2021-2022 学年第一学期期中考试试卷

A 卷

2022 年 1 月 21 日

1 1.(10point)

计算 2021^{82} 的后两位数

2 2.(10point)

求证：对任意的正整数 n 均有 $2^{n+1}|55^{2^n}-1$

3 3.(20point)

解同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv & 1(mod 7) \\ x \equiv & 8(mod 13) \end{cases}$$

4 4.(20point)

设 a 与 b 为整数，求方程 ax+by=1 的所有整数解.

5 5.(20point)

设 σ(n) 为自然数 n 的所有自然数因子之和。
1. 设 n=$p_1^{r_1}\cdot\cdot\cdot p_s^{r_s}$ 为素因子分解，求证：

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{r_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\cdot\cdot\frac{p_s^{r_s+1}-1}{p_s-1}.$$

2.σ 满足乘积性质: 若 (m,n)=1, 则 σ(mn)=σ(m)σ(n).
3. 如果 σ(n)=2n, 则称 n 为完美数。求证：若 p=2^n-1 是素数，则 $\frac{p(p+1)}{2}$=$2^{n-1}(2^n-1)$ 是完美数, 且所有偶完美数均如此构造.

6 6.(20point)

令整系数多项式 f(x)=$\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ 的导数多项式为 f'(x)=$\sum\limits_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}$.p 为素数，l>1 为整数。
1. 求证：对任意整数 x,y,有 $f(x+p^{l-1}y)\equiv f(x)+p^{l-1}yf'(x)(modp^l)$.
2. 设 f(x)≡0(modp) 与 f'(x)≡0(modp) 无公共解。求证：若 x_1 是同余方程 f(x)≡0(modp) 的一个解，则存在方程 f(x)≡0(mod p^l) 的一个解 x_l，使得 $x_l\equiv x_1(modp)$.
3. 在题 2 的假设下，同余方程 f(x)≡0(modp) 与 f(x)≡0(modp^l) 解的个数相同。特别的方程 $x^p\equiv x(modp^l)$ 有 p 个解。