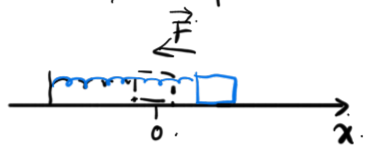
振动与波

基本振动形式：①简谐振动 ②阻尼振动 ③受迫振动(共振)

简谐振动

平衡位置：稳定，不稳定，随遇。

$\vec F=-kx$ $ma=-kx$ $a=\ddot x$ $m\ddot x+kx=0$



二阶常系数齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

- 解为两个实根 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
- 解为两个相同的根 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
- 解为两复根($\alpha\pm\beta i$) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二阶非齐次线性方程 找特解 $y^*(x)$ $y=\boxed{y^*(x)}+C_1y_1(x)+\cdots$

$\lambda^2+\frac{k}{m}=0$ $\lambda=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$ $x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}x+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}x=A\cos(\omega t+\varphi)$

相位

振幅 角频率 初相位

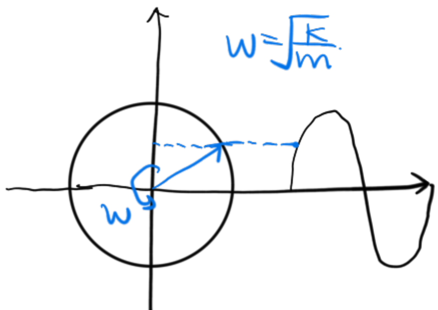
振子的能量：$v=-\omega A\sin\omega t+\varphi$

$a=-\omega^2A\cos\omega t+\varphi$

$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\cdot\omega^2A^2\sin^2\omega t+\varphi$ $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t+\varphi$ $(\omega^2=\frac{k}{m})$

$E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$ 能量守恒

单摆振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 复摆振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$



旋转矢量

一维保守力 $\int_{x_0}^{x}\vec F\,dx=V(x_0)-V(x)\Rightarrow F=-\frac{dV}{dx}$

在平衡位置x_0处展开

$$V(x)=V(x_0)+\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$=V(x_0)+\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

J为绕O转动惯量

$$\frac{dV}{dx}=2\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)\qquad F=-kx$$

$\Rightarrow$ 一维保守力必弹性

振动的合成与分解

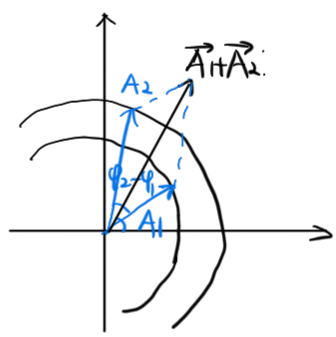
同方向同频率合成 $x_1=A_1\cos\omega t+\varphi_1$ $x_2=A_2\cos\omega t+\varphi_2$

$x_1+x_2=A_1(\cos\omega t\cos\varphi_1-\sin\omega t\sin\varphi_1)+A_2(\cos\omega t\cos\varphi_2-\sin\omega t\sin\varphi_2)$

$=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t-(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$

$=A\sin\omega t+\varphi$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi_1-\varphi_2}$



同方向不同频率 $x_1=A_1\cos\omega_1 t+\varphi_1$ $x_2=A_2\cos\omega_2 t+\varphi_2$

$x_1+x_2\approx 2A\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$ 振幅变化的简谐

$\nu=\frac{1}{T}=\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2\pi}=\nu_1-\nu_2=\Delta\nu$ 称为拍频

相互垂直方向合成 "李萨如图形"

① 角频率比为有理数 $\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{q}{p}\Rightarrow T_{总}=pT_y=qT_x$

② - - - 无理数 曲线不重复

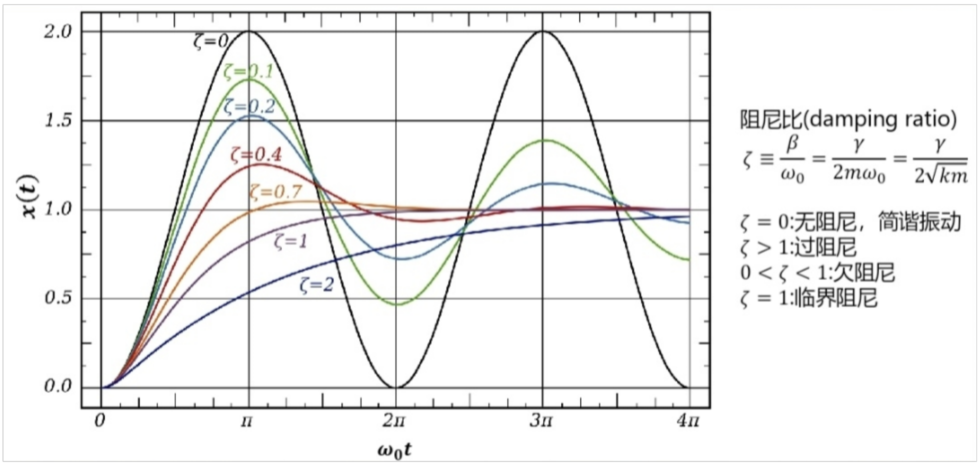
$\boxed{\text{阻尼振动}}$ 能量的耗散形式：①摩擦阻力 ⇒ 热能 ② 能量以波的形式传播

