密 封 线 内 不 要 答 题

中国科学技术大学数学科学学院

2021 ～ 2022学年 第 1 学期期末考试试卷

■A卷　　□B卷

课程名称 计算方法(B)　　课程编号 001511

考试时间 2022年1月　　考试形式 闭卷

姓名 李治平　　学号 PB19020649　　学院 物

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总计
得分	9	9	10	12	15	15	5	15	
评卷人									

90

注意事项:

(1) 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。

(2) 本试卷共 8 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。

(3) 除特殊说明，计算过程和结果不进行近似。

1、 (9分) 使用 Doolittle分解算法分解如下矩阵

9

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

即求解单位下三角矩阵L和上三角形矩阵U，使得A=LU。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & \frac{10}{7} & -\frac{4}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{7} & \frac{10}{7} & -\frac{4}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{23} & -\frac{16}{23} & \frac{5}{23} & 1 \end{array}\right)$$

U　　L^{-1}

得 $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{23} & 1 \end{pmatrix}$，$U = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{23}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{132}{23} \end{pmatrix}$

9

2、(9分) 设$f(x)=cx^n+x\ (c\neq 0), x_0<x_1<\ldots<x_n\ (n>2)$为一组相异节点，试证明：

(1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=1$;

(2) $f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=c\sum_{k=0}^{n-1}x_k$。

(1): $n=1$时, $\sum_{k=0}^{1}\frac{x_k}{x_k-x_0\cdots}=\frac{x_0}{x_0-x_1}+\frac{x_1}{x_1-x_0}=1$

假设 $n\le m$ 时, 均有 $\sum_{k=0}^{m}\frac{x_k^m}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)}=1$

则 $n=m+1$ 时, $\sum_{k=0}^{m+1}\frac{x_k^{m+1}}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)(x_k-x_{m+1})}$

$=\sum_{k=0}^{m}\frac{x_k}{x_k-x_{m+1}}\frac{x_k^m}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)}+\frac{x_{m+1}^{m+1}}{(x_{m+1}-x_0)\cdots(x_{m+1}-x_m)}$

$=\sum_{k=0}^{m}\left(1+\frac{x_{m+1}}{x_k-x_{m+1}}\right)\frac{x_k^m}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)}+\frac{x_{m+1}^{m+1}}{(x_{m+1}-x_0)\cdots(x_{m+1}-x_m)}$

$=\sum_{k=0}^{m}\frac{x_k^m}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)}+x_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{x_k^m}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{m+1})}$

$=$ ~~由归纳假设~~

设$g(x)=x^n$, 则$g(x)$的n阶差商为 $g[x_0,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{g(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

根据差商与导数的关系, 有 $g[x_0\cdots x_n]=\frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}$, $x_0\le\xi\le x_n$

由$g(x)=x^n$, $g^{(n)}(x)=n!$

所以 $g[x_0,\ldots x_n]=\frac{n!}{n!}=1$

所以 $\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=1$

(2):

$f[x_0\cdots x_{n-1}]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n-1})}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{cx_k^n+x_k}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n-1})}$

使用$x_0,\cdots x_n$共n+1个节点进行牛顿插值,

$N(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots x_{n-1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})+f[x_0,\cdots x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

是个n次多项式 ; 0次 ; 1次 ; $n-1$次 ; n次

插值多项式是n次多项式, 所以$N(x)=f(x)=cx^n+x$

对上式求n-1阶导, $f^{(n-1)}(x)=c\times\frac{n!}{1!}x=c\times(n!)x$, 误差为0,

插值多项式中, 前面的项小于n-1阶, 求n-1阶导为0, $f[x_0,\ldots x_{n-1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})$求n-1阶后为$(n-1)!f[x_0,\ldots x_{n-1}]$,

$(f[x_0,\ldots x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}))^{(n-1)}$阶 可以展开为$f[x_0,\ldots x_n]\times(x^n-(x_0+\cdots+x_{n-1})x^{n-1}+\cdots\cdots)$,

得到: 利用 $f[x_0,\ldots x_n]=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=C$

比较得到: $f[x_0,\ldots x_{n-1}]=C(x_0+\ldots+x_{n-1})=C\sum_{k=0}^{n-1}x_k$, 见背面

3、（10分）按下列数据，用最小二乘法作出形如 $f(x)=ae^{b\sqrt{x}}$ 的拟合函数。(注意：计算过程保留4位小数)

