2024秋、泛函分析H

1.1 压缩映射

完备 $\underset{\underset{B(0,R)}{\cap\!|}}{A_1} \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \cdots$ 且 $\underbrace{\operatorname{diam} A_n \to 0}_{\text{必要!}}$ 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$ (反例 $X = C([0,1])$ $\rho = \|\cdot\|_\infty$)

[pf. $\forall x_n \in A_n$. $m \geq n$. $\rho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_n) \to 0$ 故 $\{x_n\}$ Cauchy

完备 $\Rightarrow x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. 则 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$]

Banach不动点 Thm. (X,ρ) 完备 (度量空间) $T: X \to X$ 压缩映射 则T有唯一不动点.

[pf. ① 存在: $\forall x_0 \in X$ $x_1 = Tx_0$. $x_2 = Tx_1$ $\cdots$ (T适用m=1)

则 $\rho(T^{n+m}x_1, T^n x_1) \leq C^n \rho(T^m x_1, x_1) \Rightarrow \rho(x_{n+m}, x_m) \leq C^n \rho(x_m, x_1)$

故 $\rho(x_{n+m}, x_n) \leq \underbrace{\rho(x_{n+m}, x_{n+m-1})}_{\leq C^{n+m-1}\rho(Tx_0, x_1)} + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \underset{\to 0}{\frac{C^{n-1}}{1-C}} \rho(Tx_0, x_1)$

故 $x_n \to x_0$ $Tx_0 = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0$

② 唯一: 若 $Tx_0 = x_0$. $Tx_0' = x_0'$ 则 $\underset{\rho(x_0, x_0')}{\underset{\shortparallel}{\rho(Tx_0, Tx_0')}} \leq C\rho(x_0, x_0') \Rightarrow x_0 = x_0'$]

应用 (Cauchy初值问题) $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$ 其中 $f: [-h, h] \times [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \to \mathbb{R}$

$\exists L > 0$ s.t

$|f(s,x) - f(s,y)| \leq L|x-y|$ $\forall x\, y \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$

则 $\forall \exists 0 < h_1 < h$ s.t x 在 $[-h_1, h_1]$ 上有唯一解

[pf. $T: \overset{\text{with } \|\cdot\|_\infty}{X} \to X$. $Ty(t) \triangleq \int_0^t f(s, y(s))\,ds + \xi$

$X = \{y \in C[0, h_1]. \ y(0) = \xi\}$
$|y(s) - \xi| < \varepsilon$ $\forall s \in [-h_1, h_1]$

记 $\sup|f| = M$. 取 $h_1 < \frac{\varepsilon}{M}$.
则 $|Ty(t) - \xi| \leq h_1 M < \varepsilon$. 故T确保X→X

$$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\,ds \leq L\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|\,ds$$
$$\leq Lh_1 \|y_1 - y_2\|_\infty$$

再取 $h_1 < \frac{1}{L}$. 则由上面不动点 Thm 得证]

1.2 完备化

完备化: $\Phi:(X,\rho_X)\to(Y,\rho_Y)$ 称为 (X,ρ_X) 的一个完备化. 若

① Φ 等距　② $\Phi(X)$ 在 Y 中稠密

例. (1) $X=C[0,1]$ ρ_X 由 $\|\cdot\|_\infty$ 诱导

(X,ρ_X) 完备. $\{f_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{f_n(t)\}$ Cauchy　设 $f_n(t)\to f(t)$

则为一致收敛 ($\|f_n-f\|_\infty\to 0$)　故 $f\in C[0,1]$

(2) $X=C[0,1]$　$\rho_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|dt$

(X,ρ_1) 不完备.
$$f_n(t)=\begin{cases}1 & t\le\frac12-\frac1{2n}\\ \frac12-n(t-\frac12) & \frac12-\frac1{2n}<t\le\frac12+\frac1{2n}\\ 0 & t>\frac12+\frac1{2n}\end{cases}$$

$\|f_n-f_m\|_1\le\max\{\frac1n,\frac1m\}\to 0$　$\{f_n\}$ Cauchy

$f_n\to f$ 但 $f\notin X$!　　X 的完备化为 $(L^1[0,1],\rho_1)$

Thm. 完备化存在且等距同构意义下唯一

[Pf. 唯一: 设
$$\begin{tikzcd}(X,\rho_X) \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[dr, "\Phi_2"'] & (Y_1,\rho_{Y_1}) \\ & (Y_2,\rho_{Y_2})\end{tikzcd}$$
定义 $\Phi(\Phi_1(x))=\Phi_2(x)$ $(x\in X)$

