2017年秋季学期中国科大数学分析(B1)
期中考试试卷解析及评分细则

注意事项：

1. 判分如与评分细则有出入，请于2017.11.17上课时间和2017.11.18习题课时间来询问，原则上是会重新改一遍那道题，因此查卷有风险，找分需谨慎！

2. 有些题目做法较多，解析中给出的只是一种参考做法.

3. 对于评分细则中未出现的错误，可能也会酌情扣分，有疑问也可以来问.

4. 评分细则最终解释权归任课教师所有.

吴天 2017.11.17

中国科学技术大学2017-2018学年第一学期
数学分析(B1)期中考试试卷

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分

1. (10分)用数列极限的定义证明$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2(-1)^n}=\frac{1}{3}$.

【证明】$\forall\epsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，$n>N$时，$\left|\frac{n}{3n+2(-1)^n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2}{9n+6(-1)^n}\right|\le\frac{1}{n}<\epsilon$.　□

【评分细则】

I. ϵ和N顺序弄反产生逻辑错误，扣2-5分.

II. 提及n充分大，之后再取N产生的逻辑错误，扣2分.

III. 笔误扣1分，放缩错误扣2分.

2. (8分)写出一个在(0,1]上连续且有界，但不一致连续的函数，并说明理由.

【解】考察$f(x)=\sin\frac{1}{x}$. 由于$f(x)$是初等函数，故在(0,1]上连续. 又$|f(x)|\le 1$，故$f(x)$有界.

考察$x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. 则$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$，且$|f(x_n)-f(y_n)|\equiv 1$.　□

【评分细则】

I. 选取的$f(x)$不满足提干中三个条件的，本题直接0分.

II. 对于子列选取不恰当者，扣4-6分.

III. 计算了$|f(x_n)-f(y_n)|=$什么，但是算错的，以及不等式放缩出现错误的扣1-2分.

IV. 使用定义证明连续性，但是出现错误者，扣2-3分.

V. 通过说明$f(x)$取值范围来证明$f(x)$有界，但是取值范围写错的，扣2分.

3. (32分=8分×4)求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\dfrac{1}{n})^n\right)^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)\ln(1+x^2)}{(\sin x-x\cos x)\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x}{2}\cdot x^2}{\sin x(\tan x-x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^3}{x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x}=\dfrac{3}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o(\dfrac{1}{x^2}))\right)=\dfrac{1}{2}.$

【评分细则】

I. 犯原则性错误，比如泰勒展开式写错，或不是乘积形式的情况将等价无穷小直接替换，进而导致结果错误的，该小题直接0分.

II. 在使用洛必达法则求导出现错误的情况下，结果错误扣6-8分，结果正确扣1-4分.

III. 泰勒展开未出现余项，扣2分；在非乘积形式下作无穷小替换，未造成结果错误，扣2-4分.

IV. 变量代换作错，位于前半部分或产生较大影响的扣4-6分，后半部分且未产生较大影响的扣1-3分.

V. 对于所用知识点全部运用正确，但在倒数几步由于简单计算失误导致结果错误的，扣1-3分.

4. (12分)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$.

【解】 $\dfrac{1}{2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}\to\dfrac{1}{2}\ (n\to\infty).$

由夹逼原理：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}=\dfrac{1}{2}.$

【评分细则】

I. 对于出现$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$ $\le$或$\ge$某个式子的，以及夹逼原理表述不准的，扣4分.

II. 结果错误，以及不等式放缩发生严重错误，仅一侧放缩正确得4分，两侧均不正确本题直接0分.

III. 不等式放缩发生错误，但主体思路正确的且答案正确扣2-4分.

IV. 使用泰勒级数做法但未说明清楚余项的，结果正确扣1-2分，结果错误得1-2分.

5. (15分)求常数a,b使得$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\leq 0\end{cases}$在定义域内可导.

【解】由$f(x)$在0处连续，$f(0^+)=0=f(0^-)=b$，即$b=0$. 又由$f(x)$在0处可导，知：

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}=a^2=f'_-(0)=2a-1.$$

进而$a=1$. 综上所述，$a=1$，$b=0$.

【评分细则】

I. a计算正确给7分，b计算正确给8分，以下的评分准则均在此基础上进行调整.

II. 右导数未按照定义计算，而是使用导数的右极限计算且未证明二者相等的，扣4分.

III. $b=0$是通过对$f'_+(0)$存在性得到，并对未证明极限是否存在的项使用极限四则运算的，扣6-8分.

6. (15分)设函数$y=y(x)$在$\mathbb{R}$上可导且满足方程$y+2^y-x-\sin x=1$. 求$y'(0)$.

【解】令$x=0$，有：$y(0)+2^{y(0)}=1$，由于$(x+2^x)'=1+2^x\ln 2>0$，故其严格递增，从而$y(0)=0$是唯一解.

在题设两侧对x求导，有：$y'+2^y\ln 2\cdot y'-1-\cos x=0$. 令$x=0$，有：$y'(0)=\dfrac{2}{1+\ln 2}$.

【评分细则】

I. 结果中计算正确但保留$y(0)$者，扣5分.

II. 证明$y(0)=0$时未说明单调性者，扣3分.

III. 求导出现错误，扣3-5分；最后一步失误算错，扣2分.

IV. 使用导数定义进行计算，并将$2^y\sim 1$者，扣6分.

7. (8分)设$f(x)$在区间$[a,b]$可导. 假设存在$x_0\in(a,b]$使得$f'(x_0)=0$. 求证：存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

【证明】考察$g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}(f(x)-f(a))$. 只需证$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $g'(\xi)=0$即可.

若存在$\eta\in(a,b]$，s.t. $f(\eta)=f(a)$，则由Rolle定理，$\exists\xi\in(a,\eta)\subseteq(a,b)$，s.t. $g'(\xi)=0$.

如果对$\forall x\in(a,b]$，$f(x)\neq f(a)$，由f的连续性，不妨设$f(x)>f(a)$，从而$g'(x_0)<0$.

又由Lagrange中值定理，知：$\exists\eta\in(a,b)$，$(b-a)g'(\eta)=g(b)-g(a)$，进而$g'(\eta)>0$.

由Darboux定理知，导函数具有介值性，从而$\exists\xi$介于x_0与η之间，s.t. $g'(\xi)=0$. $\square$

【评分细则】

I. 辅助函数$g(x)$写对的，得3分.

II. 凡是出现$f'(x)$连续者，本题直接0分.

III. 由于本题作为压轴题目，难度偏大，其余情况会有酌情给分.