 因此上式可以看成是微元形式的勾股定理.

若记单位切向量  $\mathbf{r}'(s)$  的三个方向余弦为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 则有

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma.$$

习惯上, 把  $\mathbf{r}$  对弧长参数  $s$  的微商记成

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

如此等等. 在物理学中, 向量对时间参数  $t$  的微商往往也是采用上述符号. 除非特别说明, 本教材中的 “ $t$ ” 仅仅表示一般的参变量.

#### 例 9.4.2 求螺旋线

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = kt$$

在  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一段弧长.

**解** 由弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + k^2}. \end{aligned}$$

4° 曲率 以下总假定正则曲线  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  具有连续的二阶导数.

由于切向量  $\dot{\mathbf{r}}$  是单位向量:  $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 1$ , 故有

$$\frac{d}{ds}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

上式说明只要  $\ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  和切向量  $\dot{\mathbf{r}}$  是正交的, 因此它是  $L$  的一个法向量, 称为  $L$  的主法向量. 记

$$\boldsymbol{\kappa} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}},$$

它与  $\dot{\mathbf{r}}$  也是正交的, 称其为  $L$  的副法向量. 不难看出

$$|\boldsymbol{\kappa}| = |\ddot{\mathbf{r}}|.$$

设曲线  $L$  上一段长度为  $\Delta s$  的弧为  $\widehat{M_1 M_2}$ , 弧上切向量总转角为  $\Delta\alpha$ . 则  $\bar{\kappa} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$  就是这个弧段上单位弧长转动角的平均值,  $\bar{\kappa}$  的大小就描述了这一段弧的弯曲程度, 称为这段弧的平均曲率.

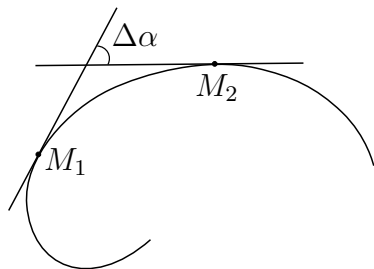


图 9.14

记  $L$  上两点  $M_1$  和  $M_2$  处的单位切向量为  $\dot{\mathbf{r}}_1$  和  $\dot{\mathbf{r}}_2$ , 则

$$|\Delta\alpha| \approx |\Delta\dot{\mathbf{r}}|,$$

所以

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\dot{\mathbf{r}}}{\Delta s} \right| = |\ddot{\mathbf{r}}| = |\boldsymbol{\kappa}|$$

就定义为曲线的曲率.

利用一般参数与弧长参数的关系, 可以推导出曲率依赖于一般参数的表示, 因为

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

于是主法向量为

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \left( \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} + \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) \mathbf{r}'(t) \right) \\ &= \frac{1}{(\mathbf{r}'(t))^2} \mathbf{r}''(t) + \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) \mathbf{r}'(t). \end{aligned}$$

虽然, 主法向量的表达形式有些烦琐, 不过副法向量的表达形式就简洁得多. 由于  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ , 所以

$$\boldsymbol{\kappa} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

在一般参数表示下, 曲线的曲率的表达式为

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

特别, 对于直线:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . 显然有  $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$ , 故  $\kappa = 0$ . 反之, 如果曲线  $L$  的曲率恒为零, 那么它一定是一条直线.

**例 9.4.3** 求下列螺旋线的曲率

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt \quad (a, b > 0).$$

**解** 求导得

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t), z'(t)) &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ (x''(t), y''(t), z''(t)) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \end{aligned}$$

故

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = a\sqrt{a^2 + b^2},$$

所以

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

设  $L$  是  $Oxy$  平面上的参数曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

放在  $Oxyz$  空间中  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , 因此

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) \times (x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j})}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

即, 副法向量始终与  $z$  轴平行. 称

$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$

为  $L$  的曲率. 注意, 平面曲线的曲率不取绝对值,  $\kappa$  的正负, 分别表示曲线的弯曲方向.

由于

$$\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t)} = \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)',$$

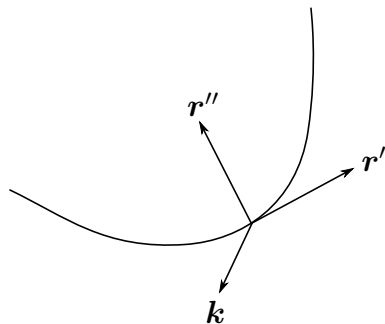


图 9.15



所以当  $\kappa > 0$  时, 切线斜率呈增加趋势, 这时  $\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{k}$  成右手系, 所以  $\mathbf{r}''(t)$  指向曲线凹的一侧.

当  $\kappa < 0$  时, 切线斜率呈减少趋势, 这时  $\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{k}$  成左手系, 所以  $\mathbf{r}''(t)$  还是指向曲线凹的一侧.

特别, 取弧长参数时, 就知道主法向量总是指向曲线凹的一侧. 一个重要的特例是曲线由显函数  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 给出时,

$$\kappa = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}} \mathbf{k},$$

$$\kappa = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}.$$

$\kappa > 0$  时,  $f''(x) > 0$ , 曲线呈凸形;  $\kappa < 0$  时,  $f''(x) < 0$ , 曲线呈凹形.

**例 9.4.4** 设  $L$  是摆线:  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  ( $a > 0$ ). 求  $L$  的曲率.

解

$$\kappa = \frac{|a^2(1 - \cos t) \cos t - a^2 \sin^2 t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} = \frac{1}{4a |\sin \frac{t}{2}|}.$$

## 9.4.2 参数曲面

设参数曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

或

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (u, v) \in D$$

在参数曲面上, 如果固定一个  $v$  值, 让  $u$  在其允许值内变化, 则  $\mathbf{r}(u, v)$  的轨迹就是曲面上的一条曲线, 称为  $u$  曲线. 同样可以定义  $v$  曲线. 整张曲面就是由这些  $u$  曲线和  $v$  曲线交织而成的. 例如球面

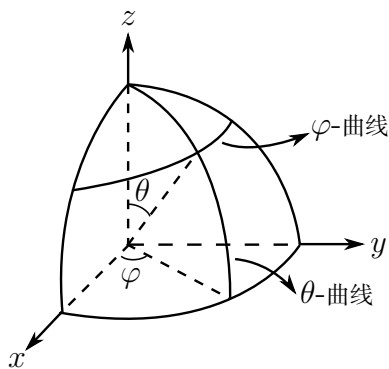


图 9.16

$$x(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z(\theta, \varphi) = R \cos \theta$$

其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 当  $\theta$  固定时所得到的  $\varphi$  曲线就是纬线, 而  $\varphi$  固定时所得的  $\theta$  曲线就是经线.

1° 切平面 设  $\mathbf{r}(u, v)$  有连续的偏微商

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_u &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_v &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

注意到  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  和  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  分别是过  $M_0$  的  $u$ -曲线和  $v$ -曲线的切向量.

作一条完全位于曲面上并过  $M_0$  的曲线  $L$ , 其方程是可以看成是  $uv$  平面区域  $D$  中曲线:  $u = u(t), v = v(t)$  经变换  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  映成的空间曲线

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = x(u(t), v(t))\mathbf{i} + y(u(t), v(t))\mathbf{j} + z(u(t), v(t))\mathbf{k},$$

其中  $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$ . 对  $t$  求导, 得曲线  $L$  在  $M_0$  的切向量如下

$$\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)v'(t_0),$$

它是  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  与  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  的线性组合, 因此与  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  和  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  共面. 因此, 只要  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  和  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  不共线, 则它们所在的平面就是曲面在  $M_0$  处的切平面, 切平面的法向量是  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ .

2° 法向量场 因为  $M_0$  的任意性, 所以曲面上有一个连续变化的法向量场

$$\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}.$$

一般情况下, 除了在有限个点或曲线段上以外, 我们假设  $\mathbf{r}$  有连续的偏微商, 且  $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) \neq 0$ , 并称这样的曲面是光滑曲面或逐段光滑曲面.

注意到法向量  $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$  的长度实际上是曲面在一点处的切平面上以  $\mathbf{r}'_u$  和  $\mathbf{r}'_v$  为边的平行四边形的面积. 它可看成是在一点附近曲面面积的近似. 利用公式

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 = |\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2$$

并记

$$E = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$$

$$G = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v',$$

因此

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

通常, 记

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$$

为曲面的单位法向量.

有了法向量, 过曲面上一点  $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  的切平面方程自然就会表示出来. 设  $(X, Y, Z)$  表示切平面上动点的坐标, 这样, 曲面在  $M$  处的切平面方程是

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(X - x(u, v)) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(Y - y(u, v)) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(Z - z(u, v)) = 0,$$

特别, 对于由二元函数  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) 所表示的曲面, 它可以看成是参数方程的一个特例:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

这里,  $x, y$  视为参变量. 若  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$  都在  $D$  连续, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x &= (1, 0, f'_x), & \mathbf{r}'_y &= (0, 1, f'_y), \\ \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y &= (-f'_x, -f'_y, 1), \end{aligned}$$

显然  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , 因此它是一张光滑曲面. 此外, 对于  $D$  内任意两个不同点  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , 恒有  $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ , 即显式曲面总是不自交的.

有关参数曲面的面积计算, 将在 §11.2.1 中讨论.

### 9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

以下均假设所涉及的函数是可微的.

**1. 平面隐式曲线** 平面上隐式曲线由方程  $F(x, y) = 0$  给出. 这里假设  $\text{grad } F = F'_x \mathbf{i} + F'_y \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$  (等价于  $F'_x, F'_y$  不全为零, 或者  $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$ ). 不妨设其隐函数为  $y = f(x)$ , 因此, 过曲线上一点  $(x, y)$  的切线方程为

$$(Y - y) - (X - x)f'(x) = 0,$$

这里  $X, Y$  表示且线上点的坐标. 曲线在  $(x, y)$  处的曲率为

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

而曲线的拐点的条件为  $f''(x) = 0$ .

将  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$  代入上面各式, 因此过曲线上一点  $(x, y)$  的切线方程为

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y = 0,$$

从中得到曲线在  $(x, y)$  的切线与梯度  $\text{grad } F$  垂直. 曲率可表示为

$$\kappa = \frac{-F'^2_y F''_{xx} + 2F'_x F'_y F''_{xy} - F'^2_x F''_{yy}}{\left(\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}\right)^3}.$$

而拐点满足的条件等价于

$$F_y'^2 F_{xx}'' - 2F_x' F_y' F_{xy}'' + F_x'^2 F_{yy}'' = 0.$$

如果隐函数由  $x = g(y)$  表示, 推导出来的切线方程、曲率以及拐点满足的条件仍然如此. 由此可见, 直接利用  $F(x, y)$  的各阶导数给出的隐式曲线的切线、曲率和拐点满足的条件关于  $x, y$  是完全对称的, 并不需要区分  $x$  和  $y$  哪个是自变量, 哪个是因变量.

进一步观察不难发现, 由方程  $F(x, y) = 0$  确定的隐式曲线是函数  $u = F(x, y)$  在  $u = 0$  的等值线. 对一般的等值线  $F(x, y) = c$ , 上述讨论一样成立, 只需用  $F(x, y) - c$  代替  $F(x, y)$ , 而两者有着相同的导函数. 所以在任意等值线  $F(x, y) = c$  上一点处的切线方程、曲率和拐点满足的条件等表达式是一样的. 特别, 等值线在一点  $(x, y)$  的切线也垂直于函数  $F(x, y)$  在这一点上的梯度  $\text{grad } F$ , 也就是  $\text{grad } F$  是平面隐式曲线的法向量.

在 §9.2.3 中, 我们已经知道  $z = F(x, y)$  沿单位向量  $\mathbf{e}$  的方向导数满足

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{e}} = \text{grad } F \cdot \mathbf{e}.$$

当  $\mathbf{e}$  与梯度方向一致时,  $F(x, y)$  的方向导数最大, 即函数值沿等值线的梯度 (法向量) 方向变化最大.

**2. 空间隐式曲面** 设  $F(x, y, z)$  是定义在区域  $V \subset \mathbb{R}^3$  上且有连续的偏导数,

$$F(x, y, z) = 0$$

给出了空间中一张隐式曲面. 若  $F(x, y, z)$  的梯度  $\text{grad } F \neq 0$ . 则根据隐函数存在定理, 在曲面上一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (即  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ) 附近确定了一个连续可导的隐函数. 不难看出, 隐式曲面也就是函数  $u = F(x, y, z)$  在  $u = 0$  的等值面. 考虑曲面上过  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的任意一条光滑曲线  $\Gamma$ , 其参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

其中  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ ,  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . 由于  $\Gamma$  在曲面上, 故必有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

等式两端对  $t$  求导, 并取  $t = t_0$ , 就得到

$$F_x'(M_0)x'(t_0) + F_y'(M_0)y'(t_0) + F_z'(M_0)z'(t_0) = 0.$$

上式表明, 在  $M_0$  的梯度

$$\text{grad } F(M_0) = F_x'(M_0)\mathbf{i} + F_y'(M_0)\mathbf{j} + F_z'(M_0)\mathbf{k}$$

与曲面上任意一条光滑曲线  $\Gamma$  在  $M_0$  的切向量  $\mathbf{r}'(t) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$  垂直. 所以梯度  $\text{grad } F(M_0)$  就是曲面在  $M_0$  的法向量. 以  $\text{grad } F(M_0)$  为法向量的并过  $M_0$  的

平面, 就是曲面在  $M_0$  的切平面. 这样, 我们就得到了曲面上任意一点的切平面的方程

$$F'_x(M_0)(X - x_0) + F'_y(M_0)(Y - y_0) + F'_z(M_0)(Z - z_0) = 0.$$

这里  $(X, Y, Z)$  是切平面上的动点的坐标.

类似平面上隐式曲线情形, 上述结果对任何等值面  $F(x, y, z) = c$  都是成立的, 只要用  $F(x, y, z) - c$  代替  $F(x, y, z)$  即可, 它们有共同的导函数. 因此在等值面  $F(x, y, z) = c$  上一点处的法向量仍然是函数  $F(x, y, z)$  的梯度  $\text{grad } F$ , 而且  $F(x, y, z)$  沿等值面法向量 (即梯度) 方向的方向导数取到最大值.

3° 空间中隐式曲线. 空间中隐式曲线由下列联立方程组表示

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

这里我们总是假设函数  $F(x, y, z), G(x, y, z)$  在空间区域  $V \subset \mathbb{R}^3$  上可微, 且梯度不为零:  $\text{grad } F \neq 0, \text{grad } G \neq 0$ . 空间中隐式曲线实际上是方程  $F(x, y, z) = 0$  和  $G(x, y, z) = 0$  分别表示的两张曲面的交线. 设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为曲线上任意一点, 因为曲线在两个曲面上, 所以曲线在  $M_0$  的切向量垂直于两个平面的法向量

$$\text{grad } F(M_0) = F'_x(M_0)\mathbf{i} + F'_y(M_0)\mathbf{j} + F'_z(M_0)\mathbf{k}$$

$$\text{grad } G(M_0) = G'_x(M_0)\mathbf{i} + G'_y(M_0)\mathbf{j} + G'_z(M_0)\mathbf{k}$$

曲线的切向量就可以表示为

$$\mathbf{l} = \text{grad } F \times \text{grad } G = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\mathbf{i} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\mathbf{j} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\mathbf{k}.$$

只要  $\text{grad } F$  和  $\text{grad } G$  不共线 (即上述向量的三个分量不同时为零).

例 9.4.5 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases}$$

在  $M_0(a, a, \sqrt{2}a)$  处的切线和法平面方程.

解 方程组表示的曲线是球面与柱面的交线. 球面和柱面在  $M_0$  处的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = F'_x(M_0)\mathbf{i} + F'_y(M_0)\mathbf{j} + F'_z(M_0)\mathbf{k} = 2a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} + 2\sqrt{2}a\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_2 = 2a\mathbf{j}$$

因此, 曲线在  $M_0$  处的切向量为

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -4\sqrt{2}a^2\mathbf{i} + 4a^2\mathbf{k},$$

从而, 所求的切线方程是

$$\frac{x-a}{-\sqrt{2}} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\sqrt{2}a}{1},$$

所求的法平面方程是

$$-\sqrt{2}(x-a) + 0(y-a) + (z-\sqrt{2}a) = 0,$$

化简得

$$\sqrt{2}x - z = 0.$$

### 习题 9.4

1. 设  $\mathbf{r} = (a \sin t, -a \cos t, bt^2)$ ,  $a, b$  是常数, 求  $\mathbf{r}'(t)$  和  $\mathbf{r}''(t)$ .
2. 设  $\mathbf{r}(t)$  是单位向量, 试证明  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \perp \mathbf{r}$ , 并说明它的几何意义.
3. 证明曲线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  的切线与  $Oz$  轴成定角.
4. 设  $\mathbf{r} = \left(\frac{t}{1+t}, \frac{1+t}{t}, t^2\right)$  ( $t > 0$ ), 判断它是不是简单曲线, 是不是光滑曲线, 并求出它在  $t = 1$  时的切线方程和法平面方程.
5. 求下列曲线的切线与法平面方程
  - (1)  $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$ , 在  $t = \frac{\pi}{4}$ ;
  - (2)  $x = t - \cos t, y = 3 + \sin^2 t, z = 1 + \cos 3t$ , 在  $t = \frac{\pi}{2}$ .
6. 求下列曲面在所示点处的切平面与法线方程.
  - (1)  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ , 在  $(u_0, v_0)$ ;
  - (2)  $x = a \sin \theta \cos \varphi, y = b \sin \theta \sin \varphi, z = c \cos \theta$ , 在  $(\theta_0, \varphi_0)$ .
7. 设两条隐式曲线  $F(x, y) = 0$  与  $G(x, y) = 0$  在一点  $(x_0, y_0)$  相交, 求在交点处两条隐式曲线切线的夹角. 这里  $F(x, y), G(x, y)$  是可微函数.
8. 求下列曲面在指定点的切平面和法线方程.
  - (1)  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ , 在点  $(3, 4, -7)$ ;
  - (2)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 在点  $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ ;
  - (3)  $e^z - z + xy = 3$ , 在点  $(2, 1, 0)$ ;
  - (4)  $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ , 在点  $(2, 3, 6)$ .
9. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上平行于平面  $x - y + 2z = 0$  的切平面方程.
10. 在曲面  $z = xy$  上求一点, 使这点处的法线垂直于平面  $x + 3y + z = 0$ , 并写出这个

法线方程.

11. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  上某点  $M$  处的切平面  $\pi$  的方程, 使  $\pi$  过已知直线  $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$ .

12. 设直线  $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  与曲面:  $z = x^2 + y^2$  相切于点  $(1, -2, 5)$ , 求  $a, b$  之值.

13. 试证曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = ax$  与曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = by$  互相正交.

14. 证明曲面  $x + 2y - \ln z + 4 = 0$  和  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$  在点  $(2, -3, 1)$  处相切 (即有公共的切平面).

15. 证明曲面  $z = xe^{x/y}$  的每一切平面都通过原点.

16. 求下列平面曲线在给定点的切线和法线方程

(1)  $x^3y + xy^3 = 3 - x^2y^2$ , 在点  $(1, 1)$ ;

(2)  $\cos xy = x + 2y$ , 在点  $(1, 0)$ .

17. 求下列曲线在给定点的切线和法平面方程

(1)  $\begin{cases} y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$  在点  $(1, 3, 4)$ ;

(2)  $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$  在点  $(-2, 1, 6)$ .

18. 设方程组  $\begin{cases} pu + qv - t^2 = 0, \\ qu + pv - s^2 = 0 \end{cases}$  ( $p^2 - q^2 \neq 0$ ) 确定了隐函数  $\begin{cases} u = u(s, t), \\ v = v(s, t) \end{cases}$  以及

反函数  $\begin{cases} s = s(u, v), \\ t = t(u, v). \end{cases}$  求证:

$$\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{p^2}{p^2 - q^2}.$$

## §9.5 多变量函数的 Taylor 公式与极值

在一个变量情况下, 函数  $f(x)$  在给定点  $x_0$  附近可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

即函数  $f(x)$  可由一次多项式  $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  近似. 如果函数有更高阶的导数存在, 比如存在  $n$  阶导数, 那么 Taylor 定理告诉我们,  $f(x)$  可用  $n$  次多项式近似. 当  $n + 1$  阶导数存在且有界时, 我们还可以更精确地估计出近似的阶.

对于多个变量的情形, 我们希望有类似的结果. 以二元函数  $f(x, y)$  为例, 用“增量”的语言说, 就是希望函数值  $f(x+h, y+k)$  能够近似为  $h = \Delta x = x - x_0$ ,  $k = \Delta y = y - y_0$  的一个多项式. 这就是所谓的二元函数的 Taylor 公式.

### 9.5.1 二元函数的微分中值定理

在推导二元函数的 Taylor 公式之前, 首先推导一个类似于一元函数微分中值定理的结果. 这个结果把函数的差分  $f(x+h, y+k) - f(x, y)$  与函数的偏导数  $f'_x$  和  $f'_y$  联系起来.

为此我们假设函数  $f(x, y)$  在一个凸区域  $D$  内有连续的偏导数. 所谓凸区域  $D$  是指这样的区域, 连接  $D$  中任何两点的直线段仍然在  $D$  中.

记连接点  $(x+h, y+k)$  和  $(x, y)$  的线段为  $L$ , 则  $L$  上的点可以用参数表示  $\{(x+th, y+tk) \mid t \in [0, 1]\}$ , 所以函数限制在线段  $L$  上就是一个一元函数

$$\varphi(t) = f(x+th, y+tk), \quad t \in [0, 1].$$

它满足  $\varphi(0) = f(x, y)$ ,  $\varphi(1) = f(x+h, y+k)$ . 对  $\varphi$  使用微分中值定理, 得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta),$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 利用

$$\varphi'(t) = hf'_x(x+th, y+tk) + kf'_y(x+th, y+tk),$$

上式可以表示为下列二元函数的中值公式

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf'_y(x+\theta h, y+\theta k).$$

注意到  $(\xi, \zeta) = (x+\theta h, y+\theta k)$  是线段  $L$  上的一个点. 因此, 我们有

**定理 9.22** 设函数  $f(x, y)$  在一个凸区域  $D$  内有连续的偏导数, 则对  $D$  内任何两点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 存在位于连接  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  的直线段上一点  $(\xi, \zeta)$  使得

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (x_2 - x_1)f'_x(\xi, \zeta) + (y_2 - y_1)f'_y(\xi, \zeta).$$



只要在“增量”表示中取  $(x, y) = (x_1, y_1)$ ,  $h = x_2 - x_1$ ,  $k = y_2 - y_1$ ,  $(\xi, \zeta) = (x_1 + \theta(x_2 - x_1), y_1 + \theta(y_2 - y_1))$  即可证明. 从中值定理可以直接得到下列推论:

**推论 9.23** 如果函数  $f(x, y)$  在一个凸区域内偏导数恒为零  $f'_x = f'_y = 0$ , 那么该函数一定是一个常值函数. 事实上, 只要  $D$  是平面上的区域(道路连通的开集), 那么这个结论也成立.

上述关于二元函数的微分中值定理很容易推广到多变量函数情形, 只要把平面上的线段推广到高维情形即可.  $n$  维空间中的两点  $(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)$  和  $(x_1, \dots, x_n)$  之间的线段上的点可用参数表示:  $\{(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) : t \in [0, 1]\}$ . 如果这个线段落入  $n$  元函数  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  定义的区域, 那么函数限制在这个线段上就化为一个一维问题  $\varphi(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $f$  在两点  $(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)$  和  $(x_1, \dots, x_n)$  的差值满足

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

由此出发,  $n$  元函数的微分中值定理与二元情形没有任何本质差别.

需要特别指出的是, 对于向量值函数, 相应的微分中值定理是不存在的. 例如考虑  $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  的映射

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \text{ 或 } x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, \pi]$$

如果存在  $\theta \in (0, \pi)$  使得

$$\mathbf{r}(\pi) - \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}'(\theta)(\pi - 0),$$

那么必有  $\sin \theta = \frac{2}{\pi}$ ,  $\cos \theta = 0$ . 这显然是不可能的.

然而, 对于一个向量值函数, 即一个从  $\mathbb{R}^n$  中的区域  $D$  到  $\mathbb{R}^m$  的映射

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$$

它的每个分量

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

都是  $D$  上的多元函数. 因此如果各种偏导数恒为零  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ . 则  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$  都是常数, 所以  $\mathbf{f}$  是  $\mathbb{R}^m$  中的常值向量.

### 9.5.2 二元函数的 Taylor 公式

多变量函数中值定理的推导, 为我们提供了推导多变量函数 Taylor 公式的方法.

设  $(x_0, y_0)$  是区域  $D$  的内点, 在  $(x_0, y_0)$  的一个(凸)邻域内(如圆形邻域或方形邻域)函数  $f(x, y)$  有连续的  $n + 1$  阶微商. 因此当  $(x, y)$  落在这个邻域内时, 连接两点的

直线也在邻域之中. 记  $h = x - x_0$ ,  $k = y - y_0$ , 对  $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$  求导得

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &= \mathcal{D}f(x_0 + th, y_0 + tk).\end{aligned}$$

这里我们引进了算符

$$\mathcal{D} = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}.$$

或者说  $\frac{d}{dt}$  作用在  $\varphi(t)$  上相当于  $\mathcal{D}$  作用在  $f(x_0 + th, y_0 + tk)$  上. 同理

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &\quad + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &= \mathcal{D}^2 f(x_0 + th, y_0 + tk).\end{aligned}$$

利用归纳法不难证明

$$\begin{aligned}\varphi^{(m)}(t) &= \sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!j!} h^i k^j \frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &= \mathcal{D}^m f(x_0 + th, y_0 + tk)\end{aligned}$$

这里对  $\mathcal{D}^m$ , 形式上采用二项展开

$$\mathcal{D}^m = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m = \sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!j!} h^i k^j \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j}.$$

于是, 对一元函数  $\varphi(t)$  在  $t = 0$  处做 Taylor 展开, 有下列 Maclaurin 公式

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

在上式中取  $t = 1$ , 就得到了二元函数的 Taylor 展开

$$f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{D}^m f(x_0, y_0) + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{D}^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1).$$

因为假设了  $f(x, y)$  有连续的  $n+1$  阶偏微商, 所以在  $(x_0, y_0)$  的领域内有界

$$\left| \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial^i x \partial^j y} \right| \leq M$$

这样当  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  时, 记  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ , 有

$$|R_n| \leq M(|h| + |k|)^{n+1} = o(\rho^n)$$

特别, 一阶 Taylor 展开的公式是

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + R_1.$$

二阶 Taylor 展开的公式是

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} k \\ & + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_2, \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

**例 9.5.1** 将函数  $f(x, y) = e^x \cos y$  在  $(0, 0)$  作 Taylor 展开至二次项.

**解** 先计算所给函数及其偏微商在点  $(0, 0)$  的值.

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, & f'_x(0, 0) &= 1, & f'_y(0, 0) &= 0, \\ f''_{xx}(0, 0) &= 1, & f''_{xy}(0, 0) &= 0, & f''_{yy}(0, 0) &= -1. \end{aligned}$$

即得

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_2.$$

上述推导完全可以推广到  $n$  元函数  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  的情形, 其中算符为

$$\mathcal{D} = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

并满足

$$\mathcal{D}^m = \sum_{i_1 + \dots + i_n = m} \frac{m!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

### 9.5.3 二元函数的极值

类似单变量情形, 这里给出二元函数极值的定义.

**定义 9.24** 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  中有定义,  $M_0(x_0, y_0) \in D$ . 若在  $M_0$  的某个邻域中, 恒有

$$f(x, y) \leq (\text{或} \geq) f(x_0, y_0),$$

则称  $M_0(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  的一个极大(或极小)值点,  $f(x_0, y_0)$  称为  $f(x, y)$  的一个极大(或极小)值. 函数的极大值点和极小值点统称为函数的极值点, 极大值和极小值统称为极值.

若  $f(x, y)$  在  $D$  中有偏导数,  $M_0(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  的极值点, 则  $x_0 (y_0)$  是一元函数  $f(x, y_0) (f(x_0, y))$  的极值点, 故有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

所以, 函数在极值点的偏微商为零. 但反之不然. 例如,  $f(x, y) = xy$ , 在点  $(0, 0)$  并不是它的极值点, 但  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ .

使函数一阶偏导数都为零的点, 称为函数的 **驻点**, 因此驻点是极值点的必要条件.

为了在驻点中进一步甄别极值点, 需要考虑函数在驻点处的二阶微商. 设  $M_0(x_0, y_0)$  是函数的驻点 (所以一阶偏导数为零), 根据 Taylor 展开, 有

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2)$$

其中

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

$h = x - x_0, k = y - y_0, \rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ . 记

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

它是  $h, k$  的齐次的二次多项式 (即  $Q$  满足  $Q(\lambda h, \lambda k) = \lambda^2 Q(h, k)$ ), 称这样类型的多项式为二次型. 因为二次型  $Q$  是展开式中的主要部分, 所以它在  $(x_0, y_0)$  附近的正负就决定了  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  的正负. 这里我们假设系数  $A, B, C$  不全为零 (即各种二阶偏导数不全为零). 因此判断二次型的正负就成为求极值的关键.

对于二次型  $Q(h, k)$  可做下列分类:

1° 对任何非零的  $(h, k)$ ,  $Q$  的取值恒为正 (或恒为负), 称这样的二次型为 **正定的** (或**负定的**). 不管那种情形, 统称为 **定的**.

2°  $Q$  可以取到不同符号的值, 即对某些  $(h, k)$  取正值, 而对另一些  $(h, k)$  取负值, 称这样的二次型为 **不定的**.

3°  $Q$  对某些非零的  $(h, k)$  取值为零, 其他地方取值恒为正 (或恒为负). 称这样的二次型为 **半正 (负) 定的**. 不管那种情形, 统称为 **半定的**.

下列定理给出如何判别二次型的类型.

**定理 9.25** 记二次型  $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$  的判别式为  $\Delta = AC - B^2$ , 则

1° 二次型  $Q(h, k)$  是定的, 充分必要条件是  $\Delta > 0$ . 此时, 如果  $A > 0$  (当然也有  $C > 0$ ), 它就是正定的, 否则它是负定的;

2° 二次型  $Q(h, k)$  是不定的, 充分必要条件是  $\Delta < 0$ ;

3° 二次型  $Q(h, k)$  是半定的, 充分必要条件是  $\Delta = 0$ .

这些结论的证明是纯代数的. 例如对结论 1°, 如果  $Q$  是正定的, 即  $Q > 0$  对任何  $(h, k)$  成立. 特别有  $Q(h, 0) = Ah^2 > 0$ , ( $h \neq 0$ ), 所以  $A > 0$  (同理  $C > 0$ ). 又因为

$$Q = \frac{1}{A} ((Ah + Bk)^2 + \Delta k^2)$$

所以限制在直线  $Ah + Bk = 0$  上,  $Q > 0$  就推得  $\Delta > 0$ .

反之, 如果  $\Delta > 0$ , 那么显然  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ , 由上式可以看出, 当  $A > 0$  时,  $Q > 0$ .

有了这个判别法, 就有下列结论:

**定理 9.26** 设  $(x_0, y_0)$  是函数  $f(x, y)$  的一个驻点, 在下列展开式中

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2)$$

1° 当  $\Delta > 0$ ,  $A > (<)0$  时, 即  $Q$  正 (或负) 定,  $(x_0, y_0)$  是函数  $f$  的极小 (或极大) 值点;

2° 当  $\Delta < 0$  时, 即  $Q$  是不定的,  $(x_0, y_0)$  不是函数  $f$  的极值点;

3° 当  $\Delta = 0$  时, 即  $Q$  是半定的, 无法判断  $(x_0, y_0)$  是不是函数  $f$  的极值点.

**证明** 设  $h, k$  不全为零, 引进变量

$$u = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h}{\rho}, \quad v = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{k}{\rho}$$

则

$$Q(h, k) = \rho^2 \varphi(u, v) = \rho^2 (Au^2 + 2Buv + Cv^2)$$

其中  $\varphi(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$  是定义在单位圆周  $u^2 + v^2 = 1$  上的连续函数. 当  $Q$  正定时,  $\varphi(u, v) > 0$  对圆周上任何点  $(u, v)$  成立. 而单位圆周是一个有界闭集. 所以  $\varphi(u, v)$  在圆周上的最小值  $m$  也是正的, 且  $Q \geq m\rho^2$ , 即

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2) \geq \rho^2 \left( \frac{1}{2}m + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right).$$

注意到上式右端括号内的值当  $\rho$  充分小时, 一定是正的, 所以有  $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ . 即  $(x_0, y_0)$  是极小值点. 对于负定的情形, 证明是完全类似的.

对于结论 2°, 因为  $Q$  是不定的, 所以存在点  $(h_1, k_1)$ ,  $(h_2, k_2)$ , 使得

$$Q(h_1, k_1) = \rho_1^2 \varphi(u_1, v_1) > 0, \quad Q(h_2, k_2) = \rho_2^2 \varphi(u_2, v_2) < 0$$

上述条件等价于  $\varphi(u_1, v_1) > 0$ ,  $\varphi(u_2, v_2) < 0$ , 所以存在一个数  $m$  使得

$$\varphi(u_1, v_1) > m > 0, \quad \varphi(u_2, v_2) < -m < 0$$

即

$$Q(h_1, k_1) > m\rho_1^2, \quad Q(h_2, k_2) < -m\rho_2^2$$

令  $h = th_1$ ,  $k = tk_1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 则  $\rho = t\rho_1$ ,  $Q(h, k) = t^2Q(h_1, k_1) > mt^2\rho_1^2$ ,

$$f(x_0 + th_1, y_0 + tk_1) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}Q(th_1, tk_1) + o(t^2\rho_1) > t^2 \left( \frac{1}{2}m + \frac{o(t^2)}{t^2\rho_1^2} \right).$$

所以对充分小的  $t$ , 上式右端括号内大于零. 也就是  $f(x_0 + th_1, y_0 + tk_1) - f(x_0, y_0) > 0$ . 同样的道理, 存在一个充分小的  $t$ , 使得  $f(x_0 + th_2, y_0 + tk_2) - f(x_0, y_0) < 0$ .

综上所述, 在  $(x_0, y_0)$  的任意小的邻域内, 既有大于  $f(x_0, y_0)$  的值, 又有小于  $f(x_0, y_0)$  的值, 所以  $(x_0, y_0)$  不是极值点.

关于半正定情形无法判断, 在此不再讨论.  $\square$

**例 9.5.2** 求函数  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的所有极值点.

**解** 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

得驻点

$$M_1(1, 0), M_2(1, 2), M_3(-3, 0), M_4(-3, 2).$$

再作出所给函数的二阶偏微商

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, f''_{xy}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点  $M_1(1, 0)$ ,  $A = 12 > 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 6$ ,  $AC - B^2 = 72 > 0$ . 故  $M_1$  是极小值点. 极小值为  $f(1, 0) = -5$ .

在点  $M_2(1, 2)$ ,  $A = 12$ ,  $B = 0$ ,  $C = -6$ ,  $AC - B^2 = -72 < 0$ . 因而  $M_2$  不是极值点.

在点  $M_3(-3, 0)$ ,  $A = -12$ ,  $B = 0$ ,  $C = 6$ ,  $AC - B^2 = -72 < 0$ . 因而  $M_3$  也不是极值点.

在点  $M_4(-3, 2)$ ,  $A = -12 < 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = -6$ ,  $AC - B^2 = 72 > 0$ . 故  $M_4$  是极大值点. 极大值为  $f(-3, 2) = 31$ .

**例 9.5.3** 求函数  $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$  在区域  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq \pi$  上的最大值与最小值.

**解** 已知函数的定义域为一个闭三角形. 由连续函数的性质可知函数  $z$  在这个区域上一定达到最大值与最小值.

求偏微商并令其为零可得方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ &= \sin y \sin(2x+y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ &= \sin x \sin(x+2y) = 0.\end{aligned}$$

但在三角形的内部  $\sin x$  与  $\sin y$  都不为零, 所以

$$\sin(2x+y) = 0, \quad \sin(x+2y) = 0,$$

且有  $0 < 2x+y < 2\pi$ ,  $0 < x+2y < 2\pi$ . 于是必须

$$2x+y = \pi, \quad x+2y = \pi.$$

解之可得驻点为

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

函数在驻点的值为  $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \sin^3 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ . 因为函数在三角形的边界上的值为零, 所以函数在闭三角形上的最大值为  $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ; 而最小值  $z = 0$  却在三角形的三条边上任何一点取得.

注记 二次型是线性代数中的内容之一. 对于  $n$  个变元  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  来说, 二次型的一般形式是

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

这里, 系数  $a_{ij}$  满足对称性:  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . 它的正(负)定性、半正(负)定性以及不定性的定义与本节的定义是一样的, 只不过把两个变元  $(h, k)$  换成  $n$  个变元  $(x_1, \dots, x_n)$  而已. 正(负)定性、半(负)定性以及不定性是对二次型的一种分类, 当然, 对于  $n$  个变元的二次型, 如何判断是哪种型, 要远比两个变元的情形复杂. 有关二次型的性质和分类, 读者可参阅任何一本关于线性代数的教科书.

对于具有连续的二阶偏导数的  $n$  元函数  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ , 在驻点 (即  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ) 处是否是极值点, 则要考虑由  $f$  的所有二阶偏导数  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  作为系数的二次型的正(负)定性、半(负)定性以及不定性. 在此我们不作详细介绍, 读者可在学到二次型的具体内容时, 仿照本节的讨论, 给出判别极值点的具体细节.

#### 9.5.4 条件极值

首先讨论一个具体的例子.

**例 9.5.4** 求保持固定体积  $V_0$  但表面积最小的圆柱体.

**解** 设圆柱体底面半径为  $r$ , 高为  $h$ , 故圆柱体的表面积是

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

但是其中的半径和高受到体积固定值的约束, 即  $r, h$  必须满足

$$\varphi(r, h) = \pi r^2 h - V_0 = 0$$

所以问题化为求  $S = S(r, h)$  在条件  $\varphi(r, h) = 0$  下的最小值问题. 对于这个具体例子, 可以从方程  $\varphi = 0$  中解出  $h$  是  $r$  的函数  $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ , 代入  $S(r, h)$  得

$$S(r) = S\left(r, \frac{V_0}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$$

因此, 由  $S'(r) = 0$  解得

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}},$$

再由  $S''(r_0) > 0$  可知,  $S(r)$  在  $r_0$  取到极小值, 也是最小值 (因为只有一个极值点且在端点  $r \rightarrow 0^+$ ,  $r \rightarrow +\infty$  函数值趋于无穷). 此时

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi r_0^2} = 2r_0.$$

所以, 对于固定体积的圆柱体, 当高与底面直径相等时表面积最小.

对一般情形, 设函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

有连续的微商, 方程

$$\varphi(x, y) = 0$$

给出  $D$  中一条光滑曲线  $L = \{(x, y) | \varphi(x, y) = 0\}$ . 所谓**条件极值** 就是  $f(x, y)$  限制在曲线  $L$  上的极值问题, 也就是函数  $f(x, y)$  在限制条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的极值问题.

如果方程  $\varphi(x, y) = 0$  存在隐函数  $y = y(x)$ , 那么  $f(x, y)$  限制在  $L$  上就为

$$z = z(x) = f(x, y(x))$$

这样条件极值就变成了一元函数  $z = z(x)$  的极值问题. 设  $x = a$  是它的一个驻点, 记  $b = y(a)$ , 因此  $\varphi(a, b) = 0$ , 则

$$\begin{aligned} z'(a) &= f'_x(a, b) + f'_y(a, b)y'(a) \\ &= f'_x(a, b) - f'_y(a, b) \frac{\varphi'_x(a, b)}{\varphi'_y(a, b)} = 0 \end{aligned}$$



这里, 我们用到了隐函数的导数

$$y'(x) = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}.$$

所以梯度  $\text{grad } f$  和  $\text{grad } \varphi$  的两个分量在  $(a, b)$  处比例相等, 也就是在  $(a, b)$  处,  $\text{grad } f$  和  $\text{grad } \varphi$  共线 (即平行). 记

$$\lambda = -\frac{f'_x(a, b)}{\varphi'_x(a, b)} = -\frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)}$$

这样, 可能的极值点  $(a, b)$  必须满足方程  $\varphi(a, b) = 0$  以及

$$f'_x(a, b) + \lambda\varphi'_x(a, b) = 0,$$

$$f'_y(a, b) + \lambda\varphi'_y(a, b) = 0.$$

也就是  $\text{grad } f(a, b) + \lambda \text{grad } \varphi(a, b) = 0$ .

注意到  $\text{grad } f$  与  $\text{grad } \varphi$  分别是  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  等值线的法向量 (见 §9.4.3), 因此, 法向量平行意味着  $f(x, y)$  的等值线簇  $f(x, y) = c$  中某一条与等值线  $\varphi(x, y) = 0$  不但相交, 而且在交点处相切 (见图 9.17).

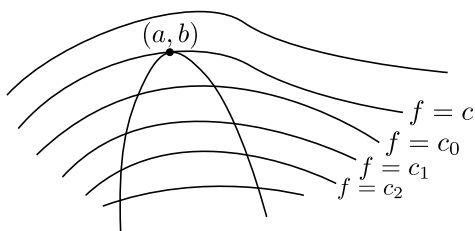


图 9.17

而在交点处对应的值  $c = f(a, b)$  就是可能的极大值或极小值, 因此方程

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \quad f'_y + \lambda\varphi'_y = 0.$$

与  $\varphi(x, y) = 0$  联立, 就可以用来决定相关常数交点  $(a, b)$  和  $\lambda$ .

我们将上述分析进一步归纳如下, 引进辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

则, 条件极值点应满足驻点方程

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

因此, 要求条件极值, 首先从上述方程中解出驻点, 然后再根据题意, 去判别哪些驻点是极值点. 这种方法称为 **Lagrange 乘数法**.

**例 9.5.5** 求在约束条件  $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$  下  $z = xy$  的极值.

**解** 作辅助函数

$$F(x, y) = xy + \lambda(x-1)^2 + \lambda y^2 - \lambda.$$

于是得到驻点方程

$$\begin{cases} y + 2\lambda(x-1) = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

解得驻点 (图9.13):  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

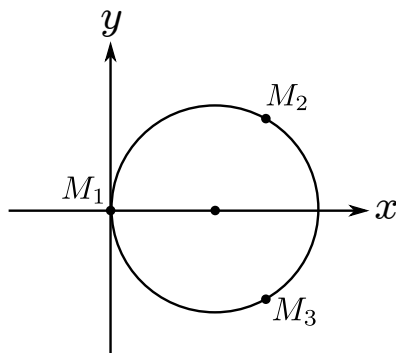


图 9.18

因为连续函数  $z = xy$  在闭集  $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0\}$  上取到最大值和最小值, 而且最大值点和最小值点都是驻点. 所以  $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  是最大值, 也是极大值, 而  $z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$  是最小值, 也是极小值.

这里必须指出, Lagrange 数乘法是通过隐函数的存在, 将条件极值转化为一般性的极值问题. 但是并不需要将隐函数真正解出来. 事实上, 如果能够求出一个代表整个条件  $\varphi(x, y) = 0$  的隐函数, 确实可以将隐函数代入  $f(x, y)$  后直接求极值 (如例 9.5.4). 但是, 一般情况下, 隐函数虽然存在, 但未必能够解出来. 即使能够解出来, 也可能只是局部的. 在例 9.5.5 中, 条件  $\varphi(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$  表示一个圆. 从中可解出  $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ , 但是只表示圆的一部分 (上半圆), 代入  $z = xy$  后, 只能求出驻点  $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . 要想完整地考虑极值, 还需解出另一部分 (下半圆) 的隐函数  $y = -\sqrt{1 - (x-1)^2}$ , 代入函数后求出驻点  $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . 考虑到交界处, 还要求出  $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$  (右半圆) 和  $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$  (左半圆). 然后将每一个隐函数分别代入  $z = f(x, y) = xy$ , 并逐一考虑极值问题, 才能保证所有的驻点都能够求出来.

因此, Lagrange 乘数法在解决条件极值问题时是十分有效的. 将 Lagrange 乘数法推广到更多变量情形并不复杂. 下面以两个具体的例子来代替一般性的推广.

**例 9.5.6** 求由原点到曲面  $(x-y)^2 - z^2 = 1$  的最短距离.

**解** 考虑原点到曲面上的点  $(x, y, z)$  的距离平方  $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , 则问题就化成求函数

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

在限制条件  $(x - y)^2 - z^2 = 1$  下的最小值. 按乘数法作辅助函数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x - y)^2 - z^2 - 1],$$

并求得驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x - y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda(x - y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0, \\ (x - y)^2 - z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

由第三方程得  $z(1 - \lambda) = 0$ . 但当  $\lambda = 1$  时容易看出, 这组方程不相容, 所以只能有  $z = 0$ . 从而解得

$$x = \pm \frac{1}{2}, \quad y = -x = \mp \frac{1}{2}.$$

于是点  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$  与  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  便可能是极值点. 由问题本身的意义知最小值一定是存在, 而函数在这两点上取相同的值  $\frac{1}{2}$ . 因此这两点都是函数的最小值点, 并得出所求的最短距离  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**例 9.5.7** 试将正数  $a$  分成  $n$  个正数的和, 使这  $n$  个正数的乘积最大.

**解** 设  $a$  分成的  $n$  个正数为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则问题就成为在约束条件  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$  下求函数

$$u = u(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

的最大值. 作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a),$$

得驻点方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= x_1 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0, \\ &\dots\dots, \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a &= 0. \end{aligned}$$

比较这些等式可知

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

代入约束条件求得

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}.$$

从题意知道最大值一定存在(因为函数  $u = u(x_1, \cdots, x_n)$  连续有一个上界  $a^n$ ), 而在满足约束条件点集的边界点(例如  $x_1 = 0, x_2 + \cdots + x_n = a$  或  $x_1 = a, x_2 = \cdots = x_n = 0$ ) 上,  $u = u(x_1, \cdots, x_n)$  的取值为零. 因此这个唯一可能的极值点就是使函数取最大值的点. 从而推得, 若将正数  $a$  分成  $n$  个相等的正数, 则这  $n$  个正数的乘积最大, 其最大值为  $(\frac{a}{n})^n$ .

从上述结果还可以得到一个重要的不等式. 由于

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

即  $n$  个正数的几何平均值不大于它们的算术平均值.

## 习题 9.5

- 求曲线  $F(t) = f(x + th, y + tk)$  在  $t = 1$  处的斜率, 其中
  - $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ ; (2)  $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^4$ .
- 求下列函数由点  $(x_0, y_0)$  变到  $(x_0 + h, y_0 + k)$  时函数的增量.
  - $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$ ,  $(x_0, y_0) = (5, 6)$ ;
  - $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ ,  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ .
- 对于函数  $f(x, y) = \sin \pi x + \cos \pi y$ , 用中值定理证明, 存在一个数  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$  使得

$$\frac{4}{\pi} = \cos \frac{\pi \theta}{2} + \sin \left[ \frac{\pi}{2}(1 - \theta) \right]$$

- 求下列函数的 Taylor 公式, 并指出展开式成立的区域.
  - $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$  在点  $(0, 0)$ , 直到三阶为止;
  - $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  在点  $(0, 0)$ , 直到四阶为止;
  - $f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$  在点  $(0, 0)$ , 直到  $n$  阶为止;
  - $\arctan \frac{1+x+y}{1-x+y}$  在点  $(0, 0)$ , 直到二阶为止;
  - $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  在点  $(0, 0)$  直到  $n$  阶为止;
  - $\frac{\cos x}{\cos y}$  在点  $(0, 0)$  展开到二阶为止;
  - $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  在点  $(1, -2)$  的 Taylor 展开式.

5. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^3 - 2xz + y = 0$  所确定的隐函数, 当  $x = 1, y = 1$  时  $z = 1$ , 试按  $(x - 1)$  和  $(y - 1)$  的乘幂展开函数  $z$  至二次项为止.

6. 证明, 球面三角学中的余弦定理

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \theta$$

在原点的邻域内转化为欧几里得几何中的余弦定理

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$$

7. 求下列函数的极值.

(1)  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  ( $x > 0, y > 0$ );

(2)  $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ ;

(3)  $f(x, y) = e^{2x}(x + 2y + y^2)$ ;

(4)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ , 求隐函数  $y = y(x)$  的极值.

(5)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ , 求隐函数  $z = z(x, y)$  的极值.

8. 求一个三角形, 使得它的三个角的正弦乘积最大.

9. 例9.5.5 中已经给出了在约束条件  $(x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$  下  $z = xy$  的极值, 请画出  $z = xy$  的等值线簇与曲线 (圆)  $(x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$  相交的情况, 并标出极值点的位置的示意图.

10. 求下列函数在指定条件下的极值

(1)  $u = x^2 + y^2$ , 若  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ;

(2)  $u = x + y + z$ , 若  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ ;

(3)  $u = \sin x \sin y \sin z$ , 若  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ ;

(4)  $u = xyz$ , 若  $x + y + z = 0$  且  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

11. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值.

(1)  $z = x^2 - y^2$ ,  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;

(2)  $z = x^2 - xy + y^2$ ,  $\{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ ;

(3)  $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ ,  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$ ;

(4)  $z = x^2y(4 - x - y)$ ,  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ .

12. 在平面  $3x - 2z = 0$  上求一点, 使它与点  $A(1, 1, 1)$  和  $B(2, 3, 4)$  的距离平方和最小.

13. 在曲线  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$  上, 求竖坐标分别为最大值和最小值的点.

14. 设  $f(x, y) = 3x^2y - x^4 - 2y^2$ . 证明:  $(0, 0)$  不是它的极值点, 但沿过  $(0, 0)$  点的每条直线,  $(0, 0)$  都是它的极大值点.

15. 一帐篷, 下部为圆柱形, 上部盖以圆锥形的顶篷, 设帐篷的容积为一定数  $V_0$ . 试证当  $R = \sqrt{5}H, h = 2H$  时, (其中  $R, H$  各为圆柱形的底半径和高,  $h$  为圆锥形的高) 所用篷布最省.
16. 已知平行六面体所有各棱长之和为  $12a$ , 求其最大体积.
17. 在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上求一点  $M(x, y)$  ( $x, y \geq 0$ ), 使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积为最小, 并求其面积.
18. 求平面上一点  $(x_0, y_0)$ , 使其到  $n$  个定点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  的距离的平方和最小.
19. 椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的内接长方体中, 求体积最大的长方体的体积.
20. 在旋转椭球面  $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$  上求距平面  $x + y + 2z = 9$  最远和最近的点.
21. 设曲面  $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ )
- (1) 证明  $S$  上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于  $a$ .
  - (2) 在  $S$  上求一切平面, 使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大, 并求四面体体积的最大值.

## §9.6 向量场的微商

在 §9.1.3 和 §9.2.5 中, 我们引进了向量值函数以及微商, 本节将讨论一种新概念: 向量场并讨论它的微商. 我们将着重讨论三维空间情形.

### 9.6.1 向量场

所谓**向量场**是指空间中某个区域中, 每一点对应一个向量. 向量场是物理等学科中速度场、力场、电场、磁场等“场”的概念的概括.

例如如图9.19 所示的海洋中水流的速度场, 每一个向量显示该点处水流速度的方向和大小, 而速度场的方向形成一个圆形, 则表明水流在此形成一个涡流.

