

中国科学技术大学
2022 年春季考试试卷
量子力学 C



注意事项

- 本试卷共 6 大题, 满分 100 分. 解答非选择题时应写出必要的文字说明, 方程式和主要演算步骤.
- 请在测试限制的时间内提交, 逾期会被标记并可能影响成绩.
- 以一个 PDF 格式的文件形式提交.
- 提交时请确认 (每个单独) 附件上写有自己的姓名和学号.

1. 选择题 每小题 5 分. 在下面每小题中选择一个你认为正确的答案, 不选, 错选或多选均不得分.

30分

1.1 设一系统处于角动量算符 L^2 和 L_z 的本征态 $|l, m\rangle$, 对应于 L^2 和 L_z 的本征值 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. 那么对该系统测量 L_x^2 的平均值是

- 0
- $m^2\hbar^2$
- $l(l+1)\hbar^2$
- $\frac{1}{2}\{l(l+1) - m^2\}\hbar^2$

1.2 q 和 p 是两个线性算符, 它们有对易关系 $qp - pq = i\hbar$, 那么 $q^2p^3 - p^3q^2$ 等于

- 0
- $6i\hbar qp^2$
- $6i\hbar qp^2 + 6\hbar^2 p$
- $6i\hbar qp^2 + 12\hbar^2 p$

1.3 对于定态, 对应的 Hamilton (哈密顿) 量为恒量, 某一

时刻测量系统的能量, 其平均值

- 随时间是变化的
- 不随时间变化
- 和初始时刻的具体状态有关
- 不能确定

1.4 氢原子的能级公式为 $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 其中 m 和 e 分别是电子的质量和电荷, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h 是 Planck 常数). 对于电子偶素体系 ($e^+ - e^-$ 束缚体系), 其能级为

- $E_n = -\frac{me^4}{8\hbar^2 n^2}$
- $E_n = -\frac{me^4}{4\hbar^2 n^2}$
- $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$
- $E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2 n^2}$

1.5 引发原子能级精细结构的因素是

- a. 轨道角动量和电子自旋
- b. 磁场和轨道角动量
- c. 磁场和电子自旋
- d. 磁场, 轨道角动量和电子自旋

粒子系统可能的量子态数目为

- a. $n(n-1)/2$
- b. $n(n+1)/2$
- c. n^2
- d. $n!$

1.6 两个全同玻色 (Bose) 子组成的系统, 不考虑粒子间的相互作用, 且每个粒子的量子态数目为 n . 那么该全同

10分 2. 一个三维各向同性谐振子的能量本征值是 $(n + \frac{3}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 试求能级简并度.

15分 3. 电子的自旋算符可以用无量纲算符 (Pauli 算符) σ 来表示, 即 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\hbar\sigma$. 求在 σ_z 表象中 σ_y 的本征态.

提示: 算符 σ 有性质 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$, $\sigma \times \sigma = 2i\sigma$

15分 4. 对一特定定态系统, 联系于一物理量的算符 A 和 Hamilton 量 H 不对易. A 有两个本征值 a_1 和 a_2 , 对应的本征函数分别是

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2), \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2),$$

而 u_1 和 u_2 分别是 Hamilton 量 H 的本征函数, 对应于本征值 E_1 和 E_2 . 设系统初始时刻 ($t = 0$) 处于态 ϕ_1 . 求在 t 时刻 A 的平均值.

15分 5. 设 $H = E + V$,

$$E = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (a, b \text{ 为实数}).$$

用微扰论求能级修正 (准确到二级近似), 并与严格解 (把 H 矩阵对角化) 比较.

15分 6. 某个特殊的一维势阱具有下列束缚态单粒子能量本征函数: $\psi_a(x), \psi_b(x), \psi_c(x), \dots$, 其中 $E_a < E_b < E_c < \dots$. 两个没有相互作用的粒子置于该势阱中. 对下列各种情况下, 求这个双粒子系统可能达到的两个最低能级的总能量值; 与上述两个能级对应的所有可能的波函数 (用 ψ 表示空间部分, $|j, m\rangle$ 表示自旋部分, 其中 j 是总自旋量子数, m 是总自旋的 z 分量量子数); 上述能级各自的简并度.

- a. 两个自旋为 $1/2$ 的可区分粒子;
- b. 两个自旋为 $1/2$ 的全同粒子;
- c. 两个自旋为 0 的全同粒子.