不难验证 $\Phi|_{\Phi_1(X)}:\Phi_1(X)\to\Phi_2(X)$ 等距

$\forall y_1\in Y_1$. 取 $\Phi_1(x_n)\in\Phi_1(X)$　$\Phi_1(x_n)\to y_1$

$\rho_2(\Phi_2(x_n),\Phi_2(x_m))=\rho_1(\Phi_1(x_n),\Phi_1(x_m))\to 0$. 故 $\Phi_2(x_n)\to y_2$ 定义 $\Phi(y_1)=y_2\in Y_2$

(良定. 若 $\Phi_1(x_n')\to y_1$　令 $\{z_n\}=\{x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots\}$

则 $\Phi_1(z_n)\to y_1$　则 $\{z_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{\Phi_2(z_n)\}$ Cauchy

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_2(z_n)$ 存在　$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_2(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_2(x_n')$)

故定义了 $\Phi: Y_1\to Y_2$　易证等距 $\Rightarrow$ 单射

满射　$\forall w\in Y_2$　$\exists x_n$ s.t. $\Phi_2(x_n)\to w$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{\Phi_1(x_n)\}$ Cauchy

令 $u=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_1(x_n)$　则 $\Phi(u)=\Phi(\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_1(x_n))=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_2(x_n)=w$

存在: $\mathcal{F} = \{ \{x_n\}$ 为 X 中 Cauchy 列 $\}$

$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(x_n, y_n) = 0$

则定义 $Y = \mathcal{F}/\sim$

$\varphi: X \to Y$

$x \mapsto \{x, x, x \cdots\}$

Y上定义度量 $\rho_Y([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(x_n, y_n)$ (良定)

Y完备: $\{\tilde{y}^{(k)}\}$ 为 Y 中 Cauchy. 则 $\exists n_k$ s.t. 对 $z_k \triangleq \varphi(y^{(k)}_{n_k})$

$\overset{\tilde{y}^{(k)}}{\|}$
$[\{y_n^{(k)}\}]$

有 $\rho_Y(z_k, \tilde{y}^{(k)}) < \frac{1}{2^k}$

又 $\rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}^{(l)}) \to 0$ 可证 $\rho_Y(z_k, z_l) \to 0 \Rightarrow \{y^{(k)}_{n_k}\}$ Cauchy

令 $\tilde{y} = [\{y^{(k)}_{n_k}\}] \in Y$. 则 $\rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}) \leq \rho_Y(\tilde{y}^{(k)}, z_k) + \rho_Y(z_k, \tilde{y})$

$< \frac{1}{2^k} + \lim\limits_{l\to\infty} \rho_X(y^{(k)}_{n_k}, y^{(l)}_{n_l})$

$\to 0$ 故 $\tilde{y}^{(k)} \to \tilde{y}$ #]

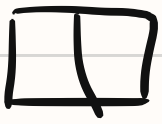
1 3 列紧

$A \subset (X, \rho)$ (自)列紧: $\forall A$中收敛子列$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\} \to x \in (A)X$

有界闭 $\not\Rightarrow$ 列紧 (即使X完备也不行!)

$X = C[0,1]$ $\rho = \|\ \|_\infty$

$A = \{\|f\|_\infty \leq 1\}$ f_n:



Arzela-Ascoli: $\mathcal{F} \subseteq C[0,1]$ 列紧 $\Leftrightarrow$ 一致有界 + 等度连续

例1 $A_L^{(1)} = \{ f \in C^1[0,1] \mid \|f\|_\infty \leq 1 \quad \|f'\|_\infty \leq L \}$ 列紧

完全有界：$A\subseteq(X,\rho)$ 完全有界 是指 $\forall\varepsilon>0$ $\exists x_1,\cdots x_L\in A$

s.t. $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{L}B(x_i,\varepsilon)$

Prop. $A\subseteq(X,\rho)$ 完全有界. 则 A 中任意点列必有 Cauchy 子列

进而 若 X 完备 则 A 列紧

[pf $\{x_n\}$ 为 A 中点列　　完全有界 $\Rightarrow\exists y_1\in A$ 和 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$