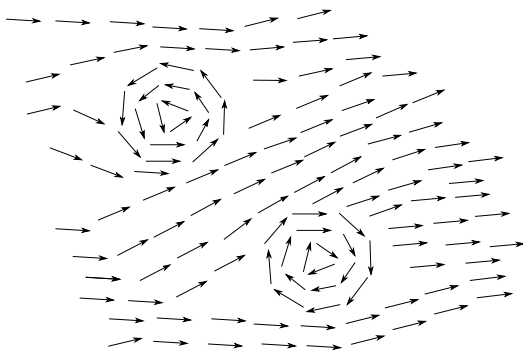


图 9.19

空间中引进坐标系, 向量场可用坐标系来表示. 如果空间引入直角坐标系  $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ , 那么空间中的一点就可以由坐标表示  $M(x, y, z)$ , 而这一点对应的向量  $\mathbf{v}$  可以表示为

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3,$$

其中  $P, Q, R$  称为向量场  $\mathbf{v}$  的分量函数. 在平面上引进直角坐标系, 那么平面向量场表示如下

$$\mathbf{v}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

空间中表示点  $M$  的位置向量  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ , 称为空间的位置向量场, 在直角坐标系下

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

以质量为  $M$  并位于坐标原点的质点, 对位于点  $M(x, y, z)$  处质量为  $m$  的质点的引力场表示如下 (图9.20)

$$\mathbf{F} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r},$$

其中  $k$  是引力常数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

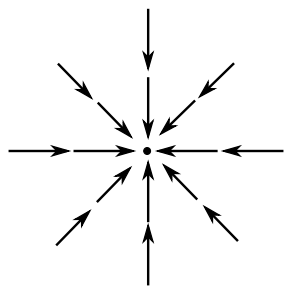


图 9.20

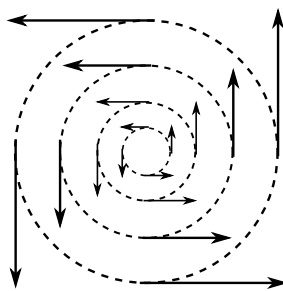


图 9.21

向量场  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  表示的是一个二维的“斡旋”状向量场 (图9.21), 其特点是每一点的向量都与圆心在原点的圆相切, 并且随着与原点的距离越远, 向量越长.

相对于向量场, 我们称空间中一点对应一个数量称为数量场. 例如物体中每一点对应的质量密度、温度, 流体中每一点对应的压强等等都是数量场. 当取定直角坐标系后, 数量场就是点  $M(x, y, z)$  的函数  $u(x, y, z)$ .

对于向量场  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , 当下列极限存在时

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{v}(x, y, z)}{\Delta x}$$

就定义为  $\mathbf{v}(x, y, z)$  对  $x$  的偏微商, 同理可定义  $\mathbf{v}(x, y, z)$  对  $y$  和  $z$  的偏微商. 特别, 在直角坐标系下偏微商可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{k},$$

以及对  $y$  和  $z$  类似的偏微商表示. 如果分量函数  $P, Q, R$  有连续的偏导数, 那么我们称向量场  $\mathbf{v}$  为光滑向量场.

### 9.6.2 梯度、散度与旋度

根据微分的定义, 函数  $\phi(x, y, z)$  的微分  $d\phi$  是  $dx, dy, dz$  的线性函数, 它可表示为

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \end{aligned}$$

因此函数的微分  $d\phi$  是函数的梯度  $\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$  与  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  的点乘.

在直角坐标系下, 定义如下算符

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$



并称为 Hamilton 算符或 Nabla 算符. 算符  $\nabla$  兼有微商和向量两种运算属性, 其中与函数  $\phi(x, y, z)$  的“数乘”就给出了函数的梯度

$$\nabla\phi = \text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k},$$

只不过  $\phi$  “乘以”每个分量是对  $\phi$  求偏导数. 因此一个数量场的梯度是一个向量场.

借用算符  $\nabla$ , 函数  $\phi$  的微分  $d\phi$  可以表示为

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}.$$

由于算符  $\nabla$  具有向量性质, 所以还可以与向量场分别做“点乘”和“叉乘”.

**定义 9.27** 在直角坐标系下, 设  $\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

1° 向量场  $\mathbf{v}$  的散度 定义如下

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

因此, 一个向量场的散度是一个数量场.

2° 向量场的旋度 定义如下

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

因此, 一个向量场的旋度是一个向量场.

特别, 类似向量之间的叉乘, 向量场的旋度可以表示成下列行列式形式

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

这样, 我们就通过 Hamilton 算符, 重新定义了数量场的梯度, 同时定义了向量场的散度和旋度. 关于它们的几何与物理含义将在 §11.6 中再做说明, 这里我们给出下列运算规则, 这些规则都可以通过 Hamilton 算符来体现, 并请读者自证.

设  $\phi, \psi$  是数量场,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为向量场, 则

$$\begin{aligned}\nabla(\phi + \psi) &= \nabla\phi + \nabla\psi, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}, \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b}, \\ \nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi, \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) &= \phi\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\phi, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}, \\ \nabla \times (\phi\mathbf{a}) &= \nabla\phi \times \mathbf{a} + \phi\nabla \times \mathbf{a}.\end{aligned}$$

还可以直接验证下列结果

$$\begin{aligned}\text{rot grad } \phi &= \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}, \\ \text{div rot } \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0\end{aligned}$$

Hamilton 算符  $\nabla$  具有向量的属性使得它自己和自己还可以进行“点乘”, 其结果是一个新的算符, 记为

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

称为 Laplace 算符, 它作用在数量场  $\phi(x, y, z)$  上为

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

### 9.6.3 Hamilton 算符在柱坐标系和球坐标系中的表示\*

引进 Hamilton 算符后, 梯度、旋度和散度可以用  $\nabla$  分别与数量场  $u$  和向量场  $\mathbf{v}$  的“数乘”、“点乘”和“叉乘”表示. 注意到有关定义和推导都是在直角坐标系中进行的, 如何给出在其他坐标系中的梯度、散度和旋度的表示, 关键是要给出  $\nabla$  在不同坐标系中的表达式. 这里, 重点考虑  $\nabla$  在两种常用坐标系中的表达式.

#### 1° 柱坐标系中的 Hamilton 算符

柱坐标由下列公式给出

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

这里  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ , 或者位置向量

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r \cos \theta\mathbf{i} + r \sin \theta\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

因此  $\mathbf{r}$  沿柱坐标三个参数曲线的切向量为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \mathbf{e}_r \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j} = r \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \mathbf{k} = \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

这里通过  $\mathbf{r}$  的三个切向量, 引进了三个向量

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

容易验证  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  是两两正交的单位向量, 并且构成右手系, 称为柱坐标系. 但是与直角坐标系不同的是, 柱坐标系中三个坐标向量  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  是空间点的向量函数, 具体来说, 坐标向量  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  依赖于变量  $\theta$ , 但不依赖于变量  $r$ , 因此对  $\theta$  求导得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = 0$$

在柱坐标系中

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$$

由此首先得到在柱坐标下弧长元的表达式

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

对于任意一个数量场  $u$ , 它既是  $(x, y, z)$  的函数, 同时又是  $(r, \theta, z)$  的函数, 根据一阶微分形式不变性, 有

$$\begin{aligned}du &= \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz.\end{aligned}$$

因为  $u$  的梯度场是一个向量场, 因此设梯度场在柱坐标系中的表示为

$$\nabla u = a_1 \mathbf{e}_r + a_2 \mathbf{e}_\theta + a_3 \mathbf{e}_z,$$

其中  $a_1, a_2, a_3$  待定. 将上式与  $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$  代入

$$du = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

并比较  $dr, d\theta, dz$  的系数得

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad a_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad a_3 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

因此, 数量场  $u$  的梯度在柱坐标系中的表示为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

或者说算子  $\nabla$  在柱坐标系中的表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

为了推导柱坐标系下向量场的散度和旋度, 将柱坐标系下表示的  $\nabla$  与向量场

$$\mathbf{v} = A\mathbf{e}_r + B\mathbf{e}_\theta + C\mathbf{e}_z$$

分别进行“点乘”和“叉乘”, 并注意到坐标向量  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  对  $\theta$  的导数 ( $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$ ). 因此, 柱坐标系下向量场  $\mathbf{v}$  的散度表示为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( A + \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial C}{\partial z} \end{aligned}$$

而旋度表示为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & rB & C \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Laplace 算符在柱坐标系中的表示

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

或者说 Laplace 算子作用在函数上为

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

## 2° 球坐标系中的 Hamilton 算符

三维空间的球坐标由下列公式给出

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

这里,  $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ , 或者

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}.$$

因此  $\mathbf{r}$  沿三个球坐标曲线的切向量如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} = \mathbf{e}_r, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k} = r \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{j} = r \sin \theta \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}$$

这里定义了三个相互正交并构成右手系的单位向量  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ , 称为球坐标系, 三个坐标向量依赖于球坐标  $(\theta, \phi)$ .

在球坐标系中, 位置向量的微分如下

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi.$$

因此弧长元在球坐标系中的表示为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

类似柱坐标系情形, 由一阶微分形式的不变性得

$$du = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi.$$

设向量场  $\nabla u$  在球坐标系中的表示为

$$\nabla u = a_1 \mathbf{e}_r + a_2 \mathbf{e}_\theta + a_3 \mathbf{e}_\phi,$$

其中  $a_1, a_2, a_3$  待定. 将  $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi$  代入得

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad a_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad a_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi},$$

即数量场  $u$  在球坐标系中的梯度为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

或者说算子  $\nabla$  在球坐标系中的表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

用球坐标系下的  $\nabla$  与向量场  $\mathbf{v} = A\mathbf{e}_r + B\mathbf{e}_\theta + C\mathbf{e}_\phi$  分别进行“点乘”和“叉乘”, 并注意到坐标向量  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  依赖变量  $(\theta, \phi)$ , 且对  $(\theta, \phi)$  的导数如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta).\end{aligned}$$

因此向量场  $\boldsymbol{v}$  在球坐标中的散度表示为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial C}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

向量场  $\boldsymbol{v}$  在球坐标中的旋度表示为

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_r \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \boldsymbol{e}_\phi \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r \boldsymbol{e}_\theta & r \sin \theta \boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A & rB & r \sin \theta C \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Laplace 算符在球坐标系中的表示

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

注记 无论是柱坐标系还是球坐标系,  $\boldsymbol{r}$  沿三个参数  $(r, \theta, z)$  (柱坐标) 或  $(r, \theta, \phi)$  (球坐标) 的导数给出的三个向量相互正交. 经过归一化后, 就分别得到柱坐标系和球坐标系的三个标准正交的坐标向量. 一般情况下, 如果有坐标变换

$$\boldsymbol{r} = x(u, v, w) \boldsymbol{i} + y(u, v, w) \boldsymbol{j} + z(u, v, w) \boldsymbol{k}$$

或记成

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

能保证沿参数  $u, v, w$  变化方向的三个切向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$$

相互正交, 则称为**正交曲线坐标**. 对上面三个向量经过归一化处理, 就可得到一组标准正交系, 因此数量场的梯度和向量场的散度, 旋度都可用类似于柱坐标和球坐标的方法逐一给出. 这里不再做详细介绍.

## 习题 9.6

1. 求电场强度  $\boldsymbol{e} = \frac{q}{r^3} \boldsymbol{r}$  ( $r = |\boldsymbol{r}|$ ) 的散度和旋度.
2. 设  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{i} + \omega_2 \boldsymbol{j} + \omega_3 \boldsymbol{k}$  是一个常值向量, 求向量场

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

的旋度  $\nabla \times \boldsymbol{v}$ , 并给出合理的物理解释. 这里  $\boldsymbol{r} = x \boldsymbol{i} + y \boldsymbol{j} + z \boldsymbol{k}$  是位置向量.

3. 求下列向量场在指定点的散度

(1)  $\mathbf{v} = (3x^2 - 2yz, y^3 + yz^2, xyz - 3xz^2)$  在  $M(1, -2, 2)$  处;

(2)  $\mathbf{v} = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin(xz) \mathbf{j} + xy \sin(\cos z) \mathbf{k}$  在  $M(x, y, z)$  处.

4. 设  $\mathbf{w}$  是常向量,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 求

(1)  $\operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}]$ ; (2)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$ ;

(3)  $\operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{r})$ ; (4)  $\operatorname{div}(r^2 \mathbf{w})$ .

5. 求下列向量场的旋度.

(1)  $\mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ ;

(2)  $\mathbf{v} = (xe^y + y)\mathbf{i} + (z + e^y)\mathbf{j} + (y + 2ze^y)\mathbf{k}$ .

6. 设  $\mathbf{w}$  是常向量,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 求:

(1)  $\operatorname{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{r})$ ; (2)  $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$ ;

(3)  $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{w}]$ ; (4)  $\operatorname{div}[\mathbf{r} \times f(r)\mathbf{w}]$ .

7. 设  $\mathbf{w}$  是常向量,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $f(r)$  是  $r$  的可微函数, 试通过  $\nabla$  运算求:

(1)  $\nabla(\mathbf{w} \cdot f(r)\mathbf{r})$ ;

(2)  $\nabla \cdot (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$ ;

(3)  $\nabla \times (\mathbf{w} \times f(r)\mathbf{r})$ .

8. 设  $\phi, \psi$  是数量场,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为向量场, 证明

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b},$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b},$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi,$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\phi,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b},$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{a}) = \nabla\phi \times \mathbf{a} + \phi\nabla \times \mathbf{a}.$$

9. 证明

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

10. 证明

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

## §9.7 微分形式\*

在 §9.3 中, 我们介绍了函数的微分. 即给定一个定义在  $D \subset E = \mathbb{R}^n$  上的可微函数  $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , 则  $f$  在一点  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  的微分是

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) dx_n$$

也就是说, 函数  $f$  的微分  $df$ , 就是  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  的线性组合, 其组合系数是函数对应的偏导数.

因此我们定义  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  任意的线性组合

$$\omega = A_1(\mathbf{x}) dx_1 + \dots + A_n(\mathbf{x}) dx_n$$

为一次微分形式, 这里系数  $A_i, i = 1, \dots, n$  是变量  $(x_1, \dots, x_n)$  的函数.

注意, 一次微分形式未必是一个函数的微分, 除非它的系数正好对应一个函数的偏导数. 因此一次微分形式的定义, 使我们摆脱了具体函数的束缚, 不再限制在具体函数的微分, 而是推广到微分的形式.

为了进一步说明微分形式的意义, 我们以三维空间的微分形式为例.

### 9.7.1 微分形式的空间

首先在  $dx, dy, dz$  之间定义一种乘法, 称为“外积”, 它满足下列外积运算的基本规则:

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz,$$

当多个  $dx, dy, dz$  进行连乘时, 根据上述规则可以交换次序, 且连乘中若有两个相等, 就一定是零, 只有  $dx \wedge dy \wedge dz$  是非平凡的.

把  $\{dx, dy, dz\}$ 、 $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$  以及  $\{dx \wedge dy \wedge dz\}$  分别看成生成元, 它们各自线性生成的元素分别称为“一次、二次、三次微分形式”或简称“形式”. 同时我们约定一般的函数为“0 次微分形式”, 概括起来即是: 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^3$  中的区域

**0 次微分形式:**  $\Omega$  上可微函数 (或称数量场)  $z = \phi(x, y, z)$ , 因此也记为

$$\omega_\phi^0 = \phi$$

**1 次微分形式:**  $dx, dy, dz$  的线性组合  $A dx + B dy + C dz$ , 其中  $A, B, C$  是  $\Omega$  上的函数. 一次形式对应一个定义在  $\Omega$  上的向量场  $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ , 因此一次形式也记成

$$\omega_{\mathbf{v}}^1 = A dx + B dy + C dz.$$



**2 次微分形式:**  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  的线性组合  $D dy \wedge dz + E dz \wedge dx + F dx \wedge dy$ , 其中系数  $D, E, F$  是  $\Omega$  上的函数. 一个二次微分形式也对应  $\Omega$  上一个向量场  $\mathbf{v} = D\mathbf{i} + E\mathbf{j} + F\mathbf{k}$ , 因此记为

$$\omega_{\mathbf{v}}^2 = D dy \wedge dz + E dz \wedge dx + F dx \wedge dy.$$

**3 次微分形式:** 三次微分形式定义为  $h dx \wedge dy \wedge dz$ , 其中系数  $h = h(x, y, z)$  是  $\Omega$  上的函数, 因此记为

$$\omega_h^3 = h dx \wedge dy \wedge dz$$

显然, 根据  $dx, dy, dz$  之间的外积关系, 三维空间中不再有其他形式的微分形式了. 另一方面, 同次的微分形式具有线性空间中向量所具有的数乘和加法运算.

### 9.7.2 微分形式的外积

将关于  $dx, dy, dz$  之间的外积运算推广到微分形式中去, 按照  $dx, dy, dz$  之间的外积运算的基本规则, 并规定微分形式之间的外积满足结合律和对同次微分形式加法的分配律. 具体运算结果如下:

1° 对于两个一次形式

$$\omega_{\mathbf{v}_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz, \quad j = 1, 2,$$

根据外积运算的基本规则, 它们的外积为

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{v}_1}^1 \wedge \omega_{\mathbf{v}_2}^1 &= (A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz) \wedge (A_2 dx + B_2 dy + C_2 dz) \\ &= (B_1 C_2 - B_2 C_1) dy \wedge dz + (C_1 A_2 - C_2 A_1) dz \wedge dx + (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy \end{aligned}$$

因此是一个二次形式. 注意到这个二次形式对应的向量场正是两个一次形式对应的向量场  $\mathbf{v}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$  和  $\mathbf{v}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$  之间叉乘的结果, 即

$$\omega_{\mathbf{v}_1}^1 \wedge \omega_{\mathbf{v}_2}^1 = \omega_{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}^2$$

2° 一个一次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^1 = A dx + B dy + C dz$  与一个二次形式  $\omega_{\mathbf{u}}^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$  的外积, 按照外积运算的基本规则, 其结果是一个三次形式

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{v}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{u}}^2 &= (A dx + B dy + C dz) \wedge (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &= (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

系数  $AP + BQ + CR$  正是向量场  $\mathbf{v} = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$  和  $\mathbf{u} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  的点乘

$$\omega_{\mathbf{v}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{u}}^2 = \omega_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}^3$$

3° 三个一次形式  $\omega_{\mathbf{v}_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz$ ,  $j = 1, 2, 3$  的外积是一个三次形式, 根据 1° 和 2°, 不难算出

$$\omega_{\mathbf{v}_1}^1 \wedge \omega_{\mathbf{v}_2}^1 \wedge \omega_{\mathbf{v}_3}^1 = \omega_{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}^3$$

4° 0 次形式  $\omega_\phi^0 = \phi(x, y, z)$  与任何形式的外积等于  $\phi$  乘以微分形式的系数. 例如 0 次形式与一次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^1 = A dx + B dy + C dz$  的外积仍为一次形式

$$\omega_\phi^0 \wedge d\omega_{\mathbf{v}}^1 = \phi A dx + \phi B dy + \phi C dz = \omega_{\phi \mathbf{v}}^1$$

除了上述四种情况, 三维空间中微分形式的外积再也没有其他非平凡的情况了.

### 9.7.3 微分形式的外微分

我们知道, 作为零次形式的函数  $\phi$ , 它的微分是一个一次形式. 现在的问题是, 一次 (或者更高次数的) 微分形式可否微分? 另一方面, 一个给定的一次形式, 是否可以表示成一个零次微分形式的微分? 为此我们定义微分形式的一种微分, 称为外微分, 它是函数 (即 0 次形式) 微分的推广.

设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^3$  中的区域, 以下均假设所涉及的函数和微分形式的系数在  $\Omega$  上的各阶偏导数都是连续的.

定义微分形式的外微分是一个从低次的形式到高一次的形式的映射

$$d: p \text{ 次形式} \longrightarrow p+1 \text{ 次形式}$$

对于三维空间上的微分形式, 外微分的具体过程如下

1° 对于零次形式  $\omega_\phi^0 = \phi$ , 它的外微分定义为

$$d\omega_\phi^0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz,$$

即是函数的微分, 结果是一个一次形式, 系数正是函数  $\phi$  的梯度的三个分量

$$d\omega_\phi^0 = \omega_{\text{grad } \phi}^1 = \omega_{\nabla \phi}^1$$

2° 一次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^1 = P dx + Q dy + R dz$  的外微分定义为

$$d\omega_{\mathbf{v}}^1 = d(P dx + Q dy + R dz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

因为  $P, Q, R$  都是函数 (也就是 0 次形式), 它们的微分已由 1° 所定义, 其结果是一个一次形式, 例如

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

等等, 代入得

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{v}}^1 &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

其结果是一个二次形式. 因此  $d\omega_{\mathbf{v}}^1$  对应的向量场正是  $\mathbf{v}$  的旋度

$$d\omega_{\mathbf{v}}^1 = \omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2 = \omega_{\nabla \times \mathbf{v}}^2.$$

3° 二次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$  的外微分定义为

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{v}}^2 &= d(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

把  $dP, dQ, dR$  的表达式代入, 得

$$d\omega_{\mathbf{v}}^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

它是三次形式

$$d\omega_{\mathbf{v}}^2 = \omega_{\text{div } \mathbf{v}}^3 = \omega_{\nabla \cdot \mathbf{v}}^3.$$

显然, 在三维空间, 三次形式的外微分总是零  $d\omega_h^3 = 0$ .

对于外微分运算, 有如下重要的 Poincaré 引理.

**引理 9.28** (Poincaré) 设  $\omega$  是一个微分形式, 其系数具有二阶连续的偏微商, 则

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

**证明** 我们不妨对三维空间的各次微分形式一一加以验证.

1° 当  $\omega = \omega_{\phi}^0 = \phi(x, y, z)$  是一个 0 次形式时,

$$d\omega_{\phi}^0 = \omega_{\text{grad } \phi}^1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz,$$

是一个一次形式, 继续对其做外微分得

$$d^2\omega_{\phi}^0 = d\omega_{\text{grad } \phi}^1 = \omega_{\text{rot grad } \phi}^2 = 0$$

2° 当  $\omega = \omega_{\mathbf{v}}^1 = P dx + Q dy + R dz$  是一个一次形式时,

$$d\omega_{\mathbf{v}}^1 = \omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2$$

是一个二次形式,于是

$$d^2\omega_{\mathbf{v}}^1 = d\omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2 = \omega_{\text{div rot } \mathbf{v}}^3 = 0.$$

3° 当  $\omega = \omega_{\mathbf{v}}^2$  是一个二次形式时, 微分一次, 则  $d\omega$  是一个三次形式, 再微分一次, 自然有  $d^2\omega = 0$ .  $\square$

**定义 9.29** 对于给定的(一、二、三次)微分形式  $\omega$ , 如果存在一个低一次的形式  $\theta$ , 使得  $\omega$  是  $\theta$  的外微分, 即有  $\omega = d\theta$ , 那么称  $\omega$  是一个恰当微分形式.

**定理 9.30** [Poincaré 引理之逆定理] 如果  $\omega$  满足  $d\omega = 0$ , 且它的定义域满足一定条件, 那么它是恰当的.

这里, 为了简单说明, 我们不再深究上述定理中对于微分形式定义域的要求.

**例 9.7.1** 设  $\omega = y dx + z dy + x dz$ , 则  $d\omega = -dy \wedge dz - dz \wedge dx - dx \wedge dy \neq 0$ , 所以不是恰当的, 即不存在一个 0 次形式  $\theta$  使得  $\omega = d\theta$ . 或者说  $\omega$  不能表示成函数的全微分.

**例 9.7.2** 设  $\omega = yz dx + zx dy + xy dz$ , 则  $d\omega = 0$ . 容易看出它是函数 (0 次形式)  $\theta = xyz$  的全微分:  $\omega = d\theta$ .

对于恰当的微分形式  $\omega$ , 如何构造一个“原形式”  $\theta$ , 使得  $\omega = d\theta$  (类比一元函数的原函数概念), 应该是一个积分的过程. 我们将在引进曲线积分和曲面积分之后讨论.

#### 9.7.4 微分形式在高维空间的推广

微分形式在高维空间  $\mathbb{R}^n$  的推广如下:

0 次形式就是  $n$  元可微函数的全体.

一次形式就是  $dx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  的线性组合

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$$

二次形式是  $dx_i \wedge dx_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  的线性组合

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j.$$

推而广之,  $p$  次形式就是  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  的线性组合

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_p}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$p$  次形式的全体  $V^p$  构成一个  $\binom{n}{p}$  维的空间.

而  $n$  次形式就是

$$a(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

这里, 外积的运算遵守下列原则

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

所有系数都是空间  $E$  中区域  $\Omega$  上的有连续偏微商的函数. 因此, 一般地, 一个  $p$  次形式  $\omega_p$  和一个  $q$  次形式  $\omega_q$  的外积是一个  $p+q$  次形式

$$\omega_p \wedge \omega_q \in V^{p+q}$$

所定义的外微分“ $d$ ”, 是一个保持线性和数乘的映射

$$d: V^p \longrightarrow V^{p+1}, \quad p = 0, 1, \cdots, n-1.$$

### 习题 9.7

#### 1. 计算

$$(1) (x dx + y dy) \wedge (z dz - z dx); \quad (2) (dx + dy + dz) \wedge (x dx \wedge dy - z dy \wedge dz).$$

#### 2. 对下列微分形式 $\omega$ , 计算它们的微分, 即计算 $d\omega$

$$(1) \omega = xy + yz + zx;$$

$$(2) \omega = xy dx;$$

$$(3) \omega = xy dx + x^2 dy;$$

$$(4) \omega = x^2 y dx - y z e^2 dy + \sin xyz dz;$$

$$(5) \omega = xy^2 dy \wedge dz - xz^2 dx \wedge dy;$$

$$(6) \omega = xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + zx dx \wedge dy;$$

### 第 9 章综合习题

1. 设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是非零常数.  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  在  $\mathbb{R}^n$  上可微. 求证: 存在  $\mathbb{R}$  上一元可微函数  $F(s)$  使得  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)$  的充分必要条件是  $a_j \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ .

2. 设  $f(x, y, z) = F(u, v, w)$ , 其中  $x^2 = vw$ ,  $y^2 = wu$ ,  $z^2 = uv$ . 求证:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = u \frac{\partial F}{\partial u} + v \frac{\partial F}{\partial v} + w \frac{\partial F}{\partial w}.$$

3. 若函数  $u = f(x, y, z)$  满足恒等式  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$  ( $t > 0$ ), 则称  $f(x, y, z)$  为  $k$  次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数  $f(x, y, z)$  为  $k$  次齐次函数的充要条件是:

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z).$$

4. 设  $f(x, y, z)$  是  $n$  次齐次的可微函数. 若方程  $f(x, y, z) = 0$  隐含函数  $z = \varphi(x, y)$  (即,  $f'_z \neq 0$ ), 则  $\varphi(x, y)$  是一次齐次函数.

5. 设  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上有连续二阶偏导数, 且对任意实数  $x, y, z$  满足  $f(x, y) = f(y, x)$  和

$$f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 3f\left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right).$$

试求  $f(x, y)$ .

6. 证明不等式  $\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

7. 设在  $\mathbb{R}^3$  上定义的  $u = f(x, y, z)$  是  $z$  的连续函数, 且  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  在  $\mathbb{R}^3$  上连续. 证明  $u$  在  $\mathbb{R}^3$  上连续.

8. 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是包含原点的凸区域,  $f \in C^1(D)$ . 若

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, ((x, y) \in D),$$

则  $f(x, y)$  是常数.

9. 设  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(0, 0) = 0$ . 证明: 存在  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数  $g_1, g_2$  使得

$$f(x, y) = xg_1(x, y) + yg_2(x, y).$$

10. 设  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域  $U$  上有定义,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在  $U$  上存在. 求证: 如果  $\frac{\partial f}{\partial x}$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}$  中有一个在  $(x_0, y_0)$  处连续, 那么  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微.

11. 设  $u(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上取正值且有二阶连续偏导数. 证明  $u$  满足方程

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

的充分必要条件是存在一元函数  $f$  和  $g$  使得  $u(x, y) = f(x)g(y)$ .

12. 设  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $t \in [a, b]$  有连续的导数, 证明: 存在  $\theta \in (a, b)$ , 使得

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq |\mathbf{r}'(\theta)|(b - a).$$

提示: 令  $\varphi(t) = (x(b) - x(a))x(t) + (y(b) - y(a))y(t)$ , 对函数  $\varphi(t)$  使用微分中值定理, 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式:  $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ .

13. 设  $f(x, y, z)$  在  $\mathbb{R}^3$  上有一阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$ . 如果  $f(x, 0, 0) > 0$  对任意的  $x \in \mathbb{R}$  成立, 求证: 对任意的  $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ , 也有  $f(x, y, z) > 0$ .

14. 求函数  $f(x, y) = x^2 + xy^2 - x$  在区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$  上的最大值和最小值.

15. 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是正数, 且  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . 用 Lagrange 乘数法证明

$$x_1 x_2 \cdots x_n \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \leq n,$$

等号当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$  时成立.

16. 设  $a_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $p > 1$ . 证明:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \left( \frac{a_1^p + \cdots + a_n^p}{n} \right)^{1/p},$$

并讨论等号成立的条件.

17. 设  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  是  $n$  个可微的  $n$  元函数, 证明

$$dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

## 第 10 章 多变量函数的重积分

本章的主要目的是将一元函数的定积分的概念,推广到多个变量函数的情形,这种积分称之为**重积分**.我们将重点讨论二元函数和三元函数分别在平面区域和空间区域上的重积分,同时给出  $n$  重积分若干典型例子.

### §10.1 二重积分

相对于实轴上区间的长度,平面上点集的面积要更为复杂,因此有必要对平面点集的面积进行简要说明,详细的讨论和论证将在第三册中展开.

#### 10.1.1 平面区域的面积

直观上看,平面点集  $D$  的面积是一个非负的实数,记为  $\sigma(D)$ ,并满足下列两个性质:

一是约定面积的单位等于边长为 1 的正方形,因此边长为  $l$  的正方形的面积为  $l^2$ .  
二是如果  $D$  是互不重叠(即,无公共内点)的有限个集合  $D_1, D_2, \dots, D_k$  组成,每个  $D_i$  分别有面积  $\sigma(D_i)$ ,那么  $\sigma(D)$  满足可加性.

$$\sigma(D) = \sigma(D_1) + \dots + \sigma(D_k)$$

设  $D$  是一个有界集合,则存在一个正方形  $[a, b] \times [a, b]$  使得  $D \subset [a, b] \times [a, b]$ ,对正方形作分割  $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,这样就得到  $n^2$  个小正方形  $[x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

记那些完全包含在  $D$  内的小正方形面积的和为  $\sigma_T^-(D)$ ,那些与  $D$  有公共点的小正方形面积的和为  $\sigma_T^+(D)$ ,显然,如果  $D$  有面积的话,那么面积  $\sigma(D)$  一定介于  $\sigma_T^-(D)$  和  $\sigma_T^+(D)$  之间(图10.1).

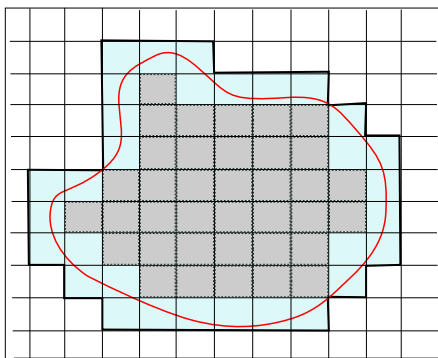


图 10.1

不难看出随着分割越来越细,  $\sigma_T^-(D)$  单调递增并以  $(b-a)^2$  为上界,而  $\sigma_T^+(D)$  单调下降有下界,因此当  $|T| \rightarrow 0$  时,  $\sigma_n^-(D)$  和  $\sigma_n^+(D)$  都有有限极限.如果极限相等,那么自



然定义该极限为点集  $D$  的面积.

**定义 10.1** 设  $D$  是有界的平面点集, 取  $[a, b] \times [a, b]$ , 使得  $S \subset [a, b] \times [a, b]$ , 如果对于任意分割  $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , 下列极限相等

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma_n^+(D) = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sigma_n^-(D)$$

那么称点集  $D$  是 Jordan 可测的, 否则称为不可测的. 上述极限值称为  $D$  的测度或“面积”. 特别, 当上述极限值等于 0 时, 称  $D$  为零测集.

根据上述定义, 矩形是 Jordan 可测的, 其测度等于矩形的长和宽的乘积. 基于此, 在做分割时也不必拘泥于正方形, 可以做矩形的分割.

记点集  $D$  的边界为  $\partial D$ , 我们把小正方形中那些含有边界点的挑选出来, 则

$$0 \leq \sigma_T^+(D) - \sigma_T^-(D) \leq \sigma_T^+(\partial D)$$

因此, 当  $\partial D$  是零测集时,  $D$  是可测的. 进一步可以证明,  $D$  是 Jordan 可测的充分必要条件是它的边界  $\partial D$  的测度为零 (见第三册).

例如, 闭区间上连续函数

$$y = f(x), x \in [a, b] \text{ 或 } x = g(y), y \in [c, d]$$

给出的平面曲线段的面积为零. 推而广之, 可以证明如果一个有界点集的边界可以逐段表示成闭区间上连续函数给出的曲线段, 那么该点集是可测的.

但是, 确实存在不可测的有界点集, 例如  $[0, 1] \times [0, 1]$  内所有有理点 (即点的两个坐标都是有理数) 所构成的集合  $D$  是 Jordan 意义下不可测的, 这是因为  $\partial D = [0, 1] \times [0, 1]$ , 因此边界的面积为 1. 或者说对  $[0, 1] \times [0, 1]$  的任意分割  $T$ ,  $\sigma_T^-(D) = 0$ ,  $\sigma_T^+(D) = 1$ .

需要说明的是, 在讨论单变量函数的定积分时, 我们也定义了由区间  $[a, b]$ , 直线  $x = a$ ,  $x = b$  和曲线  $y = f(x)$  围成 (或称  $f(x)$  “覆盖”下) 曲边矩形的面积. 那里引进的 Darboux 上和与 Darboux 下和即是这里的  $\sigma_T^+(D)$  和  $\sigma_T^-(D)$ , Darboux 上和与下和之间的差

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

即是曲边矩形边界  $y = f(x)$  的面积 (其它边界为直线段). 这里,  $T: a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  是区间  $[a, b]$  的分割,  $\omega_i$  是函数  $f(x)$  在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅. 因此, 利用积分定义的曲边矩形的面积与 Jordan 测度是一致的.

### 10.1.2 二重积分的基本概念与性质

今后, 除非特别指出, 否则将假设所提及的平面区域  $D$  是闭的有界区域,  $D$  以及它的分割 (未必一定要是矩形分割), 都是可测的.

所谓  $D$  的任意一种“分割”  $T$ , 是指把  $D$  分成  $n$  个互不重叠 (即两两没有公共内点) 的可测的区域  $D_i (i = 1, \dots, n)$ . 记  $\sigma(D_i)$  表示分割小区域的面积, 并记

$$|T| = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } D_i,$$

在每一个  $D_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 称

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sigma(D_i)$$

为  $f(x, y)$  在  $D$  上的一个 Riemann 和.

**定义 10.2** 如果存在实数  $A$  满足: 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $|T| < \delta$ , 不论  $(\xi_i, \eta_i)$  在  $D_i$  中如何选择, 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sigma(D_i) - A \right| < \varepsilon$$

那么称函数  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 记为

$$A = \iint_D f(x, y) \, d\sigma \quad \text{或} \quad \int_D f,$$

式中  $A$  称为  $f$  的积分值,  $D$  称为积分区域,  $f(x, y) \, d\sigma$  称为被积表达式,  $f(x, y)$  称为被积函数,  $d\sigma$  称为面积元素.

从几何上看, Riemann 和中每一个求和项是一个柱体 (图 10.3), 其中  $\sigma(D_i)$  是柱体的底面积,  $f(\xi_i, \eta_i)$  是柱体的高, 所以  $f(\xi_i, \eta_i) \sigma(D_i)$  是柱体的体积,  $S(T)$  是以  $D$  上的函数  $f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积的近似, 当分割越来越细时, 近似就越来越精确. 这个道理和一元定积分是一样的.

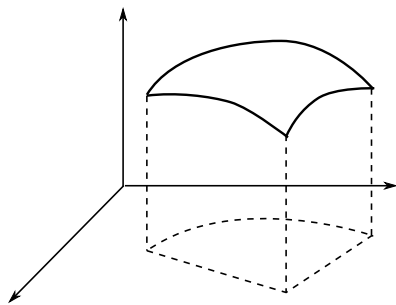


图 10.2

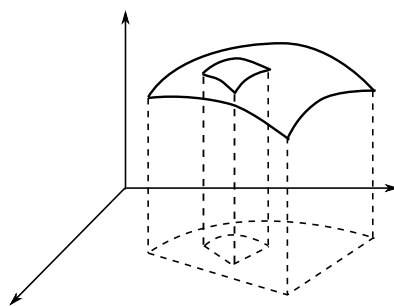


图 10.3

从物理上看, 如果把函数  $f(x, y)$  看成面积为  $D$  的一块薄板的密度函数, 那么, 二重积分就是这个薄板的质量.

类似一元函数情形, 根据定义可以证明

**定理 10.3**  $D$  上可积函数必有界.

证明与单变量情形完全一致. 但有界的函数未必可积, 一个典型的例子就是二维的 Dirichlet 函数

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \text{ 是 } [0, 1] \times [0, 1] \text{ 中的有理点,} \\ 0, & (x, y) \text{ 不是 } [0, 1] \times [0, 1] \text{ 中的有理点.} \end{cases}$$

可以根据定义验证, 它在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上是不可积的函数.

设  $f(x, y)$  是  $D$  上有界:  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 记  $f(x, y)$  在小区域  $D_i$  的上(下)确界为

$$M_i = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in D_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in D_i\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

定义函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的 Darboux 上(下)和以及在  $D_i$  上振幅的和如下

$$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \sigma(D_i), \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \sigma(D_i)$$

$$\omega(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \sigma(D_i) = \bar{S}(T) - \underline{S}(T)$$

显然 Darboux 上和有下界, Darboux 下和有上界

$$\bar{S}(T) \geq m\sigma(D), \quad \underline{S}(T) \leq M\sigma(D),$$

且

$$\bar{S}(T) \geq S(T) \geq \underline{S}(T)$$

这里  $\sigma(D)$  表示积分区域  $D$  的面积, 因此  $\bar{S}(T)$  和  $\underline{S}(T)$  分别有下确界和上确界, 且

$$\inf_T \{\bar{S}(T)\} \geq \sup_T \{\underline{S}(T)\}$$

借助 Darboux 上(下)和, 有下列结论

**定理 10.4** 设  $f(x, y)$  在  $D$  上有界.

1°  $f(x, y)$  在  $D$  上可积的充分必要条件是 Darboux 上和的下确界与 Darboux 下和的上确界相等, 或者  $\inf_T \{\omega(T)\} = 0$

2° 如果  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 那么在  $D$  上可积. 如果  $f(x, y)$  的不连续的点分布在  $D$  中可测的且测度为零的点集(如  $D$  中有限个孤立的点, 或者有限条光滑的曲线)上, 那么  $f(x, y)$  在  $D$  上也可积.

3° 如果在  $D$  上使  $f(x, y) \neq g(x, y)$  的点分布在  $D$  中测度为零的点集上, 那么  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在  $D$  上有相同的可积性. 可积时有

$$\int_D f = \int_D g.$$

也就是说, 在测度为零的点集上任意改变函数值不改变函数的可积性, 当函数可积时也不会改变积分的值.

二维 Dirichlet 函数的间断点集是  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 测度不为零, 因此不可积.

类似一元函数的积分, 二重积分有下列性质.

**定理 10.5** 设  $D$  是可测的,  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在  $D$  上可积.

1° 对于任意的常数  $c_1$  和  $c_2$  有

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_D f + c_2 \int_D g.$$

2° 设  $D$  是两个可测点集  $D_1, D_2$  的拼接 (即没有公共内点), 若函数  $f(x, y)$  在  $D_1$  和  $D_2$  都可积, 则  $f(x, y)$  在  $D = D_1 \cup D_2$  上也可积, 并有

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

3°  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  的乘积  $f(x, y)g(x, y)$  在  $D$  上仍可积.

4° 若在  $D$  上  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , 则

$$\int_D f \geq \int_D g.$$

特别, 若在  $D$  上恒有  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则 ( $\sigma(D)$  表示  $D$  的面积)

$$m\sigma(D) \leq \int_D f \leq M\sigma(D).$$

5°  $|f(x, y)|$  在  $D$  上也可积, 并有

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|.$$

6° (积分中值定理) 若  $D$  是连通闭域,  $f(x, y)$  在  $D$  连续, 则必有  $P \in D$ , 使

$$\int_D f = f(P)\sigma(D).$$

关于性质 6° 的证明如下: 设  $m$  和  $M$  分别是  $f(x, y)$  在  $D$  上的最小值和最大值, 则

$$m\sigma(D) \leq \int_D f \leq M\sigma(D).$$

当  $\sigma(D) = 0$  时, 结果显然. 当  $\sigma(D) > 0$  时, 根据连续函数在连通区域中的介值性可知, 存在  $P \in D$  使

$$f(P) = \frac{\int_D f}{\sigma(D)}.$$

## 10.1.3 二重积分的计算

首先讨论在矩形区域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上积分的计算. 设  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 作  $[a, b]$  和  $[c, d]$  的分割

$$T_x: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b;$$

$$T_y: \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

这样就得到  $D$  的一个矩形分割

$$T: D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m).$$

显然  $\sigma(D_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ . 因为

$$\text{diam } D_{ij} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} < \Delta x_i + \Delta y_j$$

所以

$$|T_x|, |T_y| < |T| < \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i + \max_{1 \leq j \leq m} \Delta y_j = |T_x| + |T_y|.$$

在  $D_{ij}$  中任取定一点  $M_{ij}(\xi_i, \eta_j)$ , 其中  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, \cdots, n$ ;  $j = 1, \cdots, m$ , 则, 函数  $f(x, y)$  在分割  $T$  下的 Riemann 和如下

$$S(T, M) = \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

因为函数可积, 所以矩形分割之下, 上面 Riemann 和的极限就是积分的值,

$$A = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

通常, 我们更愿把它记为  $\iint_D f(x, y) dx dy$  而不用  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的形式.

由于上述极限存在, 所以任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $|T| < \delta$ , 对任意的  $M_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , 有

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i,j=1}^{n,m} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

或

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^m \Delta y_j \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \right) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到, 对于  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i$  是  $f(x, \eta_j)$  在  $[a, b]$  上的 Riemann 和.

现在, 如果再加上这样一个条件: 假设对于任何固定的  $y$ ,  $f(x, y)$  作为  $x$  的函数在区间  $[a, b]$  上是可积的, 并记积分值为  $\int_a^b f(x, y) dx = \varphi(y)$ . 那么

$$\lim_{|T_x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i = \int_a^b f(x, \eta_j) dx = \varphi(\eta_j).$$

令  $|T_x| \rightarrow 0$ , 只要  $|T_y| < \delta$  就有

$$A - \varepsilon < A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^m \varphi(\eta_j) \Delta y_j \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon.$$

由此可知  $\varphi(y)$  在  $[c, d]$  可积, 并且积分等于  $A$

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

**定理 10.6** 设  $f(x, y)$  在  $D = [a, b] \times [c, d]$  上可积.

1° 若对每个  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  是  $[a, b]$  上关于  $x$  的可积函数, 则积分  $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  定义了关于变量  $y$  在  $[c, d]$  上的可积函数, 并有

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2° 若对每个  $x \in [a, b]$ ,  $f(x, y)$  是  $[c, d]$  上关于  $y$  的可积函数, 则  $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  是关于  $x$  在  $[a, b]$  上的可积函数, 并有

$$\int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3° 若  $f(x, y)$  同时满足 1° 和 2° 的条件, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

即, 分别对  $x$  和  $y$  积分的次序是可以交换的.

上述定理告诉我们, 二维区间上函数的二重积分, 可化为先对一个变量作一元函数的积分, 再对另一个变量作一元函数的积分. 这种积分过程被称为 **累次积分**. 当累次积分可交换时, 选择先对哪个变量积分, 完全根据积分的方便而定.

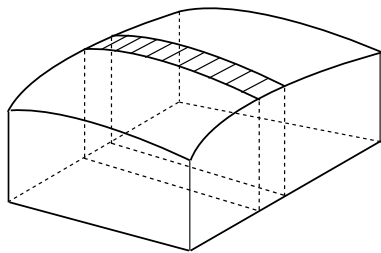


图 10.4

从几何上看, 累次积分犹如求切片面包的体积. 先计算每一片的面积, 再乘以每一片的厚度, 并将结果相加.

$$S(T) = \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{j=1}^m \overbrace{\Delta y_j}^{\text{厚度}} \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i}_{\text{面积}}$$

物理上看, 求一个以  $f(x, y)$  为面密度的薄板的质量, 可以将薄板分割成一些细长条, 每一个长条的质量可视为  $f(x, y)$  在长条上的一元定积分, 再对长条的宽度积分.

**例 10.1.1** 求  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

解

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 e^{x+y} dx = \int_0^1 e^y dy \int_0^1 e^x dx \\ &= (e-1) \int_0^1 e^y dy = (e-1)^2. \end{aligned}$$

**例 10.1.2** 求  $\iint_D x \cos xy dx dy$ , 其中  $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ .

解

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos xy dx dy &= \int_0^\pi dx \int_0^1 x \cos xy dy \\ &= \int_0^\pi \left( \sin xy \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2. \end{aligned}$$

在这个例子中, 如果先对  $x$  积分, 计算将更加复杂.

二重积分的累次积分法不仅限于对定义在矩形区域上的函数的积分, 事实上对于定义在相当广泛的一类有界区域  $D$  上的函数  $f(x, y)$ , 累次积分仍然有效.

**定理 10.7** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上可积.

1° 设  $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 其中  $y_1(x), y_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 即  $D$  是平面上由曲线  $y = y_1(x), y = y_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$  以及平行于  $y$  的两条直线  $x = a, x = b$  围成的区域.

如果对任意的  $x \in [a, b]$ ,  $f(x, y)$  在  $[y_1(x), y_2(x)]$  上关于变量  $y$  可积, 记

$$\varphi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

那么  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  可积, 并有

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2° 设  $D = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$  其中函数  $x_1(y)$  和  $x_2(y)$  在  $[c, d]$  连续, 如果对每一个  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  在  $[x_1(y), x_2(y)]$  可积, 那么

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3° 如果  $f(x, y)$  连续, 且积分区域  $D$  既可以表示成 1° 中的形式, 又可以表示成 2° 中的形式, 那么两种累次积分可交换, 且

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

**证明** 这里只对 1° 的情形给出证明. 设  $D \subset [a, b] \times [c, d]$ , 将定义在  $D$  上的函数按下列方式扩充到  $[a, b] \times [c, d]$  上

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

首先验证  $f^*(x, y)$  满足定理 10.6 的条件. 因为矩形区域  $[a, b] \times [c, d]$  可分成两个部分, 一是  $D$ , 另一个是矩形内除了  $D$  之外的剩余部分, 记为  $D^*$ . 不难发现,  $f^*(x, y)$  在  $D$  上与  $f(x, y)$  完全相等因此可积, 在  $D^*$  上恒为零, 因此可积, 而且有

$$\begin{aligned} \iint_{[a, b] \times [c, d]} f^*(x, y) dx dy &= \iint_D f^*(x, y) dx dy + \iint_{D^*} f^*(x, y) dx dy \\ &= \iint_D f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

对  $[a, b]$  中任何固定值  $x$ , 有

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(x, y) dy &= \int_c^{y_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x, y) dy \\ &= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

所以  $f^*(x, y)$  满足定理 10.6 和定理 10.7 中 1° 的条件. 因此对  $f^*(x, y)$  应用定理 10.6 并注意到  $f^*(x, y)$  与  $f(x, y)$  的关系就得到 1° 中的结果.  $\square$

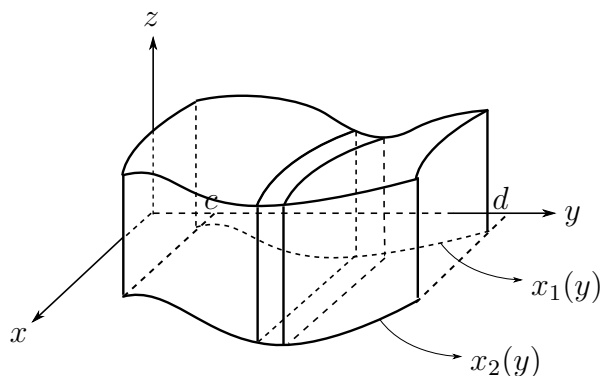


图 10.5



当可积函数  $f(x, y)$  的定义域  $D$  可以分解成若干块定理10.7 中所描述的两类区域时, 利用积分对区域的可加性, 在各个分区域上进行累次积分, 再将积分值相加就得到函数在  $D$  上的积分.

**例 10.1.3** 设函数  $f(x, y)$  连续, 证明:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

**证明** 首先注意到积分区域是平面上由直线  $x = b$ ,  $y = a$  以及  $y = x$  围成的三角区域. 又因为函数连续, 所以同一区域的不同方式的累次积分相等.

**例 10.1.4** 求  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $D$  由  $y = 0$ ,  $x = a$  和  $y = \frac{b}{a}x$  围成.

**解** 因为  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a}x\}$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 y^2 dy \\ &= \frac{b^3}{3a^3} \int_0^a x^5 dx = \frac{1}{18} a^3 b^3. \end{aligned}$$

**例 10.1.5** 求  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  是由 ( $a > 0$ )  $y = a$ ,  $y = 3a$ ,  $y = x$  和  $y = x + a$  围成的平行四边形.

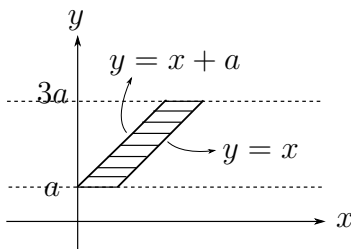


图 10.6

**解**  $D: a \leq y \leq 3a, y - a \leq x \leq y$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left( ay^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{(y-a)^3}{3} \right) dy = 14a^4. \end{aligned}$$

如果要先对  $y$  积分, 就需要把  $B$  分成三个区域分别计算.

**例 10.1.6** 求  $\int_1^2 y dy \int_y^2 \frac{\sin x}{x^2-1} dx$ .

解

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 y \, dy \int_y^2 \frac{\sin x}{x^2 - 1} \, dx &= \iint_{\substack{1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq 2}} \frac{y \sin x}{x^2 - 1} \, dx \, dy \\
 &= \int_1^2 \frac{\sin x}{x^2 - 1} \, dx \int_1^x y \, dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \sin x \, dx \\
 &= \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 2).
 \end{aligned}$$

例 10.1.7 求  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} x^2 y^2 \, dx \, dy$ .

解 积分区域是一个正方形, 由于积分区域的对称性和被积函数对  $x, y$  都为偶函数, 可知

$$\begin{aligned}
 \iint_{|x|+|y| \leq 1} x^2 y^2 \, dx \, dy &= 4 \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x, y \geq 0}} x^2 y^2 \, dx \, dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y^2 \, dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 (1-x)^3 \, dx = \frac{1}{45}.
 \end{aligned}$$

一般而言, 如果积分区域  $D$  关于  $y$  轴是对称的, 而被积函数  $f(x, y)$  关于  $x$  是偶函数 (即  $f(-x, y) = f(x, y)$ ). 把  $D$  在一、四象限的那部分记成  $D_1$ ,  $D$  在二、三象限的部分记成  $D_2$ . 那么在构造 Riemann 和的时候,  $D_1$  中有一个面积元素  $\sigma(D_i) = \Delta x \Delta y$ , 那么  $D_2$  中也可以取到一个对称的面积元素  $\sigma(D_i)' = \Delta x \Delta y$ . 在  $D_i$  中取值  $f(\xi, \eta)$ , 则在  $D_i'$  中可以取值  $f(-\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$ . 所以被积函数在  $D_1$  和  $D_2$  上的积分值是一样的. 因而有

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy.$$

类似的讨论可知, 如果区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 而  $f(x, y)$  关于  $x$  是一个奇函数. 那么

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

例 10.1.8 求由  $x^2 + y^2 \leq a^2$  和  $x^2 + z^2 \leq a^2$  相交部分的立体的体积  $V$ .

