中国科学技术大学 2022年秋季学期
(数学分析(B2) 期末考试试卷, 2022 年 7 月 1 日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分

一. (10分) 求 $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

解答: $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

二. (10分) 求函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\dfrac{1}{3}\sin 2x\ \ (x\in[-\pi,\ \pi])$ 的 Fourier 系数.

解答: 因为

$$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{3}\sin 2x=\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 2x,$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 $a_2=1, b_2=\frac{1}{3}$, 其它 Fourier 系数都为零.

三. (12分) 求向量场 $\mathbf{v}=(y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$ 沿曲线 $L:\ \mathbf{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ t)\ \ (t\in[0,\ 2\pi])$ 的积分, 这里 t 是曲线的正向参数.

解答: 向量场 $\mathbf{v}$ 有势函数 $\varphi(x,y,z)=xy+yz+zx$, 因此, 所求的积分为

$$\varphi(\mathbf{r}(2\pi))-\varphi(\mathbf{r}(0))=\varphi(1,0,2\pi)-\varphi(1,0,0)=2\pi.$$

四. (15分) 将函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & 1\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数, 由此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

解答: 因为 f 是偶函数, 所以 $b_n=0,\ n=1,2,\cdots$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin n}{n},n=1,2,\cdots;$$

故, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n}{n\pi}\cos nx.$$

因为 0 是 f 的连续点, 且 $f(0)=1$, 所以

$$1=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n}{n\pi},$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}.$$

再根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}.$$

五. (15分) 求向量场 $\mathbf{v}=xy^2\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}+zx^2\mathbf{k}$ 在球面 $S:\ x^2+y^2+z^2=z$ 的积分, 曲面 S 的正向是外法向.

解答: 所求积分为

$$\begin{aligned}I&=\iint_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_V\left(y^2+z^2+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\qquad\text{(Gauss 公式)}\end{aligned}$$

这里 V 是 S 围成的球体.

V 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=\frac{1}{2}+r\cos\theta,\end{cases}$$

这里 $(r,\theta,\varphi)\in F=[0,\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$. 于是

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_F \left(\frac{1}{4}+r^2+r\cos\theta\right)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \left(\frac{1}{4}+r^2+r\cos\theta\right)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \left(\frac{1}{4}+r^2\right)\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}r^2+r^4\right)\mathrm{d}r \int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right)\cdot 2=\frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

六. (15分) 设常数 a,b 都是正实数, 平面向量场 $\mathbf{v}=\dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{a^2x^2+b^2y^2}$.
(1) 求 $\mathbf{v}$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ 的所有势函数;
(2) 证明 $\mathbf{v}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.

解答: (1)

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v) &= \int_{(1,0)}^{(u,v)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_{(1,0)}^{(u,0)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{(u,0)}^{(u,v)} \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^v \frac{u}{a^2u^2+b^2y^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\frac{bv}{au}.
\end{aligned}$$

故, 所求的势函数为 $\varphi(x,y)=\frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}+C$, 其中 C 是任意常数.

(2) 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=1$, 所围成的区域为 D, 则 D 的面积为 $\sigma(D)=\frac{\pi}{ab}$. 向量场 $\mathbf{v}$ 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\begin{aligned}
&\oint_L \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}y \\
=&\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\sigma(D)=\frac{2\pi}{ab}\neq 0.
\end{aligned}$$

故, $\mathbf{v}$ 不是区域 $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ 上的保守(有势)场.

七. (15分) 证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

解答: 设 $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$. 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\sqrt{x}} = 0$, 所以存在常数 $C > 0$ 使得 $0 < \dfrac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2} < C\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

记 $f(x,\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}$. 则对于 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, 有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\right| \leqslant \frac{2}{\alpha_0(1+x^2)}.$$

由此可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x,\ (\alpha > 0).$$

对于 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \neq 1$ 有

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

易验证, 对 $\alpha = 1$ 也有 $I'(\alpha) = \frac{\pi}{1+\alpha}$. 由于 $I(0) = 0$. 故,

$$I(\alpha) = \pi\ln(1+\alpha)\ (\alpha \geqslant 0).$$

于是所求反常积分的值为 $\pi\ln 3$.

八. (8分) 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有二阶连续偏导数, 并且对任意点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=f(P_0), \tag{1}$$

其中 S 是以 P_0 为球心, r 为半径的球面. 求证: f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

证明: 对任意 $r>0$ 取球面 S 的参数方程为

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\ z=z_0+r\cos\theta,$$

其中 $(\theta,\varphi)\in D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$. 记

$$P=(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta).$$

根据条件 (1), 有

$$\iint_D f(P)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4\pi f(P_0). \tag{2}$$

这是含参变量 r 的积分. 关于变量 r 求导, 得

$$\iint_D\left(\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P)+\sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P)+\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0.$$

这等价于

$$\iint_S\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以根据 Gauss 公式, 有

$$\iiint_V\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

其中 V 是 S 围成的球体. 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in V$ 使得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(\xi)=0.$$

令 $r\to 0^+$, 即得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(P_0)=0.$$

由于 P_0 是任意的, 故,

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$