

大作业 完整版本

2022 年秋季学期

版本日期: 2022-11-30

允许讨论, 禁止抄袭

说明: 大作业提交时间为: 12 月 24 日. 如果选择“自由选择”环节的无人机实验的同学, 需在实验前完成大作业的控制设计以及 Matlab 或 Python 仿真, 详细细节可以在实验完成后补齐于 12 月 24 日提交.

大作业用到的旋翼无人机参数如下:

质量 (m)	0.03 [kg]	阻力系数 (k_i) $i \in \{x, y, z\}$	4.5×10^{-3} [kg/s]
重力加速度 (g)	9.81 [m/s ²]	阻力矩系数 (k_i) $i \in \{p, q, r\}$	4.5×10^{-4} [kg/s]
惯性 (I_x)	1.5×10^{-5} [m · m ²]	惯性 (I_y)	1.5×10^{-5} [m · m ²]
惯性 (I_z)	3×10^{-5} [m · m ²]	悬停高度 z_d	2 m
偏航角 (ψ)	$\frac{\pi}{4}$ [rad]		

假设四旋翼无人机在 z_d 高度以偏航角 ψ_d 悬停, 即 $[x, y, z, \psi]^T = [0, 0, z_d, \psi_d]^T$. 此时平移速度为 $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T = [0, 0, 0]^T$, 旋转角速度为 $[p, q, r]^T = [0, 0, 0]^T$. 此外, 滚转角和俯仰角均为零, 即 $[\phi, \theta]^T = [0, 0]^T$. 升力 u_1 等于四旋翼无人机的重力从而使得旋翼无人机不会下降高度. 滚转、俯仰以及偏航力矩均为零, 即 $u_2 = u_3 = u_4 = 0$.

取状态向量

$$\mathcal{X} = [x, y, \Delta z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \phi, \theta, \Delta, p, q, r]^T$$

输入向量

$$\mathcal{U} = [\Delta u_1, u_2, u_3, u_4]^T$$

以及输出向量

$$\mathcal{Y} = [x, y, \Delta z, \Delta\psi]^T$$

其中,

$$\Delta z = z - z_d, \quad \Delta\psi = \psi - \psi_d, \quad \Delta u_1 = u_1 - mg$$

四旋翼无人机线性化动力学模型为如下状态空间表达式

$$\dot{\mathcal{X}} = A\mathcal{X} + B\mathcal{U}, \quad \mathcal{Y} = C\mathcal{X}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_x}{m} & 0 & 0 & g \sin(\psi_d) & g \cos(\psi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_y}{m} & 0 & -g \cos(\psi_d) & g \sin(\psi_d) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_z}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_p}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_q}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_r}{I_z} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 利用 Matlab 或 Python 计算矩阵 A 的特征值, 并判断系统的稳定性.
2. 给出从输入 $\Delta U_1(s)$ 到输出 $\Delta Z(s)$ 的高度控制子系统传递函数 $G_z(s)$, 以及从输入 $U_4(s)$ 到输出 $\Delta \Psi(s)$ 的偏航角控制子系统传递函数 $G_\psi(s)$.
3. 考虑四旋翼无人机的偏航角控制子系统 $G_\psi(s)$. 用 Matlab 或 Python 绘制偏航角的时间响应曲线:
 - 1) 脉冲输入: $u_4(t) = 3 \times 10^{-5} \cdot \delta(t)$;
 - 2) 阶跃输入: $u_4(t) = 3 \times 10^{-5} \cdot 1(t)$;
 - 3) 正弦输入: $u_4(t) = 3 \times 10^{-5} \sin(t) \cdot 1(t)$.

根据仿真, 给出偏航角在脉冲输入下的稳态值. 用终值定理验证该稳态值.