解 这个立体在第一卦限那部分是一个曲顶柱体, 其顶为  $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 底是平面区域  $x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$ . 由对称性可知

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \, dy = 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \\
 &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{16}{3} a^3.
 \end{aligned}$$

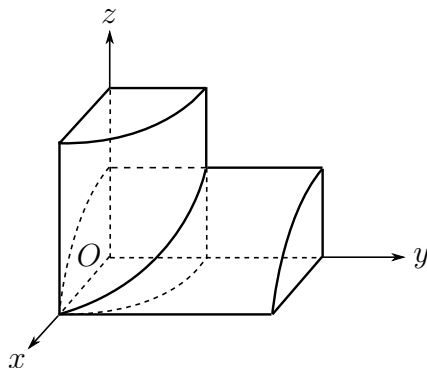


图 10.7

## 习题 10.1

1. 改变下列积分的顺序.

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(6) \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x, y) dx.$$

2. 计算下列积分.

$$(1) \iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy, \quad D = [0, 1]^2;$$

$$(2) \iint_D \sin(x+y) dx dy, \quad D = [0, \pi]^2;$$

$$(3) \iint_D \cos(x+y) dx dy, \quad D: \text{由 } y = \pi, x = y, x = 0 \text{ 围成};$$

$$(4) \iint_D (x+y) dx dy, \quad D: \text{由 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 围成的圆在第一象限部分};$$

$$(5) \iint_D (x+y-1) dx dy, \quad D: \text{由 } y = x, y = x+a, y = a, y = 3a \text{ 围成};$$

(6)  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ ,  $D$ : 由  $y = x$  和  $x = y^2$  围成;

(7)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ,  $D$ : 由  $x = 2, y = x$  及  $xy = 1$  围成.

(8)  $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$  所围成;

3. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$ :  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ;

(2)  $\iint_D \sin x \sin y dx dy$ ,  $D$ :  $x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9$  围成含原点的部分;

4. 设函数  $\varphi$  和  $\psi$  分别在区间  $[a, b]$  和  $[c, d]$  上可积, 求证  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  在  $D = [a, b] \times [c, d]$  上可积, 且有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \psi(x) dx.$$

5. 设函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 证明

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x)f(y) dy = \frac{1}{2} \left( \int_0^a f(x) dx \right)^2,$$

$$\int_0^a dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^a (a-x)f(x) dx.$$

6. 设函数  $f(x, y)$  有连续的二阶偏导数, 在  $D = [a, b] \times [c, d]$  上, 求积分

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$$

7. 设函数  $f(x, y)$  连续, 求极限

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy.$$

## §10.2 二重积分的换元

本节将讨论重积分的换元, 换元的严格论证将在第三册给出, 这里我们将重点讨论具体的计算问题. 首先观察一个例子,

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0, y \geq 0\}$$

积分区域是一个扇形区域. 如果对  $D$  进行矩形分割, 并使用累次积分, 那么

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

经过对变量  $y$  进行分部积分等一系列积分计算后, 得

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} + x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right).$$

并再对  $x$  积分. 显然积分过程相当复杂. 如果对扇形区域  $D$  弧度与径向做如下分割

$$\begin{aligned} T : 0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \frac{\pi}{2} \\ 0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m = 1 \end{aligned}$$

那么每一个小块的面积为

$$\sigma(D_{ij}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \Delta r_i \Delta \theta_j \approx r_i \Delta r_i \Delta \theta_j$$

这样一来, 积分等于下列 Riemann 和的极限

$$\begin{aligned} S(T) &= \sum_{i,j=0}^{n,m} \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=r_i \cos \theta_j \\ y=r_i \sin \theta_j}} \sigma(D_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} r^2 \Delta r_i \Delta \theta_j = \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^n r_i^2 \Delta r_i \end{aligned}$$

它的极限就是

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}$$

### 10.2.1 坐标曲线和面积元素

上述例子实际上是做了一个坐标变换

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

它给出了  $O'r\theta$  平面上的区间  $D' = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  到  $Oxy$  平面上  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0, y \geq 0\}$  的一一对应. 在这个变换之下, 积分的面积元的变换关系为

$$d\sigma = dx dy = r dr d\theta.$$

一般地, 设

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (u, v) \in D'$$

是从  $O'uv$  平面上的有界区域  $D'$  到  $Oxy$  面上的区域  $D$  的坐标变换.

取定  $u = u_0$  (在  $D'$  中, 是一条平行  $v$  轴的直线), 则

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v)$$

给出  $D$  中的一条曲线, 称之为  $v$  曲线. 同样, 给定  $v = v_0$  ( $D'$  中平行  $u$  轴的直线) 时,

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0)$$

给出一条  $u$  曲线. 这样就可以得到  $u$  曲线族和  $v$  曲线族. 由于映射是一一对应, 所以同族的曲线彼此不相交, 而一条  $u$  曲线和一条  $v$  曲线也只有一个交点. 于是就可以把这两族曲线作为  $Oxy$  平面区域  $D$  中的坐标曲线.

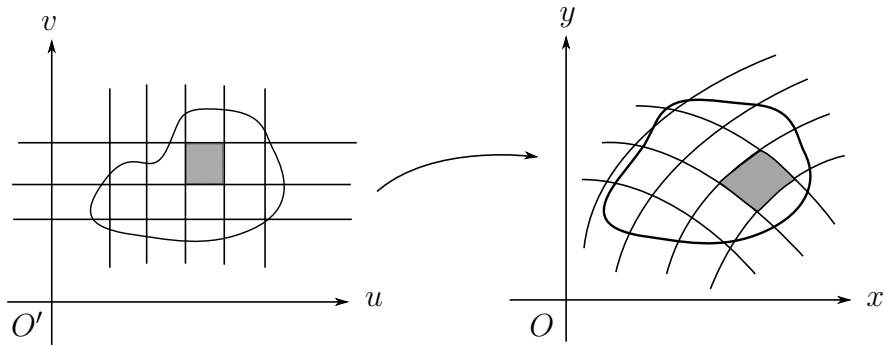


图 10.8

这样, 在  $O'uv$  平面上对  $D'$  的矩形分割, 就给出  $Oxy$  平面上对  $D$  的一个由  $u$  曲线和  $v$  曲线网构成的一个分割.  $D'$  中的一个方块  $[u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$  对应到  $D$  中, 就是一个曲边四边形, 它的四个顶点分别为:

$$M_1 = (x_1, y_1) = (x(u, v), y(u, v)),$$

$$M_2 = (x_2, y_2) = (x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)),$$

$$M_3 = (x_3, y_3) = (x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)),$$

$$M_4 = (x_4, y_4) = (x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v))$$

当分割变细时, 曲边四边形的面积  $\Delta\sigma$  近似于以向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  和  $\overrightarrow{M_1M_4}$  为边的平行四边形的面积:

$$\Delta\sigma \approx \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \right| = |(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

如果  $x(u, v)$  和  $y(u, v)$  是可微的, 那么

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + o(\Delta u), \\x_4 - x_1 &= x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + o(\Delta v), \\y_2 - y_1 &= y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + o(\Delta u), \\y_4 - y_1 &= y(u_0, v_0 + \Delta v) - y(u_0, v_0) = \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + o(\Delta v).\end{aligned}$$

略去高级无穷小量后就有

$$\Delta\sigma \approx \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

在上述讨论中, 当  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0$  时,  $D'$  上的方块, 映射到  $D$  中时可能退化. 因此设

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (u, v) \in D'$$

是从  $O'uv$  平面上的有界区域  $D'$  到  $Oxy$  平面上的有界区域  $D$  的一一可微映射, 而且  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ ,  $(u, v) \in D'$ , 则有面积元等式

$$d\sigma = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

由于  $d\sigma$  是区域  $D$  的面积元素,  $du dv$  是区域  $D'$  的面积元素, 所以  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  就是变换的面积膨胀率.

### 10.2.2 二重积分的换元

沿用前面的记号和假设, 并设  $f(x, y)$  是  $D$  上连续的二元函数.

对  $O'uv$  平面上有界区域  $D'$  进行矩形分割:

$$T' : u_0 < u_1 < \cdots < u_n; \quad v_0 < v_1 < \cdots < v_m$$

对应  $u = u_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ),  $v = v_j$  ( $j = 1, 2, \cdots, m$ ) 的坐标曲线把  $Oxy$  平面上的  $D$  分割成小区域  $D_{ij}$ . 这些小区域是  $D'_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$  在坐标变换  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  下的象, 且

$$\sigma(D_{ij}) \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j$$

因此  $f(x, y)$  在  $Oxy$  平面区域  $D$  上的积分可表示为

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \sum_{i, j} \int_{D'_{ij}} f \approx \sum_{i, j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \sigma(D_{ij}) \\ &\approx \sum_{i, j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j,\end{aligned}$$

其中  $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j))$  是  $D_{ij}$  中一点, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j.$$

上式右端是函数

$$f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

在区域  $D'$  上的 Riemann 和. 当分割无限变细时, 就得到

**定理 10.8** 设  $D$  是  $Oxy$  中可测的有界闭区域,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 变换

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (u, v) \in D'$$

是从  $O'uv$  平面上可测的有界区域  $D'$  到  $Oxy$  平面上有界区域  $D$  的有连续偏导数的一一映射并满足

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

特别, 对极坐标变换

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

我们有

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

其中区域  $D'$  经极坐标变换映成区域  $D$ .  $D$  中对应  $r = r_i$ ,  $\varphi = \varphi_j$  的坐标曲线就是  $Oxy$  平面中的放射状直线和园环. 本节刚开始的例子, 用换元公式就变得更加简单.

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}} r^2 dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

**例 10.2.1** 求椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积  $V$ .

**解** 椭球上半部分的函数是

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (x, y) \in D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$



所以

$$V = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

令  $x = as$ ,  $y = bt$ , 则  $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| = ab$ ,  $(s, t) \in D' = \{(s, t) : s^2 + t^2 \leq 1\}$ , 所以

$$V = 2abc \iint_{D'} \sqrt{1 - s^2 - t^2} ds dt.$$

令  $s = r \cos \varphi$ ,  $t = r \sin \varphi$ , 则  $\left| \frac{\partial(s,t)}{\partial(r,\varphi)} \right| = r$ ;  $D'' : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$V = 2abc \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sqrt{1 - r^2} r dr d\varphi = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{4}{3} \pi abc.$$

特别当  $a = b = c = R$  时, 得到半径为  $R$  的球体的体积  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

**例 10.2.2** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = ay$  所截下的体积  $V$ .

**解** 由对称性可知

$$V = 4 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中区域  $D : x^2 + y^2 \leq ay, x \geq 0$ . 化成极坐标形式为 (图10.9)

$$D : 0 \leq r \leq a \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

故

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

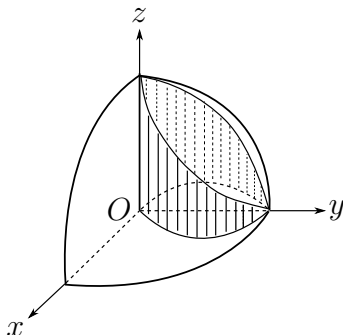


图 10.9

**例 10.2.3** 求球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  和  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$  相交部分的体积.

**解** 二球体表面的交线满足 (图10.10)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

即

$$z = \frac{R}{2}, \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{4}R^2.$$

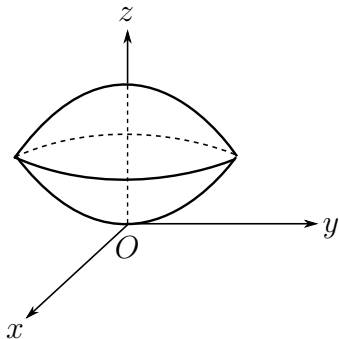


图 10.10

容易看出,  $V$  等于以  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}R^2$ ) 为顶的曲顶柱体体积  $V_1$  与以  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$  ( $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}R^2$ ) 为顶的曲顶柱体的体积  $V_2$  之差. 即有

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}R^2} \left( \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} (2\sqrt{R^2 - r^2} - R)r dr = \frac{5}{12} \pi R^3. \end{aligned}$$

**例 10.2.4** 求双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  所围成的面积.

**解** 所围图形在第一象限部分为区域

$$D: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

故由对称性, 双纽线围成的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_D dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2. \end{aligned}$$

**例 10.2.5** 求  $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$ , 其中  $D$  是由  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  与坐标轴围成的区域 (图10.11).

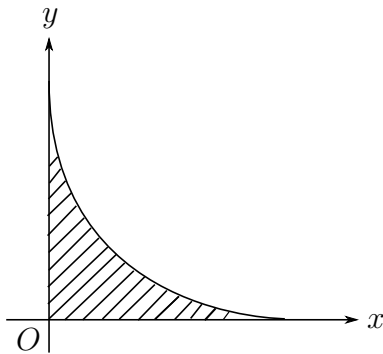


图 10.11

解 为了有理化被积函数, 作变量代换

$$x = r^2 \cos^4 t, \quad y = r^2 \sin^4 t.$$

得到

$$D' : \quad 0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} = r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

及

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = \begin{vmatrix} 2r \cos^4 t & 2r \sin^4 t \\ -4r^2 \cos^3 t \sin t & 4r^2 \sin^3 t \cos t \end{vmatrix} = 8r^3 \cos^3 t \sin^3 t.$$

故

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^3 t dt \int_0^1 r^4 dr = \frac{2}{15}.$$

例 10.2.6 求积分  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $D$  由四条抛物线  $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay$  和  $x^2 = by$  围成 ( $0 < p < q, 0 < a < b$ ) (图10.12).

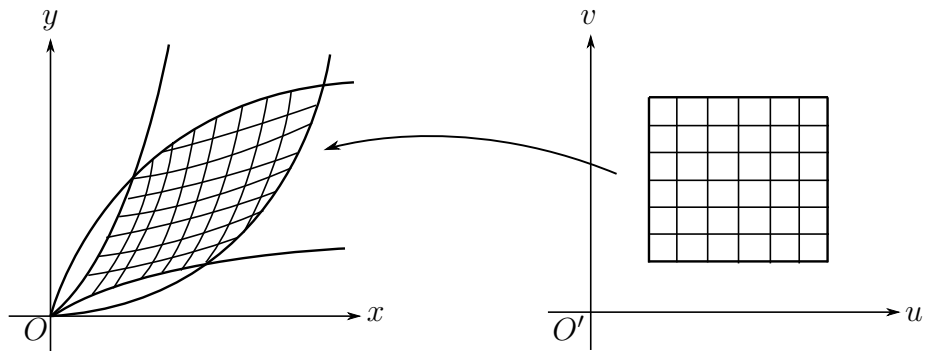


图 10.12

解 变量代换

$$y^2 = ux, \quad x^2 = vy \quad (p \leq u \leq q, a \leq v \leq b)$$

就把  $O'uv$  平面上的区域

$$D' : p \leq u \leq q, \quad a \leq v \leq b$$

映成  $Oxy$  平面上的区域  $D$  (图9.14). 解出

$$x = (uv^2)^{\frac{1}{3}}, \quad y = (u^2v)^{\frac{1}{3}},$$

可知

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

故

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_p^q u^2 du \int_a^b v^2 dv = \frac{1}{27} (q^3 - p^3)(b^3 - a^3).$$

**例 10.2.7** 求  $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ .

**解** 利用极坐标变换

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= \pi (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

利用这个结果可以求出一个重要的反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

的值. 我们有

$$\begin{aligned} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \\ &= \iint_{\substack{-R \leq x \leq R \\ -R \leq y \leq R}} e^{-x^2-y^2} dx dy, \end{aligned}$$

由  $e^{-x^2-y^2} > 0$  及积分区域的包含关系 (图10.13) 可知

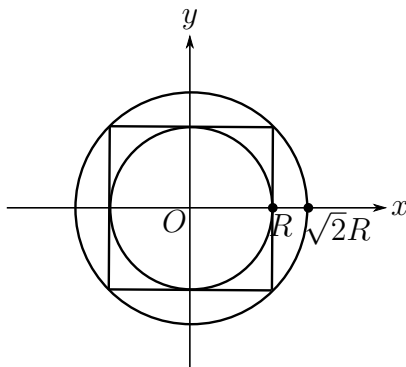


图 10.13

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

由此例可得到不等式

$$\pi (1 - e^{-R^2}) \leq \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi (1 - e^{-2R^2}).$$

命  $R \rightarrow +\infty$ , 即得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

或

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这个积分叫概率积分.

## 习题 10.2

1. 计算下列积分.

$$(1) \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^b xy(x^2-y^2) dy;$$

$$(3) \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y) dx dy;$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} xy(x+y) dy;$$

$$(5) \int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dy;$$

2. 计算下面二重积分.

$$(1) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2 \leq x+y;$$

$$(2) \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4, y=0, y=x \text{ 所围成的第一象限部分};$$

$$(3) \iint_D (x^2+y^2) dx dy, \quad D: \text{由 } xy=1, xy=2, y=x, y=2x \text{ 围成的第一象限部分};$$

$$(4) \iint_D dx dy, \quad D: \text{由 } y^2=ax, y^2=bx, x^2=my, x^2=ny \text{ 围成的区域 } (a > b > 0, m > n > 0);$$

(5)  $\iint_D xy \, dx \, dy$ ,  $D: xy = a, xy = b, y^2 = cx, y^2 = dx$  围成的第一象限部分  
( $0 < a < b, 0 < c < d$ );

(6)  $\iint_D 4xy \, dx \, dy$ ,  $D: x^4 + y^4 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$  围成的区域;

(7)  $\iint_D \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x + y + 3}} \, dx \, dy$ ,  $D: |x| + |y| \leq 1$ ;

(8)  $\iint_D \sin \frac{y}{x + y} \, dx \, dy$ ,  $D: \text{由直线 } x + y = 1, x = 0, y = 0 \text{ 围成的区域.}$

(9)  $\iint_D |xy| \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$

3. 求下列曲线所围成的平面区域的面积:

(1)  $x^2 + 2y^2 = 3$  和  $xy = 1$  (不含原点部分);

(2)  $(x - y)^2 + x^2 = a^2$  ( $a > 0$ );

(3) 由直线  $x + y = a, x + y = b, y = kx$  和  $y = mx$  ( $0 < a < b, 0 < k < m$ ) 围成的平面区域.

4. 证明  $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} e^{x^2 + y^2} \, dx \, dy \leq \left[ \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2} \, dx \right]^2$ .

5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 e^{f(x)} \, dx \cdot \int_0^1 e^{-f(y)} \, dy \geq 1$ .

6. 设  $f(x)$  为连续的奇函数, 证明  $\iint_{|x| + |y| \leq 1} e^{f(x+y)} \, dx \, dy \geq 2$ .

7. 设  $f(t)$  为连续函数, 求证

$$\iint_D f(x - y) \, dx \, dy = \int_{-A}^A f(t)(A - |t|) \, dt$$

其中  $D$  为:  $|x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}$ ,  $A > 0$  为常数.

### §10.3 三重积分

三重积分与二重积分没有本质区别, 只是函数  $f(x, y, z)$  是定义在三维空间中有界区域  $V$  上. 因此我们无法再借助几何直观来描述三重积分. 但可以借助物理上求一个非均匀物体的质量来解释.

设三维坐标空间物体  $V$ , 质量的密度函数是  $\rho(x, y, z)$ , 要计算物体的总质量, 不妨将物体分割成若干小块  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , 在  $V_i$  上, 密度函数可近似于一个常数  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$ , 所以  $V_i$  的质量近似于  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sigma(V_i)$ , 这里  $\sigma(V_i)$  表示小块的体积. 将每一小块的近似值相加, 就得到总体质量的近似值 (即 Riemann 和)

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sigma(V_i)$$

分割越细, 近似值就越精确, 当分割的最大直径趋于零时, 上述近似值的极限就应该是物体总体的质量.

因此, 对于定义在有界区域  $V$  上的函数  $f(x, y, z)$ , 当分割的最大直径趋于零时, 如果相应的 Riemann 和有极限, 而且极限不依赖于分割的方式以及每一小块上点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选取, 则称函数是可积的, 并记为

$$\iiint_V f(x, y, z) dV, \text{ 或 } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \text{ 或 } \int_V f dV$$

函数的三重积分具有与二重积分一样的性质, 在此只列举以下两条结果, 其它不再重复, 而将着重点转移到三重积分的计算上来.

**定理 10.9** 设函数  $f(x, y, z)$  是定义在三维空间中的一个有界区域  $V$  上

1° 如果  $f(x, y, z)$  在  $V$  上可积, 那么有界.

2° 如果  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续, 那么可积. 如果  $f(x, y, z)$  在  $V$  上有界, 在  $V$  上的不连续点只分布在  $V$  中有限张光滑曲面上, 那么函数可积.

#### 10.3.1 三重积分的累次积分

首先考虑一种简单情形, 设  $V = I_1 \times I_2 \times I_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  是三维空间的一个立方体,  $V$  的密度分布为  $f(x, y, z)$ . 那么计算  $V$  的质量有两种途径.

一是在  $I_1 \times I_2$  中取面积元  $dx dy$ , 以这个面积元为底, 做一个平行  $z$  轴的细长柱体, 在这个细长柱体的质量近似为对线密度积分  $\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$  乘以面积元  $dx dy$ . 再对面积元积分 (即二重积分), 就得到总的质量

$$\iint_{I_1 \times I_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

二是平行于物体的底面将物体分割成薄片, 每一小片的质量可视为面密度在  $I_1 \times I_2$  上的积分  $\iint_{I_1 \times I_2} f(x, y, z) dx dy$  乘以线元  $dz$  (厚度), 再对  $z$  积分

$$\int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{I_1 \times I_2} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

不管那种情形, 对其中的二重积分继续实施累次积分, 最终将问题化为三个累次积分.

从数学上看, 设  $f(x, y, z)$  在  $V = I_1 \times I_2 \times I_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  上连续. 为了计算积分, 我们采取下列分割

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2,$$

$$a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = b_3,$$

则 Riemann 和为

$$S(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_l) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l$$

一方面上述 Riemann 和可以表示成

$$S(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_l) \Delta z_l \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

与二重积分类似, 当分割的最大直径趋于零时, 上式括号内的和式趋于积分

$$\int_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, \eta_j, z) dz = \varphi(\xi_i, \eta_j).$$

因此对应  $[a_1, b_1]$  和  $[a_2, b_2]$  分割的求和近似一个二重积分的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{a_3}^{b_3} f(\xi_i, \eta_j, z) dz \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

所以有

$$\iiint_V f(x, y) dx dy dz = \iint_{I_1 \times I_2} dx dy \int_{I_3} f(x, y, z) dz$$

继续对二重积分实施累次积分, 有

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y) dx dy dz &= \int_{I_1} dx \int_{I_2} dy \int_{I_3} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

另一方面, 把 Riemann 和表示成

$$S(T) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_l) \Delta y_j \Delta z_l \right) \Delta x_i$$



注意到上式括号内的和式是一个二元函数的 Riemann 和, 则当分割最大直径趋于零时, 其结果是一个  $[a_1, b_1]$  和  $[a_2, b_2]$  上的二重积分

$$\iint_{I_2 \times I_3} f(\xi_i, y, z) dy dz = \varphi(\xi_i)$$

这样整个和式变成了一个关于  $x$  的函数的 Riemann 和, 最终整体上的极限为

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y) dx dy dz &= \int_{I_1} dx \iint_{I_2 \times I_3} f(x, y, z) dy dz \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

注意, 我们已经假设函数的连续性, 所以对每一个分量都连续, 对每一个分量可积, 而且三个积分的次序也是可以交换的. 类似二重积分的累次积分, 这些结果可以严格证明. 因此三重积分可化为逐次进行的单变量的定积分.

**例 10.3.1** 求  $\iiint_V x^2 y e^{xyz} dx dy dz$ , 其中  $V = [0, 1]^3$ .

解

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 y e^{xyz} dx dy dz &= \iint_{[0,1]^2} x^2 y dx dy \int_0^1 e^{xyz} dz \\ &= \iint_{[0,1]^2} x(e^{xy} - 1) dx dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^1 e^{xy} dy - \int_0^1 x dx \int_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (e^x - 1) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

上述结果显然可以推广到比三维立方体区域更复杂的区域中去.

**定理 10.10** 设函数  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上连续 (因此可积).

1° 如果  $V$  是这样的区域: 它在  $Oxy$  平面上的投影为平面区域  $D$ , 而  $V$  是由曲面  $S_1: z = z_1(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) 和  $S_2: z = z_2(x, y)$  ( $(x, y) \in D$  ( $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ )) 及以  $\partial D$  为准线并平行于  $z$  轴的柱面围成的, 那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

如果  $D$  是由  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = \phi_1(x)$ ,  $y = \phi_2(x)$  ( $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ ) 围成, 那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

2° 如果  $V$  是这样的区域: 它在  $z$  轴上的投影为区间  $I$ . 过  $I$  上一点  $(0, 0, z)$  与  $z$

轴垂直的平面同  $V$  相交的平面图形在  $Oxy$  平面上的投影为区域  $D_z$ , 那么

$$\int_V f = \int_I dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

当然对于  $D_z$  上的积分, 还可以继续化为累次积分. 区域  $V$  也可以换成向别的平面或数轴投影, 可得到相同的结果.

3° 如果区域  $V$  可以划分成有限多个定理中描述的区域, 那么可以利用积分对积分区域的可加性分别积分后再求和.

**例 10.3.2** 计算  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $V$  是由坐标面  $x=0, y=0, z=0$  与平面  $x+y+z=1$  围成的四面体 (图10.14).

**解** 先把四面体投影到坐标面  $Oxy$  上, 所得的平面区域  $D$  是由直线  $x=0, y=0$  和  $x+y=1$  所围成的三角形. 对于  $D$  中的任意一点  $(x, y)$ , 作平行于  $z$  轴的直线, 其穿入  $V$  内之点的立标是  $z=0$ , 穿出  $V$  外之点的立标是  $z=1-x-y$ , 所以算得

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

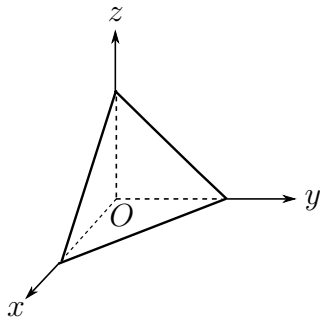


图 10.14

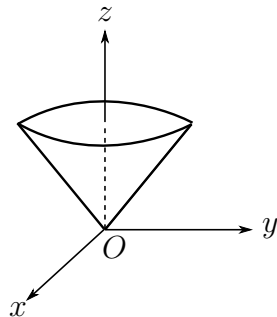


图 10.15

**例 10.3.3** 计算  $\iiint_V z dx dy dz$ , 其中  $V$  是由锥面  $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$  及平面  $z=h$  围成的锥体 (图10.15).

**解** 在锥面方程中令  $z=h$  得知  $V$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $D$  是圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . 过  $D$  内任意一点  $(x, y)$  作平行于  $z$  轴的直线, 其与  $V$  的表面相交两点的立标各是

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = h,$$

于是求得

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dx \, dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z \, dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[ h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2) \right] dx \, dy \\ &= \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2)r \, dr = \frac{\pi}{4} R^2 h^2. \end{aligned}$$

这个三重积分也可化成相反次序的累次积分来计算. 由于区域  $V$  在  $z$  轴上的投影区间是  $[0, h]$ , 且对该区间内的任意一点  $z$ , 作垂直于  $z$  轴的平面, 它与  $V$  交成的区域  $D_z$  是半径为  $\frac{R}{h}z$  的圆  $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}z^2$ , 所以

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^h z \, dz \iint_{D_z} dx \, dy = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^3 \, dz = \frac{\pi}{4} R^2 h^2.$$

这里因为被积函数与变量  $x, y$  无关, 二重积分的计算就变得特别简单, 它的值就是半径为  $\frac{R}{h}z$  的圆面积. 两种计算方法繁简不一, 适当选择可简化求解过程.

**例 10.3.4** 计算  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ , 其中  $V$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

**解** 先计算三重积分  $\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz$ . 这时被积函数只依赖于  $x$ , 故宜先对  $y, z$  作二重积分. 由于区域  $V$  在  $x$  轴上的投影区间是  $[-a, a]$ , 且过该区间的点  $x$  作垂直于  $x$  轴的平面去截椭球体  $V$  时, 截面区域  $D_x$  是

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

这是半轴为  $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  和  $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  的椭圆, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-a}^a x^2 \, dx \iint_{D_x} dy \, dz \\ &= \pi bc \int_{-a}^a x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 bc \end{aligned}$$

同样算得

$$\iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{15} \pi ab^3 c, \quad \iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

于是利用被积函数的可加性, 所求的三重积分为

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz + \iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz + \iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{4}{15} \pi abc(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

**例 10.3.5** 求  $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ , 其中  $V$  由柱面  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $z = 0$  和  $z = a(a > 0)$  围成 (图10.16).

解

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^a z \, dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr = \frac{16}{9} a^2. \end{aligned}$$

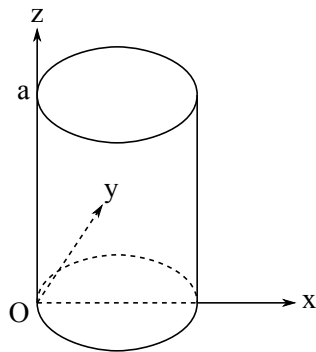


图 10.16

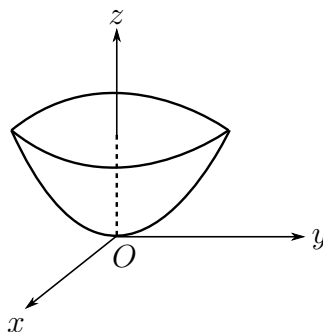


图 10.17

例 10.3.6 求  $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{1 + x^2 + y^2}$ ,  $V: 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq 4z$  (图10.17).

解 因  $D_z: x^2 + y^2 \leq 4z$ , 故

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{1 + x^2 + y^2} &= \int_0^h dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4z} \frac{dx \, dy}{1 + x^2 + y^2} \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{z}} \frac{r \, dr}{1 + r^2} \\ &= \pi \int_0^h \ln(1 + 4z) \, dz \\ &= \frac{\pi}{4} \left( (1 + 4h) \ln(1 + 4h) - 4h \right). \end{aligned}$$

### 10.3.2 三重积分的换元

设变换

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

把  $O'uvw$  空间中的区域  $V'$  一一映成  $Oxyz$  空间中的区域  $V$ .

引进  $uv$  曲面,  $vw$  曲面和  $wu$  曲面作为  $V$  中的坐标曲面. 并利用坐标曲面对  $V$  进行分割, 分割后的曲六面体的体积近似等于三条棱向量的混合积, 于是可得到体积元素的微元等式

$$dV = dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw.$$

重复二重积分换元 (变量代换) 的算法可得

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

一个重要的特例是球坐标变换

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

它的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

所以在球坐标变换下

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

**例 10.3.7** 计算三重积分  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所围成的立体 (图10.18)

**解** 在球坐标下,  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , 而  $V$  的边界曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  分别为

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad r = R.$$

所以积分区域  $V$  可以表示成

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

由此即得所求的三重积分的值为

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

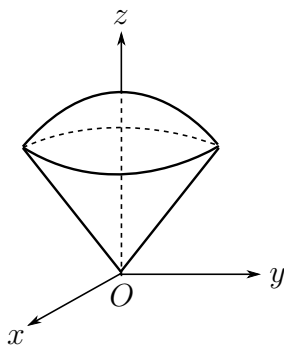


图 10.18

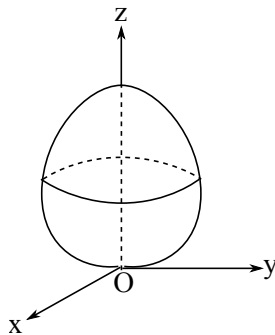


图 10.19

**例 10.3.8** 求曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$  ( $a > 0$ ) 所围成的立体体积 (图10.19).

**解** 在曲面的方程中因  $x$  及  $y$  只出现平方项, 故所围立体  $V$  关于平面  $Ozx$  及平面  $Oyz$  对称; 又因  $z$  不取负值, 所以这个立体位于平面  $Oxy$  的上侧, 从而要求的体积是它在第一卦限内之立体  $V_1$  的四倍, 应用球面坐标, 曲面的方程化成  $r = a\sqrt[3]{\cos\theta}$ . 而这些坐标在  $V_1$  中的变化范围是

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

于是求得立体的体积为

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= 4 \iiint_{V_1} dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

一般说来, 当被积函数具有形式  $f(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2)$  或积分区域是球面坐标系的坐标曲面围成时, 三重积分就宜采用球面坐标来进行计算.

**例 10.3.9** 计算曲面  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$  所围成的立体  $V$  的体积.

**解** 先作变换  $x = au^3, y = bv^3, z = cw^3$ , 它将空间  $O'uvw$  的单位球

$$V' : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

映成空间  $Oxyz$  中所给的立体  $V$ . 这时变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 27abcu^2v^2w^2,$$

所以

$$\iiint_V dx dy dz = 27abc \iiint_{V'} u^2v^2w^2 du dv dw.$$

右边的积分为

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} u^2v^2w^2 du dv dw &= \iiint_{V'} r^6 \sin^4\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\theta \cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^8 dr = \frac{4}{945} \pi. \end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$\iiint_V dx dy dz = \frac{4}{35} \pi abc.$$

### 10.3.3 来自物理学中的几个例子\*

计算物体的质心、转动惯量或对另一个物体的引力, 其基本思想与计算物体的质量类似. 都是将物体细分并视每一小块为一个质点, 通过考虑多质点的质心、转动惯量以

及之间的引力, 最后通过积分进行计算. 以下均假设物体占有空间区域为  $V$ , 并有连续的密度函数  $\rho(x, y, z)$ .

1° **质心** 设空间中有  $n$  个质点, 其质量和坐标分别是:  $m_i, (x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n$ . 那么它们的质心就是

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

一般地, 将  $V$  分成  $n$  个小块  $V_i$ , 每一小块可近似为质量为  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$  的质点, 当分割越来越细时, 它们的质心的极限值就是所求物体的质心.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma(V_i)}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} \rightarrow x_G = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

质心的其它两个坐标  $y_G, z_G$  也可类似给出. 对均匀物体,  $\rho$  等于常数, 则质心坐标简化为

$$x_G = \frac{1}{\sigma(V)} \iiint_V x dx dy dz,$$

以及关于  $y_G, z_G$  类似的表示, 其中  $\sigma(V)$  表示物体的体积.

**例 10.3.10** 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$  中任一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比, 求此球体的质心.

**解** 由于所给球体的质量分布对称于  $z$  轴, 所以它的质心位于  $z$  轴上, 而密度是

$$\rho = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中  $k$  是比例常数, 因此得

$$x_G = y_G = 0;$$

$$z_G = \frac{\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}{\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}.$$

采用球面坐标计算这两个三重积分. 将变换式

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

代入球体的不等式得

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta,$$

并且  $\varphi, \theta$  的变化范围是

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是算得

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{8}{5} \pi a^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cos \theta r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{64}{5} \pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin \theta d\theta = \frac{64}{35} \pi a^5. \end{aligned}$$

故所给球体的质心坐标为

$$x_G = y_G = 0, \quad z_G = \frac{\frac{64}{35} k \pi a^5}{\frac{8}{5} k \pi a^4} = \frac{8}{7} a.$$

2° **转动惯量** 把物体近似看作  $n$  个位于  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 质量为  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sigma(V_i)$  的质点  $V_i (i = 1, \dots, n)$  所组成的质点系, 该质点系对  $x$  轴的转动惯量就是

$$\sum_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma(V_i).$$

对  $V$  分割取极限, 则得物体对  $x$  轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

同理可得物体对  $y$  轴,  $z$  轴的转动惯量  $I_y, I_z$ , 以及物体对原点的转动惯量

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**例 10.3.11** 求底半径为  $R$ , 高为  $l$  的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

**解** 取底心为原点, 轴线为  $z$  轴, 于是所给柱体由圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  及平面  $z = 0, z = l$  围成. 故它对  $z$  轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^l dz \\ &= \frac{\pi}{2} \rho l R^4 = \frac{1}{2} M R^2, \end{aligned}$$

其中  $M$  是柱体的质量.

**例 10.3.12** 求半径为  $R$ , 质量为  $M$  的均匀球体绕其直径的转动惯量.

**解** 取直径为  $z$  轴, 球心为坐标原点, 则积分区域  $V$  为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . 于是

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2. \end{aligned}$$



3° 引力 这里考虑物体  $V$  对质量为  $m$  的质点  $A(x_0, y_0, z_0)$  的引力问题. 通过对  $V$  的分割, 可将问题化为位于  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 质量为  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sigma(V_i)$  的质点系  $V_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 对  $A$  的引力.

记  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , 则  $V_i$  对点  $A$  的引力是

$$\Delta \mathbf{F}_i = k \frac{m \rho_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma(V_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0).$$

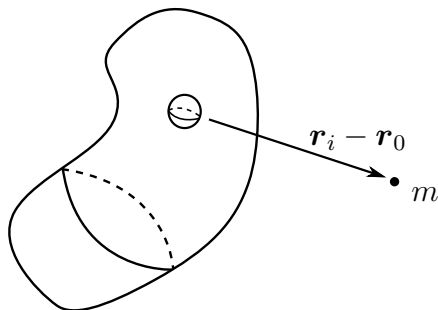


图 10.20

其中  $k$  为引力常数, 求和后并取极限得物体  $V$  对质点  $A$  的引力

$$\mathbf{F} = km \iiint_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

右边是对一个向量的积分, 应理解为对每一个分量的积分. 例如第一个分量为

$$F_x = km \iiint_V \frac{x - x_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

其他两个分量  $F_y, F_z$  有类似的表示.

**例 10.3.13** 求半径为  $R$  的均匀( $\rho =$  常数) 球体对球体外质量为  $m$  的质点  $A$  的引力.

**解** 取球心为坐标原点,  $z$  轴过点  $A$ , 则质点  $A$  的坐标为  $(0, 0, l)$  ( $l > R$ ). 根据积分的对称性, 有  $F_x = F_y = 0$ , 以及

$$F_z = km\rho \iiint_V \frac{z - l}{r^3} dx dy dz,$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - l)^2}$ ,  $V$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . 化为累次积分得

$$F_z = km\rho \int_{-R}^R (z - l) dz \iint_{D_z} \frac{dx dy}{r^3}.$$

其中  $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$ . 用极坐标变换计算右边的二重积分得

$$\begin{aligned} \iint_{D_z} \frac{dx dy}{r^3} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{s}{[s^2 + (z - l)^2]^{\frac{3}{2}}} ds \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{l - z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right). \end{aligned}$$

所以

$$F_z = -2\pi km\rho \int_{-R}^R \left[ 1 + \frac{z - l}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right] dz = -\frac{4\pi km\rho R^3}{3l^2}.$$

由于球体的体积为  $M = \frac{4}{3}\pi R^3$ , 故它对质量为  $m$  的质点的引力的三个分量为

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -k \frac{Mm}{l^2}.$$

其结果等效于一个位于圆心、质量为  $M$  的质点对位于  $z$  轴上质量为  $m$  的质点的引力.

### 习题 10.3

1. 计算下列三重积分.

- (1)  $\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ ;
- (2)  $\iiint_V xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$  围成;
- (3)  $\iiint_V y \cos(x + z) \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$  围成;
- (4)  $\iiint_V (a - y) \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $y = 0, z = 0, 2x + y = a, x + y = a, y + z = a$  围成.

2. 计算下列积分值.

- (1)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} \, dz$ ;
- (2)  $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) \, dz$ ;
- (3)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz$ ;
- (4)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \, dz$ .

3. 计算下列三重积分.

- (1)  $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$  围成;
- (2)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$  围成;

- (3)  $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $\sqrt{4-x^2-y^2} = z$ ,  $x^2 + y^2 = 3z$  围成;
- (4)  $\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 是  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  的第一卦限部分;
- (5)  $\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 是由曲面  $z = y^2, z = 4y^2 (y > 0)$  及平面  $z = x, z = 2x, z = 1$  所围的区域;
- (6)  $\iiint_V |x^2 + y^2 + z^2 - 1| \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .
- (7)  $\iiint_V e^{|z|} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;
- (8)  $\iiint_V (|x| + z)e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .

4. 利用对称性求下列三重积分.

- (1)  $\iiint_V (x + y) \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $z = 1 - x^2 - y^2$  和  $z = 0$  围成;
- (2)  $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz$ ,  $V$ : 由  $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 1$  围成;
- (3)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x$ ;
- (4)  $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ ;
- (5)  $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ;
- (6)  $\iiint_V \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \, dx \, dy \, dz$ ,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

5. 计算下列曲面围成的立体体积.

- (1)  $y = 0, z = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12, x + y + z = 6$ ;
- (2)  $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$ ;
- (3)  $z^2 + x^2 = 1$  和  $x + y + z = 3, y = 0$ ;
- (4)  $x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0$ ;
- (5)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, z = xy$  (在第一卦限部分);
- (6)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 = z^2$  (含  $z$  轴部分);
- (7)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  (含  $z$  轴部分);
- (8)  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$ .

6. 求函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$  内的平均值.

7. 设  $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $f$  为可微分函数, 求  $F'(t)$ .
8. 证明:  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dv = \pi \int_{-1}^1 f(z)(1 - z^2) dz$ .
9. 设函数  $f(x, y, z)$  连续, 证明:  

$$\int_a^b dx \int_a^x dy \int_a^y f(x, y, z) dz = \int_a^b dz \int_z^b dy \int_y^b f(x, y, z) dx.$$
10. 求椭圆薄片  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  的质量, 设密度  $\rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ .
11. 一个平面圆环是由半径为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ ) 的两个同心圆所围成的, 已知材料各点的密度和到圆心的距离成反比, 并在内圆的圆周上密度为 1, 求环的质量.
12. 一个物体是由两个半径各为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ ) 的同心球所围成, 已知材料的密度和到球心的距离成反比, 且在距离等于 1 处的密度等于  $k$ , 求物体的总质量.
13. 半径为  $a$  的圆盘, 其各点的密度和到圆心的距离成正比 (比例系数为 1), 今内切于圆盘截去半径为  $\frac{a}{2}$  之小圆, 求余下部分的重心坐标.
14. 有一个匀质薄板, 它是由半径为  $a$  的半圆和一个长方形拼接而成, 为了使重心正好在圆心上, 问长方形的宽  $b$  应为多少?
15. 求由曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  和  $z = c$  所围成的均匀物体的重心坐标.
16. 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$  内各点密度与各点到原点的距离成反比, 求其重心坐标.
17. 在半径为  $a$  的圆柱上连接一个半径为  $a$  的半球, 为了使重心正好在球心上, 问圆柱之高如何?
18. 求以下各物体的转动惯量 (设  $\rho =$  常数)  
 (1) 质量为  $m$ , 半径为  $R$  的薄圆盘, 对于: (a) 通过圆心并垂直圆盘的轴; (b) 直径.  
 (2) 质量为  $m$ , 半径为  $R$  的球体, 对于通过球心的轴线.
19. 求密度为  $\rho$  的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力, 设球的半径为  $R$ , 而轴截面的扇形的角等于  $2\alpha$ .

§10.4  $n$  重积分

类似二重和三重积分, 我们可以建立  $n$  重积分. 对于  $n$  重积分的累次积分, 只要认真分析清楚区域的特点, 一步一步地降低积分重数, 逐次进行积分即可. 例如对于  $n$  维方体  $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$  上连续函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$ , 它的积分可以化为累次积分

$$\int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_n.$$

如果函数定义域  $V = \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$  是这样—个区域:  $V$  在关于变量  $(x_1, \cdots, x_{n-1})$  所在的  $n-1$  维子空间  $\mathbb{R}^{n-1}$  中的投影是有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . 而且对  $V$  中每一个点  $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ , 它的第  $n$  个分量满足

$$\phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}), \quad (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in D$$

其中  $\phi_1, \phi_2$  是  $D$  中的连续函数. 那么

$$\int_V f = \int \cdots \int_D dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_{\phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{\phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, \cdots, x_n) dx_n$$

对于  $n$  重积分从  $V \rightarrow V'$  的换元

$$x_1 = x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n = x_n(u_1, \cdots, u_n)$$

两组变量之间的  $n$  维体积元素的关系为

$$dx_1 \cdots dx_n = \left| \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n$$

所以积分的换元公式为

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_V f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{V'} f(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_n)) \left| \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n. \end{aligned}$$

具体细节不再赘述, 取而代之是下面两个例子.

1°  $n$  维单形的体积 所谓  $n$  维单形是空间  $\mathbb{R}^n$  中这样的点集

$$S_n(a) = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \geq 0; x_1 + \cdots + x_n \leq a\}$$

当  $n=1$  时, 就是闭区间  $[0, a]$ ; 当  $n=2$  时, 就是  $Oxy$  平面上以  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$  为顶点的三角区域. 在三维空间中, 单形就是位于第一象限并以  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$ ,  $(0, 0, a)$  为顶点的四面体.

要计算  $n$  维单形的体积  $\sigma(S_n(a))$ , 可以计算函数  $f \equiv 1$  在  $S_n(a)$  上的积分

$$\sigma(S_n(a)) = \int_{S_n(a)} d\sigma$$

作换元

$$x_i = at_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} = a^n$$

即把边长为  $a$  的单形简化成边长为 1 的单形, 所以  $(t_1, \dots, t_n) \in S_n(1)$ , 且

$$\sigma(S_n(a)) = \int_{S_n(a)} d\sigma = a^n \int_{S_n(1)} d\sigma = a^n \sigma(S_n(1))$$

注意到, 对于固定的  $t \in [0, 1]$ ,  $S_n(1)$  与  $t_n = t$  的截面是由满足  $t_i, \dots, t_{n-1} \geq 0$ ,  $t_1 + \dots + t_{n-1} \leq 1 - t$  的点组成、边长为  $1 - t$  的  $n - 1$  维单形  $S_{n-1}(1 - t)$ . 因此

$$\begin{aligned} \sigma(S_n(1)) &= \int_0^1 dt \int \cdots \int_{S_n(1-t)} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} = \int_0^1 \sigma(S_{n-1}(1-t)) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{n-1} \sigma(S_{n-1}(1)) dt = \sigma(S_{n-1}(1)) \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{n} \sigma(S_{n-1}(1)) \end{aligned}$$

这样就得到一个递推公式, 显然  $\sigma(S_1(1)) = 1$ , 所以

$$\sigma(S_n(1)) = \frac{1}{n!}, \quad \sigma(S_n(a)) = \frac{a^n}{n!}.$$

**2°  $n$  维球的体积** 设  $B_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\}$ , 称之为以原点为球心、以  $a$  为半径的  $n$  维球体. 半径为 1 的球体称为单位球体. 类似单形体积的计算, 有

$$\sigma(B_n(a)) = \int_{B_n(a)} d\sigma = a^n \int_{B_n(1)} d\sigma = a^n \sigma(B_n(1))$$

注意到, 对于固定的  $t_{n-1} = u$ ,  $t_n = v$ ,  $u^2 + v^2 \leq 1$ , 它与球体  $B_n(1)$  的截面是由满足  $t_1^2 + \dots + t_{n-2}^2 \leq 1 - u^2 - v^2$  的点构成, 所以截面是一个  $n - 2$  维球体  $B_{n-2}(\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ , 利用累次积分, 有

$$\begin{aligned} \sigma(B_n(1)) &= \int_{B_n(1)} d\sigma = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv \int \cdots \int_{B_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})} dt_1 \cdots dt_{n-2} \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2} \sigma(B_{n-2}(1)) du dv \\ &= \sigma(B_{n-2}(1)) \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2} du dv. \end{aligned}$$

对于上式中的二重积分, 利用极坐标  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ , 得

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2} du dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)^{(n-2)/2} r dr = \frac{2\pi}{n}.$$

由此可得关于单位球体体积计算的递推公式

$$\sigma(B_n(1)) = \frac{2\pi}{n} \sigma(B_{n-2}(1))$$

显然,  $\sigma(B_1(1)) = 2$ ,  $\sigma(B_2(1)) = \pi$ , 最终有

$$\sigma(B_{2n}(1)) = \frac{\pi^n}{n!}, \quad \sigma(B_{2n-1}(1)) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!}$$

$$\sigma(B_{2n}(a)) = \frac{\pi^n}{n!} a^{2n}, \quad \sigma(B_{2n-1}(a)) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!} a^{2n-1}.$$

这里, 对一个正整数  $n$ ,  $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$ , 所以对于偶数有  $2n = 2^n n!$ , 对于奇数有  $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$ .

注记 计算  $n$  维球的体积, 也可以通过球坐标的换元来进行, 关键是要建立  $n$  维的球坐标, 并计算换元的 Jacobi 行列式. 有关内容将在第三册详细讨论, 这里简要给出建立  $n$  维空间球坐标的基本思路.

首先回顾 3 维球坐标是如何建立的. 设  $P(x_1, x_2, x_3)$  是空间中任意一点,  $r = |\overrightarrow{OP}|$ , 则  $\overrightarrow{OP}$  在  $Ox_2x_3$  平面上的投影为  $\overrightarrow{OP}'$ . 记  $\theta_1$  是从  $x_1$  轴到向量  $\overrightarrow{OP}$  的方向角, 因此

$$x_1 = r \cos \theta_1,$$

且  $r' = |\overrightarrow{OP}'| = r \sin \theta_1$ . 将  $Ox_2x_3$  平面上点  $P'(x_2, x_3)$  的坐标用 2 维极坐标表示:

$$x_2 = r' \cos \theta_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_3 = r' \sin \theta_2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2,$$

其中  $\theta_2$  是  $x_2$  轴到  $\overrightarrow{OP}'$  的方向角. 这样, 我们就得到 3 维的球坐标变换

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

这里, 为了便于向高维推广, 我们采用的记号与 §8.4 节稍有不同, 在那里我们首先把向量  $\overrightarrow{OP}$  向  $Oxy$  平面上投影, 再将投影向量在  $Oxy$  平面上用极坐标表示.

注意到从球坐标到直角坐标的变换(或映射)实际上是下列变换的复合

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 = r \cos \theta_1 \\ u_2 = r \sin \theta_1 \\ u_3 = \theta_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \cos \theta_2 \\ x_3 = u_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix},$$

其实质是 2 维极坐标变换与 2 维极坐标变换的复合, 因此变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)} = r^2 \sin \theta_1.$$

以此类推, 在 4 维空间, 将  $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$  向  $Ox_2x_3x_4$  空间投影, 则  $x_1 = r \cos \theta_1$ , 投影向量的长度为  $r' = r \sin \theta_1$ . 对  $Ox_2x_3x_4$  空间的点进行球坐标变换, 最终得到 4 维

## 球坐标变换

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta_1, \\x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\x_4 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3,\end{aligned}$$

本质上是一个 2 维极坐标变换和一个 3 维球坐标变换的复合, 因此利用复合映射的 Jacobi 行列式的计算, 直接得到 4 维球坐标变换的 Jacobi 行列式. 用这样的构造方式, 不仅可以得到  $n$  维的球坐标, 而且更容易计算换元的 Jacobi 行列式 (参见第三册).

