一、（20 分）

解：（1）拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+eb(1-\cos\theta)\dot{\varphi}$$

运动积分：

$$p_\varphi=\mathrm{m}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+\ eb(1-\cos\theta)=\mathrm{const.}$$

$$H=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)=\mathrm{const}$$

（2）拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{eb}{r}\frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{r+z}$$

哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left\{\left(p_x+\frac{eb}{r(r+z)}y\right)^2+\left(p_y-\frac{eb}{r(r+z)}x\right)^2+p_z^2\right\}$$

正则方程

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p_z}=\frac{eb}{m}\frac{1}{r^3}\left\{yp_x-xp_y+\frac{eb(r-z)}{r}\right\}$$

二、（20 分）

解：1.

$$H=\frac{1}{2I_1}\left\{\frac{\left(p_\phi-p_\psi\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}+p_\theta^2\right\}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

2\. 令

$$\mathrm{S}=-Et+p_\phi\phi+p_\psi\psi+W_\theta(\theta)$$

$$\frac{1}{2I_1}\left\{\frac{\left(p_\phi-p_\psi\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}+\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right\}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta=E$$

$$\Longrightarrow\frac{dW_\theta}{d\theta}=\pm\sqrt{2I_1\left(E-\frac{p_\psi^2}{2I_3}-mgl\cos\theta\right)-\frac{\left(p_\phi-p_\psi\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$\Longrightarrow\mathrm{S}=-Et+p_\phi\phi+p_\psi\psi\pm\int\sqrt{2I_1\left(E-\frac{p_\psi^2}{2I_3}-mgl\cos\theta\right)-\frac{\left(p_\phi-p_\psi\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}}d\theta$$

三、（20 分）

解：1.

变换关系

$$\begin{cases}x=x_0+\dfrac{p_0}{m}t+\dfrac{1}{2}gt^2\\ p=p_0+mgt\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = x - \dfrac{p}{m}t + \dfrac{1}{2}gt^2 \\ p_0 = p - mgt \end{cases}$$

判断可积性

$$\delta F = p\delta x - p_0\delta x_0 = mgt\delta x + \left(\frac{p}{m}t - gt^2\right)\delta p$$

$$F = mgxt + \frac{p^2}{2m}t - pgt^2$$

所以是正则变换。

2.

（1）第一类生成函数$F_1(t,x,x_0)$

$$\frac{\partial x_0}{\partial p} = -\frac{t}{m} \neq 0$$

存在。

生成函数为

$$\left.\begin{aligned} F_1(t,x,x_0) = F = mgxt + \frac{p^2}{2m}t - pgt^2 \\ p = \frac{m}{t}(x - x_0) + \frac{1}{2}mgt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F_1(t,x,x_0) = \frac{1}{2}mgt(x + x_0) + \frac{m}{2t}(x - x_0)^2 - \frac{3}{8}mg^2t^3$$

哈密顿函数

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ H = \frac{p^2}{2m} - mgx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow K = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}mg(x - x_0) - \frac{m}{2t^2}(x - x_0)^2 - \frac{9}{8}mg^2t^2 \\ x = x_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}gt^2, \qquad p = p_0 + mgt \end{aligned}\right\} \Longrightarrow K = -mg^2t^2$$

（2）第二类生成函数$F_2(t,x,p_0)$

$$\frac{\partial p_0}{\partial p} = 1 \neq 0$$

存在，生成函数为

$$F_2(t,x,p_0) = F + x_0p_0 = mgxt + xp_0 - \frac{1}{2}gt^2p_0 - \frac{p_0^2}{2m}t - \frac{1}{2}mg^2t^3$$

哈密顿函数

$$\left.\begin{aligned} K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ H = \frac{p^2}{2m} - mgx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow K = -mg^2t^2$$

（或：对应同一个生成函数$F(t,x,p)$，故K与第一类变换时相等。）

（3）第三类生成函数$F_3(t,p,x_0)$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = 1 \neq 0$$

存在，生成函数为

$$F_3(t,p,x_0) = F - xp = -\frac{p^2}{2m}t + \frac{1}{2}gt^2p - px_0 + mgtx_0 - \frac{1}{2}mg^2t^3$$

哈密顿函数

$$K = -mg^2t^2$$

（4）第四类生成函数$F_4(t,p,p_0)$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

不存在。

3.