$-kx-\gamma\dot{x}=m\ddot{x}$ (正方向向上) (γ为阻力系数)

β为阻尼系数 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ $\beta=\frac{\gamma}{2m}$

特征方程 $\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2=0$ $\lambda=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

- 过阻尼
- *临界阻尼
- 欠阻尼



①过阻尼

解为 $y=e^{-\beta t}(c_1e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}+c_2e^{-\sqrt{\beta_0^2-\omega^2}t})$ 衰减，无振动.

②：欠阻尼

解为 $y=e^{-\beta t}(c_1\cos\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+c_2\sin\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t)=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi)$

③ 临界阻尼 $\beta=\omega_0$

解为 $y=(c_1+c_2t)e^{-\beta t}$ 无振动，回到原点时间最快.

阻尼振动的能量损失（欠阻尼）

$x=e^{-\beta t}A_0\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi)\approx A_0e^{-\beta t}\cos\omega_0t+\varphi$

$v=\dot{x}=-A_0\omega_0e^{-\beta t}\sin\omega_0t+\varphi$

$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\cdot A_0^2\omega_0^2e^{-2\beta t}\sin^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}\cos^2\omega_0t+\varphi$

$=\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}=E_0e^{-2\beta t}$

一个周期内损失的能量：$\Delta E=E(t)(1-e^{-2\beta T})$

定义 $\boxed{Q} = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = 2\pi\frac{1}{1-e^{-2\beta T}} \approx \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$ 为品质因数

过阻尼、欠阻尼

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \rightarrow Q$

受迫振动

① F为常数 $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0$ ⟺ 平衡位置改变

② F为简谐驱动力 $F = f_0\cos\omega t$ $\qquad \ddot{x}+\omega_0^2x+2\beta\dot{x} = \frac{f_0}{m}\cos\omega t$

特解 $x = B\cos(\omega t-\varphi)$

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

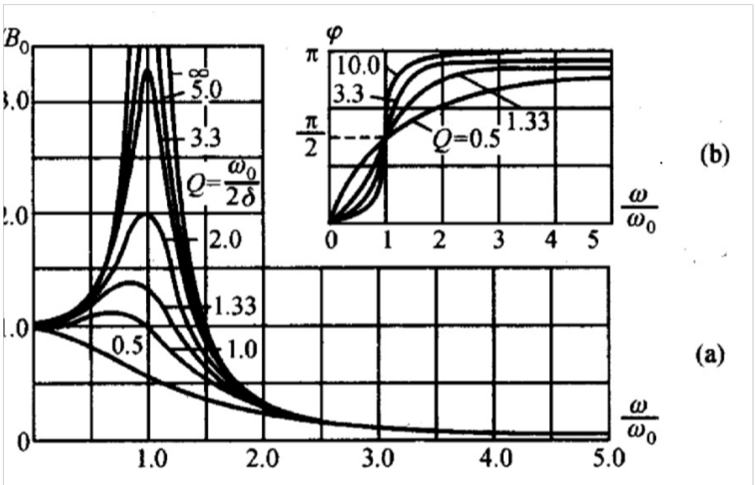
$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

① $\omega \ll \omega_0$ $\quad B=\frac{f_0}{\omega_0^2}$ $\quad \varphi\to 0$ 与F同时变化

② $\omega \gg \omega_0$ $\quad B=\frac{f_0}{\omega^2}\to 0$ $\quad \varphi\to\pi$ (反相位)

③ $\omega=\omega_0$ $\quad B=\frac{f_0}{2\beta\omega_0}$ $\quad \varphi\to\frac{\pi}{2}$