## 习题 10.4

1. 计算下列  $n$  重积分.

$$(1) \int \cdots \int_{[0,1]^n} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 \cdots dx_n;$$

$$(2) \int \cdots \int_{[0,1]^n} (x_1 + \cdots + x_n)^2 dx_1 \cdots dx_n;$$

$$(3) \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \cdots x_n dx_n$$

2. 计算下列集合  $V_n = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) : \frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_1, \cdots, x_n \geq 0 \right\}$  的体积.

3. 设  $f(x)$  连续, 证明:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a f(t)(a-t)^{n-1} dt.$$

4. 设  $f(x)$  连续, 证明:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^a f(t) dt \right)^n$$

## 第 10 章综合习题

1. 计算二重积分  $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

2. 计算三重积分

$$I = \iiint_{[0,1]^3} \frac{du dv dw}{(1 + u^2 + v^2 + w^2)^2}.$$



3. 设  $a > 0, b > 0$ . 试求下面的积分:

$$(1) I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx;$$

$$(2) I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

4. 设  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . 求  $I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$ .

5. 试求圆盘  $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$  与曲线  $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$  所围部分相交的区域  $D$  的面积.

6. 计算曲面  $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$  所围的体积  $V$ .

7. 证明:  $\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 t^t dt$ .

8. 设  $a, b$  是不全为 0 的常数. 求证:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax + by + c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f\left(t\sqrt{a^2+b^2} + c\right) dt.$$

9. 设  $f$  是连续可导的单变量函数. 令  $F(t) = \iint_{[0,t]^2} f(xy) dx dy$ . 求证:

$$(1) F'(t) = \frac{2}{t} \left( F(t) + \iint_{[0,t]^2} xy f'(xy) dx dy \right);$$

$$(2) F'(t) = \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(s) ds.$$

10. (Poincaré 不等式) 设  $\varphi(x), \psi(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $f(x, y)$  在区域  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  上连续可微, 且有  $f(x, \varphi(x)) = 0$ , 则存在  $M > 0$ , 使得

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq M \iint_D (f'_y(x, y))^2 dx dy.$$

11. 设  $a > 0, \Omega_n(a) : x_1 + \cdots + x_n \leq a, x_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 求积分

$$I_n(a) = \int \cdots \int_{\Omega_n(a)} x_1 x_2 \cdots x_n dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

12. 设  $f(x_1, \dots, x_n)$  为  $n$  元的连续函数, 证明:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_n = \int_a^b dx_n \int_{x_n}^b dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1, \dots, x_n) dx_1.$$

## 第 11 章 曲线积分和曲面积分

多变量函数的重积分, 是一元函数定积分的推广. 其中定积分是函数在以一维空间中一段直线段为积分区间, 而重积分是以平面或空间内的区域为积分区域. 事实上, 我们还可以研究另一种形式的推广, 即考虑数量场和向量场在空间中一段曲线或一张曲面上的积分, 简称为曲线积分或曲面积分. 本章只讨论三维空间的情形. 通过曲线和曲面积分, 我们将建立 Newton-Leibniz 公式在三维空间的推广, 这就是 Gauss-Stokes 公式.

### §11.1 数量场在曲线上的积分

#### 11.1.1 基本概念

设曲线  $L$  是一段非均匀的线材, 其线密度为  $\rho(x, y, z)$ . 为了计算线材的质量, 先将线材分割成有限段  $\Delta s_i$ , 每一段的质量近似为  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$ . 将这样的近似值相加就是线材总的质量的近似值. 当分割越分越细时, 其极限值就是线材的质量.

**定义 11.1** 设  $L$  是三维空间中一条光滑(或逐段光滑)曲线段,  $\phi(x, y, z)$  是定义在曲线  $L$  上的数量场(或函数). 作  $L$  的任意分割:  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , 并记每段  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  的弧长为  $\Delta s_i$ , 最大长度为  $\lambda = \max\{|\Delta s_i| \mid 1 = 1, \dots, n\}$ . 在每段弧上  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  任取一点  $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . 如果下列和式的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \phi(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i,$$

是一个有限数, 且与点  $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选择无关, 则称函数  $\phi(x, y, z)$  在曲线上可积, 极限值称为数量场在曲线上的积分, 或称为第一型曲线积分, 记为

$$\int_L \phi(x, y, z) ds.$$

从定义上看, 数量场在曲线上的积分, 与函数在区间  $[a, b]$  上的积分, 只是平直的区域换成了曲线. 因此数量场在曲线上的积分与定积分有类似的性质, 例如积分对于被积函数的线性性、保序性以及积分对于积分曲线的可加性

$$\int_L \phi(x, y, z) ds = \int_{L_1} \phi(x, y, z) ds + \int_{L_2} \phi(x, y, z) ds,$$

其中  $L$  是  $L_1$  和  $L_2$  连接而成的曲线, 等等也是成立的.

当  $\phi(x, y, z) = 1$  在曲线  $L$  上的积分  $\int_L ds$ , 就给出了  $L$  的弧长.

## 11.1.2 数量场在曲线上积分的计算

设曲线  $L$  的参数方程表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

其中  $x(t), y(t), z(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上有连续的一阶微商  $x'(t), y'(t), z'(t)$ , 且  $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ ,  $\phi(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 因此  $\phi(x(t), y(t), z(t))$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续.

现在作  $[\alpha, \beta]$  的分割

$$T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

由此对应曲线  $L$  上以  $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), i = 0, \cdots, n$  为分割点的分割. 由弧长的计算公式与积分中值定理, 得到弧段  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  的长为

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{r}'(t)| dt = |\mathbf{r}'(\theta_i)| \Delta t_i,$$

其中  $t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ .

取弧段上任意一点  $N_i(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)), t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 于是

$$\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) |\mathbf{r}'(\theta_i)| \Delta t_i.$$

等式右边还不是一个函数的 Riemann 和, 但我们可作如下修正

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \Delta s_i &= \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) |\mathbf{r}'(\tau_i)| \Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) (|\mathbf{r}'(\theta_i)| - |\mathbf{r}'(\tau_i)|) \Delta t_i. \end{aligned}$$

使得右端的第一项正是函数  $\phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)|$  在  $[\alpha, \beta]$  上标准的 Riemann 和, 而第二项将被证明在  $|T| \rightarrow 0$  时的极限为零.

为此, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 由  $\phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)|$  的连续性可知, 它在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 因此存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当分割满足  $|T| < \delta_1$  时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) |\mathbf{r}'(\tau_i)| \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

由  $\phi(x(t), y(t), z(t))$  的连续性, 可知它在  $[\alpha, \beta]$  上有界  $|\phi| \leq M$ , 由  $|\mathbf{r}'(t)|$  的连续性推得在  $[\alpha, \beta]$  上一致连续, 因此存在  $\delta_2 > 0$ , 对任意的  $t, t' \in [\alpha, \beta]$ , 只要  $0 < |t - t'| < \delta_2$ , 就有

$$\left| |\mathbf{r}'(t)| - |\mathbf{r}'(t')| \right| < \varepsilon.$$

这样当  $|T| < \delta_2$  时, 对于任意的  $\theta_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 有  $|\theta_i - \tau_i| \leq \Delta t_i \leq |T| < \delta_2$ , 因此

$$\left| \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) (|\mathbf{r}'(\theta_i)| - |\mathbf{r}'(\tau_i)|) \Delta t_i \right| < M(\alpha - \beta)\varepsilon.$$

综上所述, 当分割满足  $|T| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \Delta s_i - \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \right| < \varepsilon + M(\beta - \alpha)\varepsilon$$

至此, 我们就完成了下列定理的证明.

**定理 11.2** 设  $L$  是空间中一条光滑曲线, 其参数方程表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$\phi(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 则  $\phi(x, y, z)$  在曲线  $L$  上可积, 且

$$\begin{aligned} \int_L \phi(x, y, z) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

由此可见, 利用  $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ , 数量场在曲线上的积分就化为通常的积分. 定理中的结论可以类比于定积分中的换元公式

$$\int_a^b \phi(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t)) x'(t) dt$$

这里  $t \rightarrow x = x(t)$  是从  $t$  轴上的直线段  $[\alpha, \beta]$  到  $x$  轴上的直线段  $[a, b]$  的一个映射. 线元  $dx$  和线元  $dt$  之间满足  $dx = x'(t) dt$ . 而在定理中, 只是曲线的弧长元  $ds$  与线元  $dt$  之间满足  $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ .

以下是当曲线在平面上时的两种特殊形式.

若平面曲线  $L$  由  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 给出, 则可视为一种特殊的参数方程表示  $x = x, y = f(x), z = 0$ , 其中变量  $x$  视为参变量. 因此有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

若平面曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ), 则  $x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta$ , 所以

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

**例 11.1.1** 求曲线积分  $\int_L xy ds$ . 其中  $L$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限的弧段.

解  $L$  的方程可写成

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L xy \, ds &= ab \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} \, d \sin^2 \theta \\ &= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}. \end{aligned}$$

例 11.1.2 求曲线积分  $\int_L x \, ds$ , 其中  $L$  是以平面上  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$  为顶点的三角形的边界 (图11.1).

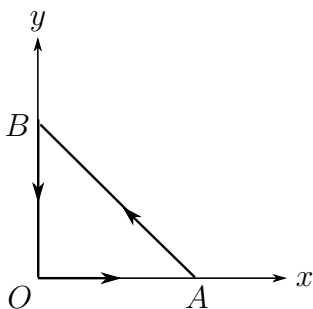


图 11.1

解 曲线  $L$  是分段光滑的, 它由三条直线  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BO}$  构成, 三条直线的方程以及弧长元  $ds$  可分别表示为

$$\overline{OA}: \quad x = t, \quad y = 0, \quad ds = dt, \quad t \in [0, 1];$$

$$\overline{AB}: \quad x = 1 - t, \quad y = t, \quad ds = \sqrt{2} \, dt, \quad t \in [0, 1]$$

$$\overline{BO}: \quad x = 0, \quad y = 1 - t, \quad ds = dt, \quad t \in [0, 1]$$

所以分段进行积分有

$$\begin{aligned} \int_L x \, ds &= \int_{\overline{OA}} x \, ds + \int_{\overline{AB}} x \, ds + \int_{\overline{BO}} x \, ds \\ &= \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 (1-t)\sqrt{2} \, dt + \int_0^1 0 \, dt = \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

### 习题 11.1

1. 计算下列曲线的弧长.

(1)  $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

- (2)  $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$  从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(3, 3, 2)$  那一段;
- (3)  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \ln \cos t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ );
- (4)  $z^2 = 2ax$  与  $9y^2 = 16xz$  的交线, 由点  $O(0, 0, 0)$  到点  $A(2a, \frac{8a}{3}, 2a)$ ;
- (5)  $4ax = (y+z)^2$  与  $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$  的交线, 由原点到点  $M(x, y, z)$  ( $a > 0, z \geq 0$ ).

2. 计算下列曲线积分.

- (1)  $\int_L y^2 ds, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ ;
- (2)  $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds, L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = at, (0 \leq t \leq 2\pi)$ ;
- (3)  $\int_L (x + y) ds, L: \text{顶点为 } O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1) \text{ 的三角形周界};$
- (4)  $\int_L \frac{dS}{x-y}, L: \text{联结点 } A(0, -2) \text{ 到点 } B(4, 0) \text{ 的直线段};$
- (5)  $\int_L (x + y + z) ds, L: \text{直线段 } AB: A(1, 1, 0), B(1, 0, 0) \text{ 及螺线 } BC: x = \cos t, y = \sin t, z = t (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 组成};$
- (6)  $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds, L: \text{由曲线 } r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ 所围成的区域边界};$
- (7)  $\int_L x ds, L: \text{对数螺线 } r = ae^{k\varphi} (k > 0) \text{ 在圆 } r = a \text{ 内的那一段};$
- (8)  $\int_L z ds, L \text{ 是圆锥螺线 } x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0)$ ;
- (9)  $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} ds, L: \text{双纽线 } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0) \text{ 的一半};$
- (10)  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)^n ds, L: \text{圆周 } x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ ;
- (11)  $\int_L x^2 ds, L: \text{圆周 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ ;
- (12)  $\int_L (xy + yz + zx) ds, L: \text{圆周 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ .

3. 求曲线  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  从  $t = 0$  到任意点间那段弧的质量, 设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比, 且在点  $(1, 0, 1)$  处的密度为 1.

4. 求螺旋线一圈  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 对于各坐标轴的转动惯量 (设密度  $\rho = 1$ ).

5. 求半径为  $a$  的均匀半圆弧 (密度为  $\rho$ ) 对于处在圆心  $O$  质量为  $M$  的质点的引力.

## §11.2 数量场在曲面上的积分

类似于数量场在曲线上的积分, 将考虑数量场  $\phi(x, y, z)$  在空间中一张曲面上的积分. 这样的积分也称为第一型曲面积分. 为此, 我们首先需要了解曲面的面积计算问题.

### 11.2.1 曲面的面积

设  $S$  是一张光滑的参数曲面:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D,$$

即  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  具有连续的偏导数, 且

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq 0$$

这里  $D$  是参变量  $(u, v)$  所在平面中的一个有界区域.

用平行于  $Ouv$  坐标轴的直线  $u = u_i, v = v_j$  去分割区域  $D$ , 其中一个小区域  $D_{ij} = \{(u, v) : u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}\}$  对应在  $S$  上就得到一个子曲面  $S_{ij}$ , 它由两条  $u$  曲线  $v = v_j, v = v_{j+1}$  和两条  $v$  曲线  $u = u_i, u = u_{i+1}$  围成. 当  $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$  和  $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$  都很小时,  $S_{ij}$  可以近似看成由两个向量  $\mathbf{r}(u_{i+1}, v_j) - \mathbf{r}(u_i, v_j)$  和  $\mathbf{r}(u_i, v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i, v_j)$  张成的平行四边形 (图11.2)

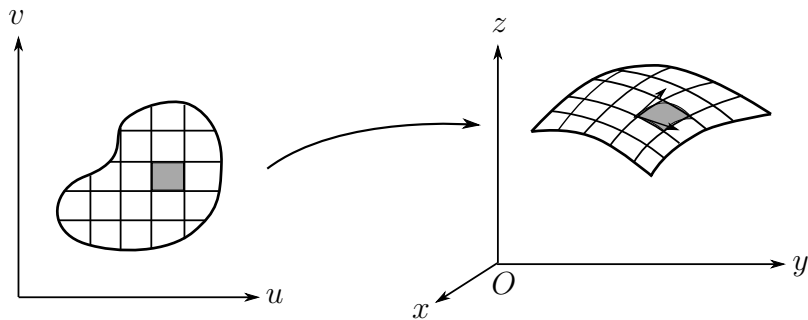


图 11.2

因为

$$\mathbf{r}(u_{i+1}, v_j) - \mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}'_u(u_i, v_j)\Delta u_i + o(\Delta u_i),$$

$$\mathbf{r}(u_i, v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}'_v(u_i, v_j)\Delta v_j + o(\Delta v_j),$$

所以,  $S_{ij}$  的面积

$$\sigma(S_{ij}) \approx |\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j.$$

也就是说, 用“以直代曲”的思想, 曲面的一小块面积可以用切平面上以  $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j)\Delta u$  和

$\mathbf{r}'_v(u_i, v_j)\Delta v$  为边的平行四边形面积来近似. 于是曲面  $S$  的面积

$$\sigma(S) = \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \, du \, dv.$$

根据 §9.5 节引进的记号

$$E = \mathbf{r}'_u{}^2 = x'_u{}^2 + y'_u{}^2 + z'_u{}^2,$$

$$G = \mathbf{r}'_v{}^2 = x'_v{}^2 + y'_v{}^2 + z'_v{}^2,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

记

$$dS = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \, du \, dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

并称为曲面的面积元素. 因此, 曲面  $S$  的面积的一般计算公式为

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

注记 这里我们直接用曲面的参数方程表示计算曲面的面积. 然而, 曲面的面积是曲面固有的几何特征, 不应该依赖于参数方程的表示. 如果曲面存在另外一种参数方程表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = \tilde{x}(s, t)\mathbf{i} + \tilde{y}(s, t)\mathbf{j} + \tilde{z}(s, t)\mathbf{k}, \quad (s, t) \in \tilde{D},$$

可以证明, 所给出的面积是一样的, 也就是说这里给出的面积与选取曲面什么样的参数表示无关.

以下几种特例是会经常碰到的.

1° 当  $F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = 0$  时, 说明  $u$  曲线和  $v$  曲线的切向量相互垂直, 所以  $u$  曲线和  $v$  曲线在曲面上编织了一个相互垂直的曲线网.

2° 当曲面  $S$  是平面区域时,  $S$  的参数方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = 0, \quad (u, v) \in D.$$

这时

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|,$$

面积元素

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv.$$

再次得到二重积分中平面区域  $S$  和平面区域  $D$  之间变换中面积元素之间的关系.

3° 如果曲面  $S$  是定义在区域  $D$  上的二元函数  $z = f(x, y)$  给出, 这时可将  $x, y$  看作参变量, 而曲面  $S$  的参数方程就取特别的形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad (x, y) \in D,$$



于是

$$E = 1 + z_x'^2, \quad G = 1 + z_y'^2, \quad F = z_x' z_y'.$$

由此得

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

及

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

如果曲面的方程为  $x = g(y, z)$  或  $y = h(z, x)$ , 结果是类似的.

**例 11.2.1** 求半径为  $R$  的球的表面积.

**解** 设球面  $S$  的参数方程为

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 计算可得

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \theta.$$

所以

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

故球面面积

$$\sigma(S) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

**例 11.2.2** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  所截下的曲面面积.

**解** 由于对称性, 可知所求曲面的面积是它在第一卦限内面积的四倍. 采用球面坐标时  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . 为确定参数  $\theta, \varphi$  的变化区域  $D$ , 把球面的参数方程代入柱面方程  $x^2 + y^2 = Rx$  可知有

$$\sin \theta = \cos \varphi,$$

因为在第一卦限中  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以这两张曲面的交线在球面坐标下的方程为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

因此  $D$  是由不等式  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$  给出的区域, 从而算得

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= 4 \iint_D R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin \theta d\theta \\ &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) d\varphi = 2R^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

**例 11.2.3** 计算圆锥面  $y^2 + z^2 = x^2$  被柱面  $y^2 + z^2 = R^2$  所截下的曲面  $S$  的面积

**解** 截出的曲面在平面  $Oyz$  上的投影区域  $D$  是半径为  $R$  的圆  $y^2 + z^2 \leq R^2$ , 所以

$$\begin{aligned}\sigma(S) &= 2 \iint_D \sqrt{1 + x'_y{}^2 + x'_z{}^2} \, dy \, dz \\ &= 2 \iint_D \sqrt{2} \, dy \, dz = 2\sqrt{2} \pi R^2.\end{aligned}$$

### 11.2.2 数量场在曲面上的积分和计算

设  $S$  是一张有界的光滑曲面,  $\varphi(x, y, z)$  是定义在  $S$  上的数量场. 把  $S$  分成  $n$  块曲面  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 每一小块的面积记为  $\sigma(S_i)$ . 在  $S_i$  上任取一点  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 如果下列极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \sigma(S_i),$$

是一个有限数, 而且与  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的选择无关, 其中  $\lambda$  是所有小块曲面的最大直径, 那么称  $\varphi(x, y, z)$  在曲面  $S$  上的可积, 极限值就是它的积分值, 记成

$$\iint_S \varphi(x, y, z) \, dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i, z_i) \sigma(S_i),$$

设曲面  $S$  的具有参数方程表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D,$$

时, 其中  $D$  是平面  $O'uv$  上的有界闭区域. 设  $\varphi(x, y, z)$  在包含  $S$  的一个区域内连续 (有时简称函数在  $S$  上连续), 则它在  $S$  上的曲面积分是一定存在的, 而且有

$$\begin{aligned}\iint_S \varphi(x, y, z) \, dS &= \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv \\ &= \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.\end{aligned}$$

注意: 上式的右端, 正是定义在平面区域  $D$  上函数  $\varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$  的二重积分. 特别, 如果光滑曲面  $S$  由方程  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  给出, 那么有

$$\iint_S \varphi(x, y, z) \, dS = \iint_D \varphi(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} \, dx \, dy.$$

**例 11.2.4** 设  $S$  是第一卦限的球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), 计算曲面积分  $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$ .

**解** 将球面  $S$  表示为参数方程

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

则  $\theta, \varphi$  的变化范围是平面  $O'\theta\varphi$  上的矩形  $D'$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

而球面的面积元素为

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) \, dS &= \iint_{D'} R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \pi R^4. \end{aligned}$$

这个积分也可以从对称性方面考虑, 因为在  $S$  上,  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  的积分是一样的, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \iint_S x^2 \, dS = \frac{2}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS \\ &= \frac{2R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \pi R^4. \end{aligned}$$

**例 11.2.5** 设  $S$  是锥面  $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$  ( $z \geq 0$ ) 被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 所截得的曲面 (图11.3), 计算曲面积分

$$\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) \, dS.$$

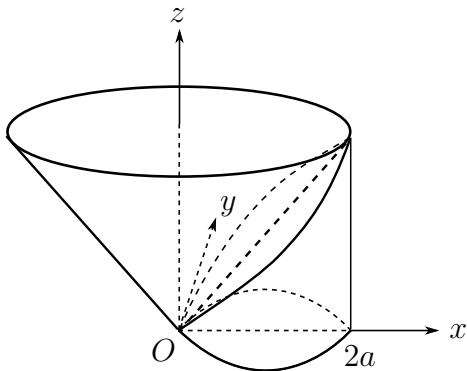


图 11.3

**解** 所给曲面  $S$  的面积元素是

$$dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + k^2} \, dx \, dy.$$

并且  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $D$  是圆

$$x^2 + y^2 \leq 2ax,$$

于是算得

$$\begin{aligned}
 & \iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS \\
 &= \sqrt{1+k^2} \iint_D [k^2(x^2+y^2)^2 + x^2 y^2] dx dy \\
 &= 2\sqrt{1+k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^5 (k^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) dr \\
 &= \frac{\pi}{24} a^6 (80k^2 + 7) \sqrt{1+k^2}.
 \end{aligned}$$

类似于二重积分, 数量场在曲面上的积分也有一些基本性质, 如线性, 保序性, 可积函数必有界等等. 数量场在分片光滑曲面上的曲面积分可利用积分对积分曲面的可加性来计算, 例如曲面  $S$  是由光滑曲面  $S_1$  和  $S_2$  拼接而成, 那么

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \iint_{S_1} \varphi(x, y, z) dS + \iint_{S_2} \varphi(x, y, z) dS.$$

## 习题 11.2

1. 求下列曲面在指定部分的面积.

- (1) 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  包含在圆柱  $x^2 + y^2 = 2x$  内的部分;
- (2) 柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  被平面  $x + z = 0, x - z = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ) 所截的那部分;
- (3) 圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  被圆柱  $y^2 + z^2 = a^2$  所割下的那部分;
- (4) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  和抛物面  $x^2 + y^2 = 2az$  ( $z \geq 0$ ) 所围成的立体的全表面;
- (5) 曲面  $x = \frac{1}{2}(2y^2 + z^2)$  被柱面  $4y^2 + z^2 = 1$  所截下的那部分;
- (6) 锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  被  $Oxy$  平面和  $z = \sqrt{2}(\frac{x}{2} + 1)$  所截下的那部分;
- (7) 螺旋面  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi$  在  $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$  那部分;
- (8) 曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy$  的全部.

2. 计算下列曲面积分.

- (1)  $\iint_S (x + y + z) dS$ ,  $S$ : 立方体  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的全表面;
- (2)  $\iint_S xyz dS$ ,  $S$ :  $x + y + z = 1$  在第一卦限部分;
- (3)  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S$ : 由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = 1$  所围成的立体表面;
- (4)  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ ,  $S$ : 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 所割下的那块曲面;

(5)  $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1) dS$ ,  $S$ : 圆锥  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截下的部分.

(6)  $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ ,  $S$ : 圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  界于平面  $z = 0$  及  $z = H$  之间的部分,  $r$  是  $S$  上的点到原点的距离;

(7)  $\iint_S |xyz| dS$ ,  $S$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  介于二平面  $z = 0$  和  $z = 1$  间的部分.

3. 利用对称性计算曲面积分.

(1)  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ;

(2)  $\iint_S (x + y + z) dS$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ .

4. 设  $G$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0 (c \neq 0)$  上的一个有界闭区域, 它在  $Oxy$  平面上的投影是  $G_1$ , 试证  $\frac{G \text{ 的面积}}{G_1 \text{ 的面积}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}}$ .

5. 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) (0 \leq z \leq 1)$  的质量, 其各点的密度为  $\rho = z$ .

6. 一个半径为  $R$  的均匀球壳 (密度为  $\rho$ ) 绕其直径旋转, 求它的转动惯量.

7. 一个密度为  $\rho$  的均匀截锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 < a \leq z \leq b)$ , 求它对于处在锥顶的质量为  $m$  的质点的引力.

### §11.3 向量场在曲线上的积分

#### 11.3.1 曲线的定向

设  $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  是一个力场, 考察一个质点沿一条曲线  $L$  运动时力场所做的功, 应注意三个要素, 即力场的方向, 质点运动的方向和质点运动的距离. 为此可以采取以下办法 (图11.4):

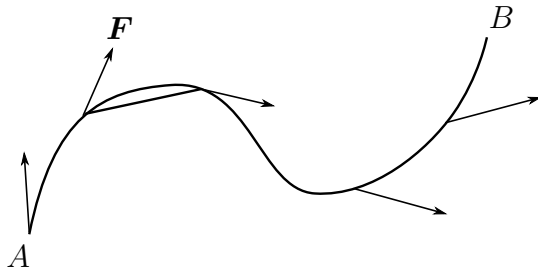


图 11.4

沿质点运动的方向作曲线  $L$  的一个分割

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n).$$

在第  $i$  段上, 力场  $\mathbf{F}$  可近似成一个常值向量

$$\mathbf{F}_i = P_i\mathbf{i} + Q_i\mathbf{j} + R_i\mathbf{k}.$$

该段曲线可近似成有向直线

$$\Delta\mathbf{r}_i = \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j} + \Delta z_i\mathbf{k}.$$

它的方向指向质点运动的方向. 因此力场在每一小段上所做的功可近似为

$$W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i = P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i + R_i\Delta z_i.$$

将这样的近似值相加, 并让分割的最大长度趋于零, 那么结果就是力场所做的总功. 注意到, 即使质点在同一条曲线上运动, 但运动的方向不同, 力场所做的功也不同.

因此, 有必要对曲线的方向给予明确. 一般地, 设  $L$  是连接空间两点  $A, B$  的曲线, 规定其中一个为起点, 等价地就规定了曲线  $L$  的一个方向. 定义了方向的曲线称为**定向曲线**, 以  $A$  为起点、 $B$  为终点的定向曲线记为  $L_{AB}$ . 显然曲线  $L$  有两个定向, 另一个是以  $B$  为起点,  $A$  为终点的曲线, 记为  $L_{BA}$ .

当曲线  $L$  具有下列参数方程表示时

$$L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

如果当参数  $t$  从  $\alpha$  增加到  $\beta$  时, 曲线上对应的点从起点  $A$  运动到终点  $B$  (这时点  $A$  和  $B$  的坐标分别是  $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ ), 那么参数  $t$  增

加的方向与  $L_{AB}$  的正向一致, 称  $t$  是定向曲线为  $L_{AB}$  的**正向参数**. 如果曲线  $L$  是光滑曲线, 那么切向量  $\mathbf{r}'(t)$  是指向参数  $t$  增加方向的 (这是因为  $\mathbf{r}'(t)$  是差商  $\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$  的极限). 所以指定单位切向量  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$  相当于选择  $L_{AB}$  的正方向, 指定单位切向量  $\boldsymbol{\tau}_1 = -\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$  相当于选择  $L_{AB}$  的负方向.

如果曲线  $L_{AB}$  是逐段光滑的, 我们可以在每一段上选取与曲线正向一致的参数, 得到曲线的分段正向参数表示.

如果  $L$  是  $Oxy$  平面上一条简单闭曲线, 习惯上称其逆时针方向为正方向. 这时  $L$  的内部区域在  $L$  正方向的左边.

对一些具体问题, 曲线有特别明确的正向. 例如力场对运动质点做功问题中, 选择质点运动的方向, 作为其轨迹曲线的正向.

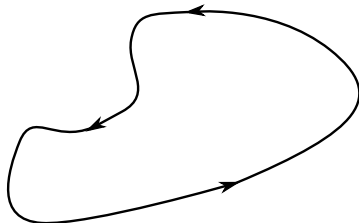


图 11.5

### 11.3.2 向量场在曲线上积分的定义和计算

力场做功的例子, 也给出了向量场在曲线上积分的定义:

**定义 11.3** 设  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  是空间区域  $D$  中的向量场,  $L_{AB}$  是  $D$  中定向曲线, 在  $L_{AB}$  上从  $A$  到  $B$  依次选取任意的分割点:

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B,$$

其中分割点的坐标是  $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 0, \dots, n$ , 则

$$\Delta \mathbf{r}_i = \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta z_i \mathbf{k}$$

在每一段弧  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  上任取一点  $N_i(\xi_i, \zeta_i, \chi_i)$ , 当分割的最大长度  $|T| \rightarrow 0$  时, 如果下列和式

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{v}(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \Delta z_i$$

的极限存在有限, 那么极限值称为向量场  $\mathbf{v}$  沿曲线 (或路径)  $L_{AB}$  的积分 (也称为**第二型曲线积分**), 记为

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

定向曲线  $L_{AB}$  称为积分路径. 当  $L$  是封闭曲线时, 积分称为向量场  $\mathbf{v}$  沿环路  $L$  的环量, 通常记为

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

下面, 利用曲线的参数方程表示, 将向量场在曲线上的积分的计算具体化.

**定理 11.4** 设向量场  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  在区域  $D$  内连续, 曲线  $L_{AB} \subset D$  具有参数方程表示

$$L_{AB}: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

且有连续的导函数, 参数  $t$  是正向参数, 则向量场在  $L_{AB}$  上可积, 且可化为下列定积分

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt. \end{aligned}$$

**证明** 对参数所在的区间  $[\alpha, \beta]$  进行的任意分割  $T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ , 则对应曲线上沿方向从  $A$  到  $B$  的任意分割  $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$ , 根据曲线参数方程表示的连续性可知, 关于  $t$  的分割最大长度趋于零等价于曲线上对应的分割最大长度趋于零. 此时

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_i &= \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \\ &= \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta z_i \mathbf{k} \end{aligned}$$

根据微分中值定理有

$$\Delta x_i = x'(\lambda_i)\Delta t_i, \quad \Delta y_i = y'(\mu_i)\Delta t_i, \quad \Delta z_i = z'(\nu_i)\Delta t_i,$$

其中  $t_{i-1} \leq \lambda_i, \mu_i, \nu_i \leq t_i$ . 取第  $i$  段曲线上任意一点

$$(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)), \quad t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$$

这里,  $i = 1, 2, \cdots, n$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))x'(\lambda_i)\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n Q(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))y'(\mu_i)\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n R(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))z'(\nu_i)\Delta t_i. \end{aligned}$$



注意到上式最后一个等式中, 虽然三个求和项都不是严格的 Riemann 和, 但可以采取函数在曲线上积分时的处理办法, 进行必要的修正, 使得每个求和都能表示成严格的 Riemann 和与一个修正项之和. 当  $|T| \rightarrow 0$  时, 修正项的极限为零, 所以有

$$\begin{aligned} \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \cdot \Delta \mathbf{r}_i &= \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \end{aligned}$$

□

向量场在曲线上的积分有下列两种表示, 每一种表示都突出了积分的某种含义.

首先, 设  $s$  为曲线  $L_{AB}$  的弧长参数, 弧长的增长对应曲线正向. 根据§9.4.1, 有

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}(s), \text{ 或 } d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}(s) ds$$

因此, 向量场的曲线积分可表示为

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

等式的右边正是一个关于数量场  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$  的曲线积分 (也就是“第一型曲线积分”).

其次, 利用

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

我们有

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

等式的右边实际上是一个一次微分形式的积分 (详情将在§11.8 中讨论).

综合上述两种表示, 如果将单位切向量  $\boldsymbol{\tau}$  表示为方向余弦

$$\boldsymbol{\tau} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

那么, 从

$$d\mathbf{r} = \cos \alpha ds \mathbf{i} + \cos \beta ds \mathbf{j} + \cos \gamma ds \mathbf{k} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

不难看出

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds, \quad dz = \cos \gamma ds,$$

即  $dx, dy, dz$  分别是  $\boldsymbol{\tau} ds$  在  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  方向上的有向投影, 并且

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \\ &= \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

向量场在曲线上积分具有以下性质, 其证明读者可自行完成.

1° 线性性: 若  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ , 则有

$$\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = c_1 \int_L \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{r} + c_2 \int_L \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{r}.$$

特别, 当  $\mathbf{v}_1 = P\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v}_2 = Q\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}_3 = R\mathbf{k}$  时,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_L P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz. \end{aligned}$$

需要注意的是, 对于形如  $\int_{L_{AB}} P dx$  的积分, 应该理解成是向量场  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  在曲线上的积分, 而不是通常的定积分, 这里的  $dx$  是有向弧长元  $d\mathbf{r}$  在  $x$  轴的投影. 其他情形类似.

2° 对积分曲线的可加性: 若  $L_{AC}$  是由  $L_{AB}$  和  $L_{BC}$  连接而成的, 则有

$$\int_{L_{AC}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_{BC}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

所以对于逐段光滑的曲线, 可以分段进行积分.

3° 积分的方向性:  $\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{L_{BA}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ .

如果曲线  $L$  位于垂直于  $z$  轴的平面 (既与  $Oxy$  平面平行的平面) 上, 那么  $L$  的参数方程为  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = c$  (或 0) ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), 由计算公式立刻可得  $\int_L R dz = 0$ . 从几何上看, 就是有向弧长元  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$  在  $z$  轴上的投影为零. 类似如  $L$  在与  $y$  轴 (或  $x$  轴) 垂直的平面内, 则  $\int_L Q dy = 0$  (或  $\int_L P dx = 0$ ).

特别, 如果曲线  $L$  是  $x$  轴上从  $a$  到  $b$  ( $a < b$ ) 的直线段, 取向为从左端点  $a$  到右端点  $b$ , 那么有向弧长元  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$  在  $y$  轴和  $z$  轴上的投影为零, 在  $x$  轴的投影就是通常的线元, 记  $\varphi(x) = P(x, 0, 0)$ , 所以向量场  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  在直线段上的积分为

$$\int_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_a^b \varphi(x) dx$$

所以一元函数的定积分可以看成是特殊的曲线积分.

**例 11.3.1** 计算曲线积分  $\int_L xy dx + x^2 dy$ ,  $L$  是三角形  $OAB$  的正向周界 (图11.6), 其中  $A, B$  的坐标分别是  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 2)$ .

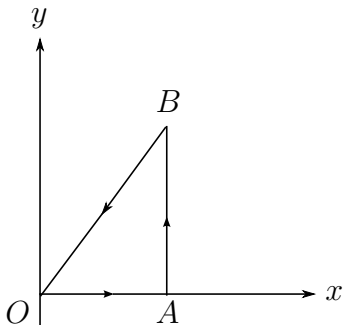


图 11.6

解 因为

$$\begin{aligned} \int_L xy \, dx + x^2 \, dy &= \int_{L_1} xy \, dx + x^2 \, dy + \int_{L_2} xy \, dx + x^2 \, dy \\ &\quad + \int_{L_3} xy \, dx + x^2 \, dy, \end{aligned}$$

在  $L_1$  上,  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $x$  是参变量,  $0 \leq x \leq 1$ , 所以

$$\int_{L_1} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 x \cdot 0 \, dx = 0;$$

在  $L_2$  上,  $x = 1$ ,  $dx = 0$ ,  $y$  是参变量,  $0 \leq y \leq 2$ , 所以

$$\int_{L_2} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^2 1 \cdot dy = 2;$$

在  $L_3$  上,  $y = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , 这里  $x$  视为参变量. 但  $L_3$  的方向是从  $B$  点到原点  $O$ , 所以参变量  $x$  从 1 变到 0,

$$\int_{L_3} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_1^0 x \cdot 2x \, dx + x^2 \, d(2x) = -\frac{4}{3}.$$

从而算得

$$\int_L xy \, dx + x^2 \, dy = \frac{2}{3}.$$

**例 11.3.2** 设在力场  $F = yi - xj + zk$  的作用下, 质点由点  $A(R, 0, 0)$  沿圆柱螺旋线  $L$

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = kt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

运动到点  $B(R, 0, 2\pi k)$ , 试求力场  $F$  对质点所作的功.

**解** 显然点  $A$  和  $B$  对应的参数值分别是  $t = 0$  和  $t = 2\pi$ , 而且参数  $t$  增加的方向正是从  $A$  点到  $B$  点的方向. 因此

$$dx = -R \sin t \, dt, \quad dy = R \cos t \, dt, \quad dz = k \, dt,$$

故力场  $\mathbf{F}$  对质点作的功为

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{L_{AB}} y dx - x dy + z dz \\ &= \int_0^{2\pi} (R \sin t(-R \sin t) dt - R \cos t R \cos t dt + k^2 t dt) \\ &= \int_0^{2\pi} (-R^2 + k^2 t) dt = 2\pi(\pi k^2 - R^2). \end{aligned}$$

顺便指出, 如果质点沿垂直  $Oxy$  平面的直线段由  $A$  运动到  $B$ , 那么在这段直线上,  $dx = dy = 0$ ,  $dz = k dt$  所以力场对它作的功为

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} k^2 t dt = 2\pi^2 k^2.$$

可见这个力场所作的功与质点从  $A$  运动到  $B$  所经过的路径有关.

**例 11.3.3** 太阳对地球的引力可视为两个质量分别为  $M$  和  $m$  的质点之间的引力

$$\mathbf{F} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r},$$

其中  $\mathbf{r}$  是从质点  $M$  指向质点  $m$  的位置向量, 试求质点  $m$  从一点  $A$  到另一点  $B$  运行时, 引力所作的功.

**解** 把坐标原点置于质点  $M$  上, 设质点  $m$  的运动轨道  $L$  的参数方程为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , 因此当质点  $m$  沿轨道  $L$  从  $A$  到  $B$  时, 引力场做功为

$$W = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -kmM \int_{L_{AB}} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

但

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) dt = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} dt = r dr, \end{aligned}$$

其中  $r = |\mathbf{r}|$ , 所以

$$W = -kmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kmM \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

这里  $r_A$  及  $r_B$  分别表示质点  $m$  在  $A$  点以及在  $B$  点到质点  $M$  的距离. 上述计算的结果表明, 引力场  $\mathbf{F}$  所作的功实际上只与路径的起点  $A$  及终点  $B$  有关, 而与连接  $A, B$  的路径无关.

**例 11.3.4** 求向量场

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

沿  $Oxy$  平面上圆  $L: x^2 + y^2 = R^2$  逆时针方向的环量,

解 设  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (参数增加的方向是逆时针方向), 所以

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi, \\ \oint_L \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{r} &= 0\end{aligned}$$

几何上看上述结论是显然的, 因为  $\mathbf{v}_1$  与圆的切向量一致, 而  $\mathbf{v}_2$  与切向量垂直.

### 11.3.3 Green定理

上节的例子说明, 向量场沿曲线 (路径) 的积分, 有的与路径无关, 只与路径的起点和终点有关. 因此, 从一点到另一点的积分, 可选择不同的路径, 结果是一样的. 现在的问题是有一种判别向量场的积分与路径是否相关的方法. 本节将以二维向量场沿平面上的曲线积分为例探讨这个问题. 在后续的两节中, 还将进行更深入的研究.

设  $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  是一个二维的光滑向量场,  $L_{AB}$  和  $\tilde{L}_{AB}$  是连接起点  $A$  和终点  $B$  的任意两条曲线, 而且除了起点和终点外, 不再相交. 如果将  $\tilde{L}_{AB}$  掉转方向, 那么  $L_{AB}$  和  $\tilde{L}_{BA}$  就构成了一个有向的不自相交的封闭环路  $L$ . 反之, 对于任意一个不自相交的有向环路  $L$ , 在其上任取两点  $A$  和  $B$  分别作为起点和终点, 则从  $A$  点到  $B$  点就有两条路径, 其中一条的方向与环路方向一致, 另一条与之相反. 这样一来, 研究向量场曲线积分是否与路径相关, 就转化成研究向量场沿封闭曲线的环量是否为零的问题.

**例 11.3.5** 计算平面向量场  $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  沿一个矩形  $D = [a, b] \times [c, d]$  的边界  $L = \partial D$  的环量, 方向为逆时针方向.

**解** 将矩形的边界分为四段 (如图 11.7 所示), 则

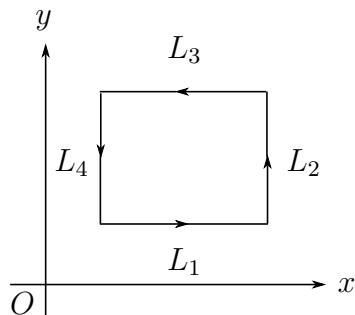


图 11.7

$$\begin{aligned}\int_L P dx + Q dy &= \int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{L_2} P dx + Q dy \\ &\quad + \int_{L_3} P dx + Q dy + \int_{L_4} P dx + Q dy,\end{aligned}$$

其中在  $L_1$  和  $L_3$  上,  $dy = 0$ , 注意到线段  $L_1$  和  $L_3$  分别的取向, 有

$$\begin{aligned} \int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{L_3} P dx + Q dy &= \int_a^b P(x, c) dx - \int_a^b P(x, d) dx \\ &= \int_a^b (P(x, c) - P(x, d)) dx \\ &= - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \\ &= - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

同理, 沿  $L_2$  和  $L_4$ , 有  $dx = 0$ , 同时注意到  $L_2$  和  $L_4$  分别的取向, 有

$$\int_{L_2} P dx + Q dy + \int_{L_4} P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy.$$

所以, 平面向量场沿矩形边界的环量为

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

即向量场沿矩形边界的环量等于函数  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$  在矩形区域上的二重积分. 这个结果并非只局限在矩形区域上, 事实上我们有如下更一般的结果.

**定理 11.5 (Green)** 设  $D$  是有限条逐段光滑的封闭曲线  $L$  围成的平面闭区域 (因此  $L = \partial D$ ),  $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  是  $D$  上光滑向量场, 则

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中曲线积分的方向为  $L = \partial D$  的逆时针方向. 上述公式称之为 **Green 公式**.

**证明** 证明的思路是将问题分解, 并由简入繁.

第一步: 首先证明 Green 公式的“可加性质”. 设区域  $D$  能够分解成若干小块

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

其中  $D_i, i = 1, \dots, n$  之间没有公共的内点, 每一小块的边界  $\partial D_i$  都是逐段光滑的曲线, 取向都是逆时针方向. 如果 Green 公式在每一小块  $D_i$  上成立

$$\oint_{\partial D_i} P dx + Q dy = \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

那么在整个  $D$  上成立. 这是因为对相邻的两个小块来说, 向量场在公共边界上的曲线积

分被计算了两次, 但方向相反, 因此相互抵消. 再利用二重积分的可加性, 有

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx + Q dy &= \sum \oint_{\partial D_i} P dx + Q dy \\ &= \sum \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

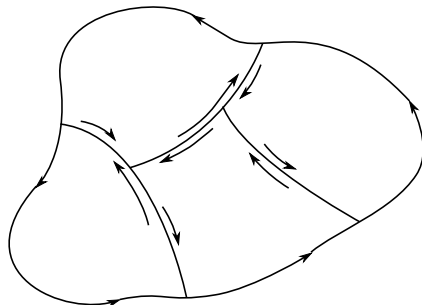


图 11.8

第二步: 设“曲边矩形”  $D_y$  是这样的区域, 它是由两条直线  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) 上的某一段 (也有可能退化成一点) 以及两条光滑曲线  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ ,  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$  围成的区域

$$D_y = \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

则

$$\oint_{\partial D_y} P dx = - \iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

上式的证明与对矩形区域的证明相仿, 把  $D_y$  分成四段:  $L_1 : y = \varphi_1(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ;  $L_2 : x = b$ ;  $L_3 : y = \varphi_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ;  $L_4 : x = a$ . 在  $L_2, L_4$  上,  $dx = 0$ , 在  $L_1$  与  $L_3$  上, 分别有

$$\int_{L_1} P dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx, \quad \int_{L_3} P dx = \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx$$

两式相加即可得到结果. 同理, 在另一种“曲边矩形”

$$D_x = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

上, 可证得类似结果

$$\oint_{\partial D_x} Q dy = \iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

第三步: 进行合成. 设  $D$  既可以分割成有限块形如  $D_y$  的区域, 又可分割成形如  $D_x$  的区域, 利用第一步的“可加性质”和第二步的结果, 就可以证明定理.  $\square$

需要说明的是:

1° 虽然我们没有对所有可能的区域给出定理的证明, 但对于实用目的, 满足定理证明中要求的区域已经是足够丰富的一类区域了.

2° 定理给出了一个沿封闭曲线的积分 (本质上是一种一维的积分) 与二维的积分之间的关系. 因此, 计算一些环量问题可化为二重积分的计算, 反之, 一些二重积分的计算可化为沿积分区域边界的曲线积分问题. 下列推论就是一个直接应用.

**推论 11.6** 设  $D$  是满足 Green 定理中条件的区域,  $\sigma(D)$  表示  $D$  的面积,  $\partial D$  为  $D$  的分段光滑的边界, 则

$$\sigma(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} -ydx + xdy = \oint_{\partial D} -ydx = \oint_{\partial D} xdy.$$

证明是显然的, 只要直接应用 Green 定理, 并注意到  $D$  的面积等于常值函数  $f(x, y) = 1$  在  $D$  上的二重积分即可.

对于环量为零或与路径无关的曲线积分, 我们有下列结论.

**定理 11.7** 设  $D$  是平面上单连通区域 (即  $D$  中任意一条简单闭曲线所围成的区域都包含在  $D$  中),  $\mathbf{v}$  是定义在  $D$  上的光滑向量场, 则下列三个命题相互等价

1° 向量场  $\mathbf{v}$  在区域内绕任何简单封闭曲线  $L$  的环量等于零

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

或者说  $\mathbf{v}$  在区域内的曲线积分与路径无关, 因此记连接  $D$  中任意两点  $A, B$  的曲线  $L_{AB}$  上的积分如下

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

2° 向量场  $\mathbf{v}$  是一个函数的梯度场, 即存在一个函数  $\varphi(x, y)$ , 使得

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$$

且这样的函数  $\varphi(x, y)$  在相差一个常数意义下是唯一的.

3° 向量场  $\mathbf{v}$  的两个分量  $Q, P$  满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

**证明** ( $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ ): 取  $D$  内一个固定点  $M_0(x_0, y_0)$  和一个动点  $M(x, y)$  以及在  $D$  内连接两点的任意一条曲线  $L$ , 因为积分与路径无关, 所以下列积分定义了一个函数:

$$\varphi: (x, y) \mapsto \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$



在连接  $(x, y)$  和  $(x + \Delta x, y)$  的直线段上,  $dy = 0$ , 因此有

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P dx$$

令  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ . 同理可得  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ , 即向量场  $\mathbf{v}$  是  $\varphi(x, y)$  的梯度.

如果存在另一个函数  $\psi(x, y)$ , 使得  $\mathbf{v} = \nabla \psi(x, y)$ , 那么  $\nabla(\varphi(x, y) - \psi(x, y)) = 0$ , 因此  $\varphi(x, y)$  与  $\psi(x, y)$  相差一个常数.

( $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ ): 因为

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

直接验证可得  $3^\circ$ .

( $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ ): 因为区域  $D$  是单连通的, 对任意一条简单封闭曲线  $L$ , 根据 Green 定理, 向量场在其上的环量等于零, 因此积分与路径无关.  $\square$

定理 11.5 和定理 11.7 提供了一个重要信息, 即在单连通区域  $D$  内, 与路径无关的积分问题, 转化成了一个在  $D$  内的微分问题. 更进一步, 有

**定理 11.8** 设  $D$  是平面上单连通区域,  $\mathbf{v}$  是  $D$  上光滑向量场, 如果在  $D$  内的曲线积分与路径无关, 那么在  $D$  内的任何两点  $A, B$ , 有

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

其中  $\varphi(x, y)$  满足  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ .

**证明** 根据条件, 存在  $\varphi$  使得  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ . 任取连接  $A, B$  两点的一条曲线  $L_{AB}$ , 并设其参数方程表示为  $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ , 因此

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{L_{AB}} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{L_{AB}} \varphi'_x(x, y) dx + \varphi'_y(x, y) dy \\ &= \int_\alpha^\beta (\varphi'_x(x(t), y(t))x'(t) + \varphi'_y(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi(x(t), y(t)) = \varphi(x(\beta), y(\beta)) - \varphi(x(\alpha), y(\alpha)) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned}$$

$\square$

**例 11.3.6** 研究下列向量场

$$\mathbf{v} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

在闭曲线上的环量.

**解** 设  $\Gamma$  是任何一条包围原点的逐段光滑闭曲线, 即原点是  $\Gamma$  围成的区域  $D$  的内点. 但是, 向量场  $\mathbf{v}$  在原点处没有定义, 虽然在  $D$  内除去原点的其它地方满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

但是不能应用 Green 定理. 如果在  $D$  内挖去一个以原点为中心, 以  $r$  为半径的小圆, 则在剩余部分区域  $\bar{D}$  中, 向量场满足 Green 定理条件, 并且在  $\bar{D}$  上  $Q'_x - P'_y = 0$ , 因此

$$\int_{\partial \bar{D}} P dx + Q dy = \iint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

注意到以下事实: 一方面区域  $\bar{D}$  不是平面上单连通区域, 因此定理 11.7 不成立. 另一方面  $\bar{D}$  的边界  $\partial \bar{D}$  是由两条曲线组成, 一是  $\Gamma$ , 二是挖去小圆的圆周  $L_r$ , 由例 11.3.4 知, 向量场围绕圆周  $L_r$  逆时针方向的环量等于  $2\pi$ . 但从  $\bar{D}$  的角度看  $\bar{D}$  的边界,  $\Gamma$  是逆时针方向, 而圆周  $L_r$  是顺时针方向, 因此有

$$\int_{\partial \bar{D}} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy - \int_{L_r} P dx + Q dy$$

所以该向量场  $\mathbf{v}$  沿任何包围原点的逐段光滑闭曲线  $\Gamma$  的环量都是  $2\pi$ , 而沿任何不包围原点的逐段光滑闭曲线的环量为 0.

**例 11.3.7** 设平面上有一个多边形  $D$ , 其顶点的坐标按逆时针排序分别是

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

试用 Green 公式来计算多边形的面积.

**解** 设从第  $k$  个顶点  $(x_k, y_k)$  到第  $k+1$  个顶点  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  的直线段为  $L_k$ , 它的参数方程是

$$L_k: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = ((1-t)x_k + tx_{k+1})\mathbf{i} + ((1-t)y_k + ty_{k+1})\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

即

$$x = x(t) = (1-t)x_k + tx_{k+1}, \quad y = y(t) = (1-t)y_k + ty_{k+1}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

这里  $k = 1, \dots, n$ , 并记  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ . 则在每一段上有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{L_k} -y dx + x dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \\ &= \frac{x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k}{2} \end{aligned}$$

注意到  $D$  的边界  $\partial D$  由直线段  $L_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  组成, 所以  $n$  边形的面积为

$$\begin{aligned} \sigma(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} -y dx + x dy \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k}{2}. \end{aligned}$$

## 习题 11.3

1. 计算下列第二型曲线积分.