10

i	1	2	3	4
x_i	1	4	9	25
y_i	2.00	4.00	6.00	8.00

设 $y=ae^{b\sqrt{x}}$，则 $\ln y=\ln a+b\sqrt{x}$，

设 $Y=\ln y$，$\sqrt{x}=X$，则相应数据：

i	1	2	3	4
X	1	2	3	5
Y	0.6931	1.3863	1.798	2.0794

$Y=A+BX$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6931\\1.3862\\1.7917\\2.0794\end{pmatrix},$$

使用 $M^TM\cdot\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=M^T(Y)$，

$$\begin{pmatrix}4&11\\11&39\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.9506\\19.2382\end{pmatrix}，$$ 得 $A=0.5844$，$B=0.3285$

$\ln y=\cancel{0.3466+0.4564\sqrt{x}}$　　$\ln y=0.5844+0.3285\sqrt{x}$

$y=\cancel{1.4142e^{0.4564\sqrt{x}}}$　　$y=1.7939e^{0.3285\sqrt{x}}$

4、（12分）考虑如下矩阵

12

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 写出使用规范运算的反幂法计算A的特征值时的迭代格式；

(2) 取初始值$X^{(0)} = (1,1)^T$，计算矩阵A按模最小的特征值及其对应的特征向量。（注意：迭代收敛要求精确到小数点后2位，总迭代次数不超过8次。）

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$， $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$，

取 X_0，开始计算：$Y_0 = X_0$

$X_{k+1} = A^{-1} Y_k$，即解 $A X_{k+1} = Y_k$，得到 X_{k+1}，

然后 $Y_{k+1} = X_{k+1} / \max\{|x_{(k+1)i}|\}$，

X_{k+1}中绝对值最大的分量，使Y_{k+1}分量绝对值最大为1

然后比较 X_{k+1} 与 Y_k，或 X_{k+1} 与 X_k，进行判断

(2)：$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，代入，$X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$，$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，

$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ -0.06 \end{pmatrix}$，$Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.105 \end{pmatrix}$

$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.567 \\ -0.134 \end{pmatrix}$，$Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.237 \end{pmatrix}$

$X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5819 \\ -0.1638 \end{pmatrix}$，$Y^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.281 \end{pmatrix}$

$X^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.5863 \\ -0.1737 \end{pmatrix}$，$Y^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.295 \end{pmatrix}$

$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.5884 \\ -0.1769 \end{pmatrix}$，$Y^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -0.300 \end{pmatrix}$

$X^{(7)} = \begin{pmatrix} 0.589 \\ -0.178 \end{pmatrix}$ $Y^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.302 \end{pmatrix}$

$X^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.589 \\ -0.178 \end{pmatrix}$，$Y^{(8)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.302 \end{pmatrix}$

得到特征值：$\lambda = \frac{1}{0.589} \approx 1.70$，特向 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -0.30 \end{pmatrix}$

5、(15分) 考虑线性方程组$AX=B$，其中,

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & a\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ a & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 分别写出相应的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代的迭代矩阵；

(2) 求Jacobi迭代收敛时，实数a的所有取值范围；

(3) 求Gauss-Seidel迭代收敛时，实数a的所有取值范围。

$x^{(k+1)}=(I-CA)x^{(k)}+CB$

(1) 雅：$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，迭代阵 $A_J=I-CA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2a\\ 0 & 0 & 0\\ -2a & 0 & 0\end{pmatrix}$

+9

高：$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ a & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -4a & 0 & 2\end{pmatrix}$，迭代阵 $A_G=I-CA=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2a\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4a^2\end{pmatrix}$

(2)：A_J 的谱半径 <1，求得 A_J 的特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2a$，$\lambda_3=-2a$，

$|\lambda|<1$，则 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

+3

(3)：A_G 的谱半径 <1，求得 A_G 的特征值：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=4a^2$，

$|\lambda|<1$，则 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

+3

6、（15分）设有$[-1,2]$上的数值积分公式

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx \approx S(f(x)) = Af(-1) + Bf(2) + Cf(1) + Df'(1)$$

(1) 试确定常数A, B, C, D，使其达到最高阶代数精度；此时的代数精度是多少?