$\Rightarrow\exists y_2\in A$ 和 $\{x_n^{(1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(2)}\}\subset B(y_2,\frac{1}{2})\cdots$

取对角线 $\{x_k^{(k)}\}$　则 $\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\le\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(x_n^{(n)},y_n)$

$\le\frac{2}{n}\to0$　故 $\{x_k^{(k)}\}$ Cauchy]

Thm (Hausdorff)　(自)列紧 $\Rightarrow$ (闭)完全有界

[pf A 列紧　则 $\forall\varepsilon>0$　$\forall x_1\in A$.　$A_1=A\setminus B(x_1,\varepsilon)$　若 $A_1=\phi$ 则停止.

否则取 $x_2\in A_1$.　$A_2=A_1\setminus B(x_2,\varepsilon)$　....

有限步必须停止　否则 $\{x_n\}$ 无收敛子列 矛盾!　　故 A 完全有界　]

Def 紧 可分

Prop ① M 紧度量空间　则 $(C(M),\|\cdot\|_\infty)$ 完备可分

② $C_b(\mathbb{R})$ 不可分!　($\forall s\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$　定义 $f_s\in C_b(\mathbb{R})$.　$f_s(i)=s(i)$

整数点之间线性连接　则族 $\{f_s\}$ 不可数

但 $\forall s_1\neq s_2$　$\|f_{s_1}-f_{s_2}\|=1$　)

③ 事实上　对 (X,ρ) 完备. 则　X 紧 $\Leftrightarrow$ $(C_b(X),\|\cdot\|_\infty)$ 可分

$\Updownarrow$ 下面的Thm

X 完全有界

[③ 若 X 不完全有界　取 $\{x_i\}$　s.t. $\rho(x_i,x_j)\ge\varepsilon$　定义 $f_{x_i}(x)=\begin{cases}1-\frac{\rho(x,x_i)}{\varepsilon} & x\in B(x_i,\varepsilon)\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\forall s\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$　　定义 $f_s(x)=\sum_i s(i)f_{x_i}(x)$

则 $\forall s_1\neq s_2$.　　$\|f_{s_1}-f_{s_2}\|=1$　故 $(C_b(X),\|\cdot\|_\infty)$ 不可分]

Thm (X,ρ)度量空间 $A\subseteq X$ 则A紧⟺自列紧

[pf ⇒ $\forall x_0\in X\setminus A$ 由A紧 $\exists\{x_k\}_{k=1}^{n}\in A$ s.t. $A\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\frac{1}{2}\rho(x_k,x_0))$

取 $\delta=\frac{1}{2}\min_{1\le k\le n}\rho(x_k,x_0)$ 则 $\forall x\in B(x_0,\delta)$ $\rho(x,x_k)\ge\delta$ $(k=1,\cdots n)$ ⇒ $B(x_0,\delta)\subseteq A^c$

故A闭

若$\{x_n\}\subseteq A$无收敛子列 不妨$\{x_n\}$互异

$\forall n$ 定义 $S_n=\{x_1,\cdots\hat{x}_n,\cdots\}$ 闭(因为无收敛子列)

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\setminus S_n)=X\supset A$ 为A的开覆盖

又A紧 $\exists N$ s.t. $\bigcup_{n=1}^{N}(X\setminus S_n)\supset A$ ⇒ $\underset{\not\ni\, x_{N+1}}{X\setminus\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}}\supset\underset{\ni\, x_{N+1}}{A}$ 矛盾!

⇐ 若 $\bigcup_{i\in I}U_i$无子有限覆盖 由Hausdoff Thm $\exists N_n=\{x_1^{(n)},\cdots x_{k(n)}^{(n)}\}$

s.t. $\bigcup_{y\in N_n}B(y,\frac{1}{n})\supseteq A$ 则$\exists y_n\in N_n$ s.t. $B(y_n,\frac{1}{n})$不能被有限覆盖

又A自列紧 $\exists\{y_{n_k}\}\to y_0\in U_{i_0}$ 则$\exists\delta>0$ s.t. $B(y_0,\delta)\subseteq U_{i_0}$

取k充分大 s.t. $n_k>\frac{2}{\delta}$ 且 $\rho(y_{n_k},y_0)<\frac{\delta}{2}$ 则

$\forall x\in B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})$ $\rho(x,y_0)\le\frac{1}{n_k}+\frac{\delta}{2}<\delta$ ⇒ $B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset U_{i_0}$ 矛盾!]