(1)  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是曲线  $y = 1 - |1 - x|$  从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 0)$ ;

(2)  $\int_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ,  $L$  是沿正方形  $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$  逆时针一周的路径;

(3)  $\int_L \frac{-x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ ,  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 依逆时针方向一周的路径;

(4)  $\int_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ ,  $L$  是从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(1, 0, 0)$  再到  $B(1, 1, 0)$  最后到  $C(1, 1, 1)$  的折线段;

(5)  $\int_L e^{x+y+z} dx + e^{x+y+z} dy + e^{x+y+z} dz$ ,  $L$  是  $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{\varphi}{\pi}$  从点  $A(1, 0, 0)$  到点  $B(0, 1, \frac{1}{2})$ ;

(6)  $\int_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是  $x + y = 2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  的交线, 从原点看去是顺时针方向.

2. 求向量场  $\mathbf{v} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$  沿曲线  $L: x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) 参数增加方向的曲线积分.

3. 设一质点处于弹性力场中, 弹力方向指向原点, 大小与质点离原点的距离成正比, 比例系数为  $k$ , 若质点沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  从点  $(a, 0)$  移到点  $(0, b)$ , 求弹性力所做的功.

4. 利用 Green 公式, 计算下列曲线积分.

(1)  $\oint_L (x + y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是顶点为  $A(1, 1), B(3, 3), C(3, 5)$  的三角形的周界, 沿反时针方向;

(2)  $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$ ,  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  沿顺时针方向;

(3)  $\oint_L (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$ ,  $L$  是对称于两坐标轴的闭曲线;

(4)  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$ ,  $L$  是  $y^2 = x - 1$  与  $x = 2$  围成的封闭曲线沿逆时针方向;

(5)  $\int_{AMB} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy$ ,  $L$  是从点  $A(0, -1)$  沿直线  $y = x - 1$  到点  $M(1, 0)$ , 再从  $M$  沿圆周  $x^2 + y^2 = 1$  到点  $B(0, 1)$ ;

(6)  $\int_{AMO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ , 其中  $AMO$  为由点  $A(a, 0)$  到点  $O(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ).

5. 利用曲线积分计算下列区域的面积.

- (1) 星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 围成的区域;  
 (2) 旋轮线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 与  $Ox$  轴所围成的区域.

6. 计算曲线积分  $\int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ .

- (1)  $L$  为从点  $A(-a, 0)$  沿圆周  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  到点  $B(a, 0), a > 0$ ;  
 (2)  $L$  为从点  $A(-1, 0)$  沿抛物线  $y = 4 - (x - 1)^2$  到点  $B(3, 0)$ .

7. 设  $D$  是平面上由简单闭曲线  $L$  围成的区域.

- (1) 如果  $f(x, y)$  有连续的二阶导数, 证明  $\oint_L \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \Delta f dx dy$ , 这里  $\mathbf{n}$  是曲线  $L$  的单位外法向量,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  称为二维的 Laplace 算子. 因此, 当  $f$  满足 Laplace 方程  $\Delta f = 0$  时, 有  $\oint_L \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds = 0$ . (提示: 设单位外法向量为  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j}$ , 则平面曲线  $L$  指向逆时针方向的单位切向量为  $\boldsymbol{\tau} = -\cos \beta \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}$ ).

- (2) 如果  $\mathbf{a}$  是单位常值向量, 证明:  $\oint \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = 0$

- (3) 如果  $u(x, y), v(x, y)$  有连续的二阶导数, 证明下列第二 Green 公式:

$$\oint_L \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy$$

## §11.4 向量场在曲面上的积分

本节讨论向量场在曲面的积分, 也称为第二型曲面积分. 设想在一条河流中放置一张渔网, 流体通过渔网这张曲面的速率称为通量, 即单位时间内通过曲面的流体体积. 决定通量大小的因素有: 流体的流速、流向与曲面的角度、曲面的面积以及通过曲面的哪一个流动方向是正方向. 后者叫做定向选择. 为此我们首先讨论这样的定向问题.

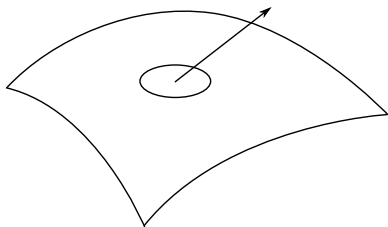


图 11.9

### 11.4.1 双侧曲面及其定向

**单侧曲面和双侧曲面** 通常我们所见到的曲面总是有正侧和反侧、或 (对于封闭曲面来说) 有里侧和外侧之分. 对于这样有双侧的曲面, 如果一个油漆匠油漆曲面的某一侧, 只要他不越过曲面的边界, 是无论如何也不会油漆到另一侧的.

然而, 并非所有的曲面都是如此. 一个典型的例子叫做“Möbius 带”. 将一长方形纸条  $ABCD$  扭转  $180^\circ$ , 再沿  $AB$  和  $CD$  两边粘起来, 使  $A$  和  $C$  重合,  $B$  和  $D$  重合, 就得到了这种带形的模型. 这时, 如果油漆匠从任意一点开始油漆, 他不需要越过边界就可将 Möbius 带的所有地方连续地油漆一遍, 即这种曲面只有一个侧面! (图11.10) 因此, 我们需要在数学上刻划曲面的双侧性或单侧性, 明确曲面的定向.

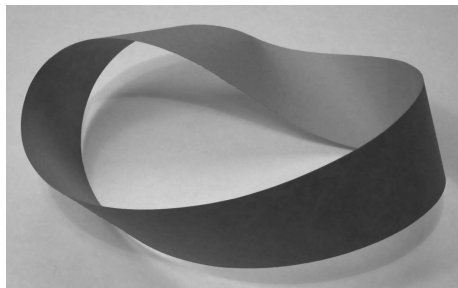


图 11.10

设  $S$  光滑曲面, 因此在每一点  $M$  都有非零的法向量  $\mathbf{n}(M)$ . 显然与  $\mathbf{n}(M)$  指向相反的向量  $-\mathbf{n}(M)$  也是  $S$  在  $M$  的法向量, 它们都与曲面的切平面垂直. 对任一点  $M_0 \in S$ , 取定  $S$  在  $M_0$  的法向量中的一个, 记为  $\mathbf{n}(M_0)$ . 作任意一条  $S$  上过  $M_0$  的闭曲线  $L$ . 让

点  $M$  从  $M_0$  出发沿  $L$  移动, 在  $M$  经过的每一点取一个法向量  $\mathbf{n}(M)$  使  $\mathbf{n}(M)$  为连续变化, 如果当  $M$  回到  $M_0$  时, 取到的法向量还是  $\mathbf{n}(M_0)$ , 就称  $M_0$  是曲面  $S$  的双侧点, 如果曲面上每一点都是双侧的, 那么称曲面是一张双侧曲面. 否则, 就称  $S$  是一张单侧曲面.

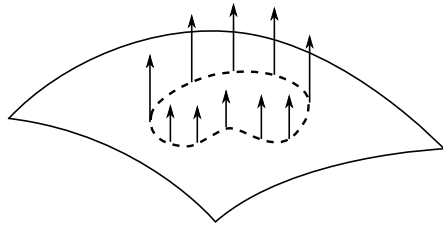


图 11.11

值得注意的是, 只要曲面  $S$  上有一个点  $M_0$  具有“双侧”性. 那么  $S$  上所有的点就都具有这样的“双侧”性. 这是因为如果有  $M_1 \in S$  是单侧的, 连接  $M_0$  和  $M_1$  并过  $M_1$  作一个闭曲线  $L$ . 当  $\mathbf{n}(M_0)$  沿连接线从  $M_0$  到达  $M_1$  时取到  $\mathbf{n}(M_1)$ , 再绕  $L$  一周到  $M_1$  时取到  $-\mathbf{n}(M_1)$ , 然后再沿连接线返回  $M_0$  时, 根据法向量连续变化的原则, 应取到  $-\mathbf{n}(M_0)$ , 这与  $M_0$  的双侧性相矛盾.

今后我们只讨论双侧曲面, 它也称作可定向曲面.

**双侧曲面的定向** 设  $S$  是三维空间中一个可定向光滑曲面, 根据上述分析, 对于  $S$  上任一点  $M_0$  有两个单位法方向  $\mathbf{n}(M_0)$  和  $-\mathbf{n}(M_0)$ , 只要指定其中一个  $\mathbf{n}(M_0)$ , 则通过连续滑动, 就可以确定曲面上所有的点  $M$  处相对应的  $\mathbf{n}(M)$ , 如此得到了曲面的一个连续单位法向量场, 这个法向量场定义了曲面的一侧; 曲面相反的一侧就是由曲面的另一个单位法向量场  $-\mathbf{n}(M)$  定义.

在可定向曲面上指定一个连续单位法向量场  $\mathbf{n}$  为正向, 称曲面为定向曲面,  $\mathbf{n}$  称为定向曲面的正向: 等价地说, 可定向曲面  $S$  有两侧(两面), 指定其中一侧为正面, 则  $S$  就是定向曲面.

以下设  $S$  是定向曲面, 单位法向量场  $\mathbf{n}$  是正向. 当  $S$  在直角坐标系下具有参数方程表示时,

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

它的两个法向量是

$$\pm \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \pm \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k} \right).$$

如果  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  与定向  $\mathbf{n}$  的指向相同, 那么称  $(u, v)$  是定向曲面  $S$  的正向参数, 这等价于

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}.$$

如果  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  与定向  $\mathbf{n}$  指向相反, 称  $(u, v)$  是反向参数.

容易验证, 如果  $(u, v)$  是反向参数, 那么  $(v, u)$  是定向曲面的正向参数. 一般我们取  $(u, v)$  是定向曲面的正向参数, 这时  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$  是曲面的正向.

特别当曲面的表示为显式表示时,

$$S: z = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

取正向

$$\mathbf{n} = \frac{-f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}},$$

它与  $Oz$  轴正方向的夹角为锐角, 即  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ . 因此所指向的一侧称为曲面的上侧, 而另一侧称为下侧.

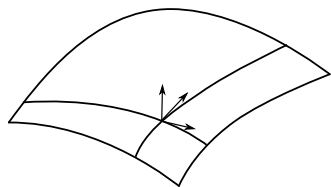


图 11.12

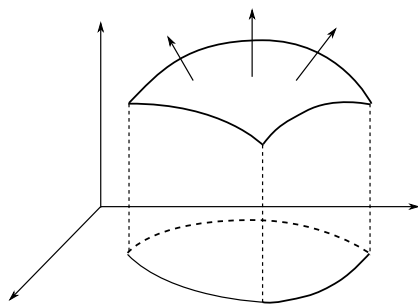


图 11.13

对于封闭曲面, 法向量指向曲面外部 (外面) 的那一侧称为外侧, 另一侧称为内侧. 例如以原点为圆心的球  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , 其指向外侧的法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R} = \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

有时, 我们需要将曲面的取向与其边缘曲线的方向相协调, 协调的原则是曲面的取向与边界曲线的方向构成右手系, 即当右手拇指与法向量保持一致时, 其他四个指头弯曲的方向与边界曲线的方向一致. 这样, 确定了曲面的方向就可以确定边界的方向; 反过来确定了边界的正方向以后, 也就确定了曲面的方向.

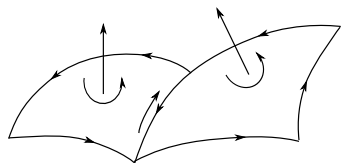


图 11.14

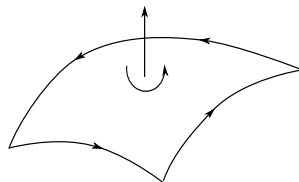


图 11.15

如果曲面  $S$  是由双侧曲面  $S_1$  和  $S_2$  拼接而成. 当  $S_1$  的边界方向确定后, 那么应取

$S_2$  的正向使  $S_1$  和  $S_2$  的公共边界两侧有相反的走向, 这就是拼接曲面方向的协调. 由多张双侧曲面片拼接成的曲面的定向, 亦可按上述原则在有公共边界的曲面片之间协调.

**注记** 上述曲面的定向, 是指三维空间的二维曲面, 因此一个三维空间的一片二维定向曲面  $S$ , 不仅有面积 (即大小)  $\sigma(S)$ , 而且还有方向 (即取定曲面方向的单位法向量)  $\boldsymbol{n}$ , 所以构成一个“面积向量”  $\boldsymbol{n}\sigma(S)$ . 类似的有向面积概念, 我们曾经在第 8 章讨论向量的叉乘和混合积时提及, 读者可以发现两者之间的一致性.

### 11.4.2 向量场在曲面上积分的定义和计算

我们以计算流体通过空间曲面的通量为例, 引进向量场在曲面上积分的具体形式.

设  $\boldsymbol{v}$  是一个不可压缩流体的速度场,  $S$  是一张定向曲面. 确定方向的单位法向量是  $\boldsymbol{n}$ . 取  $S$  上一小块面积元  $dS$ , 因此“有向面积元” (即面积向量) 为  $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ . 在  $dS$  上取一点  $M$ , 则流体在  $dS$  上的速度可近似为  $\boldsymbol{v}(M)$ . 那么单位时间内流经  $dS$  的流量为

$$dN = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

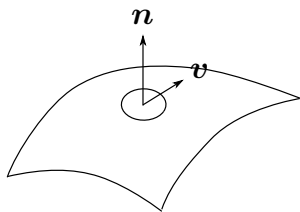


图 11.16

于是过  $S$  的通量 (单位时间内流过  $S$  的流量) 就是一种积分, 即

**定义 11.9** 设  $\boldsymbol{v}(M)$  是定义在定向曲面  $S$  上的一个向量场,  $S$  的正向为单位法向量  $\boldsymbol{n}$ , 则下列积分

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

称为向量场  $\boldsymbol{v}$  在有向曲面  $S$  上的曲面积分 (也称为第二型曲面积分). 或者说向量场在曲面上的积分是通过数量场  $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$  在  $S$  上的曲面积分 (第一型曲面积分) 给出的. 当曲面  $S$  是一个封闭曲面时, 称积分为向量场通过封闭曲面的通量, 有时也记为

$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

**例 11.4.1** 求向量场

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

过  $Oxz$  平面上一个正方形  $S = \{(x, 0, z) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 2\}$ , 定向为  $y$  轴方向的平面的通量.



解 曲面  $S$  的单位法向量是  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ , 所以有向面积元  $d\mathbf{S} = \mathbf{j} dx dz$ , 因此通量为

$$\iint_S \mathbf{v}(x, 0, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{1}{x} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} dx dz = \int_1^3 \int_0^2 \frac{1}{x} dx dz = 2 \ln 3.$$

向量场的曲面积分有如下性质

1° 对向量场的线性性: 若  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ , 则

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = c_1 \iint_S \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dS + c_2 \iint_S \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dS.$$

2° 对积分曲面的可加性: 若定向曲面  $S$  由曲面  $S_1$  和  $S_2$  协调拼接而成, 则有

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

3° 对曲面的方向性: 若用  $S^+$  和  $S^-$  表示曲面给定两个不同定向, 设  $\mathbf{n}^+$  和  $\mathbf{n}^-$  分别是它们的定向, 则

$$\iint_{S^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^- dS = - \iint_{S^+} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^+ dS.$$

下面将讨论如何利用曲面的参数表示, 计算向量场的曲面积分. 在直角坐标系下, 设向量场为

$$\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k};$$

$S$  是一张定向光滑曲面, 并且具有正向参数表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D.$$

它的面积元为  $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$ . 此时正向单位法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}.$$

则有向面积元为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} dS = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv$$

因此向量场积分可以化为参数区域  $D$  上的二重积分

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \iint_D (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \iint_D \left( P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \end{aligned}$$

上式中, 积分的方向实际上隐含在  $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$  等三个 Jacobi 行列式中. 有向面积元又可以表示为

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \\ &= \left( \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du dv \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

记

$$dy \wedge dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du dv, \quad dz \wedge dx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du dv, \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv,$$

则

$$d\mathbf{S} = (dy \wedge dz)\mathbf{i} + (dz \wedge dx)\mathbf{j} + (dx \wedge dy)\mathbf{k}.$$

如果用方向余弦表示曲面的正向单位法向量

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

这里  $\alpha, \beta, \gamma$  表示  $\mathbf{n}$  与三个坐标轴的正向的夹角. 那么有向面积元为

$$d\mathbf{S} = \cos \alpha dS \mathbf{i} + \cos \beta dS \mathbf{j} + \cos \gamma dS \mathbf{k}.$$

所以

$$dy \wedge dz = \cos \alpha dS, \quad dz \wedge dx = \cos \beta dS, \quad dx \wedge dy = \cos \gamma dS,$$

它们分别为有向面积  $d\mathbf{S}$  在三个坐标平面  $Oyz, Oxz, Oxy$  上的投影.

因此, 向量场积分又可以表示成为

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

注记 根据行列式的有关性质, 有

$$dz \wedge dy = \frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)} du dv = -\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du dv = -dy \wedge dz,$$

其它两种情形类似  $dz \wedge dx = -dx \wedge dz, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ . 因此与 §9.6 中定义的外积  $dy, dz, dx$  之间的外积是一致的, 或者说, 这里给出了二阶微分形式三个基本元  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  一个几何解释, 即它们都是有向面积元分别在三个坐标平面上的投影.

然而, 在几乎所有教科书中 (本教材也不例外), 为了简化起见, 仍然记

$$dy dz = dy \wedge dz, \quad dz dx = dz \wedge dx, \quad dx dy = dx \wedge dy,$$

即, 可用记号

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

表示向量场积分, 但此时的  $dy \, dz$ ,  $dz \, dx$ ,  $dx \, dy$  已经具有了方向的含义.

下面是向量场积分的两个特殊情形.

如果  $S$  是显式曲面

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in D,$$

且不妨设曲面的正向为曲面的上侧, 这时  $(x, y)$  是曲面的正向参数, 那么

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dx \, dy \\ &= \iint_D (-P f'_x - Q f'_y + R) dx \, dy. \end{aligned}$$

如果正向是曲面的下侧, 那么向量场的积分应等于上述积分前加负号.

当向量场  $\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  的分量中只有一项时, 例如  $Q = R = 0$ , 则积分退化为

$$\iint_S P \, dy \, dz$$

读者应注意, 这是一个特殊的向量场在曲面上的积分, 而不是二重积分. 特别, 如果曲面  $S$  是  $Oyz$  平面上的一块, 方向为  $x$  轴正方向 (这种情况下  $S$  即是平面上的一个区域, 一般记为  $D$ ), 这时  $(y, z)$  是  $S$  的正向参数, 那么

$$\iint_S P \, dy \, dz = \iint_D P \, dy \, dz$$

即为通常的二重积分. 其他两种情况类似.

**例 11.4.2** 求向量场  $\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  通过球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  外侧的通量.

**解** 设  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , 因此指向球面外侧的法向量为  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{a}$ , 面积元向量为  $d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{a} dS$ . 故通量公式为

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{a} \iint_S (xP + yQ + zR) \, dS.$$

如果采用球坐标

$$x(\varphi, \theta) = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y(\varphi, \theta) = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z(\varphi, \theta) = a \cos \varphi,$$

其中  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 那么  $dS = a^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$ ,  $(\varphi, \theta)$  是正向参数, 所以

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{v} \cdot (\sin \varphi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \varphi \mathbf{k}) a^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

特别, 对于位于三维空间的原点的电荷  $q$ , 其在空间一点处的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 那么  $\mathbf{E}$  通过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  外侧的通量为

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} dS = \iint_S \frac{qr^2}{r^3 R} dS \\ &= \iint_S \frac{q}{R^2} dS = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \end{aligned}$$

注意到, 本例中的向量场通过球面的通量与球的半径无关.

**例 11.4.3** 求向量场  $\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  通过圆柱面  $S: x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h$  外侧的通量.

**解** 指向圆柱面外侧的法向量为  $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , 所以正的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

其中  $x = a\cos\theta$ ,  $y = a\sin\theta$ ,  $z = z$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $-h \leq z \leq h$  是柱面坐标. 因此  $dS = a d\theta dz$ , 且

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = a \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h (P \cos\theta + Q \sin\theta) d\theta dz.$$

注意到, 如果向量场  $\mathbf{v}$  的方向与  $z$  轴平行, 那么  $\mathbf{v}$  与圆柱面的法向量垂直, 因此通量为零.

特别对于向量场

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

在圆柱面上,  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ , 所以向量场通过圆柱面外侧的通量为

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= a^2 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \frac{q(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} d\theta dz \\ &= 2a^2 q \pi \int_{-h}^h \frac{1}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} dz = 4q \pi \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

**例 11.4.4** 设向量场  $\mathbf{v} = y(x - z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (y^2 + xz)\mathbf{k}$ , 求  $\mathbf{v}$  通过长方体:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$  的外侧  $S$  的通量.

**解** 设  $S$  的六个侧面为  $S_1, S_2, \dots, S_6$ , 法向分别为  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_6$ , 方向指向外侧. 可以将积分写为

$$\iint_S y(x - z) dy dz + x^2 dz dx + (y^2 + xz) dx dy.$$

在曲面  $S_1$  和  $S_2$  上,  $(y, z)$  分别是正向和反向参数, 而在其它 4 个面上,  $y$  或者  $z$  是常数, 因此

$$\begin{aligned} \iint_S y(x-z) dy dz &= \iint_{S_1} y(x-z) dy dz + \iint_{S_2} y(x-z) dy dz \\ &= \iint_{\substack{0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c}} y(a-z) dy dz - \iint_{\substack{0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c}} y(0-z) dy dz \\ &= \frac{1}{2} ab^2 c. \end{aligned}$$

类似可得

$$\iint_S x^2 dz dx = \iint_{S_3} x^2 dz dx + \iint_{S_4} x^2 dz dx = 0$$

和

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + xz) dx dy &= \iint_{S_5} (y^2 + xz) dx dy + \iint_{S_6} (y^2 + xz) dx dy \\ &= \int_0^a dx \int_0^b (y^2 + cx) dy - \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} a^2 bc. \end{aligned}$$

所以

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} abc(a+b).$$

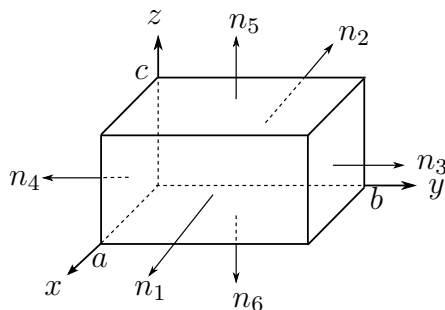


图 11.17

#### 例 11.4.5 求曲面积分

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中  $S$  是半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ), 定向为上侧.

解 将半球面  $S$  分成子曲面  $S_1, S_2$ , 其方程分别是

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, \quad (y, z) \in D = \{y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}, \\ x &= -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, \quad (y, z) \in D = \{y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}. \end{aligned}$$

于是

$$\iint_S x^2 dy dz = \iint_{S_1} x^2 dy dz + \iint_{S_2} x^2 dy dz,$$

沿  $x$  轴正方向看, 等式右边第一个积分定向取在  $S_1$  上侧, 第二个积分定向取在  $S_2$  的下侧, 或者说  $(y, z)$  是  $S_1$  的正向参数、 $S_2$  的反向参数. 应用曲面积分的计算公式, 化为二重积分得

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dy dz &= \iint_D (\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dy dz - \iint_D (-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dy dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

同样算得

$$\iint_S y^2 dz dx = 0.$$

因为在球面  $S$  上  $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$ , 而  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $G$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , 所以应用曲面积分上侧的计算公式又得

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dx dy &= \iint_G (a^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2)r dr = \frac{1}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

从而所求的曲面积为

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

#### 例 11.4.6 计算曲面积分

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx,$$

其中  $S$  是上半椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0)$ , 定向指向上侧.

**解** 将椭球面  $S$  表示成参数方程

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta,$$

其中  $\theta, \varphi$  的变化范围是一个矩形区域

$$D: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

因为

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = bc \sin^2 \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} = ac \sin^2 \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = ab \cos \theta \sin \theta > 0,$$

所以向量  $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi$  指向  $S$  的正向, 故由曲面积分的计算公式得

$$\begin{aligned}\iint_S x^3 dy dz &= \iint_S a^3 \sin^3 \theta \cos^3 \varphi \cdot bc \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} \pi a^3 bc.\end{aligned}$$

同样可得

$$\iint_S y^3 dz dx = \frac{2}{5} \pi ab^3 c.$$

从而所求曲面积分的值为

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx = \frac{2}{5} \pi abc(a^2 + b^2).$$

### 习题 11.4

1. 计算下列第二型曲面积分.

- (1)  $\iint_S (x + y^2 + z) dx dy$ ,  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.
- (2)  $\iint_S xyz dx dy$ ,  $S$  是柱面  $x^2 + z^2 = R^2$  在  $x \geq 0, y \geq 0$  两卦限内被平面  $y = 0$  及  $y = h$  所截下部分的外侧;
- (3)  $\iint_S xy^2 z^2 dy dz$ ,  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的  $x \leq 0$  的一半远离球心一侧;
- (4)  $\iint_S yz dz dx$ ,  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的上半部分 ( $z \geq 0$ ) 并取外侧;
- (5)  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ ,  $S$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一卦限的部分, 远离原点的一侧;
- (6)  $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ ,  $S$  是圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的下侧;
- (7)  $\iint_S xz^2 dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$ ,  $S$  是通过上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧;
- (8)  $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$ , 其中  $f(x), g(y), h(z)$  为连续函数,  $S$  为直角平行六面体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$  的外侧.

2. 求场  $\mathbf{v} = (x^3 - yz)\mathbf{i} - 2x^2 y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  通过长方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$  的外侧表面  $S$  的通量.

## §11.5 Gauss 定理和 Stokes 定理

类似于平面向量场在封闭的平面曲线上积分的 Green 定理, 本节主要解决两个问题, 一是向量场在封闭曲面上的积分, 二是向量场在封闭的空间曲线上的积分.

### 11.5.1 Gauss 定理

首先考察光滑向量场  $\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  通过空间中长方体  $V = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$  的表面  $S = \partial V$  (这是一个分片光滑的封闭曲面) 外侧的通量.

与 §11.4 节中的例 11.4.4 一样, 设  $S$  的六个外侧为  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  (§11.4 节中的图 11.20) 在  $S_1$  和  $S_2$  上, 指向外侧的法向量分别为  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  和  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ , 面积元向量  $d\mathbf{S} = \mathbf{i} dy dz$  和  $d\mathbf{S} = -\mathbf{i} dy dz$ ,  $S_1$  和  $S_2$  的参数方程是显然的, 分别为  $x = a, y = y, z = z$  和  $x = 0, y = y, z = z$ , 其中  $y$  和  $z$  分别看成是参数. 所以

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^c \int_0^b P(a, y, z) dy dz, \\ \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_0^c \int_0^b P(0, y, z) dy dz.\end{aligned}$$

因此在  $S_1 + S_2$  上, 有

$$\begin{aligned}\iint_{S_1+S_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^c \int_0^b (P(a, y, z) - P(0, y, z)) dy dz \\ &= \int_0^c \int_0^b \int_0^a \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iiint_V \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz.\end{aligned}$$

同理, 在  $S_3 + S_4$  以及  $S_5 + S_6$  上, 有

$$\begin{aligned}\iint_{S_3+S_4} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz, \\ \iint_{S_5+S_6} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz.\end{aligned}$$

将上述结果合并起来, 最终得

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

注意到, 上面的最终结果给出了向量场  $\mathbf{v}$  在封闭曲面  $S = \partial V$  (即长方体的外表面) 与函数  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  在长方体  $V$  上的三重积分之间的关系.

我们将发现, 这个结果并非偶然. 也就是说, 对于一类相当广泛的三维空间区域  $V$ , 上述结果也成立. 证明思路与 Green 定理的证明完全一样, 为此作一点前期准备.



区域  $V$  称为

**Z 型区域:**  $V = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$ . 即  $V$  是由显式曲面  $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y), (x, y) \in D$  及以  $\partial D$  为准线, 母线与  $Oz$  平行的柱面围成.

**X 型区域:**  $V = \{(x, y, z) : x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D\}$ .

**Y 型区域:**  $V = \{(x, y, z) : y_1(z, x) \leq y \leq y_2(z, x), (z, x) \in D\}$ .

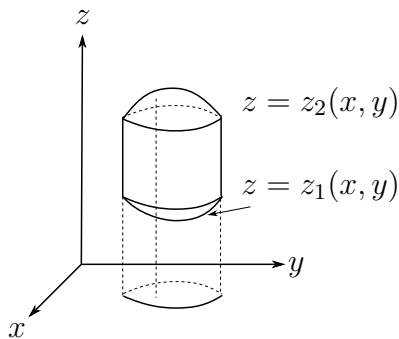


图 11.18

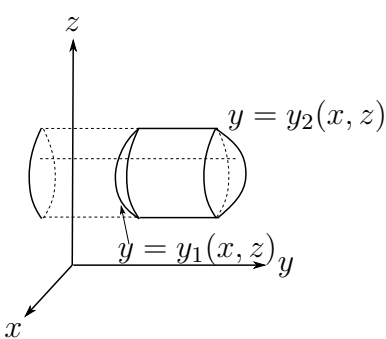


图 11.19

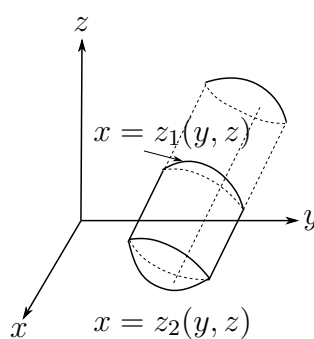


图 11.20

**定理 11.10** 设  $R(x, y, z)$  有连续一阶偏导数,  $\mathbf{v}_3 = R(x, y, z)\mathbf{k}$ ,  $V$  是 Z 型区域, 则

$$\iint_S \mathbf{v}_3 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz,$$

其中  $S = \partial V$ , 它的定向指向  $V$  的外侧.

**证明** 设  $V$  在  $xy$  平面的投影为  $D$ . 因为  $V$  的侧面的法向量与  $z$  轴垂直, 顶部曲面和底部曲面的法向量分别与  $z$  轴正向的夹角是锐角和钝角 (图11.18). 因此

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v}_3 \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_2} \mathbf{v}_3 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{v}_3 \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy \\ &= \iint_D (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

□

类似上述结果, 如果  $V$  是 X 型区域,  $\mathbf{v}_1 = P(x, y, z)\mathbf{i}$ ,  $S = \partial V$ , 方向指向  $V$  的外侧, 那么有

$$\iint_S \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

如果  $V$  是 Y 型区域,  $\mathbf{v}_2 = Q(x, y, z)\mathbf{j}$ ,  $S = \partial V$ , 方向指向  $V$  的外侧, 那么有

$$\iint_S \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz.$$

**定理 11.11 (Gauss)** 设  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  是  $V$  上光滑向量场 (即具有连续偏导数),  $V$  是空间中分片光滑曲面围成的闭区域. 如果  $V$  可以同时分解成有限个互不重叠的  $X$  型、 $Y$  型和  $Z$  型子区域的并, 那么有 (Gauss 公式)

$$\oiint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz,$$

或

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

其中  $S$  是  $V$  的表面,  $S = \partial V$ , 方向指向  $V$  的外侧.

该定理给出了向量场  $\mathbf{v}$  在封闭曲面  $S$  上的曲面积分与向量场的散度  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  在  $S$  所围成的体积  $V$  上的三重积分 (也称为“体积分”), 因此该定理也称为散度定理.

**证明** 类似 Green 定理的证明, 将  $V$  分别分解成  $X, Y, Z$  型子区域. 只需注意到以下两点, 一是无论把  $V$  分解成那种型的子区域, 在相邻两个子区域公共边界上, 两侧的曲面积分互相抵消, 因而在这些子区域外侧表面的积分之和等于在区域  $V$  的外侧  $S$  上的曲面积分, 而在子区域上的三重积分之和, 等于在  $V$  上的三重积分. 二是在三类子区域上分别对向量场  $\mathbf{v}_1 = P(x, y, z)\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v}_2 = Q(x, y, z)\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}_3 = R(x, y, z)\mathbf{k}$  进行曲面积分并将结果相加, 最终就得到定理中的结果.  $\square$

### 11.5.2 Stokes 定理

**定理 11.12 (Stokes)** 设  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  是  $V$  上光滑向量场 (即具有连续偏导数), 如果  $S$  是以曲线  $L$  为边的分片具有二阶连续偏导数的光滑曲面, 或者说  $L$  是有界曲面  $S$  的边  $L = \partial S$ , 那么有 (Stokes 公式)

$$\begin{aligned} & \oint_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \, dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \, dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy, \end{aligned}$$

或

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

其中  $L$  的定向与  $S$  的定向相协调, 即  $L$  的方向与  $S$  的法向量形成右手系.

因此 Stokes 定理给出了向量场  $\mathbf{v}$  沿封闭曲线  $L$  的积分 (环量) 与向量场  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  在以  $L$  为边界的曲面  $S$  上的曲面积分之间的关系.

**证明** 首先, 设  $S$  是具有二阶连续偏导数的光滑曲面, 即其参数方程表示:

$$S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

有二阶连续偏导数. 选取  $D$  的边界曲线  $\partial D$  在  $Ouv$  平面上的参数表示

$$\partial D: u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

则对应的  $S$  边  $L$  在  $Oxyz$  空间的参数表示为:

$$L: \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = x(u(t), v(t))\mathbf{i} + y(u(t), v(t))\mathbf{j} + z(u(t), v(t))\mathbf{k}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

且两者方向相协调, 即参数  $t$  增加的方向与参数  $(u, v)$  确定的曲面法向相协调. 因此有

$$\begin{aligned} \oint_L P \, dx &= \int_{\beta}^{\alpha} P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))(x'_u u'_t + x'_v v'_t) \, dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} P x'_u u'_t \, dt + P x'_v v'_t \, dt \\ &= \int_{\partial D} (P x'_u) \, du + (P x'_v) \, dv \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial(P x'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(P x'_u)}{\partial v} \right) \, du \, dv \end{aligned}$$

这里,  $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , 最后一步我们应用了 Green 公式. 而

$$\begin{aligned} \frac{\partial(P x'_v)}{\partial u} &= (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + P x''_{vu} \\ \frac{\partial(P x'_u)}{\partial v} &= (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u + P x''_{uv} \end{aligned}$$

两式相减得

$$\begin{aligned} \oint_L P \, dx &= \iint_D \left( \frac{\partial(P x'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(P x'_u)}{\partial v} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_D \left( P'_z \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - P'_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \, du \, dv \\ &= \iint_S P'_z \, dz \, dx - P'_y \, dx \, dy, \end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} \oint_L Q \, dy &= \iint_S Q'_x \, dx \, dy - Q'_z \, dy \, dz, \\ \oint_L R \, dz &= \iint_S R'_y \, dy \, dz - R'_x \, dz \, dx \end{aligned}$$

综合起来就得到 Stokes 公式.

如果  $S$  是分片光滑的曲面, 可将  $S$  分解成若干块光滑曲面  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 在每一小块  $S_i$  上 Stokes 定理成立, 同时注意到在相邻小块的公共边上, 由于曲线积分的方向相反, 所以相互抵消, 有效部分正是  $S$  的边  $\partial S = L$  上的曲线积分.  $\square$

至此, 我们已经讨论了三个重要公式, 分别是 Green 公式, Stokes 公式和 Gauss 公式, 在二维空间  $\mathbb{R}^2$  和三维空间  $\mathbb{R}^3$  中, 它们分别给出了曲面  $S$  上的积分(二维)与其边界的曲线  $\partial S$  上的积分(一维)之间, 以及体积  $V$  上的积分(三维)与其边界曲面  $\partial V$  上的积分(二维)之间的关系. 如果把 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

的右边看成是零维的“积分”(即在  $[a, b]$  边界  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  上的“积分”,  $F(a)$  前的负号是由于定向导致的), 那么 Green 公式, Stokes 公式和 Gauss 公式可以看成是 Newton-Leibniz 公式在高维的推广, 我们将在最后一节, 从微分形式的角度, 给出统一的描述.

### 例 11.5.1 计算曲面积分

$$\iint_S y(x-z) dy dz + x^2 dz dx + (y^2 + xz) dx dy,$$

其中  $S$  是长方体  $V: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$  的外侧表面.

**解** 记  $\mathbf{v} = y(x-z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (y^2 + xz)\mathbf{k}$ , 所以利用 Gauss 公式, 有

$$\text{原式} = \iiint_V (x+y) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y) dz = \frac{1}{2}abc(a+b).$$

与例 11.4.4 相比较, 不难发现利用 Gauss 公式比直接计算曲面积分更加简单.

### 例 11.5.2 设曲面 $S$ 为

$$S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$$

定向与  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  相同, 求力场  $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$  绕  $S$  的正向边界  $\partial S$  一周所做的功.

**解**  $S$  的正法向向量是  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\partial S} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) dS \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}|S| = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = -1, \end{aligned}$$

其中  $|S|$  表示  $S$  的面积.

**例 11.5.3** 设曲线  $L$  是椭圆抛物面  $z = 3x^2 + 4y^2$  与圆柱面  $4x^2 + y^2 = 4y$  的交线, 从  $z$  轴的正方向看,  $L$  的方向是顺时针方向, 求向量场  $\mathbf{v} = y(z+1)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + (xy-z)\mathbf{k}$  沿  $L$  的环量.

**解** 设  $D$  是平面区域  $4x^2 + y^2 \leq 4y$ ,  $S$  是曲面  $z = 3x^2 + 4y^2$ ,  $(x, y) \in D$  的下侧. 由 Stokes 公式可知有

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} \cdot \tau dl &= \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(z+1) & zx & xy-z \end{vmatrix} \\ &= -\iint_S dx dy = \iint_D dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

## 习题 11.5

1. 计算下列曲面积分

- (1)  $\iint_S (x+1) dy dz + y dz dx + (xy+z) dx dy$ ,  $S$  是以  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,1)$  为顶点的四面体的外表面;
- (2)  $\iint_S xy dy dz + yz dz dx + zx dx dy$ ,  $S$  是由  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  所围成的四面体的外侧表面;
- (3)  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ ,  $S$  是球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外侧;
- (4)  $\iint_S xy^2 dy dz + yz^2 dz dx + zx^2 dx dy$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  的外侧;
- (5)  $\iint_S (x-z) dy dz + (y-x) dz dx + (z-y) dx dy$ ,  $S$  是旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的下侧;
- (6)  $\iint_S (y^2 + z^2) dy dz + (z^2 + x^2) dz dx + (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $S$  是上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ) 的上侧.

2. 求引力场  $\mathbf{F} = -km\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  通过下列闭曲面外侧的通量:

- (1) 空间中任一包围质量  $m$  (在原点) 的闭曲面;
- (2) 空间中任一不包围质量  $m$  的闭曲面;
- (3) 质量  $m$  在光滑的闭曲面上.

3. 设区域  $V$  是由曲面  $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 1$  及平面  $z = 1, z = -1$  围成,  $S$  为  $V$  的全表面外侧, 又设  $\mathbf{V} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ . 求积分  $\iint_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ .

4. 设对于半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $S$ , 都有

$$\oiint_S xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - e^{2x}z dx dy = 0,$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续的一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 求  $f(x)$ .

5. 证明任意光滑闭曲面  $S$  围成的立体体积可以表成

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

其中积分沿  $S$  的外侧进行.

6. 证明 Archimedes 原理: 物体  $V$  全部浸入液体中所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量. (提示: 设液体的密度为常数  $\rho$ , 给出物体表面每一小块  $dS$  所受到的压

力, 通过积分计算  $\partial V$  的压力.)

7. 设  $\mathbf{c}$  是常向量,  $S$  是任意的光滑闭曲面, 证明:  $\iint_S \cos(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{n}}) dS = 0$ . 其中  $(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{n}})$  表示向量  $\mathbf{c}$  与曲面法向量  $\mathbf{n}$  的夹角.
8. 设  $L$  是  $xy$  平面上光滑的简单闭曲线, 逆时针方向, 立体  $V$  是柱体, 它以  $L$  为准线, 以  $L$  在  $xy$  平面内所围平面区域  $D$  为底, 侧面是母线平行于  $z$  轴的柱面, 高为 1, 试写出向量场  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  在  $V$  上的 Gauss 公式, 并由此来证明 Green 公式.
9. 计算下列曲线积分.
- (1)  $\oint_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是顶点为  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$  的三角形边界, 从原点看去,  $L$  沿顺时针方向;
  - (2)  $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ ,  $L$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  和平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  ( $a > 0, h > 0$ ) 的交线, 从  $x$  轴的正方向看来,  $L$  沿反时针方向;
  - (3)  $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ ,  $L$  是平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  与立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  表面的交线从  $z$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向;
  - (4)  $\oint_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ ,  $L$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  与平面  $y = z$  的交线, 从  $z$  轴正向看来,  $L$  沿逆时针方向;
  - (5)  $\oint_L (y^2 - y) dx + (z^2 - z) dy + (x^2 - x) dz$ ,  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线,  $L$  的方向与  $z$  轴正向成右手系;
  - (6)  $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$ , 其中  $L$  是平面  $x + y + z = 2$  与柱面  $|x| + |y| = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为逆时针方向.
10. 在积分  $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$  中, 路径  $L$  是  $Oxy$  平面上正向的圆  $x^2 + y^2 = R^2, Z = 0$ ; 利用 Stokes 公式化曲线积分为以  $L$  为边界所围区域  $S$  上的曲面积分. (1)  $S$  取  $Oxy$  平面上的圆面  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . (2)  $S$  取半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ; 结果相同吗?
11. 证明常向量场  $\mathbf{c}$  沿任意光滑闭曲线的环量都等于 0.
12. 求向量场  $\mathbf{v} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$  沿曲线  $L$  的环量.  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $z \geq 0$ ) 与  $x^2 + y^2 = Rx$  的交线, 从  $x$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向.

## §11.6 其他形式的曲线曲面积分\*

在 §11.1 至 §11.4 中, 我们分别讨论了数量场  $\phi$  和向量场  $\mathbf{v}$  在曲线、曲面上如下形式的积分

$$\int_L \phi ds; \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

和

$$\iint_S \phi dS; \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

下面我们讨论下列几种形式的曲线曲面积分.

$$\begin{aligned} \int_L \phi d\mathbf{r} &= \int_L \phi \boldsymbol{\tau} ds; \\ \int_L d\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \int_L \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v} ds. \end{aligned}$$

这里  $\boldsymbol{\tau}$  表示曲线的单位切向量. 以及

$$\begin{aligned} \iint_S \phi d\mathbf{S} &= \iint_S \phi \mathbf{n} dS; \\ \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{v} &= \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{n}$  是曲面  $S$  的单位法向量.

显然, 上述四个积分的结果都是一个向量, 本质上就是对每个分量函数逐一进行曲线或曲面积分. 它们满足的 Gauss 和 Stokes 公式如下

**定理 11.13** 设  $S$  是空间逐段光滑有界曲面,  $S$  的边  $\partial S$  是逐段光滑封闭曲线, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \phi d\mathbf{r} &= \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi, \\ \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

**证明** 要证明等是两边的向量相等, 只要证它们与任意向量的点乘相等即可. 设  $\mathbf{a}$  是任意一个常值向量, 则对第一个等式的左边进行点乘, 有

$$\mathbf{a} \cdot \oint_{\partial S} \phi d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} \phi \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

注意, 上式右端是关于向量场  $\mathbf{v} = \phi \mathbf{a}$  在曲线  $\partial S$  上的积分, 因此利用 Stokes 定理并借

用  $\nabla$  的计算公式(见§9.6.2 节)有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial S} \phi \, d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times (\phi \mathbf{a})) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S \nabla \phi \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi. \end{aligned}$$

由于向量  $\mathbf{a}$  的任意性, 就得到第一个等式.

同样的方法, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \\ &= \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \\ &= \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \\ &= \iint_S ((d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

这里我们对向量场  $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$  使用了 Stokes 定理. 因此就有第二个等式. □

**定理 11.14** 设  $V$  是空间有界区域,  $V$  的边界  $\partial V$  是逐段光滑封闭曲面, 则

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \phi \, d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \phi \, dV, \\ \oiint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{v} &= \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} \, dV. \end{aligned}$$

**证明** 方法与定理11.13 一样, 用任意一个常值向量  $\mathbf{a}$  点乘第一个等式的左边得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oiint_{\partial V} \phi \, d\mathbf{S} &= \oiint_{\partial V} \phi \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) \, dV \\ &= \mathbf{a} \cdot \iiint_V \nabla \phi \, dV. \end{aligned}$$

于是就完成了第一个等式的证明, 这里我们对向量场  $\phi \mathbf{a}$  使用了 Gauss 定理以及用到了 §9.6.2 节中  $\nabla$  的计算公式.



用任意的常值向量  $\mathbf{a}$  点乘第二个等式的左边得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \iint_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{v} &= \iint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \\ &= \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) dV \\ &= \mathbf{a} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV. \end{aligned}$$

这里对向量场  $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$  使用了 Gauss 公式. □

利用定理11.13 和定理11.14, 我们可以给出下列梯度、散度和旋度的积分表示. 设  $\phi$  和  $\mathbf{v}$  分别是一个数量场和向量场, 对空间任意一点  $P$ , 定义梯度、散度和旋度如下.

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \lim_{V \rightarrow P} \left( \frac{1}{\sigma(V)} \iint_S \phi d\mathbf{S} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \lim_{V \rightarrow P} \left( \frac{1}{\sigma(V)} \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \right) \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \lim_{V \rightarrow P} \left( \frac{1}{\sigma(V)} \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

这里  $V$  是包含点  $P$  的一个空间的区域, 极限  $V \rightarrow P$  表示区域  $V$  收缩到  $P$  点.  $\sigma(V)$  表示  $V$  的体积,  $S = \partial V$  表示  $V$  的边界.

注意到用积分定义数量场梯度和向量场的散度、旋度, 优点在于定义与坐标系的选取无关. 通过分别选取不同的坐标系进行积分再取极限, 可以得到不同坐标系下与 §9.6 中的定义一致的结果.

下面我们以梯度为例, 分别推导出直角坐标系和柱坐标系下梯度的表示.

在直角坐标系下, 以  $P$  点为顶点做空间中一个立方体区域  $V$ , 其三个相邻的棱向量分别是  $\Delta x \mathbf{i}, \Delta y \mathbf{j}, \Delta z \mathbf{k}$ , 体积为  $\sigma(V) = \Delta x \Delta y \Delta z$ . 立方体的六个面分为三对, 分别记为  $\mathbf{i}$  方向的  $S_1, S_2$ ,  $\mathbf{j}$  方向的  $S_3, S_4$ , 以及  $\mathbf{k}$  方向的  $S_5, S_6$ , 六个面的方向均指向外侧. 当  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$  时  $V \rightarrow P$ .

数量场  $\phi$  在  $S = \partial V$  上的积分可分解为分别在每一对面上的积分, 且  $\phi$  在每个面上可分别近似为常值.

例如  $S_1, S_2$  的有向面积分别为  $\Delta y \Delta z \mathbf{i}$  和  $-\Delta y \Delta z \mathbf{i}$ ,  $\phi$  在  $S_1, S_2$  上的积分为

$$(\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)) \Delta y \Delta z \mathbf{i} \approx \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{i}.$$

同理得在其他两对面上的积分

$$(\phi(x, y + \Delta y, z) - \phi(x, y, z)) \Delta x \Delta z \mathbf{j} \approx \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{j},$$

$$(\phi(x, y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)) \Delta x \Delta y \mathbf{k} \approx \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{k}.$$

所以在立方体  $V$  的边界  $\partial V$  上的积分为

$$\oiint_S \phi \, d\mathbf{S} \approx \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

也就是

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oiint_S \phi \, d\mathbf{S} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

正是 §9.6 中给出的梯度在直角坐标系下的表示.

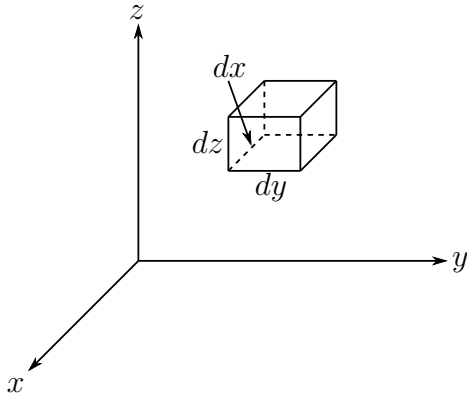


图 11.21

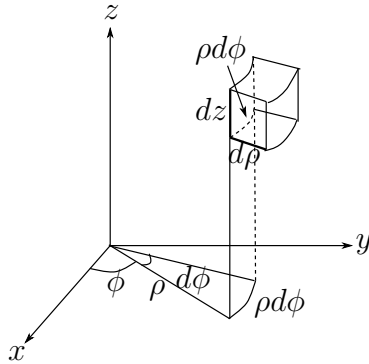


图 11.22

选取空间柱坐标 (见 §9.6.3), 即令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

或者位置向量

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

引进柱坐标系的三个坐标向量

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

且

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r.$$

如图所示, 以  $P$  点为顶点做空间中一个立方体区域  $V$ , 其三个相邻的棱向量分别为  $\Delta r \mathbf{e}_r$ ,  $r \Delta \theta \mathbf{e}_\theta$ ,  $\Delta z \mathbf{e}_z$ .  $V$  的体积为

$$\sigma(V) = r \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

立方体的六个面分为三对, 分别记为  $\mathbf{e}_r$  方向的  $S_1, S_2$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  方向的  $S_3, S_4$ , 以及  $\mathbf{e}_z$  方向的  $S_5, S_6$ , 方向均指向外侧. 当  $\Delta r, \Delta \theta, \Delta z \rightarrow 0$  时,  $V \rightarrow P$ .

因此数量场  $\phi$  在  $S = \partial V$  上的积分可分解为分别在每一对面上的积分, 且  $\phi$  在每个面上可分别近似为常值.

在  $\mathbf{e}_r$  方向上一对曲面, 它的有向面积为分别为

$$\Delta \mathbf{S}_1 = -r \Delta \theta \Delta z \mathbf{e}_r, \text{ 和 } \Delta \mathbf{S}_2 = (r + \Delta r) \Delta \theta \Delta z \mathbf{e}_r,$$

因此  $\phi$  在两个面上的积分为

$$\begin{aligned} & \phi(r + \Delta r, \theta, z) \Delta \mathbf{S}_2 + \phi(r, \theta, z) \Delta \mathbf{S}_1 \\ &= (\phi(r + \Delta r, \theta, z)(r + \Delta r) - \phi(r, \theta, z)r) \Delta \theta \Delta z \mathbf{e}_r \\ &\approx \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} r + \phi \right) \Delta r \Delta \theta \Delta z \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

在  $\mathbf{e}_\theta$  方向上一对曲面的有向面积分别为

$$\Delta \mathbf{S}_3 = -\Delta r \Delta \theta \mathbf{e}_\theta(\theta), \text{ 和 } \Delta \mathbf{S}_4 = \Delta r \Delta \theta \mathbf{e}_\theta(\theta + \Delta \theta),$$

因此  $\phi$  在两个面上的积分为

$$\begin{aligned} & \phi(r, \theta + \Delta \theta, z) \Delta \mathbf{S}_4 + \phi(r, \theta, z) \Delta \mathbf{S}_3 \\ &= (\phi(r, \theta + \Delta \theta, z) \mathbf{e}_\theta(\theta + \Delta \theta) - \phi(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta(\theta)) \Delta r \Delta z \\ &\approx \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \phi \mathbf{e}_r \right) \Delta r \Delta \theta \Delta z. \end{aligned}$$

在  $\mathbf{e}_z$  方向上一对曲面的有向面积分别为

$$\Delta \mathbf{S}_5 = -r \Delta r \Delta \theta \mathbf{e}_z, \text{ 和 } \Delta \mathbf{S}_6 = r \Delta r \Delta \theta \mathbf{e}_z,$$

因此  $\phi$  在两个面上的积分为

$$\begin{aligned} & \phi(r, \theta, z + \Delta z) \Delta \mathbf{S}_6 + \phi(r, \theta, z) \Delta \mathbf{S}_5 \\ &= (\phi(r, \theta, z + \Delta z) - \phi(r, \theta, z)) r \Delta r \Delta \theta \mathbf{e}_z \\ &\approx \frac{\partial \phi}{\partial z} r \Delta r \Delta \theta \Delta z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

将  $\phi$  分别在  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{e}_z$  三个方向上的积分相加, 并令  $V \rightarrow P$ , 得

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \lim_{\Delta r, \Delta \theta, \Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r \Delta r \Delta \theta \Delta z} \oiint_S \phi \, d\mathbf{S} \right) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

这就是梯度在柱坐标下的微分表示.