（1）x_0守恒，对应的无穷小对称变换

$$\delta x = [x, \epsilon x_0] = -\frac{t}{m}\epsilon$$

$$\delta p = [p, \epsilon x_0] = -\epsilon$$

对称变换为

$$x' = x - \frac{t}{m}\lambda, \qquad p' = p - \lambda$$

(2)p_0守恒，对应的无穷小对称变换

$$\delta x = [x, \epsilon p_0] = \epsilon$$

$$\delta p = [p, \epsilon p_0] = 0$$

准对称变换为

$$x' = x + \lambda, \qquad p' = p$$

四、（10 分）

解：1.

$$L = \frac{1}{2}\left(4ml^2\dot{\theta}_1^2 + ml^2\dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(4mgl\theta_1^2 + 3mgl\theta_2^2 - 4mgl\theta_1\theta_2\right)$$

2.

$$M = ml^2\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad K = mgl\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}$$

$$\left[\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\vec{a} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}$$

五、（15 分）

解：相空间的莫培督原理（以x为参数）

$$\delta\int_A^B \left(p_x + p_y y'\right)dx = 0$$

等能约束

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)-mgy=E\Longrightarrow y=\frac{1}{2m^2g}\left(p_x^2+p_y^2\right)-\frac{E}{mg}$$

消去y,得两个欧拉方程

$$\begin{cases}\dfrac{1}{m^2g}\dfrac{d}{dx}\left(p_xp_y\right)=1+\dfrac{1}{m^2g}p_yp_x'\\ 0=\dfrac{1}{m^2g}p_xp_x'\end{cases}$$

$$\Longrightarrow p_x=p_{x0}=\text{constant}\Longrightarrow p_y=\frac{m^2g}{p_{x0}}x+p_{y0}$$

于是

$$y(x)=\frac{m^2g}{2p_{x0}^2}x^2+\frac{p_{y0}}{p_{x0}}x+\frac{1}{mg}\left(\frac{p_{x0}^2+p_{y0}^2}{2m}-E\right)$$

$$p_y(x)=\frac{m^2g}{p_{x0}}x+p_{y0}$$

$$p_x(x)=p_{x0}$$

六、（15 分）

解：1.

质心坐标(x,y)，相对运动采用平面极坐标(r,θ)，

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{1}{2}k(r-l)^2$$

其中折合质量

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

2.

循环坐标$\{x,y,\theta\}$

$$p_x=(m_1+m_2)\dot{x},\qquad p_y=(m_1+m_2)\dot{y},\qquad p_\theta=\mu r^2\dot{\theta}$$

$$L_{\text{eff}}=L-p_x\dot{x}-p_y\dot{y}-p_\theta\dot{\theta}=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2-\frac{p_\theta^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}-\frac{1}{2}k(r-l)^2-\frac{p_x^2+p_y^2}{2(m_1+m_2)}$$

3. 平衡点

$$\mathrm{V}_{\text{eff}}(r)=\frac{p_\theta^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2}k(r-l)^2$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr}=-\frac{p_\theta^2}{\mu}\frac{1}{r^3}+k(r-l)=0\Longrightarrow r=r_0(\text{可不解})$$

$$V_{eff}\approx V_0+\frac{1}{2}\left(\frac{3p_\theta^2}{\mu}\frac{1}{r_0^4}+k\right)(r-r_0)^2$$

微振动频率

$$\omega^2=\frac{1}{\mu}\left(\frac{3p_\theta^2}{\mu}\frac{1}{r_0^4}+k\right)$$