Arzela-Ascoli: M紧度量 $F\subset C(M)$列紧⟺一致有界+等度连续

[pf. $C(M)$完备 故列紧⟺完全有界

⇒ 完全有界则立即一致有界

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\varphi_1\cdots\varphi_n\in N$ 为$\frac{\varepsilon}{3}$-网 并由连续 $\exists\delta$ s.t. $\forall i$ $\forall\rho(x_1,x_2)<\delta$ 有 $|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$

则$\forall\varphi\in F$ 取 $d(\varphi,\varphi_i)<\frac{\varepsilon}{3}$ 则 $|\varphi(x)-\varphi(x')|<\varepsilon$ $(\forall\rho(x,x')<\delta)$

⇐ 设界为L $\frac{\varepsilon}{3}$对应δ(等度连续) 取M上δ网 $N=\{x_1,\cdots x_n\}$

$T: F\to\mathbb{R}^n$
$\varphi_1\to(\varphi(x_1),\cdots\varphi(x_n))$

$\tilde{F}=T(F)$有界⇒列紧 则有$\frac{\varepsilon}{3}$网 $\{T\varphi_1\cdots T\varphi_m\}$

则$\forall\varphi\in F$ 取 $\varphi_i\ (i=1,\cdots m)$ s.t. $\rho(T\varphi,T\varphi_i)<\frac{\varepsilon}{3}$ 则取x_r s.t. $\rho(x,x_r)<\delta$

故 $|\varphi(x)-\varphi_i(x)|\le\frac{2}{3}\varepsilon+|\varphi(x_r)-\varphi_i(x_r)|<\varepsilon$]

1.4 赋范线性空间

范数：正定 齐次 三角不等式

↓诱导　　怀久

度量：正定 对称 三角不等式

范数诱导的度量

①平移不变性

②数乘连续性：$\lambda_i \xrightarrow{\rho} \lambda$，$x_i \to x$ $\Rightarrow \lambda_i x_i \xrightarrow{\rho} \lambda x$

$\Downarrow$

((a) $\lambda_i \xrightarrow{\rho} \lambda$ 则 $x\lambda_i \xrightarrow{\rho} \lambda x$

(b) $x_i \to x$ 则 $x_i\lambda \to x\lambda$)

称范数完备 若其诱导度量完备

Banach空间：完备赋范线性空间

例：$C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach

$C([0,1], \|\cdot\|_1)$ 不完备

$\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强：$\|x_n\|_2 \to 0$ 则 $\|x_n\|_1 \to 0$.　$\Leftrightarrow \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$

范数等价

定理：有限维空间（$K=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$）上的范数是等价的

Pf. $T: X \to K^d$　$\{x_i\}$为一组基

$x=\sum x_i\lambda_i \mapsto (\lambda_1, \cdots \lambda_d)$　定义 $\|x\|_T = \|Tx\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2+\cdots\lambda_d^2}$

只须证 $\exists C_1, C_2$ s.t. $C_2\|x\|_T \leq \|x\| \leq C_1\|x\|_T$

定义 $C_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|_T}$　$C_2 = \inf_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|_T}$　只须 $0 < C_2 \leq C_1 < \infty$

$\frac{\|x\|}{\|x\|_T} = \|\sum_{i=1}^d \eta_i x_i\|$.　$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_1^2+\cdots\lambda_d^2}}$　$\eta_1^2+\cdots\eta_d^2=1$

故 $C_1 = \sup_{\|\eta\|_2=1} \|\sum_{i=1}^d \eta_i x_i\|$　$C_2 = \inf_{\|\eta\|_2=1} \|\sum_{i=1}^d \eta_i x_i\|$

故只需证 $\varphi(\eta) = \|\sum_{i=1}^d \eta_i x_i\|$ 连续

由 $|\varphi(\eta)-\varphi(\eta')| \leq \sum_{i=1}^d |\eta_i-\eta_i'| \|x_i\| \leq \|\eta-\eta'\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$　故得证

Rmk. 闭图像定理可以说明: X线性空间 若 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 均为X上完备范数

则 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强 $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价

准范数. ① $\|x\|\geq 0$ 且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$ 正定

② $\|x\|=\|-x\|$ 对称

③ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ 三角不等式

可诱导度量 故可定义准范数的完备性

$(X,\|\cdot\|)$ 完备 $\Rightarrow$ Frechet空间

例 ① $X=\{$所有序列 $\{x_1\cdots x_n\cdots\}\}$ 定义 $\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i|}{1+|x_i|}$

可以验证为Frechet空间

② $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\ell_\infty=\{(x_i) : \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|<\infty\}$

$(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 中的单位球 $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ 自列紧 (关于准范数) 但关于 $\|\cdot\|_\infty$ 不自列紧!