注记 关于旋度的积分表示, 下列表达方式更加具有物理直观. 设想流体在点  $P$  附近形成一个漩涡. 流体的速度场为  $\mathbf{v}$ . 如果在漩涡中放入一个叶轮 (如图), 叶轮的旋转速度 (角速度) 可以刻划环流量的强度. 当叶轮的轴与漩涡所在面成一个角度, 则角度越

直(垂直), 叶轮旋转得越快. 当叶轮调转一个方向, 则旋转的方向相反. 因此流体绕不同方向旋转就有不同大小的环量强度.

据此, 对  $V$  中的给定的一点  $P$  和给定的一个单位向量  $\mathbf{n}$ , 取过  $P$  点的一小片曲面  $S$ , 其边界  $L = \partial S$  的方向与给定的向量  $\mathbf{n}$  成右手系. 则根据 Stokes 公式, 下列极限

$$\Omega_{\mathbf{n}}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\sigma(S)} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$$

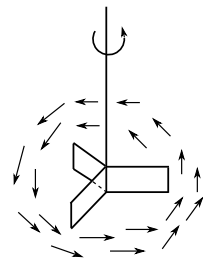


图 11.23

定义为向量场  $\mathbf{v}$  在  $P$  点处以  $\mathbf{n}$  为旋转轴的 **涡量**. 显然, 当  $\mathbf{n}$  与  $\nabla \times \mathbf{v}$  方向一致时, 涡量达到最大值  $|\nabla \times \mathbf{v}|$ . 因此称  $\nabla \times \mathbf{v}$  为向量场  $\mathbf{v}$  的旋度, 记为  $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ . 上式也可以看成是旋度的一种积分表示.

关于散度的物理解释如下: 设向量场  $\mathbf{v}$  是流体的速度场, 根据散度的定义

$$N = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

表示  $\mathbf{v}$  通过  $S$  正侧的通量. 当  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{n}$  成锐角时, 即  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ , 表示流体从  $S$  的一侧流向  $\mathbf{n}$  所指向的另一侧, 通量为正. 特别, 对于方向指向外侧的封闭曲面  $S$ ,  $N > 0$  表示流出大于流入, 因此  $S$  内部有产生流体的“源”, 而  $N < 0$  说明流出小于流入, 因此  $S$  内部有“漏”. 当  $S$  收缩到一点  $P$  时, 其极限值的正负表明流体在一点  $P$  是有“源”还是有“漏”. 这也是“散度”这个名称的来由.

## 习题 9.6

1. 利用散度的积分表示, 推导出在柱坐标系下的散度.
2. 利用梯度的积分表示, 推导出在球坐标系下的梯度.
3. 设函数  $u(x, y, z)$  在光滑曲面  $S$  所围成的闭区域  $V$  上具有直到二阶的连续偏微商, 而且满足拉普拉斯方程:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

试证明:

- (1)  $\oiint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$ ; (2)  $\oiint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_V (\nabla u)^2 dV$ , 其中  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  是  $u$  沿  $S$  外侧法向量  $\mathbf{n}$  的方向微商.

## §11.7 保守场

在 §11.3.4 中, 我们讨论了平面向量场  $\boldsymbol{v}$  的曲线积分与路径的相关性问题. 借助 Green 定理, 我们给出了对于定义在单连通平面区域上的向量场  $\boldsymbol{v}$  曲线积分与路径无关 (即环量为零) 的充分必要条件. 本节主要目的是将这些结果推广到空间情形.

### 11.7.1 保守场与势函数

首先给出下列定义

**定义 11.15** 设  $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$  是连通区域  $V$  内的光滑向量场.

若  $\boldsymbol{v}$  在  $V$  内的曲线积分与路径无关, 只与起点和终点有关, 或者说  $\boldsymbol{v}$  沿  $V$  内任何封闭曲线的环量为零, 则称  $\boldsymbol{v}$  是区域  $V$  内的 **保守场**.

因此, 保守场在连接  $V$  中两点  $A$  和  $B$  的任何曲线上的积分只与起点和终点有关, 可以记为

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

为了将定理11.7 推广到空间情形. 需要对空间区域的连通性做如下补充说明.

对空间中单连通区域  $V$ , 如果  $V$  内任何一条闭路  $L$ , 都存在一张以  $L$  为边、且完全包含在  $V$  内的分片光滑曲面, 或者说  $V$  内任何一条简单封闭曲线都可以在  $V$  内连续收缩为一点, 那么称之为**曲面单连通的**, 例如, 去掉球心的球体是曲面单连通的, 而游泳圈 (环面) 的内部空间, 就不是曲面单连通的. 如果空间  $V$  中任何封闭曲面都可以在其内部连续收缩到一点, 那么称之为**空间单连通的**. 显然, 去掉球心的球体虽然是曲面单连通的, 但它不是空间单连通的.

**定理 11.16** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$  是曲面单连通区域,  $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$  是  $V$  上的光滑向量场, 则下列三个命题等价:

1°  $\boldsymbol{v}$  是保守场.

2° 存在一个数量场  $\phi$ , 使得  $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ . 并称  $\phi$  是向量场  $\boldsymbol{v}$  的 **势函数**. 因此

$$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{r} = d\phi$$

是一个全微分.

3°  $\boldsymbol{v}$  满足  $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ .

有时, 我们称具有势函数的向量场为**有势场**, 旋度为零的向量场为**无旋场**. 定理11.16 说明这些概念与保守场的概念是等价的.

**证明** 证明按下列步骤进行.

( $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ ): 设  $\mathbf{v}$  是保守场, 则  $\mathbf{v}$  的曲线积分与路径无关, 所以对于  $V$  中一个固定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  和一个动点  $M(x, y, z)$ , 则保守场  $\mathbf{v}$  沿连接  $M_0$  和  $M$  的曲线的积分并不依赖曲线的选取, 而仅仅依赖起点和终点, 因此定义了  $V$  中一个数量场

$$(x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz.$$

设  $\Delta x$  充分小, 使得点  $(x + \Delta x, y, z)$  仍然在  $V$  内, 选择从  $(x, y, z)$  到  $(x + \Delta x, y, z)$  的直线段, 并利用积分对积分曲线的可加性可知

$$\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} P dx + Q dy + R dz$$

在此直线上显然有  $dy = 0, dz = 0$  (图 11.24), 因此

$$\frac{1}{\Delta x} (\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P dx.$$

由此可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y, z).$$

同理可证

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R(x, y, z),$$

即  $\nabla \phi = \mathbf{v}$ .

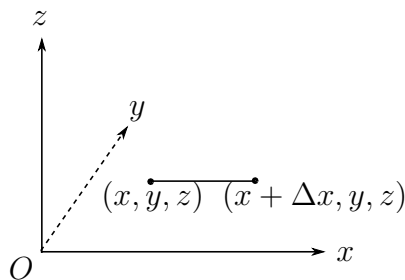


图 11.24

( $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ ): 设  $\mathbf{v}$  是有势场, 即存在势函数  $\phi$  使得  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , 则,  $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \phi = 0$ .

( $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ ): 当  $\mathbf{v}$  是无旋场时, 即  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . 在  $V$  中任取一条闭曲线  $L$  和一张在  $V$  内以  $L$  为边界的曲面  $S$ , 由 Stokes 公式得

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

即  $\mathbf{v}$  沿任意一条闭曲线积分为零, 所以是保守场. □

根据上述定理, 引力场

$$\mathbf{F} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}$$

是在不包含原点区域内的保守场 (见 §11.3.2 中的例 11.3.3).

从定理 11.16 以及证明过程, 我们得到以下重要信息:

一是定理的证明给出了势函数的构造, 类似于通过变上限积分构造原函数. 即通过选取连接固定点和动点的特殊路径对保守场进行曲线积分, 得到势函数. 如同原函数一

样, 保守场的势函数并不是唯一的. 如果  $\phi(x, y, z)$  是  $\mathbf{v}$  的势函数, 那么对于任意一个常数  $c$ , 有  $\nabla(\phi(x, y, z) + c) = \nabla\phi$ , 所以  $\phi(x, y, z) + c$  也是一个势函数. 反之如果  $\mathbf{v}$  有两个势函数  $\phi$  和  $\psi$ , 那么  $\nabla(\phi - \psi) = 0$ , 所以  $\phi - \psi = \text{常数}$ .

二是一个数量场  $\phi$  的梯度场  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  一定是保守场.

三是判断一个向量场是否是保守场, 等价于一个微分问题  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , 也就是向量场的三个分量满足下列微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

四是定理中要求区域是曲面单连通, 仅用在证明无旋场是保守场中. 事实上, 任意连通区域上的保守场一定是有势场(证明一样), 有势场是无旋场, 但无旋场是否是有势场与定义域是否是曲面单连通有关.

**定理 11.17** 设  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  上的保守场,  $\phi$  是  $\mathbf{v}$  的一个势函数, 则对于  $V$  中任意两点  $A$  和  $B$  以及连接两点的任意光滑曲线  $L_{AB}$ , 有

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A).$$

**证明** 设连接  $A$  和  $B$  两点曲线的参数方程表示为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

使得  $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ ,  $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ , 所以

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B d\phi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (\phi'_x x'(t) + \phi'_y y'(t) + \phi'_z z'(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\phi(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \phi(B) - \phi(A)\end{aligned}$$

**例 11.7.1** 设一个力场  $\mathbf{F}$  是保守场, 求力场对质点所做的功。

**解** 设  $-U$  是力场  $\mathbf{F}$  的势函数, 即  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , 则一个质点  $m$  在力场下运动的 Newton 方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\nabla U$$

这里在直角坐标系下  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ . 此时质点的总能量为

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}),$$

其中  $U$  是位能. 因此保守力场对质点所做的功等于位能在起点  $A$  和终点  $B$  的差

$$\int_{LAB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(A) - U(B)$$

**例 11.7.2** 证明向量场

$$\mathbf{v} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$$

是有势场, 并求出它的一个势函数.

**解**

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix} \\ &= (-x + x)\mathbf{i} + (-y + y)\mathbf{j} + (-z + z)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

因此  $\mathbf{v}$  在整个空间中是无旋场, 所以也是有势场. 若把起点取在原点, 可得  $\mathbf{v}$  的一个势函数为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy) dz \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz. \end{aligned}$$

**例 11.7.3** 求电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$  的势函数.

**解** 由习题 9.6 第 1 题可知, 电场强度  $\mathbf{E}$  在除去原点的整个空间上无旋的, 而空间中不包含原点  $(0, 0, 0)$  的任何区域  $V$  是曲面单连通的, 所以它在  $V$  中是保守场, 其势函数为

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \int_{M_0}^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M \frac{q}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{q}{r^3} r dr \\ &= \int_{r_0}^r \frac{q}{r^2} dr = -\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r_0}\right). \end{aligned}$$

为方便起见, 把点  $M_0$  取在无穷远处, 于是  $r_0 \rightarrow \infty$ , 则  $\mathbf{e}$  的一个势函数为  $\varphi(M) = -\frac{q}{r}$ . 在静电学中常记  $V = -\varphi = \frac{q}{r}$ , 并称为电场  $\mathbf{E}$  的电位. 因此有  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . 它表明电场  $\mathbf{E}$  指向电位  $V$  减小最快的方向.



## 例 11.7.4 计算积分

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1) dx + (xe^y - 2y) dy.$$

解 容易看出, 被积表达式是全微分

$$(e^y + 1) dx + (xe^y - 2y) dy = d(xe^y + x - y^2),$$

所以积分与路径无关, 且有

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1) dx + (xe^y - 2y) dy = (xe^y + x - y^2) \Big|_{(1,0)}^{(3,1)} = 3e.$$

## 11.7.2 无源场与向量势

我们已经知道, 若数量场的梯度为零  $\nabla\varphi = 0$ , 则  $\varphi$  是一个常值数量场. 若向量场的旋度为零  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , 则  $\mathbf{v}$  是一个保守场, 因此存在势函数. 这里我们重点讨论散度为零的向量场  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , 并称之为无源场. 首先给出下列定义

**定义 11.18** 设  $\mathbf{v}$  是空间区域  $V \in \mathbb{R}^3$  中的光滑向量场, 如果存在向量场  $\boldsymbol{\alpha}$  使得

$$\mathbf{v} = \text{rot } \boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha},$$

那么称  $\boldsymbol{\alpha}$  为  $\mathbf{v}$  的向量势.

显然, 具有向量势的向量场  $\mathbf{v}$  一定是无源场, 这是因为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

反之, 一个无源场是否存在向量势? 设  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , 是否存在  $\boldsymbol{\alpha} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  使得  $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$  等价于求解下列一阶微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} &= P(x, y, z), \\ \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} &= Q(x, y, z), \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} &= R(x, y, z), \end{aligned}$$

为了求出一组非平凡解  $(A, B, C)$ , 不妨令  $C = 0$ , 上述方程组中前两个方程简化为

$$\frac{\partial A}{\partial z} = Q(x, y, z), \quad -\frac{\partial B}{\partial z} = P(x, y, z),$$

对  $z$  积分给出

$$A = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz, \quad B = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + f(x, y),$$

这里我们只保留了第二个方程对  $z$  积分时的积分常数  $f(x, y)$ , 它需要通过第三个方程进一步确定, 以保证求出一个非平凡解. 把  $A, B$  的表达式代入第三个方程, 并利用  $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$  得

$$\begin{aligned} R(x, y, z) &= - \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= R(x, y, z) - R(x, y, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

从上述推导过程中不难发现,  $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$  保证了  $f(x, y)$  能够确定如下

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx$$

所以  $\boldsymbol{v}$  的一个向量势是

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz \right) \boldsymbol{i} + \left( - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx \right) \boldsymbol{j}.$$

以上分析给出构造向量势的具体方法. 但是, 从积分过程可以看出, 需要对向量场  $\boldsymbol{v}$  的定义域  $V$  加以条件, 以保证以定点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  和动点  $P(x, y, z)$  为顶点的立方体包含在  $V$  以内. 满足这个条件最典型的区域是空间中的球形区域. 而对一般区域中任何一个定点, 都存在球形邻域, 因此我们有

**定理 11.19** 设  $\boldsymbol{v}$  是空间中的光滑向量场, 则  $\boldsymbol{v}$  是无源场的充分必要条件是  $\boldsymbol{v}$  在任何一点的局部存在向量势.

如果寻求在整个区域上的向量势, 需要对区域  $V$  加以条件, 并对上述求解方程的过程进行必要的修正, 有兴趣的读者可以参阅其它教材, 此处不再赘述.

无源场的向量势不是唯一的. 事实上如果  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  都是向量势, 那么  $\text{rot}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = 0$ , 即  $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$  是无旋场, 所以存在一个数量场  $\varphi$  使得  $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \text{grad } \varphi$ . 结论是向量势在相差一个函数的梯度意义下是唯一的.

### 习题 11.7

1. 设平面上有四条路径:

$L_1$ : 折线, 从  $(0, 0)$  到  $(1, 0)$  再到  $(1, 1)$ ;

$L_2$ : 从  $(0, 0)$  沿着抛物线  $y = x^2$  到  $(1, 1)$ ;

$L_3$ : 从  $(0, 0)$  到  $(1, 1)$  的直线段;

$L_4$ : 折线, 从  $(0, 0)$  到  $(0, 1)$  再到  $(1, 1)$ .

求下列力场  $\boldsymbol{F}$  沿上述四条路径所作的功, 并说明它们的值为什么会相等或不等.

- (1)  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ;  
 (2)  $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ .

2. 求下列曲线积分.

(1)  $\int_L (2x + y) dx + (x + 4y + 2z) dy + (2y - 6z) dz$ , 其中  $L$  由点  $P_1(a, 0, 0)$  沿曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{ 到 } P_2(0, a, 0), \text{ 再由 } P_2 \text{ 沿直线 } \begin{cases} z + y = a, \\ x = 0 \end{cases} \text{ 到点 } P_3(0, 0, a);$$

(2)  $\int_{\widehat{AMB}} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz$ , 其中  $\widehat{AMB}$  是柱面螺线  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$  上点  $A(a, 0, 0)$  到  $B(a, 0, h)$  这一段.

3. 证明下列向量场是有势场, 并求出它们的势函数.

- (1)  $\mathbf{v} = (2x \cos y - y^2 \sin x)\mathbf{i} + (2y \cos x - x^2 \sin y)\mathbf{j}$ ;  
 (2)  $\mathbf{v} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(2y + z + x)\mathbf{j} + xy(2z + x + y)\mathbf{k}$ ;  
 (3)  $\mathbf{v} = r^2\mathbf{r}$ , ( $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ).

4. 当  $a$  取何值时, 向量场  $\mathbf{F} = (x^2 + 5ay + 3yz)\mathbf{i} + (5x + 3axz - 2)\mathbf{j} + [(a + 2)xy - 4z]\mathbf{k}$  是有势场, 并求出这时的势函数.

5. 求下列全微分的原函数  $u$ :

- (1)  $du = (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y - 4y^3) dy$ ;  
 (2)  $du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$ .

6. 验证下列积分与路径无关, 并求出它们的值.

(1)  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy)$ ;

(2)  $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left( \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left( \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy$ ;

(3)  $\int_{(1,0)}^{(6,3)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;

(4)  $\int_{(0,0,2)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz$ ;

(5)  $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left( 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left( \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$ ;

(6)  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  其中  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上.

7. 设  $f(u)$  是个连续的函数, 但不一定可微,  $L$  是分段光滑的任意闭曲线, 证明:

$$(1) \oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0;$$

$$(2) \oint_L f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz) = 0.$$

8. 稳恒电流  $I$  通过无穷长的直导线 (作  $Oz$  轴) 所产生的磁场为  $B = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ), 试讨论  $B$  沿  $Oxy$  平面上任意光滑闭曲线的环量  $\Gamma$ .

9. 试求函数  $f(x)$ , 使曲线积分  $\int_L (f'(x) + 6f(x) + e^{-2x})y dx + f'(x) dy$  与积分的路径无关.

10. 已知  $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = 2, \beta(0) = 2$ .

(1) 求  $\alpha(x), \beta(x)$  使线积分  $\int_L P dx + Q dy$  与路线无关, 其中  $P(x, y) = (2x\alpha'(x) + \beta(x))y^2 - 2y\beta(x) \tan 2x, Q(x, y) = (\alpha'(x) + 4x\alpha(x))y + \beta(x)$ ;

(2) 求  $\int_{(0,0)}^{(0,2)} P dx + Q dy$ .

11. 设函数  $Q(x, y)$  在  $Oxy$  平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分  $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$

与路径无关, 并且对任意  $t$  恒有  $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy$ , 求  $Q(x, y)$ .

12. 求解微分方程

$$(1) (xy^2 + 2y - 2y \cos x - y \sin x) dx + (x^2y + 2x + \cos x - 2 \sin x) dy = 0;$$

$$(2) 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0.$$

13. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ , 且  $(e^x \sin y + x^2y + f(x)y) dx + (f'(x) + e^x \cos y + 2x) dy = 0$  为一全微分方程. 求  $f(x)$  及此全微分方程的通解.

14. 确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量场  $\mathbf{v} = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

15. 给出二维情况下梯度和 Laplace 算子在极坐标系下的表示.

16. 利用 Laplace 算子在极坐标和球坐标下的表示, 分别验证  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  是 Laplace 方程  $\Delta u = 0$  的解.

## §11.8 微分形式的积分\*

在单变量微积分中, 若区间  $[a, b]$  上一个函数  $f(x)$  存在原函数  $F$  (即  $dF = f(x) dx$ , 或者说  $f(x) dx$  表示成一个函数的全微分), 那么有 Newton–Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

记  $\omega = f(x) dx$ , 则定积分  $\int_a^b f(x) dx$  即是一维空间的一次形式  $\omega$  的积分,  $f$  的原函数  $F$  即是一个 0 次形式 (注意, 一维空间只有 0 次和一次形式), 关系式  $dF = f(x) dx$  表明一次形式  $\omega$  是 0 次微分形式  $F$  的外微分, 因此是恰当的,  $F$  是它的原形式. 因此, Newton–Leibniz 公式就是一个恰当的微分形式  $\omega = f(x) dx$  在一维空间中的有向线段  $[a, b]$  上的积分和它的原形式  $F$  在  $[a, b]$  的边界  $\{a, b\} = \partial[a, b]$  (一个有向的离散点集, 或者说是一个“0 维空间”) 上的积分

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} \omega = \int_{\partial[a,b]} F = F(b) - F(a),$$

这里,  $F(b) - F(a)$  可以理解成  $F$  在“有向”离散点集  $\{a, b\} = \partial[a, b]$  上的积分. 离散点集  $\{a, b\}$  包含的内部就是  $[a, b]$ , 方向就是“外测”, 即  $b$  点指向右,  $a$  点指向左. 离散点集上的积分就是函数在点上的值求和, 其中  $F(a)$  前的负号, 是由  $a$  点的方向所决定的.

这种观点不难推广到空间曲线曲面积分上, 即本节所要讨论的微分形式的积分.

### 11.8.1 微分形式的积分

在 §9.7 中, 我们给出了三维空间向量场与微分形式的对应, 因此向量场的曲线积分

$$\int_{LAB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{LAB} P dx + Q dy + R dz$$

和曲面积分

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

均可以表示为对应的微分形式的积分

$$\begin{aligned} \int_{LAB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{LAB} \omega_{\mathbf{v}}^1, \\ \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \omega_{\mathbf{v}}^2, \end{aligned}$$

这里我们恢复使用  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$ ,  $dx \wedge dy$  代替常用的  $dy dz$ ,  $dz dx$ ,  $dx dy$ , 而  $\omega_{\mathbf{v}}^1, \omega_{\mathbf{v}}^2$  分别表示向量场对应的一次和二次微分形式.

对微分形式进行外微分得

$$\begin{aligned}d\omega_{\mathbf{v}}^1 &= \omega_{\nabla \times \mathbf{v}}^2, \\d\omega_{\mathbf{v}}^2 &= \omega_{\nabla \cdot \mathbf{v}}^3,\end{aligned}$$

则 Gauss-Stokes 公式可以统一地表示为

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega,$$

这里  $\omega$  表示一次或二次微分形式.  $\partial\Omega$  表示空间中的封闭曲线或曲面,  $\Omega$  是以封闭曲线  $\partial\Omega$  为边的曲面, 或是封闭曲面  $\partial\Omega$  围成的区域,

向量场  $\mathbf{v}$  称为保守场, 等价于对应的一次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^1$  满足  $d\omega_{\mathbf{v}}^1 = \omega_{\nabla \times \mathbf{v}}^2 = 0$ .

向量场  $\mathbf{v}$  称为无源场, 等价于对应的二次形式  $\omega_{\mathbf{v}}^2$  满足  $d\omega_{\mathbf{v}}^2 = \omega_{\nabla \cdot \mathbf{v}}^3 = 0$ .

根据 Poincaré 引理之逆定理 9.30, 在定义域满足一定条件时,  $\omega_{\mathbf{v}}^1$  和  $\omega_{\mathbf{v}}^2$  是恰当的. 因此对恰当的  $\omega_{\mathbf{v}}^1$ , 存在零次形式 (即数量场)  $\omega_{\phi}^0 = \phi$ , 使得

$$\omega_{\mathbf{v}}^1 = d\omega_{\phi}^0.$$

这里的  $\phi$  正是保守场  $\omega_{\mathbf{v}}^1$  的势函数.

而对于恰当的  $\omega_{\mathbf{v}}^2$ , 存在一个一次形式  $\omega_{\alpha}^1$ , 使得

$$\omega_{\mathbf{v}}^2 = d\omega_{\alpha}^1.$$

其中一次形式  $\omega_{\alpha}^1$  对应的向量场  $\alpha$  正是无源场的向量势.

至此, 结合 §9.7, 我们已经简要地将三维空间的向量场、向量场的梯度、散度和旋度、向量场的曲线曲面积分以及保守场和无源场的含义, 纳入了三维空间的微分形式、微分形式的外微分、微分形式的积分以及恰当微分形式的框架. 这是将向量场及其积分向高维空间推广的开始.

### 11.8.2 全微分方程

以二维空间为例, 一个恰当的一次形式  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  也称为全微分形式, 因此存在 0 次形式 (或势函数)  $\phi(x, y)$ , 使  $d\phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , 于是求解微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = d\phi = 0$$

就有通积分 (方程的通解)

$$\varphi(x, y) = c.$$

它是平面上的一条曲线, 在局部存在隐函数  $y = y(x)$  (如果  $\phi'_y = Q \neq 0$ ) 或  $x = x(y)$  (如果  $\phi'_x = P \neq 0$ ).

若在单连通域  $D$  中, 一次微分形式  $\omega = P dx + Q dy$  满足  $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = 0$ , 则就是全微分形式, 而势函数  $\phi(x, y)$  可以用线积分求出. 通积分为

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = c.$$

**例 11.8.1** 求解微分方程

$$(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy = 0.$$

**解** 命  $P(x, y) = 2x \cos y - y^2 \sin x$ ,  $Q(x, y) = 2y \cos x - x^2 \sin y$ , 则在全平面有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \sin x - 2x \sin y.$$

故原方程为全微分方程, 其通积分为

$$\begin{aligned} c &= \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta \\ &= x^2 \cos y + y^2 \cos x. \end{aligned}$$

对于  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  不是全微分形式的情形, 如果可以通过添加一个被称之为积分因子的  $\mu(x, y)$  使得  $\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy$  为全微分形式, 这时直接积分

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

就能求出微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

的通积分. 但要找这样一个积分因子, 相当于求解一个偏微分方程, 难度可能远高于解原方程. 如果在一些特殊情形, 能够通过观察法找出一个积分因子, 也不失为一种求解方程的方法.

**例 11.8.2** 求解微分方程

$$(x + y^2) dx - 2xy dy = 0.$$

**解** 容易看出  $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$  是方程的积分因子. 于是由

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

即得原方程的通积分为

$$x = ce^{\frac{y^2}{x}}.$$

## 第 11 章综合习题

1. 求第一型曲线积分  $I = \int_L z \, ds$ , 其中  $L$  是曲面  $x^2 + y^2 = z^2$  与  $y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 交线上从点  $(0, 0, 0)$  到  $(a, a, a\sqrt{2})$  的弧段.

2. 设  $a, b, c > 0$ . 求由曲线  $L: (x/a)^{2n+1} + (y/b)^{2n+1} = c(x/a)^n(y/b)^n$  围成的区域  $D$  的面积  $S$ .

3. 求平面上下列两个椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$$

内部公共区域的面积.

4. (Poisson 公式) 设  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $f(t)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax + by + cz) \, dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(kt) \, dt,$$

其中  $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

5. 设  $S(t)$  是平面  $x + y + z = t$  被球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  截下的部分, 且

$$F(x, y, z) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

求证: 当  $|t| \leq \sqrt{3}$  时, 有

$$\iiint_{S(t)} F(x, y, z) \, dS = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

6. 设  $f(t)$  在  $|t| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  上连续. 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f\left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}t) \, dt.$$

7. 设  $D$  是平面上光滑封闭曲线  $L$  所围成的区域,  $f(x, y)$  在  $\bar{D}$  上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . 求证当  $f(x, y)$  在  $L$  上恒为零时, 它在  $D$  上也恒为零.

8. 设  $f(x, y)$  在  $\bar{B}(P_0, R)$  上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . 求证: 对  $0 \leq r \leq R$ , 有  $f(P_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_L f(x, y) \, ds$ , 其中  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $L$  是以  $P_0$  为圆心  $r$  为半径的圆.

9. 设  $D$  是平面上光滑封闭曲线  $L$  所围成的区域,  $f(x, y)$  在  $\bar{D}$  上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . 求证若  $f(x, y)$  不是常数, 则它在  $\bar{D}$  上的最大值和最小值都只能在  $L$  上取到.



10. 设  $f(x, y, z)$  在  $\overline{B}(P_0, R)$  上有二阶连续偏导数且满足  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ . 求证: 对  $0 \leq r \leq R$ , 有  $f(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_S f(x, y, z) \, dS$ , 其中  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $S$  是以  $P_0$  为球心的球面.

## 第 12 章 Fourier 分析

本章将讨论如何将函数展开成由三角函数构成的函数项级数. 这是十九世纪法国科学家 Fourier 在研究热流问题时一个重要的数学发现. 下面我们简单描述 Fourier 当初的思想来源.

在吸收或释放热的物体内部, 温度分布  $T = T(x, y, z, t)$  在任何一点上依赖时间变化, 还受到物体的形状、密度、材料的比热、初始状态以及周边环境所影响. 例如, 关于一维杆状物体的热流问题, 可由下列数学模型描述

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t}, & T = T(x, t) \\ T(0, t) = T(l, t) = 0, & (t > 0) \quad (\text{给定的边界条件}) \\ T(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \quad (\text{给定的初始条件}) \end{cases}$$

即在一个长度为  $l$  的长杆上, 两端保持零度, 初始的温度分布为  $f(x)$ , 则随着时间的演化,  $t$  时刻的温度分布  $T(x, t)$  满足上述方程, 这里  $k$  是比热系数.

Fourier 采取了求解微分方程常用的分离变量法. 即令方程的解有如下形式

$$T(x, t) = \phi(x)\psi(t)$$

代入方程得

$$\phi''(x)\psi(t) = k^2\phi(x)\psi'(t)$$

或

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}.$$

上式两端分别是变量  $x$  和变量  $t$  的函数, 因此两端相等惟一的可能就是两端等于常数, 不妨设

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda, \quad (\text{一个待定常数}).$$

为了方便, 今后取  $k = 1$ . 上式等价于下列两个方程

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0;$$

$$\psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0$$

原方程的边界条件也转化为对第一个方程的边界条件

$$\phi(0) = \phi(l) = 0.$$

第一个方程的通解为

$$\phi(x) = b \sin(\sqrt{\lambda}x + c),$$

而边界条件  $\phi(0) = 0$  意味着通解中的常数  $c = 0$ , 条件  $\phi(l) = 0$  则给出对  $\lambda$  的限制:  $\sqrt{\lambda}l = n\pi$ , 即  $\lambda$  只能是:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots.$$

对应每个  $\lambda_n$ , 关于  $\phi(x)$  和  $\psi(t)$  的方程有一组解

$$\phi_n(x) = b_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \psi_n(t) = \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right).$$

这样, Fourier 得到了一组满足边界条件的解:

$$T_n(x, t) = b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x,$$

这里  $b_n$  是任意常数. 因为原方程是线性的, 边界条件也是齐次的, 所以不同解的线性组合还是解, 这样就得到满足边界条件的“通解”:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

要在这类解中找出一个满足初始条件的解, 只需根据下列等式确定系数  $b_n$  即可,

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

然而, 新的问题产生了. 上述求解的过程意味着: 对于一个事先给定的定义在区间  $[0, l]$  上的函数  $f(x)$ , 不管这个函数的定义如何, 甚至有可能有间断点, 它能够表示成上述三角函数的和? 或表示成下列更一般的三角函数构成的三角级数?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right),$$

这里为了方便, 我们把“零次项”单独写出来.

如果答案是肯定的, 那么又如何表示? 也就是如何确定系数  $a_n, b_n$ . 当然, 我们还会问, 将函数展开成 Fourier 级数, 背后的数学理论又是什么. 通过本章的讨论, 我们发现 Fourier 从一个具体的问题出发, 却开辟了数学研究和应用一个新领域.

## §12.1 函数的 Fourier 级数

不管由三角级数所表示的函数的“任意性”如何, 因为级数的每一项都是以  $2l$  为周期的周期函数, 所以函数的周期性就成为一种限制条件. 但是, 我们将会看到这个限制是非本质的, 因为我们可以对定义在一个有限区间上的函数进行延拓, 使之成为一个周期函数中的一段.

### 12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

1° 周期函数的基本性质 设函数  $f(x)$  在整个直线上有定义, 如果存在  $T$ , 使得

$$f(x+T) = f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

成立, 那么称  $f(x)$  是周期函数,  $T$  称为函数的周期. 不难看出周期函数的周期不是唯一的, 如果  $T$  是函数  $f(x)$  的周期, 那么  $nT$  也是它的周期, 这里  $n$  是任何整数.

在积分过程中, 周期函数有一个基本性质

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

即, 周期函数在一个周期内的积分与起点无关. 这是因为

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx,$$

右端第三个积分通过变换  $x = u + T$  和  $f(x)$  的周期性, 与第一个积分相互抵消..

如果  $g(t)$  是一个以  $T$  为周期的函数, 作下列变换

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad \text{或} \quad t = \frac{T}{2\pi}x$$

那么函数

$$f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

是一个周期为  $2\pi$  的函数, 因此只需讨论周期为  $2\pi$  的函数, 除非特别说明.

从几何上看, 如果将周期函数向左 (或右) 移动一个周期的长度, 图形是不变的. 或者说, 如果将整个直线按周期  $T$  的长度分成一段一段的区间, 那么每一个区间上的图象是另一个区间上图象的复制品.

2° 周期延拓 正是根据周期函数的特性, 对于一个定义在区间  $[-l, l]$  上的函数  $f(x)$  (如果定义区间是任意的  $[a, b]$ , 则可通过坐标平移使区间的中心位于坐标原点), 可以把它向两边以  $2l$  为长度的区间一段一段地进行复制, 产生一个定义在整个数轴上的周期  $2l$  的函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x - 2nl), & (2n - 1)l < x < (2n + 1)l; \\ \frac{f(l) + f(-l)}{2}, & x = (2n + 1)l. \end{cases}$$

这里  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . 在延拓的交界处  $x = (2n + 1)l$ , 为了保证函数的周期性, 函数  $F(x)$  在这些点取  $f(x)$  的右端点和左端点处的函数值的算术平均.

例如, 下列函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l; \\ 0, & -l \leq x \leq 0. \end{cases}$$

是定义在  $[-l, l]$  上的函数, 周期延拓后其图象如下 (注意在交界处的取值)

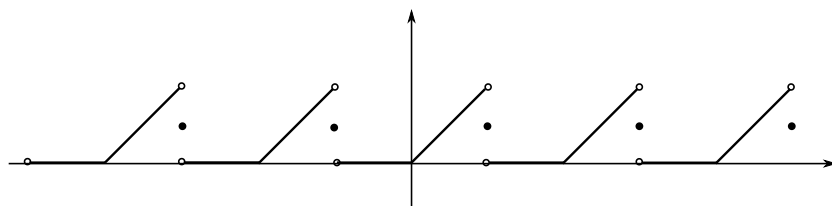


图 12.1

因此, 以下所有的讨论虽然针对周期函数, 但只要将结果限制在一个给定的区间上, 其结果对于定义在这个区间上的函数是成立的, 只是在端点处要具体情况具体对待.

3° 偶延拓与奇延拓 对区间上定义的函数, 有时还可以将函数进行所谓的偶 (奇) 延拓, 然后再进行周期延拓, 使产生的周期函数为偶 (奇) 函数.

设  $f(x)$  是定义在区间  $[0, l]$  上的函数 (如果是定义的区间是任意的  $[a, b]$ , 那么可通过坐标平移使区间的左端点位于坐标原点). 所谓偶延拓, 即令

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l; \\ f(-x), & -l \leq x \leq 0. \end{cases}$$

因此  $f_e(x)$  是  $[-l, l]$  中的偶函数, 对  $f_e(x)$  再进行周期延拓, 其结果就成为整个直线上一个周期的偶函数. 如果令

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l; \\ 0, & x = 0 \\ f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

因此  $f_o(x)$  是  $[-l, l]$  中的奇函数, 对  $f_o(x)$  再进行周期延拓, 其结果就成为整个直线上一个周期的奇函数. 几何上看, 偶函数是关于  $y$  轴对称的, 而奇函数关于原点对称.

4° 三角函数的正交性 下列函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系. 他们的共同周期是  $2\pi$ , 在一个周期  $[-\pi, \pi]$  内, 它们满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0. \quad m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

因此, 如果对于区间  $[-\pi, \pi]$  上的可积函数, 定义一种内积如下

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

那么三角函数系中的函数两两正交且长度为单位, 因此称三角函数系是正交函数系. 今后我们会发现正交函数系并不仅限于三角函数系.

### 12.1.2 周期函数的 Fourier 级数

首先做如下分析: 假设周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  可以展开成下列三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

为了确定系数  $a_n, b_n$ , 两边乘以  $\cos mx$  或  $\sin mx$  然后积分, 利用三角函数的正交性并假设积分与求和是可交换的. 则不难发现, 这些系数可以由下列公式表示

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

这里, 我们把常数项记为  $\frac{a_0}{2}$ , 是为了使  $a_0$  的表达式与其它  $a_n$  一致. 上述过程只是一个分析的过程, 并非严格证明. 但是分析过程告诉我们如果  $f(x)$  可以展开成三角函数的和, 其展开式中的系数有上式的表示是合理的. 称上式给出的  $a_n, b_n$  为函数  $f(x)$  的 **Fourier 系数**.

为了保证 Fourier 系数的计算可以进行, 我们假设函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上是可积的 (当然也是绝对可积的), 如果有瑕点, 那么应假设是绝对可积的 (将在第 13 章详细讨论), 不管哪种情况, 均假设  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上 **可积且绝对可积**.

有了上述分析, 对给定的可积且绝对可积函数  $f(x)$ , 就可以计算出 Fourier 系数  $a_n, b_n$ , 然后构造一个三角级数:

$$f(x) \longrightarrow \{a_n, b_n\} \longrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

称它为  $f(x)$  的 **Fourier 级数**, 并记成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

这里我们尚不知道级数是否收敛, 即使收敛也不知道是否收敛到函数  $f(x)$ . 下列定理即是问题的答案, 我们将证明留在后面进行.

**定理 12.1** (Dirichlet) 设函数  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期.

1° 如果在任何有限区间上  $f(x)$  是分段可微的, 那么它的 Fourier 级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

2° 如果在 1° 的条件下再增加函数处处连续的条件, 那么其 Fourier 级数就在整个数轴上一致收敛于  $f(x)$ .

所谓函数  $f(x)$  在一个区间  $[a, b]$  上 **分段可微**, 是指存在一个分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 使得函数  $f(x)$  在每个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  的内部有连续的导函数、在端点  $f(x)$  有单侧极限, 以及有下列形式推广的单侧导数 (仍沿用单侧导数的记号)

$$f'(x_{i-1} + 0) = \lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} \frac{f(x) - f(x_{i-1} + 0)}{x - x_{i-1}},$$

$$f'(x_i - 0) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i - 0)}{x - x_i},$$

这里  $i = 1, \dots, n$ .

**例 12.1.1** 设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 在一个周期  $[-\pi, \pi]$  内  $f(x)$  的具体形式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

把  $f(x)$  展成 Fourier 级数.

**解** 首先计算  $f$  的 Fourier 系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

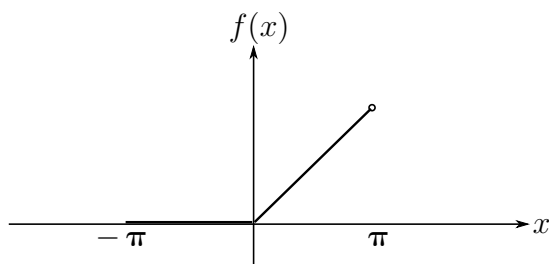


图 12.2

显然  $f(x)$  满足 Dirichlet 定理的条件, 因此其 Fourier 级数收敛, 并有

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] = \begin{cases} f(x), & x \neq (2k-1)\pi; \\ \frac{\pi}{2}, & x = (2k-1)\pi. \end{cases}$$

在展开式中取一些特殊的值, 就会得到一些“意想不到”的结果. 例如令  $x = 0$ , 则

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

即

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

进而又可求得其它几个有趣的和式的和. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

从而得到

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

同样, 由级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  绝对收敛, 故有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

又得到

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

上述三个数项级数的收敛性是早已知道的, 现在我们又知道它们分别收敛于  $\frac{\pi^2}{8}$ ,  $\frac{\pi^2}{6}$  和  $\frac{\pi^2}{12}$ !

到目前为止, 我们所讨论的周期函数的周期是  $2\pi$ . 这显然不是一个本质性的限制条件. 对于一个周期为  $2l$  的函数  $f(x)$ , 可以通过变换  $x = \frac{l}{\pi}t$ , 得到一个周期为  $2\pi$  的函数  $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$  (从而  $g\left(\frac{\pi}{l}x\right) = f(x)$ ). 对  $g(t)$  实行 Fourier 展开, 有

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

回到原来的变量  $x$  就可得到  $f(x)$  在区间  $[-l, l]$  上函数的 Fourier 展开式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right),$$



其中 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx,$$

$n = 1, 2, \dots$ . 与周期为  $2\pi$  的函数相比, 只是系数积分前面的  $\pi$  换成了  $l$ , 三角函数系中的每一个函数多了一个因子  $\frac{\pi}{l}$ . Dirichlet 定理12.1仍然成立.

### 12.1.3 有限区间上函数的 Fourier 级数

设  $f(x)$  是定义在以原点为中心的有限区间  $[-l, l]$  上的分段可微函数, 那么通过周期延拓得到一个整个直线上周期  $2l$  的函数  $F(x)$ . 在任何有限区间中,  $F(x)$  至多包含有限个  $f(x)$  的复制品, 并在交界处可能增加有限个第一类间断点, 因此延拓得到的周期函数  $F(x)$  是分段可微的, 满足 Dirichlet 定理12.1的条件, 而且  $F(x)$  的 Fourier 系数的积分只在一个周期内 (即  $[-l, l]$  内) 进行, 因此也是  $f(x)$  的 Fourier 系数. 把 Dirichlet 定理12.1中对  $F(x)$  的结果限制在区间  $[-l, l]$  上, 就得到了关于  $f(x)$  的结果, 只是在左或右端点,  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}.$$

具体来说, 有下列定理关于定义在有限区间上函数的 Dirichlet 定理.

**定理 12.2** 设函数  $f(x)$  是定义在有限区间  $[-l, l]$  上的分段可微函数, 那么  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛, 并有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) = \begin{cases} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \in (-l, l), \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l. \end{cases};$$

如果再增加函数在  $[-l, l]$  上连续, 并满足  $f(-l) = f(l)$  的条件, 那么其 Fourier 级数就在  $[-l, l]$  上一致收敛于  $f(x)$ .

这里, 条件  $f(-l) = f(l)$  是为了保证周期延拓后的周期函数也是连续的.

对于定义在一般有限区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$ , 设  $2l = b - a$ , 将函数平移到以原点为中心的定義域: 即令  $g(x) = f(x + x_0)$ ,  $x_0 = \frac{b+a}{2}$ , 那么  $g(x)$  的定義域为  $[-l, l]$ . 计算  $g(x)$  的 Fourier 系数得

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(u) \cos \frac{n\pi(u-x_0)}{l} \, du \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(u) \left( \cos \frac{2n\pi u}{b-a} \cos \frac{2n\pi x_0}{b-a} + \sin \frac{2n\pi u}{b-a} \sin \frac{2n\pi x_0}{b-a} \right) \, du \\ &= a_n \cos \frac{2n\pi x_0}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x_0}{b-a} \end{aligned}$$

同理得

$$\tilde{b}_n = -a_n \sin \frac{2n\pi x_0}{b-a} + b_n \cos \frac{2n\pi x_0}{b-a}$$

这里

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx.$$

$n = 1, 2, \dots$ . 因此由  $g(x) = f(x + x_0)$  在  $[-l, l]$  上的 Fourier 级数, 就得到  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right),$$

还可以设  $l = b - a$  并将函数平移到区间  $[0, l]$  上, 然后通过偶 (或奇) 延拓补充函数在  $[-l, 0)$  的定义, 使之延拓成为  $[-l, l]$  上的偶 (或奇) 函数, 或者通过其它任何方式补充在  $[-l, 0)$  的定义, 使之延拓为  $[-l, l]$  上的函数, 只要保证延拓后的函数仍然是分段可微的. 再进行展开, 就可以得到函数的余弦 (或正弦) 展开, 或其他形式的展开. 这样, 对于定义在  $[a, b]$  上的函数, 在区间  $[a, b]$  上可以有多种三角级数的表示方法. 我们将通过例子具体说明.

**例 12.1.2** 求  $f(x) = \cos ax$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数. 这里  $a$  不是整数.

**解** 把  $f$  延拓为整个数轴上以  $2\pi$  为周期的周期函数, 因为  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 所以延拓后的函数是连续的、分段可微的. 因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a-n)x + \cos(a+n)x) \, dx \\ &= \frac{(-1)^n 2a \sin a\pi}{n(a^2 - n^2)}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

在  $[-\pi, \pi]$  上, 有

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left( \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \cos nx \right).$$

特别在  $x = 0$  处有

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

例 12.1.3 半波整流函数的周期是  $\frac{2\pi}{\omega}$ , 在区间  $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$  上, 它的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0; \\ E \sin \omega t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

试求半波整流函数的 Fourier 级数.

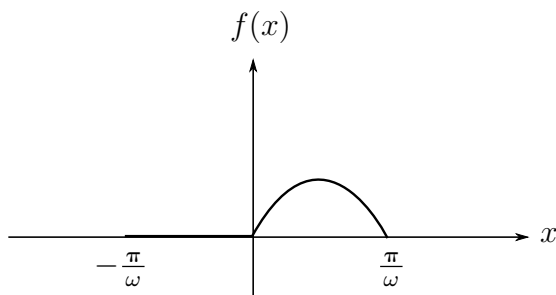


图 12.3

解

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \, dt = \frac{2E}{\pi}, \\ a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n\omega t \, dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\omega t \, dt = 0, \\ a_n &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt \\ &= \frac{E}{2\pi} \left[ -\frac{\cos(n+1)\omega t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\omega t}{n-1} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{[(-1)^{n-1} - 1]E}{(n^2 - 1)\pi} \quad (n = 2, 3, \dots), \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

于是有  $a_{2k-1} = 0$ ,  $a_{2k} = \frac{2E}{(1-4k^2)\pi}$ . 再计算  $b_n$ , 因为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \sin n\omega t \, dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] \, dt, \end{aligned}$$

所以,

$$b_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{E}{2},$$

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] dt$$

$$= \frac{E}{2\pi} \left[ \frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = 0, \quad n \neq 1.$$

由于函数在  $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$  上连续, 分段可微, 并且  $f(-\frac{\pi}{\omega}) = f(\frac{\pi}{\omega})$ . 所以它的 Fourier 级数在区间  $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$  上一致收敛于  $f(x)$

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2k\omega t, \quad |x| \leq \frac{\pi}{\omega}.$$

在无线电电路的理论中, 一般来说把周期波展开为 Fourier 级数就相当于把它分解成一系列不同频率的简谐波的叠加. 级数中的常数项  $\frac{a_0}{2}$  称为周期波的直流成分, 一次项  $a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l}$  称为基波, 频率是  $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$ . 高次项  $a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  称为  $n$  次谐波, 频率是  $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ , 是基波频率的  $n$  倍. 在例 12.1.3 中, 直流成分为  $\frac{E}{\pi}$ , 基波为  $\frac{E}{2} \sin \omega t$ , 但  $2n$  次谐波的振幅是

$$A_n = \frac{2E}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

显然, 谐波次数越高, 振幅越小. 因此在应用中, 只取展开式中前几项谐波就足够了.

**例 12.1.4** 求下列函数的 Fourier 级数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x| < h; \\ 0, & h \leq |x| \leq l. \end{cases}$$

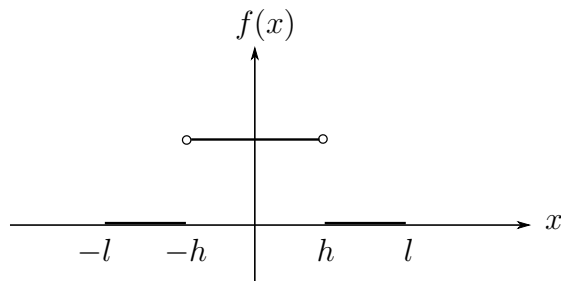


图 12.4

解 函数  $f(x)$  在定义域内是偶函数, 因此有  $b_n = 0$ ,

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi h} \sin \frac{n\pi h}{l}.$$

又因在区间的端点  $x = \pm l$  处有  $f(l) = f(-l) = 0$ , 所以

$$f(x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi h}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (|x| \leq l, |x| \neq h).$$

当  $x = \pm h$  时, 这个级数收敛于  $\frac{1}{4h}$ .

例 12.1.5 将下列函数展开为正弦级数和余弦级数.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}; \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

解 先求正弦级数. 延拓  $f(x)$  到  $[-l, 0)$  上, 使其成为奇函数.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \left( \sin \frac{n\pi x}{l} + \sin \frac{n\pi(l-x)}{l} \right) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{(-1)^{k-1} 4l}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

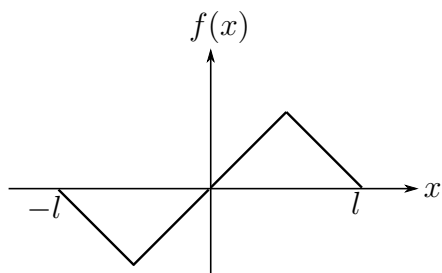


图 12.5

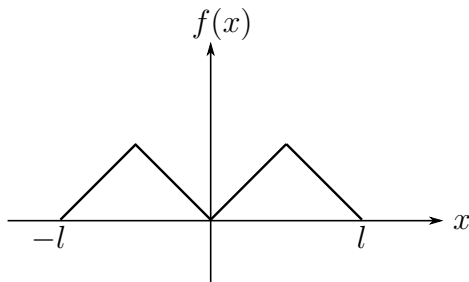


图 12.6

其次求余弦级数. 延拓函数  $f(x)$  到  $[-l, 0)$  上, 使其成为偶函数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx = \frac{l}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \left( \cos \frac{n\pi x}{l} + \cos \frac{n\pi(l-x)}{l} \right) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k - 1; \\ \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{2k\pi x}{l} dx, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

除  $a_{4k+2} = -\frac{2l}{(2k+1)^2\pi^2}$  外, 其余  $a_n$  都为零. 于是

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(4k+2)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

**例 12.1.6** 把  $[0, 1]$  上的函数  $f(x) = x^2$  展开为 Fourier 级数.

**解** 以  $2l = 1$  为周期将函数  $f(x)$  开拓到整个数轴上, 于是有

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ a_n &= 2 \int_0^1 x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= 2 \int_0^1 x^2 \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因为  $f(x) = x^2$  在  $[0, 1]$  上连续, 但  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 所以, 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x - \frac{\pi}{n} \sin 2n\pi x \right),$$

而当  $x = 0$  或  $1$  时, 上述三角级数收敛于  $\frac{1}{2}$ .