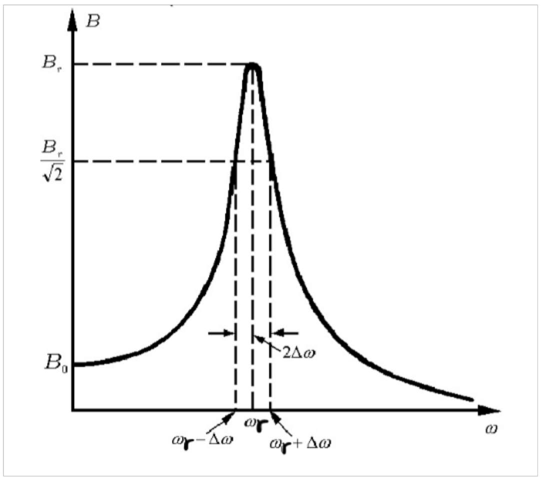
$\frac{B}{B_0}=\frac{\omega_0}{2\beta}=\boxed{Q}$ (共振)



B达到极值：$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

* 速度共振(速度振幅达最大值)

$\omega_r' = \omega_0$



锐度：共振曲线的尖锐程度

$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \Rightarrow B_r = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2-4\beta^4}}$

$= \frac{2\beta f_0}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}B_r = \frac{\sqrt{2}\beta f_0}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$

$\Rightarrow 2\beta^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+8\beta^4\omega^2 = \omega_0^2-\beta^2 \quad (\omega=\omega_r\pm\Delta\omega)$

$\Delta\omega = \pm\beta$

锐度 $S = \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \boxed{Q}$

Q越大越尖，即阻力越小越尖。

* 粒子共振，微扰法(非线性振动)。

机械波

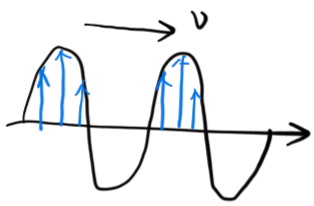
振源 $\xrightarrow{\text{弹性媒介}}$ 接收者

波

波的分类：机械波(弹性波) 物质波

电磁波 横波、纵波

引力波



相位落后

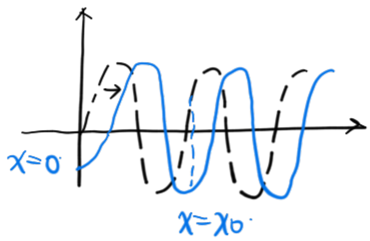
• 波振面：相位相同的点构成的曲面（最前面的为波前）

• 波长 λ • 周期 T • 频率 ν

• 波速 u * 振动状态单位时间传播距离

• 波数 k 2π长度的波长数量 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

平面简谐波波动方程



$x=0$处 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$

$x=x_0$处 $y=A\cos(\omega(t-\frac{x_0}{u})+\varphi)$

$=A\cos\omega t-\frac{\omega x_0}{u}+\varphi$

$=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$

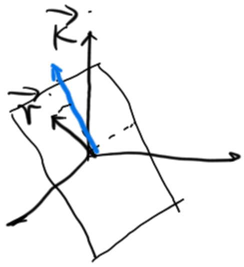
$$\boxed{u=\lambda\nu=\lambda\frac{\omega}{2\pi} \quad \frac{2\pi}{\lambda}=k}$$

<u>Rmk</u> ① 当 y 一定时 $\omega t_1-kx_1+\varphi=\omega t_2-kx_2+\varphi \Rightarrow \omega(t_1-t_2)=k(x_1-x_2)$

相距 x_2-x_1 的两点要经过 t_2-t_1 才能达到与前一点相位相同.

$\Rightarrow$ 相位传播速度 $u=\frac{\omega}{k}$

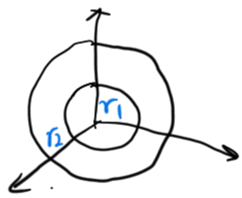
② 空间中传播的平面简谐波：$y(\vec{r},t)=A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)$



$|\vec{k}|=k$ $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}=\vec{e}$ 为波传播方向

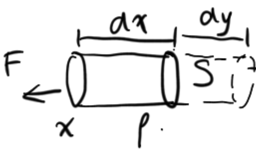
③ 球面简谐波 $y(r,t)=\boxed{A_r}\cos(\omega t-kr+\varphi)$

$A_r=\frac{r_0}{r}A_0$（能量守恒） $A_r^2\propto\frac{1}{E_面}$ $\frac{4}{3}\pi r_2^2\cdot E_面=\frac{4}{3}\pi r_1^2\cdot E_面$



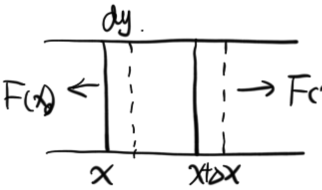
波动方程

平面简谐波 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$



相 $\frac{dy}{dx}\propto\frac{F}{S}$ 更进一步：$E=\frac{F}{S}/\frac{dy}{dx}$ 称为杨氏模量

弹性棒中纵波



$F(x)=ES\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ $F(x_0+\Delta x)=ES\frac{dy}{dx}|_{x_0+\Delta x}$