"Hilbert 方体" I

Prop 任何紧度量空间 (X,ρ_X) 同胚于 $(I,\|\cdot\|)$ 的闭子空间

[Pf. X紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ 可分. 取可数稠密子集 $D=\{y_1,y_2,y_3\cdots\}$

定义 $\rho_X'=\frac{\rho_X}{1+\rho_X}$ $\varphi: X\to I$

$x\mapsto(\rho_X'(x,y_i))_{i=1}^{\infty}$ 连续单射

由X紧(自列紧) $\Rightarrow$ $\varphi(X)$ 自列紧 故为I的闭子空间]

Prop. $(C([-1,1]^{\mathbb{N}}), \|\cdot\|_\infty)$ 可分

[pf. 截断]

Cor. $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ 可分 (X 紧)

[pf 由 $X \xleftrightarrow[\text{同胚}]{\varphi} \varphi(X) \subseteq [-1,1]^{\mathbb{N}}$ 故只须证 $(C(\varphi(X)), \|\cdot\|_\infty)$ 可分.

取 $(C([-1,1]^{\mathbb{N}}), \|\cdot\|_\infty)$ 的稠密子集 $\{f_n\}$ $\quad g_n = f_n|_{\varphi(X)}$

则 $\forall g \in C(\varphi(X))$ 由延拓定理 $\exists \tilde{g} \in C([-1,1]^{\mathbb{N}})$ s.t. $\tilde{g}|_{\varphi(X)} = g$

又 $\{f_n\}$ 在 $C([-1,1]^{\mathbb{N}})$ 稠密 $\exists n$ s.t. $\|\tilde{g} - f_n\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|g - g_n\| < \varepsilon$]

$C_{\frac{1}{3}}$: Cantor 三分集 为 $[0,1]$ 紧子集

Prop 任何紧度量空间 (X, ρ_X). 存在 $\varphi: C_{\frac{1}{3}} \to X$ 连续满射

即 X 为 $C_{\frac{1}{3}}$ 的连续像

(思考证明)

非线性泛函（非线性期望）

例：$\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为X上一族概率测度

定义 $T: C(X)\to \mathbb{R}$

$f \mapsto \sup\limits_{i\in I}\int f\,d\mu_i$

T的性质：（①'齐次） ① 正齐次　（②'.可加） ② 次可加　$T(f+g)\le T(f)+T(g)$

③ $f\ge 0 \Rightarrow T(f)\ge 0$　　$T(c)=c$.

Riesz表示：T满足①'②'③ 则$\exists(X,\mathcal{B}_X)$上的概率测度 s.t. $T=\int\cdot\,d\mu$

（思路：$\{A\in\mathcal{B}_X \mid \chi_A$ 可由f_n连续、向上逼近$\} = \mathcal{B}_X$）

问题：$①+②+③ \overset{?}{\Rightarrow}$ 一族$\{\mu_i\}$ s.t. $T=\sup\int\cdot\,d\mu$

X Banach，$p: X\to\mathbb{R}$ 若 $\begin{cases}① 正齐次\\ ② 次可加\end{cases}$ 则 p为次线性泛函

半模：如 $T(f)=\sup\limits_{i\in I}\left|\int f\,d\mu_i\right|$　① 齐次
② 次可加
③ 非负（但 $T(f)=0 \not\Rightarrow f=0$）

称T为$C(X)$-半模

一个集合是否为某个范数的单位球？

$\|\cdot\|: \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 范数. $B=\{\|x\|\le 1\} \Rightarrow \begin{cases} B有界闭 & ①\\ 0\in B^{\circ} & ② \to B(0,r)\subseteq U\subseteq B(0,R)\\ B凸 & ③\end{cases}$

反之，若U符合①②③，一定存在对应的范数

希望再找 $P_u: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s.t. $U=\{x\in\mathbb{R}^d \mid P_u(x)=1\}$

则应当 ① P_u 为半模

② $\exists C_1, C_2$ s.t. $C_1\|x\|_2 \le P_u(x) \le C_2\|x\|_2$.