#### 12.1.4 Fourier 级数的复数形式

众所周知, Euler公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

给出了三角函数与指数函数之间的关系. 据此, 我们将 Fourier 级数表示成复数形式. 不妨设定义在区间  $[-l, l]$  上的函数  $f(x)$  在这个区间上可以展成 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

其中  $\omega = \frac{\pi}{l}$  及

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

应用 Euler 公式

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

就得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + ib_n \frac{e^{-in\omega x} - e^{in\omega x}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}, \end{aligned}$$

或者写成

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega x},$$

其中

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \, dx, \\ F_{\pm n} &= \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) (\cos n\omega x \mp i \sin n\omega x) \, dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\mp in\omega x} \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

这就是  $f(x)$  的 Fourier 级数的复数形式. 它的系数  $F_n$  与  $F_{-n}$  是互为共轭的复数, 即  $F_{-n} = \overline{F_n}$ .

### 习题 12.1

1. 作出下列周期  $2\pi$  的函数的图形, 并把它们展开成 Fourier 级数 (说明收敛情况).

$$(1) \text{ 在 } [-\pi, \pi) \text{ 中, } f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi; \end{cases}$$

$$(2) \text{ 在 } [-\pi, \pi) \text{ 中, } f(x) = \cos \frac{x}{2};$$

$$(3) \text{ 在 } [-\pi, \pi) \text{ 中, } f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

2. 将下列函数展开成以指定区间长度为周期的 Fourier 级数, 并说明收敛情况.

(1)  $f(x) = 1 - \sin \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi);$

(2)  $f(x) = \frac{x}{3} \quad (0 \leq x \leq T);$

(3)  $f(x) = e^{ax} \quad (-l \leq x \leq l);$

(4)  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ -1, & 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$

3. 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数:

(1)  $f(x) = 2x^2 \quad (0 \leq x \leq \pi);$

(2)  $f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq l; \end{cases}$

(3)  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & 2h < x \leq \pi. \end{cases}$

4. 已知函数的 Fourier 级数展开式, 求常数  $a$  的值.

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = a(2a - |x|),$  其中  $-\pi \leq x \leq \pi;$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = ax,$  其中  $-\pi < x < \pi.$

5. (1) 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中  $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$  求  $S(\frac{9}{4}), S(-\frac{5}{2});$

(2) 设  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1 + x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$  则其以  $2\pi$  为周期的 Fourier 级数的和函数为  $S(x), -\infty < x < +\infty.$  求  $S(3\pi), S(-4\pi).$

6. 设  $f(x)$  是一个以  $2\pi$  为周期的函数,

(1) 如果  $f(x \pm \pi) = -f(x),$  试证明  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内的 Fourier 展开只含有奇次谐波, 即

$$a_{2n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_{2n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$



(2) 如果  $f(x \pm \pi) = f(x)$ , 试证明  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内的 Fourier 展开只含有偶次谐波, 即

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

7. 已知周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  的 Fourier 系数是  $a_n$  和  $b_n$ , 试证明“平移”了的函数  $f(x+h)$  ( $h = \text{常数}$ ) 的 Fourier 系数为

$$\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh \quad (n = 1, 2, \dots)$$

8. 将  $y = 1 - x^2$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开成 Fourier 级数, 并利用其结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

9. 将  $f(x) = 1 + x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展成周期为  $2\pi$  的余弦级数, 并求

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}.$$

10. 设  $f(x)$  在  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  这个周期上可表为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq x < -\frac{\tau}{2}, \\ H, & -\frac{\tau}{2} \leq x < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

试把它展开成 Fourier 级数的复数形式.

## §12.2 平方平均收敛

Dirichlet 定理 12.1 说明对于以  $2\pi$  为周期的连续且分段可微  $f(x)$ , 其 Fourier 级数一致收敛于  $f(x)$ . 这样的收敛被称为**逐点收敛**. 本节将从一类函数空间的角度, 在定义了一种度量后, 给出 Fourier 级数另一种收敛概念, 即**平方平均收敛**.

### 12.2.1 基本概念

设  $L^2[a, b]$  是  $[a, b]$  上所有可积且平方可积函数的全体. 需要指出的是, 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是 Riemann 意义下可积, 那么其平方也一定是可积的. 但是如果函数在区间上有瑕点, 函数可积未必平方可积, 例如  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 在  $[0, 1]$  区间上可积, 但平方不可积. 因此, 条件“可积且平方可积”包含了在  $[a, b]$  上有瑕点的可积且平方可积的函数.

不难验证, 集合  $L^2[a, b]$  在函数的加法和数乘运算下是一个线性空间. 对空间  $L^2[a, b]$  中任意两个函数 (在空间中通常称之为“向量”或“点”), 积分

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

给出了  $L^2[a, b]$  一个内积, 因此也就给出了函数的模长:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx},$$

以及两个函数之间的距离:

$$\|f - g\| = \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

在上述内积的定义下, 我们已经知道, 三角函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, m = 1, 2, \dots \right\}$$

是  $L^2[-\pi, \pi]$  上的正交函数系, 这里增加了一个归一化因子, 目的是使得在上述内积意义下, 三角函数系的每一个成员的模长等于单位, 这样的函数系称之为**标准正交系**.

**定义 12.3** 对  $L^2[a, b]$  中一个给定的函数  $f$ , 如果存在  $L^2[a, b]$  中的一个函数列  $\{f_n, n = 1, 2, \dots\}$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0,$$

那么称  $f_n(x)$  平方平均收敛于  $f(x)$ .

本节将研究函数的 Fourier 级数的部分和  $S_n(x)$  在上述定义下收敛于  $f(x)$  的问题.

## 12.2.2 Bessel 不等式

对于任何一组实数  $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k = 1, \dots, n$ , 我们称

$$g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

为  $n$  次三角多项式. 因此, 对于  $f(x) \in L^2[a, b]$ , 它与  $g_n(x)$  的距离的平方为

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \|f - g_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

容易算得

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x) dx \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \\ &= \pi \left[ \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right], \end{aligned}$$

其中  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, n$  是  $f(x)$  的 Fourier 系数. 由三角函数系的正交性可得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx) \right] dx \\ &= \pi \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right], \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[ -\alpha_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \\ &\quad + \pi \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\}. \end{aligned}$$

因此, 只有当  $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k, k = 1, 2, \dots, n$  时,  $\Delta_n$  取值最小, 从而证明了

**定理 12.4** 设  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 则在所有的  $n$  次三角多项式中, 唯以  $f(x)$  的 Fourier 系数构成的三角多项式

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

与  $f(x)$  的距离最小, 即与  $f(x)$  平方平均偏差  $\Delta_n$  为最小, 且最小值为

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \|f - S_n\|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]. \end{aligned}$$

注意到  $\Delta_n \geq 0$ , 所以

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

对任何  $n$  都成立. 因此就有了下面两个推论.

**推论 12.5** 设  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 则它的 Fourier 系数所构成的下列正项级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

收敛, 且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

称为 Bessel 不等式.

**推论 12.6** 设  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 则  $f(x)$  的 Fourier 系数满足

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \end{aligned}$$

### 12.2.3 平方平均收敛

Bessel 不等式虽然给出了  $f(x)$  的 Fourier 级数部分和  $S_n(x)$  是所有  $n$  三角多项式中到  $f$  的距离最小的一个, 但仍没有给出平方平均收敛于  $f$  的结论, 为此有

**定理 12.7** 设函数  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 则  $f(x)$  的 Fourier 级数部分和  $S_n(x)$  构成的三角多项式列平方平均收敛于  $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0$$

上述结论等价于 Bessel 不等式中的等号成立,即

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

称上式为 Parseval 等式.

该定理的证明将在后面讨论, 这里首先给出下列三个重要的推论.

**推论 12.8** 对于  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数  $f(x)$ , 如果与三角函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, m = 1, 2, \dots \right\}$$

中的每一个都正交, 那么  $f(x) \equiv 0$ , 如果两个连续函数  $f$  和  $g$  的 Fourier 系数都相等, 那么  $f(x) \equiv g(x)$ .

请读者自证.

**推论 12.9** 设  $f(x), g(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ ,  $a_n, b_n$  和  $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$  分别是  $f$  和  $g$  的 Fourier 系数, 则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{a_0\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\tilde{a}_n + b_n\tilde{b}_n)$$

只要注意到  $f \pm g$  的 Fourier 系数是  $a_n \pm \tilde{a}_n, b_n \pm \tilde{b}_n$  并分别写出  $f + g$  和  $f - g$  的 Parseval 等式, 经过两者相减就可得到推论.

**推论 12.10** 设  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ , 其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则对  $[-\pi, \pi]$  中任意的闭区间  $[a, b]$ , 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

根据前一个推论, 取

$$g(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & -\pi \leq x < a, \text{ 或 } b < x \leq \pi, \end{cases}$$

则  $g(x)$  的 Fourier 系数为

$$\tilde{a}_n = \int_a^b \cos nx dx, \quad \tilde{b}_n = \int_a^b \sin nx dx, \quad n = 0, \dots,$$

因此

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

这个推论一个重要意义在于即便  $f$  的 Fourier 级数不收敛到  $f(x)$  本身, 但在任意子区间上的积分等于 Fourier 级数的逐项积分.

Parseval 等式另一个有趣的应用是可以给出一些数项级数的和

**例 12.2.1** 对于偶函数  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , 不难计算其 Fourier 展开为

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

于是由 Parseval 等式就得到

$$\frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

由此给出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

从而又有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**注记** 如果把  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积函数空间  $L^2[-\pi, \pi]$  与  $n$  维(有限)的欧式空间  $E_n$  做一个类比, 不难发现标准正交的三角函数系扮演的正是  $E_n$  中标准正交基的角色. Fourier 系数正相当于一个向量在一组基之下的坐标. Parseval 等式正是这个向量长度表示. 只是这里讨论的空间维数不再是有限维的了.

#### 12.2.4 广义 Fourier 级数

在  $L^2[-\pi, \pi]$  的平方平均收敛中, 标准正交的三角函数系扮演了重要角色, 但, 三角函数系未必是唯一的正交函数系. 例如, 我们熟知的幂函数

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

虽然它们在  $L^2[a, b]$  定义的内积意义下两两不是正交的. 但可以验证下列定义的 Legendre 多项式):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

是  $L^2[-1, 1]$  上两两正交的函数系 (见习题).

因此, 有必要讨论建立在一般正交函数系上的广义 Fourier 级数和平方平均收敛等问题.

设  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$  是  $L^2[a, b]$  中一组标准正交系,

$$\langle \varphi_m(x), \varphi_n(x) \rangle = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

那么对任意的  $f(x) \in L^2[a, b]$ , 可构造与  $f(x)$  有关的 Fourier 系数, 称为广义 Fourier 系数

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$$

由这些系数, 可构造一个与  $f(x)$  有关的广义 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

类似三角函数系的 Bessel 不等式, 设  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$  是任意的 “ $n$  次  $\varphi$ -多项式”, 那么它与  $f(x)$  的平方平均满足:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \|f - T_n\|^2 = \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_a^b \alpha_k \alpha_l \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \\ &= \int_a^b f^2(x) dx + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &\geq \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= \|f - S_n\|^2 \end{aligned}$$

这里

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

是  $f(x)$  的广义 Fourier 级数前  $n$  项的和. 概括起来有以下结论

**定理 12.11** 设  $f \in L^2[a, b]$ ,  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  中一组标准正交系, 则对任意的“ $n$  次  $\varphi$ -多项式”  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$ , 有

$$\|f - S_n\| \leq \|f - T_n\|,$$

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n a_m^2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \leq \|f\|^2, \text{ 因此级数收敛.}$$

然而, 如同  $L^2[-\pi, \pi]$  中三角函数系一样, Bessel 不等式还不能保证平方平均收敛, 为此对一般的标准正交函数系, 我们给出如下定义

**定义 12.12** 设  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  中一组标准正交系, 如果 Parseval 等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 = \|f\|^2,$$

成立, 那么称  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  中完备的标准正交系.

因此, 类似定理 12.7, 我们有

**定理 12.13** 设  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  中完备的标准正交系, 那么  $f$  的广义 Fourier 级数部分和  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$  平方平均收敛于  $f$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$$

定理 12.7 给出了  $L^2[-\pi, \pi]$  中三角函数系满足 Parseval 等式, 因此三角函数系是完备的, 对于一般的正交函数系完备性证明, 要具体问题具体对待. 尽管如此, 对于完备的正交函数系, 有

**定理 12.14** 设  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  是  $L^2[a, b]$  中一个完备的标准正交系, 则

1° 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 那么  $f(x) = 0$  的充分必要条件是  $f(x)$  的广义 Fourier 系数  $a_n = 0, n = 1, 2, \dots$ ;

2° 如果从  $\{\varphi_n(x)\}$  中删去任何一个函数, 那么剩余的函数所构成的函数系就不再是完备的;

3° 设  $\int_a^b \varphi_0^2(x) dx = 1$ . 如果把  $\varphi_0(x)$  添加到  $\{\varphi_n(x)\}$  中, 那么新构成的函数系不再是标准正交系.

定理中的 2° 和 3° 说明, 完备的正交函数系中函数一个不能少, 也一个不能多.

**证明** 显然, 如果  $f(x) = 0$ , 则  $a_n = 0$ . 另一方面, 由

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx$$



及  $f(x)$  的连续性可知  $f(x) \equiv 0$ .

关于 2° 的证明采取反证: 不妨设删去  $\varphi_1(x)$ , 假如新的函数系

$$\varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

是完备的, 那么由于  $\varphi_1(x)$  的模长为 1, 且与其他  $\varphi_n(x)$ ,  $n \geq 2$  正交, 因此  $\varphi_1(x)$  在新的函数系下的广义 Fourier 级数的系数  $a_n = 0$ , ( $n \geq 2$ ). 根据 1°, 应该有

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b \varphi_1^2(x) dx = 1,$$

这是不可能的, 所以新的函数系不是完备的.

关于 3° 的证明如下, 设  $\varphi_0(x)$  的模长为 1, 如果添加  $\varphi_0(x)$  后, 函数系  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$  是标准正交系, 那么  $\varphi_0(x)$  与  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$  中任何一个函数正交. 所以  $\varphi_0(x)$  在完备的标准正交系  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$  下的广义 Fourier 级数的系数  $a_n = 0$ ,  $n \geq 1$ , 并有

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_a^b \varphi_0^2(x) dx = 1,$$

这是矛盾的, 所以添加模长为 1 的函数  $\varphi_0(x)$  后构成的函数系不再是标准正交系.  $\square$

## 习题 12.2

1. 将  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & a \leq |x| < \pi \end{cases}$  展开成 Fourier 级数, 然后利用 Parseval 等式求下列

级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}.$$

2. 设  $f(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积的函数,  $a_n, b_n$  是  $f(x)$  的 Fourier 系数. 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  收敛.

3. 求周期为  $2\pi$  函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$  的 Fourier 级数, 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

的和以及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ , ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 的和.

4. 证明下列函数系是正交系, 并求其对应的标准正交系.

(1)  $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$ , 在  $[0, \pi]$  上;

(2)  $\sin \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{2\pi}{l}x, \cdots, \sin \frac{n\pi}{l}x, \cdots$ , 在  $[0, l]$  上;

(3)  $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots$ , 在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上;

(4)  $\cos \frac{\pi}{2l}x, \cos \frac{3\pi}{2l}x, \dots, \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}x, \dots$ , 在  $[0, l]$  上.

5. 将  $f(x) = a(1 - \frac{x}{l})$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 按第 4 题中 (2) 的函数系展开成广义 Fourier 级数.

6. 将  $f(x) = x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 按第 4 题中 (4) 的函数系展开成广义 Fourier 级数.

7. 证明 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(它是一个  $n$  次多项式) 在区间  $[-1, 1]$  上构成一个正交系.

提示: 不断使用分部积分并注意到当  $1 \leq k \leq n$  时,  $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=\pm 1} = 0$ .

8. Legendre 多项式有一些很好的性质和应用, 请验证 Legendre 多项式满足

(1)  $y = P_n(x)$  是下列方程的解

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP(x)}{dx} + n(n+1)P(x) = 0.$$

(2) 相邻的三个 Legendre 多项式满足

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

$$\frac{x^2 - 1}{n} \frac{dP_n}{dx} = xP_n - P_{n-1}$$

$$(2n+1)P_n = \frac{d}{dx}(P_{n+1} - P_{n-1}).$$

### §12.3 收敛性定理的证明\*

在 §12.1 和 §12.2 中, 我们分别给出了函数的 Fourier 级数逐点收敛 (即 Dirichlet 定理) 和平方平均收敛 (即 Parseval 等式), 本节将给出两种收敛性的证明. 在证明平方平均收敛时, 我们只讨论函数是 Riemann 可积的情形.

对 Fourier 级数收敛性证明深入细致的讨论, 将在第三册进行.

#### 12.3.1 Dirichlet 定理的证明

设

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

考察函数  $f(x)$  的 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

目标即要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ . 将

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

代入部分和  $S_n(x)$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) f(t) \, dt. \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) (x-t)}{2 \sin \frac{1}{2} (x-t)}$$

则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) (x-t)}{\sin \frac{1}{2} (x-t)} f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-u}^{\pi-u} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\sin \frac{1}{2} u} f(x+u) \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\sin \frac{1}{2} u} f(x+u) \, du, \end{aligned}$$

最后一步等式用到了周期函数在周期内积分与起点无关这一事实. 于是

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} [f(x+u) + f(x-u)] du.$$

特别对函数  $f(x) = 1$ , 它的 Fourier 级数前  $n$  项和  $S_n(x) = 1$ , 所以有恒等式

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} du,$$

上式被积分的函数称为 Dirichlet 核, 利用这个恒等式, 对一般函数  $f(x)$  的 Fourier 级数前  $n$  项和, 有

$$\begin{aligned} S_n(x) - S(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} [f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} \phi(u, x) du. \end{aligned}$$

这里,  $\phi(u, x) = f(x+u) + f(x-u) - 2S(x)$ . 现在, 欲证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - S(x)) = 0$ , 只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \frac{\phi(u, x)}{\sin \frac{1}{2}u} du = 0.$$

为此, 我们首先证明, 对于  $[0, \pi]$  上任意可积平方可积函数  $g(x)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u) du = 0.$$

事实上, 令

$$\psi(u) = \begin{cases} g(u), & 0 \leq u \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq u < 0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u) du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi \psi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u) du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi \left(\psi(u) \sin \frac{u}{2}\right) \cos nu du \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi \left(\psi(u) \cos \frac{u}{2}\right) \sin nu du \end{aligned}$$

注意到上式最后两个积分分别是函数  $\psi(u) \sin \frac{u}{2}$  和  $\psi(u) \cos \frac{u}{2}$  的 Fourier 系数, 因此, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 函数  $\psi(u) \sin \frac{u}{2}$  和  $\psi(u) \cos \frac{u}{2}$  的 Fourier 系数趋于零, 也就是上述极限为零.

因此  $f(x)$  的 Fourier 级数收敛性问题就转化为函数

$$g(u) = \frac{\phi(u, x)}{\sin \frac{1}{2}u}$$

在区间  $[0, \pi]$  上关于变量  $u$  是否是可积且平方可积的问题.

事实上

$$\frac{\phi(u, x)}{2 \sin \frac{1}{2}u} = \left[ \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} \right] \frac{u}{2 \sin \frac{1}{2}u},$$

所以, 当  $u > 0$  时, 上述函数是分段可微的, 而当  $u \rightarrow 0$  时, 有

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\phi(u, x)}{2 \sin \frac{1}{2}u} = f'(x+0) - f'(x-0),$$

因此,  $u = 0$  不是瑕点,  $g(u)$  关于  $u$  是可积且平方可积的.

最后, 当  $f(x)$  是连续的、周期的、分段可微函数时, 导函数  $f'(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  的有限分割的每个小区间内部连续, 并在小区间的端点处有单侧导数, 所以是可积且平方可积的. 再根据  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 所以

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \left. \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{b'_n}{n}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = -\left. \frac{f(x) \cos nx}{n\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \frac{a'_n}{n} \end{aligned}$$

其中,  $a'_n, b'_n$  表示  $f'(x)$  的 Fourier 系数, 由对应的 Bessel 不等式可知, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2)$  收敛. 由不等式

$$\begin{aligned} 2|a_n| &= 2 \left| \frac{b'_n}{n} \right| \leq b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \\ 2|b_n| &= 2 \left| \frac{a'_n}{n} \right| \leq a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

推出, 对于任意的  $x$ , 有

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}.$$

根据函数项级数一致收敛的 Weierstrass 判别法,  $f(x)$  的 Fourier 级数在整个数轴上一致收敛 (而且绝对收敛).  $\square$

### 12.3.2 平方平均收敛性定理的证明

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  是 Riemann 可积的, 因此是有界的:  $m \leq f(x) \leq M$ . 同时改变  $f$  在一点的值不影响可积性以及通过积分计算  $f$  的 Fourier 系数, 因此假设  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

因为 Riemann 可积,所以对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[-\pi, \pi]$  一个分割,

$$T: -\pi = x_0 < \cdots < x_m = \pi$$

使得

$$\sum_{i=1}^m \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega}$$

其中  $\omega_i = M_i - m_i$  是  $f$  在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅,  $\Omega = M - m$  是  $f$  在整个区间  $[-\pi, \pi]$  上的振幅. 用折线连接  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  和  $(x_i, f(x_i))$  并记折线所构成的函数为  $g(x)$ , 该函数是连续的, 满足  $g(-\pi) = g(\pi)$ , 而且在  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  上,  $f$  与  $g$  满足

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad m_i \leq g(x) \leq M_i.$$

所以

$$|f(x) - g(x)| \leq \omega_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

于是  $f$  与  $g$  的平方平均误差满足

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - g(x))^2 dx \\ &\leq \sum_{i=1}^m \omega_i^2 \Delta x_i \leq \Omega \sum_{i=1}^m \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

注意到函数  $g(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上分段可微的连续函数, 并满足  $g(-\pi) = g(\pi)$ , 因此周期延拓后仍然是分段可微的连续函数. 根据有限区间上 Dirichlet 定理 12.2,  $g(x)$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛于  $g(x)$ , 也就是存在一个正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $g(x)$  的 Fourier 级数的前  $n$  项部分和  $T_n(x)$  满足

$$|g(x) - T_n(x)| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}},$$

对任意的  $x \in [-\pi, \pi]$  成立, 所以

$$\|g - T_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

对

$$f(x) - T_n(x) = (f(x) - g(x)) + (g(x) - T_n(x))$$

利用不等式  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , 得

$$\|f - T_n\|^2 \leq 2\|f - g\|^2 + 2\|g - T_n\|^2 < \varepsilon$$

根据 Bessel 不等式, 对所有的  $n$  次三角多项式, 唯有  $f$  的 Fourier 级数的部分和  $S_n(x)$  与  $f(x)$  距离最小, 所以当  $n > N$  时有

$$\|f - S_n\|^2 \leq \|f - T_n\|^2 < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0.$$

这样我们对  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积的函数  $f(x)$ , 证明了它的 Fourier 级数平方平均收敛于  $f(x)$ , 因此 Parseval 等式成立.  $\square$

### 习题 12.3

1. 把函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  ( $-\pi < x < \pi$ ) 展开为 Fourier 级数; 并证明: 当  $0 < x < \pi$  时, 有  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ , 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ .

2. 在区间  $(-\pi, \pi)$  上把下列函数展开为 Fourier 级数:

(1)  $|x|$ ;      (2)  $\sin ax$  ( $a \notin \mathbb{Z}$ );      (3)  $x \sin x$ .

3. 把  $f(x) = x - [x]$  ( $[x]$  是不超过  $x$  的整数) 在  $[0, 1]$  上展开为 Fourier 级数.

4. 利用  $\cos ax$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 展开式, 证明:

(1)  $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}$  ( $x \neq k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

(2)  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}$  ( $x \neq k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

5. 证明: 对任意实数  $x$ , 有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx,$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx,$$

6. 对  $x \in (0, 2\pi)$  以及  $a \neq 0$ , 求证:

$$e^{ax} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx - k \sin kx}{k^2 + a^2} \right).$$

7. 对展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

逐项积分, 求函数  $x^2, x^3$  和  $x^4$  在区间  $(-\pi, \pi)$  上的 Fourier 展开式, 并证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

8. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 1 < x \leq \pi. \end{cases}$  证明:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

9. 利用上题的结果, 证明:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n}{n} \right)^2 = \frac{\pi-1}{2};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}.$$



## §12.4 Fourier 变换

在§12.1中, 我们讨论了定义在有限区间上函数的 Fourier 展开, 本节将考虑如何将类似的结果推广到定义在无穷区间上.

### 12.4.1 Fourier 积分

考虑定义在  $[-l, l]$  上  $f(x)$  的 Fourier 级数的复数形式

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega x},$$

其中  $\omega = \frac{\pi}{l}$ ,  $F_{-n} = \overline{F_n}$ ,

$$F_{\pm n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\mp in\omega x} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

将系数代入 Fourier 级数, 并记

$$\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{l}, \quad \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-in\omega(\xi-x)} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\lambda_n(\xi-x)} d\xi \right] \Delta\lambda_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta\lambda_n e^{i\lambda_n x} H_n, \end{aligned}$$

其中

$$H_n = \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi.$$

这是一个 Riemann 和的形式, 虽然  $\{\lambda_n\}$  不是有限区间上的分割, 但在  $l \rightarrow +\infty$  时, 上述和式一个合理的极限应该是下列积分

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\lambda \xi}$$

上述过程仅仅是一个粗略的分析, 不能代替证明. 但是我们可以严格证明下列类似的 Dirichlet 定理.

**定理 12.15** 如果定义在整个数轴上的函数  $f(x)$  在任何有限区间上是分段可微的, 并且在区间  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积, 那么对任何  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\lambda \xi} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

当  $f(x)$  连续时, 则有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-i\lambda\xi} = f(x).$$

这里, 类似瑕积分, 我们假设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积是为了保证  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$  的收敛性, 有关反常积分绝对可积等概念将在第13章中详细讨论.

### 12.4.2 Fourier 变换

以下我们假设  $f(x)$  满足定理12.15 中条件并且连续, 因此称

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi,$$

为  $f(x)$  的 Fourier 变换 或  $f(x)$  的象函数, 而

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

称为  $F(\lambda)$  的逆变换或象原函数. 由象函数  $F(\lambda)$  回到函数  $f(x)$  的公式称为 Fourier 变换的反演公式. 利用  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  以及被积函数关于积分变量  $\lambda$  的奇偶性有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda(\xi-x)} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x-\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \cos \lambda x d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \sin \lambda x d\xi \right), \end{aligned}$$

所以, Fourier 积分公式又可写成

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

其中

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi, \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi. \end{aligned}$$

与有限区间上 Fourier 公式相比, 关于  $f(x)$  的表达式以及 Fourier 系数的积分表达只不过是把离散变量  $n$  换成了连续变量  $\lambda$ , 求和换成了积分.

如同 Fourier 级数一样, 奇函数与偶函数的 Fourier 变换具有比较简单的形式.

1° 如果  $f(x)$  是偶函数, 那么  $f(x) \sin \lambda x$  是奇函数,

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow F_e(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \end{aligned}$$

称为  $f(x)$  的余弦变换. 由于  $F_e(\lambda)$  也是  $\lambda$  的偶函数, 因此, 它的逆变换是

$$\begin{aligned} F_e(x) \rightarrow f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_o(\lambda)(\cos \lambda x + i \sin \lambda x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_e(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

2° 如果  $f(x)$  是奇函数, 那么其 Fourier 变换为

$$f(x) \rightarrow F_o(\lambda) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

令  $G_o(\lambda) = iF_o(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt$ , 称为  $f(x)$  的正弦变换, 相应的逆变换为

$$G_o(\lambda) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G_o(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

对于定义在  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$ , 可分别作偶延拓或奇延拓, 并得到函数的余弦变换或正弦变换 (注意在奇延拓中, 可能在  $x=0$  产生间断). 因此, 可以按照问题的需要作正弦变换或余弦变换.

**例 12.4.1** 求指数衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的 Fourier 变换.

**解** 由定义

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-i\lambda-\beta)t} dt \\ &= \frac{1}{\beta + i\lambda} = \frac{\beta - i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2}, \end{aligned}$$

因  $f(x)$  在  $x=0$  不连续, 故依收敛定理, 我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ 1/2, & x = 0. \end{cases}$$

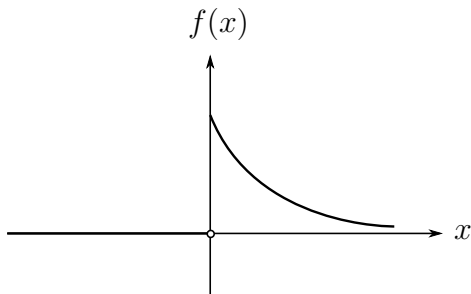


图 12.7

## 例 12.4.2 求分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a; \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a; \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

的 Fourier 变换.

**解** 因  $f(x)$  是偶函数, 所以它的 Fourier 变换是余弦变换, 且为

$$F(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt = 2 \int_0^a \cos \lambda t dt = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

又因  $f(x)$  在不连续点  $x = \pm a$  已定义为其左右极限的平均值, 故反演公式在整个数轴上成立, 于是

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty).$$

**例 12.4.3** 求函数  $f(x) = e^{-ax}$  ( $a > 0, x \geq 0$ ) 的 Fourier 余弦变换和正弦变换.

**解** 对  $f(x)$  分别作偶延拓和奇延拓, 则余弦变换和正弦变换分别为

$$F_e(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos \lambda t dt = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2},$$

$$G_o(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin \lambda t dt = \frac{2x}{a^2 + \lambda^2}.$$

因为偶延拓后函数连续且满足定理 12.15 的条件, 所以对  $x \geq 0$ , 有

$$e^{-ax} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_e(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda,$$

而奇延拓后函数也满足定理 12.15 的条件, 但是在  $x = 0$  不连续, 所以对  $x > 0$ , 有

$$e^{-ax} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G_o(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2x}{a^2 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda.$$

Fourier 变换有一些简单的性质, 这些性质对求函数的 Fourier 变换有直接的意义. 为方便起见, 用记号  $F[f]$  表示函数  $f(x)$  的 Fourier 变换, 即

$$F[f](\lambda) = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

1° (线性关系) 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  存在 Fourier 变换, 则对任意常数  $\alpha, \beta$ , 有

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g].$$

2° (频移特性) 若函数  $f(x)$  存在 Fourier 变换, 则对任意的实数  $\lambda_0$ , 有

$$F[f(x) e^{-i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0).$$

上述两条性质是显然的.

3° (微分关系) 若  $f(\pm\infty) = 0$ , 而微商  $f'(x)$  的 Fourier 变换存在, 则有

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)].$$

事实上, 由分部积分法即得

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\lambda x} dx = f(x)e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= i\lambda F[f(x)]. \end{aligned}$$

一般地, 若  $f^{(i)}(\pm\infty) = 0$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , 则

$$F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)].$$

4° (微分特性) 若函数  $f(x)$  与  $xf(x)$  的 Fourier 变换存在, 则  $F(\lambda)$  可微, 且

$$F'(\lambda) = F[-ixf(x)].$$

为了说明 Fourier 变换的另一重要性质, 我们引进卷积的概念.

**定义 12.16** 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上可积并绝对可积, 则下列积分定义了一个新的函数

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

称为  $f(x)$  与  $g(x)$  的卷积.

如同普通乘法一样, 卷积满足交换律, 结合律和分配律. 即有

$$f * g = g * f;$$

$$(f * g) * h = f * (g * h);$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h.$$

以结合律为例. 由卷积的定义有

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x-t)h(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t-\tau)g(\tau) d\tau \right\} h(t) dt. \end{aligned}$$

作代换  $\xi = t + \tau$ , 并交换积分顺序即得

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi-t)h(t) dt \right\} d\xi \\ &= f * (g * h). \end{aligned}$$

根据卷积的定义, 我们有下面的性质.

5° 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积, 则卷积  $f * g$  也在区间  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积, 且有

$$F[f * g] = F[f]F[g].$$

**证明** 这里只证后一论断, 由定义可知

$$F[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \right] e^{-i\lambda x} dx,$$

注意到  $f(x)$  与  $g(x)$  的绝对可积性, 可知积分次序是可交换的, 于是得到

$$F[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-i\lambda x} dx \right] dt.$$

作变量代换  $x = t + \xi$ , 就有

$$\begin{aligned} F[f * g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda(t+\xi)} d\xi \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi} d\xi = F[f]F[g]. \end{aligned}$$

6° (Parseval 等式) 设  $f(x)$  可积且平方可积,  $F(\lambda)$  是  $f(x)$  的 Fourier 变换, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda,$$

**证明** 令

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x+t) dt,$$

它的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} F[g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x+t) dt \right) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x} dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u} du \right) e^{i\lambda t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\lambda u} du \\ &= \overline{F(\lambda)}F(\lambda) = |F(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

由逆变换公式知

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda x} d\lambda,$$

取  $x = 0$ , 就得到

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(0+t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 e^{i\lambda \cdot 0} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

**例 12.4.4** 试由 Fourier 变换的性质求正弦衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} \sin \omega_0 x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的 Fourier 变换.

**解** 由例12.4.1 知衰减函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的 Fourier 变换为

$$F[g(x)] = F(\lambda) = \frac{1}{\beta + i\lambda},$$

而

$$f(x) = g(x) \sin \omega_0 x = -\frac{i}{2}(e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x})g(x).$$

根据线性关系和频移特征即得此函数的 Fourier 变换

$$\begin{aligned} F[f] &= -\frac{i}{2}\{F[e^{i\omega_0 x} g(x)] - F[e^{-i\omega_0 x} g(x)]\} \\ &= -\frac{i}{2}[F(\lambda - \omega_0) - F(\lambda + \omega_0)] \\ &= -\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\beta + i(\lambda - \omega_0)} - \frac{1}{\beta + i(\lambda + \omega_0)}\right\} \\ &= \frac{\omega_0}{(\beta + i\lambda)^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

这与直接从定义算得的结果完全一致.

最后我们用 Fourier 变换求解无穷长杆子的温度分布, 作为本章的结束.

**例 12.4.5** 设无穷长细杆的温度分布  $T = T(x, t)$  满足方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

这里我们设初始温度分布  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上是绝对可积的函数.

对变量  $x$  作 Fourier 变换, 记  $u(\lambda, t) = F[T](\lambda)$ , 则

$$F\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad F\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = (i\lambda)^2 F[T] = -\lambda^2 u.$$

所以  $u(\lambda, t)$  满足方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda^2 u$ , 求解可得

$$u(\lambda, t) = C(\lambda)e^{-\lambda^2 t},$$

其中  $C(\lambda)$  是积分常数. 设  $F(\lambda) = F[f](\lambda)$  是初始分布函数  $f$  的 Fourier 变换, 综合  $T(x, t)$  满足的初始条件  $T(x, 0) = f(x)$  可知

$$u(\lambda, t) = F(\lambda) \cdot e^{-\lambda^2 t}.$$

利用 Fourier 变换的反演可得

$$T(x, t) = f(x) * \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

利用奇偶性直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos \frac{\lambda x}{\sqrt{t}} d\lambda \quad (\text{这里利用变换 } \lambda \rightarrow \lambda\sqrt{t}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (\text{这里利用等式 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \beta x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}). \end{aligned}$$

所以

$$T(x, t) = f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

## 习题 12.4

1. 用 Fourier 积分表示下列函数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ kx, & 0 < x < T, \\ 0, & x \geq T; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

2. 求下列函数的 Fourier 变换:

$$(1) f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

$$(2) f(x) = e^{-a|x|} \cos bx \quad (a > 0);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



3. 按指定的要求将函数  $f(x) = e^{-x}$  ( $0 \leq x < +\infty$ ) 表示成 Fourier 积分.

- (1) 用偶性开拓; (2) 用奇性开拓.

4. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$$

的 Fourier 变换. 由此证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < 1, \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

5. 求函数  $F(\lambda) = \lambda e^{-\beta|\lambda|}$  ( $\beta > 0$ ) 的 Fourier 逆变换.

## 第 12 章综合习题

1. 证明: 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  在不包含  $2\pi$  整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是任意在  $[-\pi, \pi]$  上平方可积函数的 Fourier 级数.

2. 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} = \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad (0 < x < 2\pi).$$

3. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的可积且绝对可积函数. 证明:

- (1) 如果  $f$  在  $(0, 2\pi)$  上递减, 那么  $b_n \geq 0$ ;  
 (2) 如果  $f$  在  $(0, 2\pi)$  上递增, 那么  $b_n \leq 0$ .

4. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  且在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积的函数. 如果它在  $(-\pi, \pi)$  上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

5. 设  $f$  在  $[-a, a]$  上连续, 且在  $x = 0$  处可导. 求证:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1 - \cos \lambda x}{x} f(x) dx = \int_0^a \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx.$$

6. 设  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积. 证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\cos \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\sin \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

7. 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt,$$

用  $a_n, b_n$  和  $A_n, B_n$  分别表示  $f$  和  $F$  的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2, B_n = 0.$$

由此推出  $f$  的 Parseval 等式.

8. 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数  $f'$ . 如果  $f$  满足

$$f(-\pi) = f(\pi), \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

等号当且仅当  $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$  时成立.

## 第 13 章 反常积分和含参变量的积分

反常积分和含参变量积分与第 7 章中的数项级数和函数项级数有不少共同之处, 只是前者是一种积分形式, 而后者是求和形式. 更重要的是, 含参变量积分也给出了构造或表示函数的一种方式, 特别是在无法通过初等函数计算积分的情况下, 这种方式扩大了我们对函数的认知范围. 本章我们将讨论反常积分的收敛性问题, 并对含参变量积分方式定义的函数, 讨论它们的连续性, 可微性和可积性等性质. 最后详细分析通过含参变量积分构造的 Gamma 函数 ( $\Gamma$  函数) 和 Beta 函数 ( $B$  函数) 的一系列性质.

### §13.1 反常积分

根据 §5.4 节的定义, 单变量的反常积分分为两类, 一类是对定义在无穷区间上函数的积分, 另一类是定义在有限区间上无界函数的积分 (称之为瑕积分). 本节主要研究上述两种反常积分收敛性的判别方法.

#### 13.1.1 无穷区间上积分的收敛性

积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 是指  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  的任意有限区间上可积, 并且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

只要右端极限存在有限. 对任意的  $A > a$ ,  $f(x)$  在  $[a, A]$  上的积分就定义了一个函数

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx.$$

这样,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛等价于  $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$  有有限极限.

以下我们始终假设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  的任意有限区间上可积, 并不再一一说明.

根据函数极限的 Cauchy 收敛准则, 就可得到关于反常积分的 Cauchy 收敛准则.

**定理 13.1**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的充分必要条件是对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0 > a$ , 只要  $A', A'' > A_0$ , 就有

$$|F(A'') - F(A')| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

注意到, 由 Cauchy 收敛准则可知, 函数在无穷区间上可积, 等价于函数在充分大处的任意一个有限区间上积分 (或函数“覆盖的面积”) 充分小, 要达到这个要求, 并不需要  $f(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) 来保证. 但是对收敛的无穷级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ , 从 Cauchy 收敛准则直接得到级数的通项必须满足  $a_n \rightarrow 0$ .

根据 Cauchy 收敛准则, 我们可直接得到下列定理

**定理 13.2** 如果  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 那么  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛.

该定理的逆并不成立, 我们将在下一小节给出  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上收敛, 但  $|f(x)|$  在  $[a, +\infty)$  上发散的例子. 因此仿照无穷级数的定义, 如果  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 那么称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **绝对收敛**; 如果  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 但  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  发散, 那么称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **条件收敛**.

类比正项级数, 我们首先给出非负函数反常积分的收敛性和比较判别法.

**定理 13.3** 设在  $[a, +\infty)$  上  $f(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛的充分必要条件是, 存在  $M > 0$  使对任何  $A > a$  都有

$$\int_a^A f(x) dx < M.$$

这是因为  $f(x) \geq 0$ , 所以函数  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$  单调增. 当  $A \rightarrow +\infty$  时,  $F(A)$  的极限存在的充分必要条件是  $F(A)$  对于任何  $A > a$  有界. 根据这个定理, 我们有

**定理 13.4 (比较判别法)** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  对充分大的  $x$ , 下列不等式

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

成立, 那么

1° 若  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

2° 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散.

**例 13.1.1** 对任意实数  $\alpha$ ,  $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$  收敛.

**证明** 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{2}} = 0,$$

故当  $x$  充分大时有

$$x^\alpha e^{-x} = x^\alpha e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} < e^{-\frac{x}{2}}.$$

由  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$  的收敛性就可推知原积分的收敛性.

比较判别法还有如下极限形式.

**定理 13.5** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上非负, 如果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

那么

1° 若  $0 < k < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  同敛散;

2° 若  $k = 0$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛;

3° 若  $k = +\infty$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也发散.

比较判别法是利用与已知反常积分收敛的函数进行比较. 一个常用来进行比较的函数是  $g(x) = \frac{1}{x^p}$ . 通过定义不难验证

当  $p > 1$  时  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) 收敛,

当  $p \leq 1$  时  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) 发散.

与这个函数相比较, 可以判断一类反常积分的敛散性.

**例 13.1.2**  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$  收敛.

**证明** 当  $x \rightarrow +\infty$  时

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} \sim \frac{1}{x^{5/2}}.$$

而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$  收敛, 由定理13.5 即知原积分收敛.

### 13.1.2 无穷区间上积分收敛性的一般判别法

为了给出更一般的判别法, 需要引进类似级数的 Abel 引理.

**引理 13.6** (第二积分平均值定理) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,

1° 如果  $g(x)$  在  $[a, b]$  上非负且单调递减, 那么存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

2° 如果  $g(x)$  在  $[a, b]$  上非负单调递增, 那么存在  $\eta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\eta^b f(x) dx.$$

3° 如果  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调 (不必非负或非正), 那么存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

**证明** 注意到不管哪种情况,  $g(x)$  是单调的, 所以可积, 因此  $f(x)g(x)$  也可积, 因此三种情况下左边的积分有意义. 首先证明 1°, 对区间  $[a, b]$  做分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

则  $f(x)g(x)$  在  $[a, b]$  上的积分可以表示

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x) - g(x_{i-1})) dx \end{aligned}$$

这里  $\omega_i = \sup\{|g(x) - g(x')| : x, x' \in [x_{i-1}, x_i]\}$  表示  $g$  在小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅. 上式右端第二项满足

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x) - g(x_{i-1})| dx \leq K \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

这里  $K$  表示  $f$  在  $[a, b]$  的一个上界 (因为可积所以有界). 因为  $g$  可积, 所以

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是有

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

记

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F(x_k) = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$$

则  $F(x)$  是区间  $[a, b]$  上的一个连续函数, 故有最大值和最小值, 分别记为  $M$  和  $m$ , 即

$$m \leq F(x) = \int_a^x f(t) dt \leq M$$

而  $g(x_0) \geq g(x_1) \geq \cdots \geq g(x_n) \geq 0$ , 利用级数的 Abel 引理, 就有

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).$$

所以

$$mg(a) \leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \leq Mg(a)$$

令  $|T| \rightarrow 0$ , 得

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a).$$

由于  $F(x)$  是连续的, 根据连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

关于 2° 的证明可以对积分通过变换  $x = a + b - t$  并利用 1° 的结果直接推导出来. 关于 3° 的证明, 不妨设  $g(x)$  单调增, 则  $\psi(x) = g(b) - g(x)$  单调减, 对  $\psi(x)$  和  $f(x)$  利用 1° 的结果即可得到 3° 的证明.  $\square$

**定理 13.7** (Dirichlet) 如果  $f(x)$  和  $g(x)$  满足下面两个条件:

1°  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$  作为  $b$  的函数在  $(a, +\infty)$  有界.

2°  $g(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

**证明** 设  $|F(b)| \leq M$ . 应用第二积分平均值定理, 存在  $\xi \in [A, A']$ , 使得

$$\int_A^{A'} f(x)g(x) dx = g(A) \int_A^\xi f(x) dx + g(A') \int_\xi^{A'} f(x) dx$$

所以

$$\left| \int_A^{A'} f(x)g(x) dx \right| = |g(A)| \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + |g(A')| \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right|$$

根据条件 1°, 知

$$\left| \int_A^\xi f(x) dx \right| = |F(\xi) - F(A)| \leq 2M, \quad \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right| \leq 2M$$

由条件 2°, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 一定存在  $X > 0$ , 使得当  $A, A' > X$  时, 有

$$|g(A)| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |g(A')| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

所以只要  $A, A' > X$ , 就有

$$\left| \int_A^{A'} f(x)g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 我们就完成了定理的证明.  $\square$

**定理 13.8** (Abel) 如果  $f(x)$  和  $g(x)$  满足下面两个条件:

1° 积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

2°  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界.

那么  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

**证明** 还是利用第二积分平均值定理和 Cauchy 收敛准则, 主要估计

$$\left| \int_A^{A'} f(x)g(x) dx \right| = |g(A)| \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + |g(A')| \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right|.$$

在本定理的条件下, 首先可设  $|g(A)| < M, |g(A')| < M$ , 其次根据条件 1°, 对于任意的

$\varepsilon > 0$ , 存在  $X > 0$ , 使得当  $A, A' > X$  时 (当然, 此时  $\xi > X$ ), 有

$$\left| \int_A^\xi f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

剩余的步骤就一目了然了.  $\square$

**例 13.1.3** 设  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  有定义, 并且当  $x \rightarrow +\infty$  时  $g(x)$  单调趋于零, 则积分

$$\int_a^{+\infty} g(x) \sin x dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x) \cos x dx$$

都收敛.

**证明** 由于对任意  $b > a$ , 都有

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| \leq 2, \quad \left| \int_a^b \cos x dx \right| \leq 2,$$

由定理 13.7 可知, 原积分都收敛.

**例 13.1.4** 设  $a > 0, 0 < p \leq 1$ , 求证:  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  和  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  条件收敛.

**证明** 在例 13.1.3 中取  $g(x) = \frac{1}{x^p}$ , 显然当  $x \rightarrow +\infty$  时  $g(x)$  单调减趋于零. 所以上述两个积分都收敛. 或者直接利用分部积分法得

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx &= -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_a^{+\infty} - p \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+p}} dx \\ &= \frac{\cos a}{a^p} - p \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+p}} dx. \end{aligned}$$

由于  $1 + p > 1$ , 上式右边的积分绝对收敛, 因而积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  收敛. 同理可证  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  也收敛.

另一方面, 通过  $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$  我们发现

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{2x^p} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$$

上式右端第一个积分发散, 第二个积分收敛, 故左端积分一定发散. 因此由  $\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{\sin^2 x}{x^p}$  得到:  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$  发散. 类似, 可以证明  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  条件收敛.

关于函数在  $[a, +\infty)$  上积分收敛性的结果, 很容易推广到于函数在  $(-\infty, a]$  上的积分, 或者直接经过变换  $x \rightarrow -x$ , 将其转化为在  $[-a, +\infty)$  上的分. 还可以考虑函数  $f(x)$  在整个直线  $(-\infty, +\infty)$  上的积分, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$$



只要右边的极限存在. 也可以认为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

但是, 上式成立的前提, 是右边两个反常积分分别独立地收敛.

### 13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

设  $f(x)$  在  $(a, b]$  中有定义并在  $(a, b]$  任何闭子区间上可积,  $a$  是  $f(x)$  的瑕点, 即当  $x \rightarrow a^+$  时,  $f(x)$  无界. 则  $f(x)$  在  $(a, b]$  上反常可积的定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

只要右端极限存在有限. 类似地, 可定义当  $b$  是瑕点的瑕积分.

或者对瑕积分  $\int_a^b f(x) dx$  做下列变换

$$y = \frac{1}{x-a}$$

则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{y}\right)}{y^2} dy.$$

所以, 瑕积分转化成了无穷区间上的积分.

不管是通过瑕积分的定义, 还是通过变换将瑕积分转换为无穷区间上积分, 都能给出与无穷区间上积分完全相应的结论. 我们将这些结论直接罗列出来, 不再证明.

**定理 13.9** (Cauchy收敛准则) 设  $a$  是  $f(x)$  的瑕点. 积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 当且仅当对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $0 < \eta', \eta'' < \delta$ , 就有

$$\left| \int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

对瑕积分也有绝对收敛和条件收敛的概念.

**定理 13.10** 如果积分  $\int_a^b |f(x)| dx$  收敛, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也收敛.

**定理 13.11** 如果对于充分接近  $a$  的  $x (> a)$  有不等式  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 那么

1° 若  $\int_a^b g(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

2° 若  $\int_a^b f(x) dx$  发散, 则  $\int_a^b g(x) dx$  发散.

**定理 13.12** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是  $(a, b]$  上的非负连续函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

那么

1° 若  $0 < k < +\infty$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  和  $\int_a^b g(x) dx$  同敛散;

2° 若  $k = 0$ , 则当  $\int_a^b g(x) dx$  收敛时,  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

3° 若  $k = +\infty$ , 则当  $\int_a^b g(x) dx$  发散时,  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

类似无穷区间上函数的积分, 常用来比较的函数之一为  $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ . 直接验证可知

1° 当  $0 < p < 1$  时,  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$  收敛.

2° 当  $p \geq 1$  时,  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$  发散.

因此在瑕点  $a$  附近, 与  $\frac{1}{(x-a)^p}$  进行比较就可判别一类函数收敛性.

**例 13.1.5** 研究下列椭圆积分的收敛性

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1$$

这里被积函数以积分上限  $x = 1$  为瑕点, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} / \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

又  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  收敛, 根据定理 13.12 知椭圆积分收敛.

**例 13.1.6** 研究积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  的敛散性.

**解** 注意到当  $x \rightarrow 1$  时, 有下列极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2},$$

所以  $x = 1$  是可去瑕点. 考虑  $x = 0$  附近的情况, 对充分小的  $x$ , 恒有  $1-x^2 \geq \frac{1}{2}$ , 所以

$$\left| \frac{\ln x}{1-x^2} \right| \leq 2|\ln x|,$$

而积分

$$\int_0^1 |\ln x| dx = -\int_0^1 \ln x dx = -x \ln x \Big|_0^1 + \int_0^1 dx = 1$$

是收敛的, 因此原积分收敛.

**例 13.1.7** 研究积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx$  ( $\beta \geq 0$ ) 的收敛性.

**解** 当  $\alpha < 0$  时,  $x = 0$  是瑕点, 所以把积分拆成两部分来考虑:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx.$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{1}{2} x^{\alpha+1},$$

故当  $\alpha + 1 > -1$ , 即  $\alpha > -2$  时, 第一个积分收敛. 当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2 + x^\beta} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

故当  $\beta - \alpha > 1$  时, 第二个积分收敛. 所以原积分当  $\alpha > -2$  且  $\beta > 1 + \alpha$  时收敛.

在第一册§5.4 中, 我们给出了反常积分的分部积分和换元法等计算方法. 通过具体计算也可以判断反常积分的收敛性. 例如下列的 Euler 积分

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

显然,  $x = 0$  是瑕点. 利用分部积分

$$J = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cos x \, dx$$

注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sin x = 0$ , 所以分部积分可以进行. 而  $x = 0$  是积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cos x \, dx$  的可去瑕点, 因此是 Riemann 意义下可积的, 这样也证明了 Euler 积分的收敛性! 具体计算过程见 §5.4.2 中例 5.4.2.

### 习题 13.1

1. 判断下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \, dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \, dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} \, dx; \quad (4) \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x};$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx; \quad (6) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} \, dx;$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \quad (8) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \, dx;$$

$$(9) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}; \quad (10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} \, dx;$$

$$(12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}; \quad (14) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\mu} \, dx.$$

2. 研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x} \sqrt{x^2+1}} \, dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \, dx;$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} \, dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)} \, dx \quad (p > 0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})} \, dx; \quad (6) \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} \, dx.$$

3. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  单调、连续,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

4. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上非负,  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 且当  $0 < x < y$  时, 有

$$f(y) \leq f(x) + \int_x^y g(t) dt.$$

求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

5. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上非负,  $g(x)$  单调递减趋于 0, 且  $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛. 求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \int_0^x f(t) dt = 0$ .