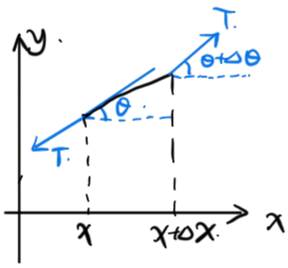
$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\rho S\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$

$ES\frac{dy}{dx}|_{x_0+\Delta x}-ES\frac{dy}{dx}|_{x_0}=\rho S\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$

$ES\left(\frac{\frac{dy}{dx}|_{x_0+\Delta x}-\frac{dy}{dx}|_{x_0}}{\Delta x}\right)=\rho S\frac{d^2y}{dt^2}$

$E\frac{d^2y}{dx^2}=\rho\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \Rightarrow u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

软绳中的横波



$F = T\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta$

绳的单位长度质量为 λ.　$\Delta m = \lambda \frac{\Delta x}{\cos\theta}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\lambda \frac{\Delta x}{\cos\theta} = T(\tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta)$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\lambda = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$　　$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$　　$\tan(\theta+\Delta\theta-\theta) = \frac{\tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta}{1+\tan\theta}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad \Rightarrow u = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

空气中声波

若气体满足 $pV^\gamma = const$ (绝热过程)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad u = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

p_0为静止压强, ρ_0为静止密度.

色散

波在相同介质中 相速度与波长相关. (在色散介质中)

$y_1 = A\cos(w_1 t - k_1 x)$　　$y_2 = A\cos(w_2 t - k_2 x)$

$y_1 + y_2 = A_0\cos\left(\frac{w_1+w_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{w_1-w_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right)$

$= A(t)\cos\frac{w_1+w_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x$

$u_p = \frac{w_1+w_2}{k_1+k_2} \approx \frac{w_1}{k_1}$　　相速度几乎不变

群速度 (始终跟着振幅为A'的运动).

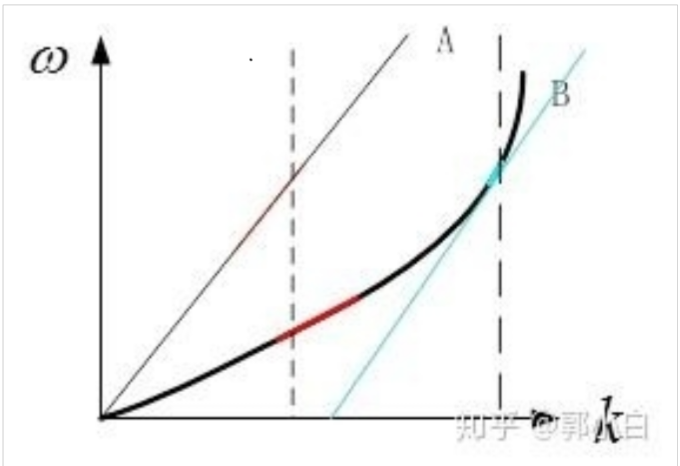
$\Rightarrow \frac{w_1-w_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x = const$　　$\Rightarrow u_g = \frac{w_1-w_2}{k_1-k_2} = \frac{dw}{dk}$

由离散达到连续.

$= \frac{d(u_p k)}{dk} = u_p + \frac{du_p}{dk}\cdot k$

$\Rightarrow u_g = u_p - \lambda\frac{du_p}{d\lambda}$

这里的u_g是一些u_p连续变化的波，对其中一个波定义速度后的结果.



波的能量

$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

$\Delta E_p = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{\Delta x}(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}E\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

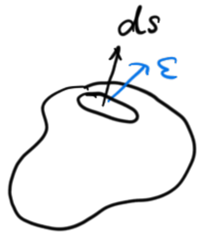
对于简谐波　$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho\Delta V w^2 A^2 \sin^2 w\left(t - \frac{x}{u}\right)$

能量密度 $\varepsilon = \frac{\Delta E}{\Delta V}$　　平均能量密度 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho w^2 A^2$

能流密度 $i = \frac{dE}{dt\,ds} = \frac{\varepsilon\, dV}{dt\,ds} = \varepsilon u$

波的强度 $\vec{I}=\varepsilon\vec{u}$

★ 波的能量守恒方程：$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon\vec{u})=0$



波的传播

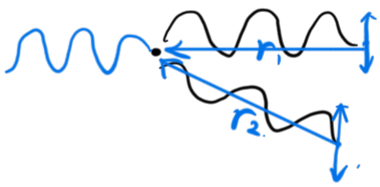
- 反射、折射定律
- 惠更斯原理　　波前=点波源球面波的包络
- 波的叠加原理：