(2) 假设$f(x)$充分可微，试求此数值积分公式的积分误差。

设$f(x)=1$，代入：　$3 = A+B+C+D$

$f(x)=x$，代入：　$\frac{3}{2} = -A+2B+C+D$　　　　+11

$f(x)=x^2$，代入：　$3 = A+4B+C+2D$

$f(x)=x^3$，代入：　$\frac{15}{4} = -A+8B+C+3D$

联立，解得：$A=\frac{9}{16}$，$B=\frac{3}{4}$，$C=\frac{27}{16}$，$D=-\frac{9}{8}$

将$f(x)=x^4$代入，左$=\frac{33}{5}$，右$=\frac{39}{4}$，误差 $T=-\frac{63}{20}=-\frac{21}{160}f^{(4)}(\xi)$　　　　+4

此时 $f^{(4)}(x)=4!=24$

可以达到3阶精度，误差为 $-\frac{21}{160}f^{(4)}(\xi)$，$-1\le\xi\le2$

5

7、（15分）对于常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

其中$f(x,y)$足够光滑。若取$h = \frac{b-a}{m}$, $x_n = a + nh, n = 0, 1, \ldots, m$, m为正整数。试证明对任意参数 $t \in (0,1)$，如下形式的龙格-库塔格式是二阶的，并求其局部截断误差的表达式。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

设$y=x^3$，$y'(x)=f=3x^2$，代入：

$k_1 = f(x_n, y_n) = 3x_n^2$

$k_2 = f(x_n+th, y_n+thk_1) = 3(x_n+th)^2$

$k_3 = f(x_n+(1-t)h, y_n+(1-t)hk_1) = 3(x_n+(1-t)h)^2$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_2+k_3) = x_n^3 + \frac{h}{2}\left(3(x_n+th)^2 + 3(x_n+(1-t)h)^2\right) =$

$= x_n^3 + 3x_n^2 h + 3x_n h^2 + \frac{3h^3}{2}(2t^2-2t+1)$

5

$y(x_{n+1}) = (x_n+h)^3 = x_n^3 + 3x_n^2 h + 3x_n h^2 + h^3$

$T_n = y(x_n+h) - y_{n+1} = h^3(-3t^2+3t-\frac{1}{2})$

所以对任意$t\in(0,1)$，此形式的局部误差为h^3量级，是二阶的

$T_n = \frac{y^{(3)}(\xi)}{3!}(-3t^2+3t-\frac{1}{2})h^3$，其中利用假设的$y=x^3$，$y^{(3)}=3$；

$x_n \le \xi \le x_n+h$

密封线内不要答题

15

8、（15分）记$X=(x_1,x_2,x_3)^T, F(X)=(f_1(X),f_2(X),f_3(X))^T$，考虑非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(X)=x_1^2+e^{x_2}-\cos(\frac{\pi}{2}x_3)=0 \\ f_2(X)=x_1^3+x_2^3-x_3+3=0 \\ f_3(X)=4x_1+x_2^2-\ln(x_3+2)=0 \end{cases}$$

(1) 写出求解非线性方程组$F(X)=0$的Newton迭代格式；

(2) 取初始向量$X^{(0)}=(1,1,1)^T$，求出$F(X)$在$X^{(0)}$处的Jacobi矩阵，并计算$X^{(1)}$，即经过一次Newton迭代后的X。(注意：计算过程保留4位小数)

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & e^{x_2} & \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x_3) \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & -1 \\ 4 & 2x_2 & -\frac{1}{x_3+2} \end{pmatrix}$$

设初值$X^{(0)}$,

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-J^{-1}\times F \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1^{(k)} & e^{x_2^{(k)}} & \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x_3^{(k)}) \\ 3x_1^{(k)2} & 3x_2^{(k)2} & -1 \\ 4 & 2x_2^{(k)} & -\frac{1}{x_3^{(k)}+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1^{(k)2}+e^{x_2^{(k)}}-\cos(\frac{\pi}{2}x_3^{(k)}) \\ x_1^{(k)3}+x_2^{(k)3}-x_3^{(k)}+3 \\ 4x_1^{(k)}+x_2^{(k)2}-\ln(x_3^{(k)}+2) \end{pmatrix}$$

2)：取$x^0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，得$J^{(0)}=\begin{pmatrix} 2.0000 & 2.7183 & 1.5708 \\ 3.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ 4.0000 & 2.0000 & -0.3333 \end{pmatrix}$，

$$F^{(0)}=\begin{pmatrix} 3.7183 \\ 4.0000 \\ 3.9014 \end{pmatrix}, \quad X^{(1)}=X^{(0)}-J^{-1}F=\begin{pmatrix} 0.4171 \\ 0.1806 \\ 0.7931 \end{pmatrix}$$