6. 设  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  绝对收敛, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . 求证:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)g(x-t) dt = 0$ .

## §13.2 反常多重积分\*

如同单个变量情形, 多变量的反常积分无非是把重积分的概念向定义在无界区域上函数推广, 或向定义在有限区域上无界函数推广. 在此仅以两个变量情形为例, 并着重讨论定义在无界区域上函数的反常积分. 对于有界区域上无界函数的反常积分, 可类似讨论.

由于平面区域相对于直线上区间的复杂性, 需要引进以下概念.

设  $D$  是平面上一个区域. 一个子区域列  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$  称之为区域  $D$  的**竭尽递增列**, 如果满足:

1° 每个  $D_n$  是有界的, 而且是 Jordan 可测的 (参见 §10.1.1).

2°  $D_1 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$ , 而且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

根据定义, 有

**引理 13.13** 如果  $D$  是有界可测闭集, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = \mu(D)$$

该引理的结论虽然十分自然, 具体证明见第三册, 在此不作详细论证.

**定义 13.14** 设函数  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  中无界区域  $D$  上有定义, 在  $D$  的任何有界可测子集上可积,  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$  是  $D$  的竭尽递增列, 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

存在有限并且不依赖于  $D$  的竭尽递增列的选取, 那么称极限为函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的“反常积分”, 仍记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

根据定义, 如果存在  $D$  的一个竭尽递增列使得定义中的极限发散, 或者存在两个竭尽递增列, 对应定义中的极限虽然收敛但是不相等, 那么函数的反常积分都是发散的.

但是, 对于无界区域上非负函数, 情况有些特殊. 我们有下列定理.

**定理 13.15** 设  $f(x, y)$  是无界区域  $D$  上非负函数, 且在  $D$  的任意有界可测子集上可积. 如果存在某个  $D$  的竭尽递增列  $S_n$  使得

$$I_n = \iint_{S_n} f(x, y) dx dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

收敛, 那么函数  $f(x, y)$  在无界区域  $D$  上的反常积分存在, 即对任意的其它竭尽递增列, 定义中的极限存在而且相等.

这样, 对于非负函数, 只要求存在满足定义 13.14 的一个特殊竭尽递增列就行了. 通常会选取  $S_n$  为以  $n$  为半径的圆盘与  $D$  的交集

$$S_n = B_n \cap D, \quad B_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

或者宽度为  $n$  的正方形与  $D$  的交集, 只要它们是 Jordan 可测的, 就是一个特殊的竭尽递增列. 这样在计算非负函数的反常积分时, 可以取较为方便的特殊竭尽递增列.

**例 13.2.1** 计算下列积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

**解** 注意到被积函数本身就是正的、连续的, 根据定理, 取  $\mathbb{R}^2$  的一个特殊竭尽递增列

$$B_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则

$$\begin{aligned} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^n dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = \pi(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 就有

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

另一方面, 用方形竭尽递增列

$$D_n = \{(x, y) \mid |x| \leq n, |y| \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2.$$

令  $n \rightarrow +\infty$  有

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi.$$

由此得到下列 Poisson 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

注意到, 函数  $e^{-x^2}$  的原函数不能用初等函数表示, 因此直接求它的反常积分是十分困难的. 而作为反常二重积分一个例子, 却给出了这个在分析中重要的积分.

**定理 13.15 的证明** 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy = A.$$

下面要证明对其他任意一个竭尽递增列, 极限存在且等于  $A$ . 设  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$  是  $D$  的任意一个竭尽递增列, 显然  $\{D_{k,n} = D_k \cap S_n, n = 1, 2, \dots\}$  则是  $D_k$  的竭尽递增列. 因为已经假设函数  $f$  在任何有界可测子集上可积, 所以在  $D_k$  上有界:  $0 \leq f(x, y) \leq M$ , 因此

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{D_k} f(x, y) \, dx \, dy - \iint_{D_k \cap S_n} f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_k - D_k \cap S_n} f(x, y) \, dx \, dy \leq M(\mu(D_k) - \mu(D_k \cap S_n)) \end{aligned}$$

根据引理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_k \cap S_n) = \mu(D_k)$ , 得

$$\begin{aligned} \iint_{D_k} f(x, y) \, dx \, dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_k \cap S_n} f(x, y) \, dx \, dy \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) \, dx \, dy = A. \end{aligned}$$

对  $k = 1, 2, \dots$ , 成立. 由于函数  $f$  非负,  $D_n \subset D_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 因此

$$J_n = \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy$$

是单调增以  $A$  为上界的数列, 所以收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = B \leq A$$

注意到, 不管是  $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$  还是  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$ , 他们都是  $D$  的竭尽递增列, 地位平等, 性质一样, 所以也有  $A \leq B$ , 这样就证明了定理.

**定理 13.16** 设函数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  在无界区域  $D$  上有定义,  $f(x, y)$  在  $D$  的任何有界可测子集上可积且绝对可积, 而且满足

$$|f(x, y)| \leq g(x, y), \quad (x, y) \in D$$

如果  $g$  是  $D$  上是反常可积的, 那么  $f$  和  $|f|$  也是  $D$  上反常可积的.

**证明** 设  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$  是  $D$  的任意一个竭尽递增列, 则

$$\begin{aligned} \iint_{D_{n+m}} |f(x, y)| \, dx \, dy - \iint_{D_n} |f(x, y)| \, dx \, dy &= \iint_{D_{n+m} - D_n} |f(x, y)| \, dx \, dy \\ &\leq \iint_{D_{n+m} - D_n} g(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{n+m}} g(x, y) \, dx \, dy - \iint_{D_n} g(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

根据 Cauchy 收敛准则可知, 数列

$$\iint_{D_n} |f(x, y)| \, dx \, dy$$

收敛, 因此在  $D$  上的反常积分收敛. 令

$$f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

显然,  $0 \leq f_{\pm} \leq |f|$ , 因此类似上述过程, 由  $|f|$  在  $D$  上反常积分的收敛性就可得到  $f_{\pm}$  的反常积分的收敛性. 再由  $f = f_+ - f_-$  就可得到  $f$  在  $D$  上的反常积分的收敛性.  $\square$

**注记** 本节中, 我们通过竭尽递增列定义了反常二重积分, 并给出了两个比较实用的定理. 注意到定理 13.16 的证明, 实际上也验证了这样的结论: 如果  $|f|$  在  $D$  上反常积分收敛, 那么  $f_{\pm}$  也收敛, 因此  $f = f_+ - f_-$  收敛. 类似于单变量反常积分中的所谓“绝对收敛”的概念.

然而, 可以证明在竭尽递增列给出反常积分收敛性的定义下, 函数  $f(x, y)$  的反常积分收敛与  $|f(x, y)|$  反常积分收敛是等价的! 因此不存在“绝对收敛”和“条件收敛”的区别. 这里我们不打算给出这种等价性的详细证明, 而是通过下列例子说明通过竭尽递增列定义的反常积分与单变量情形定义的反常积分的区别.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为一个条件收敛的级数, 定义函数  $f(x)$  如下

$$f(x) = a_n, \quad \text{当 } x \in [n-1, n), \quad n = 1, 2, \dots$$

不难看出, 积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  也是条件收敛的且收敛到级数的和. 根据函数的定义, 把半直线  $[0, +\infty)$  上每一个小区间  $[n-1, n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  与级数的项  $a_n$  对应在一起.

由于级数是条件收敛的, 根据 Riemann 重排定理, 可以通过重新排列级数的项使得重新排列后的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  发散到  $+\infty$ . 新级数的前  $n$  项部分和  $\sum_{k=1}^n a'_k$  正是函数  $f$  在那些与  $a'_k, k = 1, \dots, n$  相对应的小区间并集  $D_n$  上的积分

$$\sum_{k=1}^n a'_k = \int_{D_n} f(x) dx.$$

显然,  $\{D_n, n = 1, 2, \dots\}$  中每一个集合  $D_n$  已经不再是一个完整的有限区间, 但是它们构成半直线  $[0, +\infty)$  的竭尽递增列  $D_n \subset D_{n+1}, n = 1, 2, \dots, \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n = [0, +\infty)$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a'_k = +\infty$$

因此上述函数在竭尽递增列定义的反常积分意义下是发散的.

从这个例子看出, 通过竭尽递增列定义的反常积分收敛中要求与竭尽递增列选取无关性等价于级数求和与它的项的排列无关性, 而后者正好等价于级数的绝对收敛性.

## 习题 13.2

### 1. 计算反常积分:



- (1)  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中  $D$  是单位圆内部;
- (2)  $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x + y)^\alpha}$ , 其中  $D$  是第一象限,  $\alpha > 2$  为常数;
- (3)  $\iint_D \max(x, y)e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$ , 其中  $D$  是第一象限.

2. 借用 Fresnel 积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  验证下列累次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + y^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + y^2) dy = \pi.$$

并证明函数  $\sin(x^2 + y^2)$  在定义13.14 意义下在  $\mathbb{R}^2$  上的反常二重积分发散.(提示: 分别考虑  $\mathbb{R}^2$  的两个竭尽递增列  $D_n = \{(x, y) \mid |x| \leq n, |y| \leq n\}$  和  $B_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2n\pi\}$ ).

### §13.3 含参变量的积分

简单地说, 所谓含参变量积分就是除了积分变量以外, 被积函数, 甚至积分上下限还依赖于另一个变量. 相对于积分变量, 我们称这个变量为参变量.

#### 13.3.1 含参变量的积分及其性质

设二元函数  $f(x, u)$  在区间  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 因此对于任给定的  $u \in [\alpha, \beta]$ ,  $f(x, u)$  对变量  $x$  在  $[a, b]$  上 Riemann 积分定义了一个函数

$$u \mapsto \varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx.$$

这里积分上下限  $a, b$  均不依赖于参变量  $u$ . 本节主要目的, 就是要讨论含参变量积分定义的函数的连续性、可微性和可积性.

**定理 13.17** 若函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 则

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上连续.

**证明** 在区间  $[\alpha, \beta]$  上任取一点  $u_0$ , 于是

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, u) - f(x, u_0)| dx, \end{aligned}$$

由于  $f(x, u)$  在闭区域  $I$  上连续, 必一致连续. 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta$ , 只要  $I$  中两点  $(x_1, u_1)$  与  $(x_2, u_2)$  的距离小于  $\delta$ , 就有

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon.$$

特别当  $|u - u_0| < \delta$  时, 对任意  $x \in [a, b]$ , 点  $(x, u_0)$  和  $(x, u)$  的距离小于  $\delta$ , 所以

$$|f(x, u) - f(x, u_0)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

从而得到

$$|\varphi(u) - \varphi(u_0)| < (b - a)\varepsilon.$$

这就证明了  $\varphi(u)$  在点  $u_0$  处连续, 由  $u_0$  的任意性可知,  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续.  $\square$

于是

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$$

就可写成

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx,$$

也就是说极限运算与积分运算的次序可以交换.

在确定了  $\varphi(u)$  是  $u$  的连续函数之后, 我们继续考察它在区间  $[\alpha, \beta]$  上的积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du.$$

因为  $f(x, u)$  在  $I$  上连续, 所以上式右端积分正是  $f(x, u)$  在  $I$  上的二重积分的累次积分, 这便是

**定理 13.18** 如果函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 那么  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上的积分满足

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx.$$

现在进一步研究函数  $\varphi(u)$  的可微性.

**定理 13.19** 设函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且对  $u$  有连续偏微商, 则  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上可微, 并且求导和积分运算可交换

$$\varphi'(u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx.$$

**证明** 令

$$g(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx,$$

则  $g(u)$  是  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数, 根据定理13.17, 当  $\alpha \leq u \leq \beta$  时有

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^u g(t) dt &= \int_a^b \left[ \int_{\alpha}^u \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right] dx \\ &= \int_a^b [f(x, u) - f(x, \alpha)] dx = \varphi(u) - \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

可见  $\varphi(u)$  是  $g(u)$  的原函数, 因此  $\varphi'(u) = g(u)$ . □

定理13.19 中的区间  $[\alpha, \beta]$  也可以不是闭区间. 例如把  $[\alpha, \beta]$  换成  $(\alpha, \beta)$ , 则对任意  $u_0 \in (\alpha, \beta)$ , 取  $\alpha < \alpha_1 < u_0 < \beta_1 < \beta$ , 然后对  $[\alpha_1, \beta_1]$  使用定理13.19, 就得到  $\varphi'(u_0) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u_0)}{\partial u} dx$ .

**例 13.3.1** 试求积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$  的值.

**解** 考虑含参变量的积分

$$I(u) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2} dx.$$

被积函数  $\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$  及其关于  $u$  的偏微商  $\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$  都在  $[0, 1]^2$  上连续, 由定理 13.19 就有

$$\begin{aligned} I'(u) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)} dx \\ &= \frac{1}{1+u^2} \int_0^1 \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{u}{1+x^2} - \frac{u}{1+ux} \right) dx \\ &= \frac{1}{1+u^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} u - \ln(1+u) \right]. \end{aligned}$$

将此式的两端关于  $u$  从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned} I(1) - I(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} u - \ln(1+u) \right] du \\ &= \frac{\ln 2}{2} \arctan u \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} \ln(1+u^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u^2} du \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I(1). \end{aligned}$$

又  $I(0) = 0$ , 故所求积分的值为  $I(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

另外, 也可根据定理 13.18 求得积分值  $I(1)$ . 因为

$$\ln(1+ux) = \int_0^u \frac{x}{1+xy} dy,$$

所以

$$I(u) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \left( \int_0^u \frac{dy}{1+xy} \right) dx.$$

由于  $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$  在  $[0, 1] \times [0, u]$  上连续, 故有

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_0^u \left[ \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx \right] dy \\ &= \int_0^u \frac{1}{1+y^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} y - \ln(1+y) \right] dy \\ &= \frac{\ln 2}{2} \arctan u + \frac{\pi}{8} \ln(1+u^2) - \int_0^u \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

取  $u = 1$ , 就得到

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

### 13.3.2 积分限依赖于参变量的积分及其性质

考虑不仅被积函数含有参变量, 积分限也含有参变量的如下积分

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx,$$

它显然也确定一个参变量  $u$  的函数, 只要上式中的积分有效.

**定理 13.20** 设函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 函数  $a(u)$  和  $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 并且

$$a \leq a(u) \leq b, \quad a \leq b(u) \leq b,$$

则

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上连续.

**证明** 在  $[\alpha, \beta]$  上任取一点  $u_0$ , 并将参变量积分  $\psi(u)$  写成

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x, u) dx + \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx + \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x, u) dx.$$

右端第二个积分由于上下限都是常数, 所以它关于  $u$  是连续的, 于是有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx.$$

而第一个与第三个积分有估计值

$$\begin{aligned} \left| \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x, u) dx \right| &\leq M|a(u) - a(u_0)|, \\ \left| \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x, u) dx \right| &\leq M|b(u) - b(u_0)|, \end{aligned}$$

其中  $M$  是连续函数  $|f(x, u)|$  在区域  $I$  上的上界. 因为  $a(u), b(u)$  在点  $u_0$  连续, 所以当  $u \rightarrow u_0$  时, 这两个积分趋于零. 于是

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \psi(u) = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx = \psi(u_0),$$

即  $\psi(u)$  在点  $u_0$  处连续. 由  $u_0$  的任意性知,  $\psi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续.  $\square$

**定理 13.21** 设函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续且对  $u$  有连续的偏微商,  $a(u)$  和  $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可微, 并且

$$a \leq a(u) \leq b, \quad a \leq b(u) \leq b,$$

则函数  $\psi(u)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上可微, 且有

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u)b'(u) - f(a(u), u)a'(u).$$

**证明** 令

$$F(u, y, z) = \int_y^z f(x, u) dx,$$

于是  $\psi(u)$  是由  $F(u, y, z)$  与  $y = a(u)$ ,  $z = b(u)$  复合而成的复合函数, 由复合函数的可微性及链式法则, 有

$$\begin{aligned}\psi'(u) &= \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{du} \\ &= \int_y^z \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(z, u) \frac{dz}{du} - f(y, u) \frac{dy}{du},\end{aligned}$$

将  $y = a(u)$ ,  $z = b(u)$  代入上式就得到

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u)b'(u) - f(a(u), u)a'(u).$$

**例 13.3.2** 设  $I(u) = \int_u^{u^2} \frac{\sin ux}{x} dx$ , 求  $I'(u)$ .

**解** 由于  $x = 0$  是  $\frac{\sin ux}{x}$  的可去间断点, 故  $\frac{\sin ux}{x}$  对任意  $x, u$  都是连续的, 且对  $u$  有连续的偏微商, 故由定理 13.21 有

$$\begin{aligned}I'(u) &= \int_u^{u^2} \cos ux dx + 2u \frac{\sin u^3}{u^2} - \frac{\sin u^2}{u} \\ &= \left. \frac{\sin ux}{u} \right|_u^{u^2} + \frac{2 \sin u^3}{u} - \frac{\sin u^2}{u} \\ &= \frac{3 \sin u^3 - 2 \sin u^2}{u}.\end{aligned}$$

### 习题 13.3

1. 试用两种方法计算以下极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2} dx$$

2. 求  $F'(\alpha)$ :

$$(1) F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(2) F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$(3) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$$

$$(4) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx \quad (f(u, v) \text{ 有连续偏导数}).$$

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_c^x f(t) \sin k(x-t) dt, \quad c, x \in [a, b]$$

满足常微分方程

$$y'' + k^2 y = f(x),$$

其中  $c$  与  $k$  为常数.

4. 应用对参数进行微分或积分的方法, 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (a > 0, b > 0);$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx \quad (0 \leq a < 1);$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx \quad (a \geq 0);$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (0 \leq a < 1).$$

### §13.4 含参变量的反常积分

本节我们进一步考虑含参变量的反常积分. 为确定起见, 只讨论具有无穷上限的积分. 其结果可以类推到具有无穷下限及无界函数的积分 (即瑕积分).

#### 13.4.1 含参变量的反常积分的一致收敛性

假设函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续, 并对任意给定的  $u \in [\alpha, \beta]$ , 反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

都收敛, 称为含参变量  $u$  的反常积分. 这样, 积分确定了区间  $[\alpha, \beta]$  上的一个函数

$$u \in [\alpha, \beta] \mapsto \varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx,$$

我们的目的就是要研究这类函数的连续性、可微性和可积性.

如果把无穷区间上积分类比于数项级数, 那么含参变量的无穷区间上的积分, 可类比于函数项级数. 在函数项级数的讨论中, 使得和函数具有连续性、可微性以及可积性一个重要条件是一致收敛性. 在讨论含参变量的反常积分所确定的函数  $\varphi(u)$  的性质时, 类似的概念也具有决定性的意义.

所谓积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  收敛, 是指对于每个固定的  $u$ , 有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx,$$

即对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 存在数  $X (> a)$ , 当  $A > X$  时有

$$\left| \int_a^A f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon.$$

一般说来, 数  $X$  不仅依赖于  $\varepsilon$ , 而且还依赖于参变量  $u$ . 而一致收敛, 就是要寻找这样的尺度  $X$ , 它对所有  $u \in [\alpha, \beta]$ , 上式都“一致地”成立. 因此我们有

**定义 13.22** 如果对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总能找到  $X (> a)$ , 当  $A > X$  时, 不等式

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

对任意  $u \in [\alpha, \beta]$  成立, 那么称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛. 这里的  $[\alpha, \beta]$  还可以换成开区间或无穷区间.

根据定义不难证明下列结果.

**定理 13.23** 无穷区间上含参变量积分是一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \beta(A) = 0$$



其中

$$\beta(A) = \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right|$$

该定理实际上是一致收敛定义的另一种表达方式, 但在使用中比较方便.

**定理 13.24** (Cauchy 准则) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛的充分必要条件是: 对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在一个仅与  $\varepsilon$  有关的数  $X$ , 使得当  $A', A'' > X$ , 就有不等式

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

对任意的  $u \in [\alpha, \beta]$  成立.

**定理 13.25** (Weierstrass 判别法) 设  $f(x, u)$  在区域  $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续. 如果存在一个在  $[a, +\infty)$  上可积的函数  $p(x)$ , 使得对于一切充分大的  $x$  以及  $[\alpha, \beta]$  上的任意  $u$  都有

$$|f(x, u)| \leq p(x),$$

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.  $p(x)$  称为它的控制函数.

上面定理的证明, 与函数项级数的一致收敛性类似定理的证明相仿, 请读者自行完成.

**例 13.4.1** 设  $\alpha > 0$ , 证明

积分  $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x dx$  关于  $u$  在  $u \geq 0$  上一致收敛.

积分  $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x du$  关于  $x$  在  $x \geq 0$  上一致收敛.

**证明** 对任意的  $u \geq 0$ , 有

$$|e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x| \leq e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

故由 Weierstrass 判别法知积分  $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x dx$  关于  $u$  在  $u \geq 0$  上一致收敛.

对于  $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x du$ ,  $u = 0$  不是瑕点, 所以只需考虑  $\int_1^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x du$  关于  $x$  在  $x \geq 0$  上一致收敛性即可. 由于

$$|e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x| \leq xe^{-u^2x} \leq \frac{x}{1+u^2x} \leq \frac{1}{u^2},$$

对  $x \geq 0$  成立, 这里我们利用了  $e^{u^2x} \geq 1 + u^2x$ . 因此由 Weierstrass 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$  收敛就推出  $\int_1^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x du$  关于  $x$  在  $x \geq 0$  上一致收敛.

**例 13.4.2** 证明积分  $\int_a^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在  $u \geq 0$  上不一致收敛.

**证明** 显然积分在  $u \geq 0$  收敛. 因为

$$\left| \int_A^{+\infty} ue^{-ux} dx \right| = \begin{cases} 0, & u = 0; \\ e^{-uA}, & u > 0, \end{cases}$$

所以  $\beta(A) = \sup_{u \geq 0} \left| \int_A^{+\infty} ue^{-ux} dx \right| = 1$ , 故不一致收敛.

与函数项级数一样, 也有含参变量反常积分一致收敛的较精细的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

**定理 13.26** (Dirichlet 判别法) 设函数  $f(x, u)$  和  $g(x, u)$  对每个  $u \in [\alpha, \beta]$  在  $[a, +\infty)$  中任意有限区间  $[a, b]$  上可积, 若还满足下面两个条件:

1° 积分  $\int_a^b f(x, u) dx$  关于  $b \geq a$  和  $u \in [\alpha, \beta]$  一致有界, 即, 存在  $M > 0$ , 使得

$$\int_a^b f(x, u) dx \leq M,$$

对一切  $b \geq a$  和  $u \in [\alpha, \beta]$  成立;

2° 对每个固定的  $u \in [\alpha, \beta]$ ,  $g(x, u)$  是  $x$  的单调函数, 且当  $x \rightarrow +\infty$  时, 关于  $u \in [\alpha, \beta]$  一致趋于 0,

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

**定理 13.27** (Abel 判别法) 设函数  $f(x, u)$  和  $g(x, u)$  对每个  $u \in [\alpha, \beta]$  在  $[a, +\infty)$  中任意有限区间  $[a, b]$  上可积, 若还满足下面两个条件:

1° 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  关于  $u \in [\alpha, \beta]$  一致收敛;

2° 对每个固定的  $u \in [\alpha, \beta]$ ,  $g(x, u)$  是  $x$  的单调函数, 且关于  $u \in [\alpha, \beta]$  一致有界,

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

**例 13.4.3** 设  $\alpha > 0$ , 证明积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$  在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  上一致收敛.

**证明** 取  $f(x, \beta) = \sin \beta x$ ,  $g(x, \beta) = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$ , 显然

$$\left| \int_0^A \sin \beta x dx \right| = \frac{1 - \cos \beta A}{\beta} \leq \frac{1}{\beta_0},$$

所以  $f(x, \beta)$  在  $\beta \geq \beta_0$  上一致有界. 而当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x, \beta) = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$  (从  $x \geq \alpha$  开始) 单调减趋于零. 根据 Dirichlet 判别法, 该极限在  $\beta \geq \beta_0$  上一致收敛.

**例 13.4.4** 设  $0 < p \leq 1$ , 证明  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x^p} dx$  对  $u \geq 0$  一致收敛.

**证明** 因为  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  收敛 (注意因为  $0 < p \leq 1$ , 所以  $x = 0$  不是瑕点), 对任何  $u \geq 0$ ,  $e^{-ux}$  关于  $x$  单调减并有界  $e^{-ux} \leq 1$ . 因此根据 Abel 判别法, 积分在  $u \geq 0$  上一致收敛.

### 13.4.2 含参变量反常积分的性质

以下总假设下列积分收敛

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx.$$

我们将重点讨论由积分定义的函数  $\varphi(u)$  的连续性、可微性和可积性, 从中不难看出一致收敛性所发挥的关键作用.

**定理 13.28** 如果函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上关于  $u$  一致收敛, 那么函数  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续.

**证明** 由于积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛, 故对任意的正数  $\varepsilon$ , 总存在实数  $X$ , 只要  $A > X$ , 就有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对任何  $u \in [\alpha, \beta]$  成立. 在  $[\alpha, \beta]$  上任取一点  $u_0$ , 因为含参变量的积分  $\int_a^A f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 所以存在正数  $\delta$ , 当  $|u - u_0| < \delta$  时有

$$\left| \int_a^A f(x, u) dx - \int_a^A f(x, u_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是, 只要  $|u - u_0| < \delta$ , 即可推得

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^A f(x, u) dx - \int_a^A f(x, u_0) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_A^{+\infty} f(x, u_0) dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

由于  $u_0$  的任意性, 故  $\varphi(u)$  在整个区间  $[\alpha, \beta]$  上连续.  $\square$

**定理 13.29** 如果函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

在  $[\alpha, \beta]$  上关于  $u$  一致收敛, 那么有

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx.$$

**证明** 由假设可知, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在这样的数  $X$ , 只要  $A > X$ , 对任何  $u \in [\alpha, \beta]$  都有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

因为  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续 (定理 13.28), 所以可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^A f(x, u) dx \right] du + \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right] du,$$

而对含参变量的积分应有

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^A f(x, u) dx \right] du = \int_a^A \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx,$$

所以当  $A > X$  时就得到

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du - \int_a^A \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| du < \varepsilon.$$

□

定理 13.29 含义是, 对  $x$  在  $[a, +\infty)$  上的积分, 和对  $u$  在  $[\alpha, \beta]$  上的积分, 两者的次序是可以交换的. 但是, 如果对  $u$  的积分区间也是无限的  $[\alpha, +\infty)$ , 两个积分的交换问题就不是显然的, 需要小心对待. 为此, 我们列出相关结果 (证明从略).

**定理 13.30** 设  $f(x, u)$  满足下列条件:

- 1° 函数  $f(x, u)$  在  $[a, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$  上连续;
- 2° 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  关于参变量  $u$  在任何有限区间  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛; 而且积分  $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du$  关于  $x$  在任何有限区间  $[a, b]$  上也一致收敛;
- 3° 下列两个积分

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x, u)| du, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx$$

中至少有一个存在, 则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

都存在且相等, 即有

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du = \int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x, u) dx.$$

**例 13.4.5** 计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ , 其中  $0 < a < b$ .

**解** 被积函数可以表成积分

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-ux} du,$$

于是所要计算的积分就变为

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-ux} du,$$

由于对任意  $u \in [a, b]$ , 有

$$e^{-ux} \leq e^{-ax},$$

而无穷积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  收敛 ( $a > 0$ ), 由比较判别法知,  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 又  $e^{-ux}$  在  $[0, +\infty) \times [a, b]$  上连续, 根据定理13.29 便得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \int_a^b \frac{du}{u} = \ln \frac{b}{a}.$$

最后, 研究含参变量反常积分的求导问题.

**定理 13.31** 如果函数  $f(x, u)$  满足下列条件:

- 1°  $f(x, u)$  和  $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  在  $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续;
- 2°  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上收敛;
- 3°  $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

那么  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上可微, 并有

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \quad (\alpha \leq u \leq \beta).$$

定理中的区间  $[\alpha, \beta]$  换成开区间, 或半开半闭的区间时, 定理的结论依然成立.

**例 13.4.6** 计算积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx, \quad \beta \in (-\infty, +\infty).$$

**解** 因为对任意的实数  $\beta$  有

$$|e^{-x^2} \cos 2\beta x| \leq e^{-x^2}$$

而积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  收敛, 故积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$  收敛. 现计算它的值, 可将  $\beta$  视为参数, 由于当  $x > 0$  时有不等式

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) \right| = |2xe^{-x^2} \sin 2\beta x| \leq 2xe^{-x^2},$$

而积分  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$  收敛, 所以积分  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx$  在整个数轴上关于  $\beta$  一致收敛, 故依定理 13.30 得

$$\begin{aligned}\frac{dI(\beta)}{d\beta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx \\ &= -2 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx.\end{aligned}$$

又  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx = \beta I(\beta)$ , 从而函数  $I(\beta)$  满足微分方程

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta).$$

解微分方程, 并注意到  $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 即得

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}.$$

以上我们所讨论的含参变量的反常积分都限于积分区间为无穷的情形, 对于含参变量的瑕积分, 只要作不多的改变就可得到类似结果, 这里就不再叙述了.

### 13.4.3 几个重要的积分

利用含参变量反常积分的性质, 下面我们计算几个重要的反常积分.

#### 1° Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

在例 13.1.4 取  $p = 1$  可知 Dirichlet 积分是条件收敛的. 引进收敛因子  $e^{-ux}$ , 并考虑含参变量的积分

$$I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx.$$

由于当  $u \geq 0$  时, 此积分是一致收敛的 (例 13.4.4). 而被积函数在区域  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$  上连续, 因而  $I(u)$  就在  $[0, +\infty)$  上连续. 特别在点  $u = 0$  连续, 可推得

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} I(u) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

另一方面, 将  $I(u)$  微商, 得

$$I'(u) = - \int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx,$$

其中在积分号下对  $u$  微商的合理性是因为  $u \geq u_0 > 0$  时, 积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx$  是一致收敛的. 容易算出这个积分的值, 从而得到

$$I'(u) = -\frac{1}{1+u^2},$$

所以求得

$$I(u) = -\arctan u + c,$$

当  $u > 0$  时, 我们有

$$|I(u)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \frac{1}{u},$$

可知当  $u \rightarrow +\infty$  时  $I(u) \rightarrow 0$ , 由此定出常数  $c = \frac{\pi}{2}$ . 故有

$$I(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u \quad (u > 0).$$

令  $u$  趋于零即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

关于 Dirichlet 积分, N.I.Lobachevsky 借助函数  $\cos ax$  的 Fourier 展开, 还给出一个精巧计算. 在 §12.1 例12.1.2 中, 根据  $\cos ax$  ( $a$ 不是整数) 在  $[-\pi, \pi]$  的展开式, 我们已经得到一个有趣的结果

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}.$$

作变换  $a\pi = t$ , 可得当  $t$  不是  $\pi$  的整数倍时,

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right).$$

利用上式, 可以计算 Dirichlet 积分. 事实上,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{j\pi/2}^{(j+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx,$$

对求和中的每一项, 当  $j = 2n$  ( $n \neq 0$ ) 时, 经过换元  $x = n\pi + t$ ,

$$\int_{2n\pi/2}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt,$$

当  $j = 2n - 1$  时, 经过换元  $x = n\pi - t$ ,

$$\int_{(2n-1)\pi/2}^{2n\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{n\pi - t} dt,$$

所以

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (-1)^n \left( \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) \sin t dt.$$

注意到级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) \sin t$  ( $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ ) 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left( \frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) \sin t \right| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1},$$

所以它在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上一致收敛. 交换上式的积分和求和可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin t \left[ \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{t-n\pi} + \frac{1}{t+n\pi} \right) \right] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t \frac{1}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## 2° Laplace 积分

$$\begin{aligned} I(\beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0), \\ J(\beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

我们曾利用 Fourier 变化讨论过上述两个积分. 这里视积分为含  $\beta$  的参变量积分. 对任意的  $\beta \geq 0$ , 有

$$\frac{|\cos \beta x|}{\alpha^2 + x^2} \leq \frac{1}{\alpha^2 + x^2},$$

故  $I(\beta)$  在  $\beta \in [0, +\infty)$  上一致收敛. 另外, 由例 13.4.3 知,  $J(\beta)$  对任意的  $\beta \geq \beta_0 > 0$  一致收敛. 所以  $I(\beta)$  对  $\beta$  的微商可在积分号下进行,

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = -J(\beta).$$

当  $\beta > 0$  时, 有

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

于是有

$$\begin{aligned} I'(\beta) + \frac{\pi}{2} &= - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \\ &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx, \end{aligned}$$

上式又可对  $\beta$  在积分号下求微商, 于是又有

$$I''(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 I(\beta),$$

这是一个二阶常系数线性微分方程, 求得通解为

$$I(\beta) = c_1 e^{\alpha\beta} + c_2 e^{-\alpha\beta},$$

其中  $c_1, c_2$  为任意常数. 由于对  $\beta > 0$  有

$$|I(\beta)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$



可知  $I(\beta)$  有界, 又因为  $\alpha > 0$ , 所以  $c_1$  必须为零, 故有

$$I(\beta) = c_2 e^{-\alpha\beta}.$$

注意, 到此为止, 运算都是在  $\beta > 0$  的假设下进行的.

下面来确定  $c_2$  的值, 由于积分  $I(\beta)$  在  $\beta \in [0, +\infty)$  上一致收敛, 故  $I(\beta)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 特别在  $\beta = 0$  处右连续, 于是有

$$c_2 = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} I(\beta) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

故得到

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0).$$

上式对  $\beta$  的导数就给出了

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = -I'(\beta) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

### 3° Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

由例13.1.4 可知

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

是条件收敛的. 当  $t > 0$  时, 由

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-vt} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

交换积分次序就得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)t} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + v)^2}. \end{aligned}$$

等式右端的积分关于  $v$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛, 而由例13.4.4 可知等式左端的积分关于  $v$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛. 因此当  $v \rightarrow 0^+$  时, 等式两端的积分号下取极限, 即有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

类似可得

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

还需验证上面交换几次次序的合理性.

首先要验证  $\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} |\sin t| dt$  存在, 因为

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} |\sin t| dt &\leq \int_A^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} dt \right| du \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{du}{u^2+v} < \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

其次要验证  $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} \sin t dt$  在  $u \geq 0$  上, 以及  $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} \sin t du$  在  $t \geq 0$  上的一致收敛性. 这个问题已经在例 13.4.1 得到解决. 至此我们完成了全部证明.

### 习题 13.4

1. 确定下列参变量反常积分的收敛域:

$$(1) \int_0^{+\infty} x^u dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} x^u \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx;$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u \ln x}; \quad (4) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^u x};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)} dx; \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx.$$

2. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx \quad (-\infty < u < +\infty);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx, \quad a) 0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty; \quad b) 0 < \alpha < +\infty.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty);$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx \quad (1 < \alpha < +\infty);$$

$$(5) \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty) \text{ (其中 } p > 0 \text{ 的常数);}$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx \quad (0 \leq p < +\infty).$$

3. 设  $f(x, u)$  在  $a \leq x < +\infty$ ,  $\alpha \leq u \leq \beta$  上连续, 又对于  $[\alpha, \beta)$  上每一  $u$ , 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  收敛, 而当  $u = \beta$  时  $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) dx$  发散, 试证积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta)$  上必不一致收敛.

4. 证明:  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} ue^{-ux} dx$  是  $u > 0$  上的连续函数, 虽然该积分在  $u \geq 0$  上不一致收敛(见例13.4.2).

5. 验证

$$\int_0^1 du \int_0^{+\infty} (2-xu)xue^{-xu} dx \neq \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 (2-xu)xue^{-xu} du$$

并说明理由.

6. 证明  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$  在  $0 \leq \alpha < +\infty$  是连续且可微的函数.

7. 计算下列积分:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx \quad (\alpha, \beta > -1); & \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx \quad (a > -1); \\ (3) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} dx \quad (a > 0); & \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha, \beta > 0); \\ (5) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx; & \quad (6) \int_0^{+\infty} \left[ e^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2} - e^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2} \right] dx \quad (0 < a < b). \end{aligned}$$

8. 利用  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  及  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  计算:

$$\begin{aligned} (1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\sigma > 0); \\ (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\sigma > 0); \\ (3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0); \\ (4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \\ (5) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 是正整数}); \\ (6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

### §13.5 Euler 积分

本节将讨论由 Euler 整理得出的两种含参变量的积分给出的  $\Gamma$  函数和 B 函数和它们的性质.

所谓  $\Gamma$  函数是下列含参变量  $s$  的积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt,$$

所定义的一个关于  $s$  的函数. 而 B 函数则是由含参变量  $p, q$  的积分

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

所定义的一个关于  $p, q$  的二元函数.

#### 13.5.1 $\Gamma$ 函数的性质

**定理 13.32**  $\Gamma(s)$  的定义域是  $(0, +\infty)$ , 而且在  $(0, +\infty)$  中连续.

**证明** 把积分分成两部分,

$$\Gamma(s) = \int_0^1 t^{s-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

对任意的  $\beta > \alpha > 0$ , 当  $\alpha \leq s \leq \beta$ ,  $0 < t \leq 1$  时有

$$t^{s-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1} e^{-t},$$

因积分  $\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 积分  $\int_0^1 t^{s-1} e^{-t} dt$  在  $[\alpha, \beta]$  上不但收敛, 而且一致收敛.

又当  $\alpha \leq s \leq \beta$ ,  $1 \leq t < +\infty$  时有

$$t^{s-1} e^{-t} \leq t^{\beta-1} e^{-t},$$

因积分  $\int_1^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$  收敛, 同样根据 Weierstrass 判别法, 积分  $\int_1^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  也在  $[\alpha, \beta]$  上收敛, 而且一致收敛. 故  $\Gamma(s)$  在  $[\alpha, \beta]$  上有定义, 而且连续. 由于  $\beta > \alpha$  是任意的两个正数, 所以  $\Gamma(s)$  在  $(0, +\infty)$  有定义而且连续.  $\square$

**定理 13.33**  $\Gamma$  函数有任意阶导数, 且导数为

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} (\ln t)^k dt.$$

**证明** 我们需要观察被积函数对  $s$  求  $k$  次导数后的积分

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} (\ln t)^k dt = \int_0^1 t^{s-1} e^{-t} (\ln t)^k dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} (\ln t)^k dt.$$

利用定理13.32 中同样的方法, 有

$$|t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k| \leq (-1)^k t^{\alpha-1} e^{-t} (\ln t)^k \quad t \in [0, 1],$$

$$t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k \leq t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^k \quad t \in [1, +\infty).$$

上面两个不等式的右边都是可积的, 因为当  $t \rightarrow 0^+$  时,  $(\ln t)^k$  趋于无穷的速度, 比任何  $t^\gamma$ ,  $\gamma > 0$  慢. 而当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $t^{s-1}(\ln t)^k$  趋于无穷的速度, 远比不上  $e^t$ . 所以可以证明上述积分在  $(0, +\infty)$  上是一致收敛的, 从而定理成立.  $\square$

**定理 13.34**  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ,  $s > 0$ .

**证明** 由分部积分法得

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \\ &= s\Gamma(s). \end{aligned}$$

$\square$

重复应用上面的递推公式便得

$$\Gamma(s+1) = s(s-1)\cdots(s-n+1)\Gamma(s-n+1), \quad n-1 < s \leq n.$$

在上式中, 因为  $0 < s-n+1 \leq 1$ , 所以对  $s > 1$  的  $\Gamma$  函数值的计算总可以归结为计算  $0 < s < 1$  的  $\Gamma$  函数值.

特别当  $s = n$  ( $n$  为自然数) 时就有

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n!,$$

这是因为  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ .

此外,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  的值亦可直接计算, 只须在积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

中作变量代换  $t = x^2$  即得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

由此又可确定当  $s$  为半整数  $n + \frac{1}{2}$  时  $\Gamma$  函数的值

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$\Gamma$  函数另一重要性质, 即是下面的余元公式.

**定理 13.35** (余元公式) 若  $0 < s < 1$ , 则有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

不难看出, 通过余元公式,  $\Gamma$  函数的函数值计算最终依赖于  $\Gamma$  函数在区间  $(0, \frac{1}{2})$  内的函数值的计算. 特别, 当  $s = \frac{1}{2}$  时它再次给出  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . 我们将在本节最后给出余元公式的详细证明.

**定理 13.36**  $\Gamma$  函数具有下列一种表达方式

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2s-1} e^{-u^2} du, \quad s > 0.$$

只要在  $\Gamma$  函数的积分中做  $t = u^2$  的换元及可证得.

### 13.5.2 B 函数的性质

**定理 13.37**  $B(p, q)$  在  $I = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  中有定义, 满足对称性并且连续.

**证明** 从  $B$  函数的定义

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

可知, 只有当  $p < 1$ ,  $t = 0$  是瑕点; 只有当  $q < 1$ ,  $t = 1$  是瑕点. 故把积分拆成两部分:

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^a t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt + \int_a^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt,$$

其中  $0 < a < 1$ . 当  $t \rightarrow 0$  时,

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim t^{p-1},$$

所以第一个积分当  $p > 0$  时收敛; 当  $t \rightarrow 1$  时,

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim (1-t)^{q-1},$$

所以第二个积分当  $q > 0$  时收敛. 就是说,  $B(p, q)$  的定义域为  $p > 0, q > 0$ .

同时只要在积分中进行换元  $u = 1 - t$ , 就可看出  $B$  函数具有对称性:  $B(p, q) = B(q, p)$ ,  $p > 0, q > 0$ .

在  $I$  上任取一点  $(p_0, q_0)$ , 取  $p_0 > p_1 > 0$ ,  $q_0 > q_1 > 0$ , 则当  $p \geq p_1, q \geq q_1$  时, 无论  $t$  是区间  $(0, 1)$  上怎样的数值, 都有

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leq t^{p_1-1}(1-t)^{q_1-1},$$

由于积分  $\int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{q_1-1} dt$  收敛, 因而积分  $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$  在  $[p_1, +\infty) \times [q_1, +\infty)$  上一致收敛, 故  $B(p, q)$  在  $(p_0, q_0)$  连续, 由  $(p_0, q_0)$  的任意性可知,  $B(p, q)$  在其定义域上连续.  $\square$

**定理 13.38** B 函数还有下列表示, 即对任意的  $p > 0, q > 0$ , 有

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}} dz.$$

或

$$\begin{aligned} B(p, q) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

**证明** 在 B 函数中, 做换元  $t = \frac{1}{1+z}$ , 即有  $1-t = \frac{z}{1+z}$ ,  $dt = -\frac{dz}{(1+z)^2}$ , 即可得到定理中的第一个公式, 做换元  $t = \sin^2 \theta$ , 或  $t = \cos^2 \theta$  即可得到第二个公式.  $\square$

**定理 13.39** 对任意的  $p > 0, q > 0$ , 有

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

因此, B 函数在其定义域内有任意阶导数.

**证明** 当  $p > 0, q > 0$  时, 利用  $\Gamma$  函数在定理 13.36 中的表达方式, 有

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{+\infty} u^{2p-1} e^{-u^2} du \int_0^{+\infty} v^{2q-1} e^{-v^2} dv, \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{2p-1} v^{2q-1} e^{-(u^2+v^2)} du dv \end{aligned}$$

令  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \sin \theta$ , 则

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \rho^{2(p+q)-2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta, \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \int_0^{+\infty} \rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2} d\rho \\ &= B(p, q)\Gamma(p+q) \end{aligned}$$

$\square$

应用  $\Gamma$  函数的递推公式, 立即得到 B 函数的递推公式:

$$B(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} B(p, q).$$

实际上, 我们有

$$\begin{aligned} B(p+1, q+1) &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \\ &= \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} B(p, q). \end{aligned}$$

特别, 当  $p = m - 1$ ,  $q = n - 1$  是正整数时, 有

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

利用 B 函数的性质以及与  $\Gamma$  函数的关系, 可以得到下列关于  $\Gamma$  函数的加倍公式.

**定理 13.40** (倍加公式或 Legendre 公式) 当  $p > 0$  时, 有

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

**证明** 事实上, 在积分

$$\begin{aligned} B(p, p) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1} dt = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \right]^{p-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \right]^{p-1} dt \end{aligned}$$

中作变量代换  $\frac{1}{2} - t = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}$ , 则可算得

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{p-1} d\tau = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right),$$

将这个等式两边的 B 函数用  $\Gamma$  函数来表示就成为

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})},$$

把  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  代入即得加倍公式. □

**例 13.5.1** 求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$$

的值, 其中  $n$  及  $m$  都是非负整数.

**解** 利用定理 13.38 中 B 函数的表式, 令  $x = \frac{n+1}{2}$ ,  $q = \frac{m+1}{2}$  即得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m}{2} + 1)}, \end{aligned}$$

因此利用  $\Gamma$  函数在整数, 或半整数上取值, 就可得到积分的值. 特别当  $m = 0$  时就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$



作为本节的结束, 我们给出余元公式的一种证明.

**余元公式的证明** 当  $0 < s < 1$  时, 利用定理13.39 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(1-s, s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt.$$

因此问题转为如何求上述积分. 显然被积函数满足

$$\frac{t^{s-1}}{1+t} \sim t^{s-1}, t \rightarrow 0; \quad \frac{t^{s-1}}{1+t} \sim t^{s-2}, t \rightarrow +\infty$$

而  $-1 < s-1 < 0$ ,  $s-2 < -1$  因此上述积分是收敛的反常积分. 将积分分成可积的两个部分

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{1+t} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt$$

在区间  $(0, 1)$  上把被积函数展开得

$$\frac{t^{s-1}}{1+t} = t^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n+s-1},$$

如果左端级数可逐项积分, 那么

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{1+t} dt &= \frac{1}{s} + \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n+s-1} dt \\ &= \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{n+s-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s+n}. \end{aligned}$$

对于第二个在  $[1, \infty)$  上的积分, 做变换  $t = \frac{1}{u}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt &= \int_0^1 \frac{t^{(1-s)-1}}{1+t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s-n}. \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2s}{s^2 - n^2}$$

对照第 12 章 §12.1 中的例12.1.2的结果, 上式左端的级数正是  $\frac{\pi}{\sin s\pi}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 展开式. 这样我们就得到了余元公式.

下面的问题是要补充证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n+s-1} = -\frac{t^s}{1+t}, \quad t \in [0, 1)$$

在  $[0, 1]$  上可逐项积分. 注意到级数是  $[0, 1]$  上连续函数  $-t^s$  乘以函数  $\frac{1}{1+t}$  的 Taylor 展式, 而  $\frac{1}{1+t}$  的 Taylor 展式的收敛半径为 1, 因此级数在  $[0, 1)$  的任何闭子区间上一致收敛于和函数

$$S(t) = -\frac{t^s}{1+t}$$

记级数的部分和为

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^k t^{k+s-1} = t^s \frac{(-1)^n t^n - 1}{1+t}$$

因此极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = S(t), \quad t \in [0, 1)$$

并且在  $[0, 1)$  的任何闭子区间上是一致的. 显然

$$|S_n(t)| \leq 2, \quad |S(t)| \leq 2, \quad t \in [0, 1]$$

因此, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$ , 则

$$\left| \int_{1-\delta}^1 (S_n(t) - S(t)) dt \right| \leq 4\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因为级数在  $[0, 1-\delta]$  上一致收敛, 所以存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\left| \int_0^{1-\delta} (S_n(t) - S(t)) dt \right| \leq \int_0^{1-\delta} |S_n(t) - S(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

最, 当  $n > N$  时, 有

$$\left| \int_0^1 (S_n(t) - S(t)) dt \right| < \varepsilon$$

也就是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( -\frac{t^s}{1+t} \right) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-1)^k t^{k+s-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s+n}. \end{aligned}$$

这样, 我们就完成了余元公式的整个证明. □

### 习题 13.5

1. 证明:

$$(1) \Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} x^{2s-1} e^{-x^2} dx \quad (s > 0);$$

$$(2) \Gamma(s) = a^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-ax} dx \quad (s > 0, a > 0).$$

2. 证明:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt \quad (p > 0, q > 0).$$

3. 利用 Euler 积分计算:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx & & (2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx; \\ (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx; & & (4) \int_0^1 x^{n-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (n, m, q > 0); \\ (5) \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt \quad (a > 0); & & (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x dx \quad (|\alpha| < 1); \\ (7) \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}} dx; & & (8) \int_a^b \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^p dx \quad (0 < p < 1); \\ (9) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 (x-1)^2 \cdot \sqrt[n]{\frac{2-x}{x-1}} dx; & & (10) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx. \end{aligned}$$

4. 计算极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sqrt{\alpha} \int_0^1 x^{3/2} (1-x^5)^\alpha dx.$$

5. 设  $a > 0$ , 试求由曲线  $x^n + y^n = a^n$  和两坐标轴所围成平面图形在第一象限的面积.

6. 设  $0 < \alpha < 1$ , 证明

(1) 对于  $x > 0$  有  $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0$ . 并由此推出下列不等式

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b, \text{ 这里 } a > 0, b > 0$$

(2) 设  $x_i \geq 0, y_i \geq 0, (i = 1, \dots, n)$ , 则有 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left( \sum_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha}$$

(3) 设  $f \geq 0, g \geq 0$ , 并且连续, 利用 Hölder 不等式, 通过 Riemann 和取极限的方法, 证明积分形式的 Hölder 不等式

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left( \int_a^b f^{\frac{1}{\alpha}}(x) dx \right)^\alpha \left( \int_a^b g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x) dx \right)^{1-\alpha}$$

以及

$$\int_a^\infty f(x)g(x) dx \leq \left( \int_a^\infty f^{\frac{1}{\alpha}}(x) dx \right)^\alpha \left( \int_a^\infty g^{\frac{1}{1-\alpha}}(x) dx \right)^{1-\alpha}$$

这里均假设所涉及的反常积分是收敛的.

(4) 证明  $\ln \Gamma(x)$  是凸函数.

## 第 13 章综合习题

1. 设函数  $f(x) \geq 0$  并在  $[a, +\infty)$  的任何有限区间上可积, 数列  $\{a_n\}$  单调增并  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 证明: 积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛于  $l$  当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx$  收敛于  $l$ .

2. 证明: 下列积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$$

收敛. 但被积函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$  在  $[0, +\infty)$  上非负、连续、无界 (因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x)$  的极限不为零). 提示: 利用上题结果.

3. 设  $\varphi$  有二阶导数,  $\psi$  有一阶导数. 证明:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4. 证明:  $n$  阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

5. 证明: 对任意实数  $u$ , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{u \cos x} \cos(u \sin x) dx = 1.$$

6. 证明: 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x+u} e^{-ux} dx$  关于  $u$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

7. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cos ux}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

关于  $u$  在  $[\delta, +\infty)$  ( $\delta > 0$ ) 上一致收敛, 但在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

8. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ux}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

关于  $u$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

9. 设  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛. 证明: 函数

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ux dx$$

在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

10. 证明: 函数

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{|\sin t|^x} dt$$

在  $[0, 1)$  上连续.

11. 证明:  $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}$ .

12. 证明:  $\int_0^1 \sin(\pi x) \ln \Gamma(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{\pi}{2} + 1 \right)$ .

13. 证明:  $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$ .

14. 设  $\varphi(t)$  是  $(0, +\infty)$  上正严格递减的连续函数, 且  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$ ,  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ .

设  $\psi(t)$  是  $\varphi(t)$  的反函数. 求证: 存在  $p \in (0, 1)$  使得

$$\int_0^p \varphi(t) dt + \int_0^p \psi(t) dt = 1 + p^2.$$

15. 设  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上连续函数, 且  $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛. 证明: 函数

$$g(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx.$$