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial^2 x}=0$$
$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial y_2^2}{\partial^2 x}=0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2(y_1+y_2)}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

- 波的叠加

条件：①振动频率相同　②振动方向相同

③初相位差恒定



$y=y_1+y_2=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta}$

相位差 $2n\pi$ 时加强，$(2n+1)\pi$ 时减弱

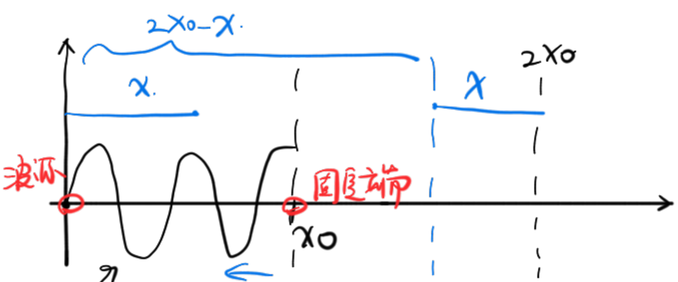
$\boxed{\text{驻波}}$ $\Longleftrightarrow$ 行波

$y_1=A\cos(wt-kx+\varphi_1)$　　$y_2=A\cos(wt+kx+\varphi_2)$

$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(wt+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)=A'\cos\left(wt+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

是一种振动，不再是波动

振动最大为波腹 $kx+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=n\pi$　　振幅为0为波节 $kx+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=(n+\frac{1}{2})\pi$

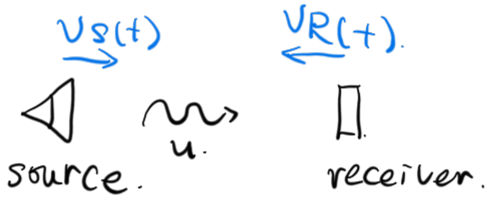


$y_1=A\cos(wt-kx+\varphi)$　反射波 $y_2=A\cos(wt-k(2x_0-x)+\varphi+\pi)$

$y_1+y_2=2A\cos(wt-kx_0+\varphi+\pi)\cos(kx-kx_0+\pi)$　　$x=x_0$ 时振幅应为0

多普勒效应

频率 = 单位时间内波长数 n.



① 观察者不动，波源运动.

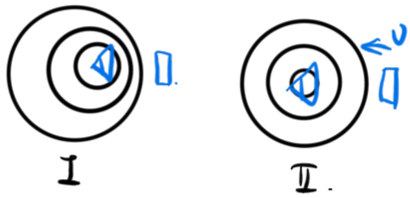
$t_1 \longrightarrow t_1+T-\frac{Tv_s}{u}$ 波长变短，波速不变.

$$\nu'=\frac{1}{T'}=\frac{1}{T-\frac{Tv_s}{u}}=\frac{1}{T}\frac{u}{u-v_s}=\frac{u}{u-v_s}\nu$$

② 波源不动，观察者动.

$$\nu'=\frac{1}{T'}=\frac{u+v_R}{\lambda}=\frac{u+v_R}{Tu}=\frac{u+v_R}{u}\nu.$$

相对于介质静止 K系

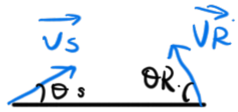


③ 两者都动.

$$\nu'=\frac{u+v_R}{u-v_s}\nu$$

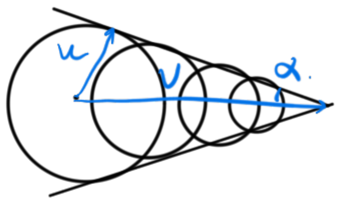
④ 不共线

$$\nu'=\frac{u+v_R\cos\theta_R}{u-v_s\cos\theta_s}.$$



马赫锥与冲击波

$$\sin\alpha=\frac{u}{v_s}=\frac{1}{M}.$$



红移型式	转换的架构	所在度规	定义
多普勒红移	伽利略转换	欧几里得度规	$z=\frac{v}{c}$
相对论性多普勒	洛伦兹变换	闵可夫斯基度规	$z=\left(1+\frac{v}{c}\right)\gamma-1$
宇宙论的红移	广义相对论转换	FRW度规	$z=\frac{a_{now}}{a_{then}}-1$
重力红移	广义相对论转换	史瓦西度规	$z=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}-1$