一般 $(X,\|\cdot\|)$ Banach $\dim X<+\infty$ P 为 X-半模且 $\underbrace{C_1\|x\| \le P(x) \le C_2\|x\|}$

(可验证. 若 $\dim X<+\infty$ 这等价于正定性)

$(P_u(x)=\inf\{\lambda>0: \frac{x}{\lambda}\in U\}$ Minkowski泛函)

Thm $(X,\|\cdot\|)$ B^*. 则以下等价:

(1) $\dim X<+\infty$ (2) $S(X)=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$ 自列紧

(3) 任何 X 中有界集都列紧 (4) 任何有界点列必有收敛子列

[pf 显然 (3)⟺(4) ⟹(2). 则只证 (1)⟹(3). (2)⟹(1)

(1)⟹(3): $d=\dim X$ 则存在 $T: X\to\mathbb{R}^d$ 线性同构

定义 $\|x\|_T=\|Tx\|_2$ check: $\|x\|_T$ 与 $\|x\|$ 等价

故 U 在 X 有界 ⟺ $T(u)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 有界 ⟺ $T(u)$ 列紧 ⟺ U 在 X 中列紧

(关于 $\|\cdot\|$) (关于 $\|\cdot\|_2$) (关于 $\|x\|_T$ 与 $\|x\|$)

(2)⟹(1) 若 $\dim X=+\infty$ 任取 $x_1\in S(X)$ $E_1=\text{span}(x_1)\subsetneqq X$

取 $y_2\notin X\setminus E_1$ $d_2\triangleq\|y_2-E_1\|=\inf\limits_{x\in E_1}\|y_2-x\|$

由 E_1 闭 $\dim E_1<\infty$. $\exists z_2\in E_1$ s.t. $d_2=\|y_2-z_2\|$ 其中 $z_2\in E_1$ (*) $\underset{\downarrow}{E_1}$

令 $x_2=\frac{y_2-z_2}{\|y_2-z_2\|}\notin E_1$ $x_2\in S(X)$. 且 $\|x_2-x_1\|=\frac{1}{d_2}\|y_2-(z_2+d_2x_1)\|$
≥ 1

一直进行 则 $\exists\{x_1,\cdots\}\subseteq S(X)$ s.t. $\|x_i-x_j\|\ge 1$ ⟹ $S(X)$ 不自列紧.
矛盾!)]

须补证上面的(*).

Prop (最佳逼近元) $(X,\|\cdot\|)$ B^*. $X_0 \subseteq X$ 有限维子空间

则 $\forall y \in X$ $\exists\, x \in X_0$ s.t. $\|y-x\| = \inf\limits_{z \in X_0} \|y-z\| \triangleq \|y-X_0\|$

此外. 若X严格凸. 即 $\forall x \neq y$, $\|x\|=\|y\|=1$ $t \in (0,1)$ $\|tx+(1-t)y\|<1$ 则唯一性成立.

Rmk ① $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$、$(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$、$(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ $\begin{cases} 1 \le p < \infty \text{ 严格凸} \\ p=\infty \text{ 不严格凸} \end{cases}$

② 即使X_0为闭子空间 若$\dim X_0=\infty$ 仍可能无最佳逼近元 (作业1.4.14)

[pf. 唯一性: 若 x_0 x_0' 均为最佳逼近元 $d \triangleq \|y-x_0\| = \|y-x_0'\|$

若 $d=0 \Rightarrow x_0=x_0'=y$ 否则 $\left\|\frac{y-x_0}{d}\right\| = \left\|\frac{y-x_0'}{d}\right\| = 1$ 若 $x_0 \neq x_0'$

由严格凸 $\left\|t\frac{y-x_0}{d}+(1-t)\frac{y-x_0'}{d}\right\| = \left\|\frac{y-(\underbrace{tx_0+(1-t)x_0'}_{z_0})}{d}\right\| < 1 \Rightarrow \|y-z_0\|<d$ 矛盾!

$$\overset{x_0}{\Downarrow}$$

存在性: $\forall y \in X$ 取 $\varphi(x)=\|y-x\|$ $(x \in X_0)$ 连续

又 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = +\infty$ 则 $\exists R$ st