4. 考虑四旋翼无人机的高度控制子系统 $G_z(s)$. 假设选取比例控制器 $\Delta u_1 = -k\Delta z$, $k > 0$. 选取增益 k 使得高度时间响应曲线满足以下要求 (初始条件选为 $\Delta z(0) = 1$, $\dot{z}(0) = 0$):
 - 1) 高度响应曲线发散;
 - 2) 高度响应曲线收敛到非零稳态值;
 - 3) 高度响应曲线收敛到零且没有振荡.
 - 4) 高度响应曲线经过振荡后收敛到零.

并用 Matlab 或 Python 绘制高度时间响应曲线:

5. 考虑阻力系数为零的四旋翼无人机高度控制子系统 $k_z = 0$. 假设控制输入 Δu_1 存在 T s 时滞 (如从地面站计算的控制指令发送到无人机的通讯延时). 此时, 高度传递函数为 $\Delta(z) = \frac{e^{-Ts}}{s^2} \Delta U_1(s)$. 用一阶 Pade 近似 $e^{-Ts} = \frac{2-Ts}{2+Ts}$ 可以将上述传递函数近似为

$$\Delta Z(s) = \frac{2 - Ts}{ms^2(2 + Ts)} \Delta U_1(s)$$

是否存在增益的变化范围使得在如下结构的反馈控制器 $K(s)$ 下高度子系统是稳定的 ($T = 1 \times 10^{-3}$ s)

- 1) $K(s) = k_p$
- 2) $K(s) = k_p + k_d s$

如果存在, 在增益容许范围内选择一个增益, 用 Matlab 或 Python 绘制高度时间响应曲线 (初始值选为 $\Delta z(0) = -1, \dot{z}(0) = 0$).

5. 考虑阻力系数为零 (即 $k_z = 0$) 的四旋翼无人机高度控制子系统. 假设控制输入 Δu_1 存在 T s 时滞 (如从地面站计算的控制指令发送到无人机的通讯延时). 此时, 高度传递函数为 $\Delta Z(s) = \frac{e^{-Ts}}{s^2} \Delta U_1(s)$. 用一阶 Pade 近似 $e^{-Ts} = \frac{2-Ts}{2+Ts}$ 可以将上述传递函数近似为

$$\Delta Z(s) = \frac{2 - Ts}{ms^2(2 + Ts)} \Delta U_1(s)$$

是否存在增益的变化范围使得在如下结构的反馈控制器 $K(s)$ 下高度子系统是稳定的 ($T = 1 \times 10^{-3}$ s)

- 1) $K(s) = k_p$
- 2) $K(s) = k_p + k_d s$

如果存在, 在增益容许范围内选择一个增益, 用 Matlab 或 Python 绘制高度时间响应曲线 (初始值选为 $\Delta z(0) = -1, \dot{z}(0) = 0$).

6. 考虑阻力系数为零 (即 $k_z = 0$) 的四旋翼无人机高度控制子系统 $\Delta Z(s) = \frac{1}{ms^2} \Delta U_1(s)$. 研究 PD 和 PI 控制器对高度控制子系统的稳定性及性能的影响. 其中, PD 控制使得开环传递函数为 $G_{PD}(s) = k_p \frac{T_d s + 1}{ms^2}$, PI 控制使得开环传递函数为 $G_{PI}(s) = k_p \frac{s + p_i}{ms^3}$.

- 1) 分别针对如下情形调用 Matlab 的 rlocus 绘制系统以 k_p 为变化参数的根轨迹
- (I) $T_d = 1, T_d = 2, T_d = 4$.
- (II) $p_i = 1, p_i = 2, p_i = 4$.
- 2) 根据上述根轨迹的图形, 回答以下问题:
- (I) PD 控制器是否可以使得闭环系统是稳定的?
- (II) 当微分时间常数 T_d 增大时, 关于闭环系统的极点, 你能得到什么结论?
- (II) PI 控制器是否可以使得闭环系统是稳定的?
- (IV) 当积分时间常数 p_i 增大时, 关于闭环系统的极点, 你能得到什么结论?
7. 考虑带有阻力的四旋翼无人机高度控制子系统 $\Delta Z(s) = \frac{1}{ms(s+\frac{k_z}{m})} \Delta U_1(s)$. 用 PD 控制器对高度控制子系统进行控制, 使得开环传递函数为 $G_{PD}(s) = k_p \frac{T_d s + 1}{ms(s+\frac{k_z}{m})}$. 当 $k_p = 0.03$ 时, 分别针对微分时间常数 $T_d = 1, T_d = 2, T_d = 4$ 调用 Matlab 的 bode 指令绘制开环传递函数的伯德图. 当微分时间常数 T_d 增大时, 增益裕度和相位裕度如何变化?
8. 当偏航角 $\psi_d = 0$, 无人机在 x 方向的动力学可以通过一个单输入单输出系统描述. 具体地, 可以表达为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_x}{m} & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_q}{I_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_y} \end{bmatrix} u_3, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ q \end{bmatrix}$$

