

中国科学技术大学 2022年秋季学期
(数学分析(B2) 期末考试试卷, 2022 年 7 月 1 日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分

一. (10分) 求 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

解答: $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

二. (10分) 求函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{3} \sin 2x$ ($x \in [-\pi, \pi]$) 的 Fourier 系数.

解答: 因为

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{3} \sin 2x = \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x,$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 $a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{3}$, 其它 Fourier 系数都为零.

三. (12分) 求向量场 $\mathbf{v} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ 沿曲线

$$L: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

的积分, 这里 t 是曲线的正向参数.

解答: 向量场 \mathbf{v} 有势函数 $\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx$, 因此, 所求的积分为

$$\varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(1, 0, 2\pi) - \varphi(1, 0, 0) = 2\pi.$$

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

答题时不要超过此线
密封线

四. (15分) 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展开为 Fourier

级数, 由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

解答: 因为 f 是偶函数, 所以 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots,$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin n}{n}, n = 1, 2, \dots;$$

故, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n}{n\pi} \cos nx.$$

(..... 5分)

因为 0 是 f 的连续点, 且 $f(0) = 1$, 所以

$$1 = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n}{n\pi},$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

(..... 10分)

再根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx = \frac{2}{\pi}.$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

(..... 15分)

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

密封线 答题时不要超过此线

五. (15分) 求向量场 $\mathbf{v} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ 在球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = z$ 的积分, 曲面 S 的正向是外法向.

解答: 所求积分为

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy \\
&= \iiint_V (y^2 + z^2 + x^2) dx dy dz \quad (\text{Gauss 公式})
\end{aligned}$$

这里 V 是 S 围成的球体. (..... 5分)

V 的参数方程为

$$\begin{cases}
x = r \sin \theta \cos \varphi, \\
y = r \sin \theta \sin \varphi, \\
z = \frac{1}{2} + r \cos \theta,
\end{cases}$$

这里 $(r, \theta, \varphi) \in F = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. 于是

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_F \left(\frac{1}{4} + r^2 + r \cos \theta \right) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= 2\pi \iiint_{\substack{0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi}} \left(\frac{1}{4} + r^2 + r \cos \theta \right) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta \\
&= 2\pi \iint_{\substack{0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi}} \left(\frac{1}{4} + r^2 \right) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} r^2 + r^4 \right) dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} \right) \cdot 2 \\
&= \frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

(..... 15分)

六. (15分) 设常数 a, b 都是正实数, 平面向量场 $\mathbf{v} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{a^2x^2 + b^2y^2}$.

(1) 求 \mathbf{v} 在区域 $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ 的所有势函数;

(2) 证明 \mathbf{v} 不是区域 $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ 上的保守(有势)场.

解答: (1)

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \int_{(1,0)}^{(u,v)} \frac{-y}{a^2x^2 + b^2y^2} dx + \frac{x}{a^2x^2 + b^2y^2} dy \\ &= \int_{(1,0)}^{(u,0)} \frac{-y}{a^2x^2 + b^2y^2} dx + \frac{x}{a^2x^2 + b^2y^2} dy \\ &\quad + \int_{(u,0)}^{(u,v)} \frac{-y}{a^2x^2 + b^2y^2} dx + \frac{x}{a^2x^2 + b^2y^2} dy \\ &= \int_0^v \frac{u}{a^2u^2 + b^2y^2} dy \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \frac{by}{au}. \end{aligned}$$

故, 所求的势函数为 $\varphi(x, y) = \frac{1}{ab} \arctan \frac{by}{ax} + C$, 其中 C 是任意常数.

(..... 8分)

(2) 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$, 所围成的区域为 D , 则 D 的面积为 $\sigma(D) = \frac{\pi}{ab}$. 向量场 \mathbf{v} 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\begin{aligned} &\oint_L \frac{-y}{a^2x^2 + b^2y^2} dx + \frac{x}{a^2x^2 + b^2y^2} dy \\ &= \oint_L -y dx + x dy = 2\sigma(D) = \frac{2\pi}{ab} \neq 0. \end{aligned}$$

故, \mathbf{v} 不是区域 $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ 上的保守(有势)场.

(..... 15分)

座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

密封线 答题时不要超过此线

七. (15分) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2} dx$ 收敛, 并求其值.

解答: 设 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx$ ($\alpha > 0$). 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\sqrt{x}} = 0$, 所以存在常数 $C > 0$ 使得 $0 < \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} < C \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 由 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 收敛, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx$ 收敛.

(..... 6分)

记 $f(x, \alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2}$. 则对于 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, 有

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} \right| \leq \frac{2}{\alpha_0(1+x^2)}.$$

由此可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx, (\alpha > 0).$$

(..... 9分)

对于 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \neq 1$ 有

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \right) dx \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} dx \right) \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

易验证, 对 $\alpha = 1$ 也有 $I'(\alpha) = \frac{\pi}{1+\alpha}$. 由于 $I(0) = 0$. 故,

$$I(\alpha) = \pi \ln(1+\alpha) (\alpha \geq 0).$$

于是所求反常积分的值为 $\frac{\pi}{3}$.

(..... 15分)

八. (8分) 设函数 $f(x, y, z)$ 在 \mathbb{R}^3 上有二阶连续偏导数, 并且对任意点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 及任意正数 $r > 0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_S f(x, y, z) dS = f(P_0), \quad (1)$$

其中 S 是以 P_0 为球心, r 为半径的球面. 求证: f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

证明: 对任意 $r > 0$ 取球面 S 的参数方程为

$$x = x_0 + r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = z_0 + r \cos \theta,$$

其中 $(\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. 记

$$P = (x_0 + r \sin \theta \cos \varphi, y_0 + r \sin \theta \sin \varphi, z_0 + r \cos \theta).$$

根据条件 (1), 有

$$\iint_D f(P) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi f(P_0). \quad (2)$$

这是含参变量 r 的积分. 关于变量 r 求导, 得

$$\iint_D \left(\sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \sin \theta \sin \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(P) \right) \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

这等价于

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial x} dydz + \frac{\partial f}{\partial y} dzdx + \frac{\partial f}{\partial z} dxdy = 0.$$

(..... 4分)

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以根据 Gauss 公式, 有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dxdydz = 0,$$

其中 V 是 S 围成的球体. 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in V$ 使得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) (\xi) = 0.$$

令 $r \rightarrow 0^+$, 即得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) (P_0) = 0.$$

由于 P_0 是任意的, 故,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

(..... 8分)