其中, u_3 是由桨叶产生的俯仰力矩. 大多数商业无人机 (包括 Crazyflie) 无法直接获得 u_3 , 而是设计一个期望的俯仰角速率 q_{red} 作为输入. 机载控制单元能够很快跟踪 q_{red} , 这样用户可以假定 $q \approx q_{ref}$. 这样, 以 $[x, \dot{x}, \theta]$ 为状态, 以 q 为输入可以进一步简化 x 轴方向的动力学为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_x}{m} & g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} q, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \end{bmatrix}$$

- 1) 写出从输入 q 到输出 x 的 x 轴方向动力学模型的传递函数 $G_x(s)$.

2) 设计如下形式的超前补偿器

$$K(s) = k \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad 0.1 \leq \alpha < 1$$

使得无人机 x 轴方向动力学子系统至少满足以下要求中的任意三个要求？

- (I) 渐近稳定;
- (II) 对阶跃参考信号的稳态跟踪误差为零;
- (III) 穿越频率不小于 1.5 rad/s;
- (IV) 相位裕度不小于 40° .

是否存在超前补偿使得系统满足以上四个要求？

3) 用 Matlab 或 Python 绘制无人机 x 轴方向动力学子系统的单位阶跃响应曲线.

9. 在实际中, 运动捕捉系统能够提供 Crazyflie 无人机的俯仰角信息. 基于此, 我们可以采用级联控制结构实现对 x 轴方向的控制. 如图 1 所示, 内环控制器 (可以简单选择为比例控制) 能够快速跟踪期望的俯仰角 θ_{ref} , 外环控制器通过 θ_{ref} 控制 Crazyflie 无人机 x 轴方向的位置.

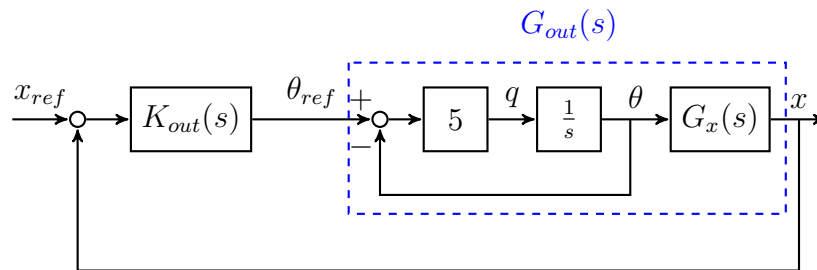


图 1. 级联控制结构

1) 针对无人机 x 轴方向动力学与内环控制组成的系统 $G_{out}(s)$, 设计如下形式的超前补偿器

$$K_{out}(s) = k \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad 0.1 \leq \alpha < 1$$

使得无人机 x 轴方向动力学子系统满足以下要求

- (I) 渐近稳定;
- (II) 对阶跃参考信号的稳态跟踪误差为零;
- (III) 穿越频率不小于 1.5 rad/s.

- 2) 用 Matlab 或 Python 绘制无人机 x 轴方向动力学子系统的单位阶跃响应曲线.
- 3) 从超调量和上升时间等角度, 比较本部分控制与 8 中控制得到的闭环系统性能.