$\inf\limits_{x \in X_0} \varphi(x) = \inf\limits_{\underbrace{x \in \overline{B(x_0,R)}}_{\text{紧}}} \varphi(x) \overset{\exists x_0}{=} \varphi(x_0)$ 故存在]

一般情况: X_0若维数不有限. 则未必有最佳逼近元 但有

Riesz引理. X_0为真闭子空间. 则 $\forall\, 0<\varepsilon<1$ $\exists y \in X$ st $\|y\|=1$ 且 $\|y-x\| \ge 1-\varepsilon$ $(\forall x \in X_0)$

[pf $\forall y_0 \in X \setminus X_0$. 则 $d = \inf\limits_{x \in X_0} \|y_0-x\| > 0$

$\forall \eta>0$ $\exists x_0 \in X_0$ s.t. $d \le \|y_0-x_0\| < d+\eta$

令 $y = \frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}$ 则 $\|y\|=1$ 且

$\forall x \in X_0$ $\|y-x\| = \frac{\|y_0-(x_0+x\|y_0-x_0\|)\|}{\|y_0-x_0\|} > \frac{d}{d+\eta}$

取 $\eta = \frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 即可]

1.5 凸集与不动点

Cauchy初值问题: $\begin{cases}\dot{x}=f(t,x)\\ x(0)=\xi\end{cases}$ (*) 存在唯一?

Peano: 上述问题, 只须 $f: [-h,h]\times[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]\to\mathbb{R}$ 连续且一致Lipschitz?

则 $\exists\, 0<h_0<h$ 和 $x: [-h_0,h_0]\to\mathbb{R}$, 满足(*) (没说唯一性)

Schauder不动点: $(X,\|\cdot\|)$ B空间, $C\subseteq X$ 闭凸子集 $T: C\to C$ 连续

且 $T(C)$ 列紧 则 T 有不动点

$\uparrow$ (*)

Brouwer不动点: $T: D^m\to D^m$ 连续 则有不动点.

(*): $\mathbb{R}^n$ 中紧的闭凸子集 C 则 $C\cong D^m$ ($\exists\, 0\le m\le n$) 利用Minkowski论证

pf of Schauder: 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界

$\forall \varepsilon=\frac{1}{n}$ $\exists C_n'=\{x_1^n,\cdots,x_{k_n}^n\}\subseteq T(C)$ s.t. $T(C)\subseteq \bigcup_{x\in C_n'} B(x,\frac{1}{n})$

$E_n=\mathrm{span}(C_n')$ $C_n=\mathrm{co}(C_n')$ 则 C_n 为 C_n' 紧凸子集

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_n=I_n\circ T"'] & \underline{T(C_n)\subseteq T(C)} \arrow[dl, "I_n"] \\ C_n & \end{tikzcd}$$

I_n 连续 s.t. $\|I_n(y)-y\|<\frac{1}{n}$ ($\forall y\in T(C)$)

$\Rightarrow \|T_n(x)-T(x)\|<\frac{1}{n}$ ($x\in C_n$)

T_n 有不动点 x_n $\{T(x_n)\}$ 有收敛子列 $\{T(x_{n_k})\}$ $Tx_{n_k}\to x$

又 $\|x_{n_k}-x\|=\|T_{n_k}(x_{n_k})-x\|\le\frac{1}{n_k}+\|T(x_{n_k})-x\|\to 0$

故 $x_{n_k}\to x$ $\Rightarrow$ $T(x)=x$

故只须定义 I_n

$\forall x\in T(C)$ $I_n x = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i(x) x_i^n$ 其中 $\sum \lambda_i = 1$，$\lambda_i \ge 0$

$f_i(x) = \begin{cases} 1 - n\|x_i^n - x\| & x\in B(x_i^n, \frac{1}{n}) \\ 0 & 其它 \end{cases}$ 则令 $\lambda_i(x) = \frac{f_i}{\sum f_i}$

由稠密性 分母非零 ⇒ 良定 故定义了 I_n

又 $\|I_n x - x\| \le \sum \lambda_i(x)\|x_i^n - x\| \le \sum \lambda_i(x)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ 得证]

应用: 证明 Peano's Thm.

Pf $(Tx)(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))ds$

$X = C[-h_1, h_1]$ $C = \{x\in X \mid |x(t) - \xi| \le \varepsilon \quad \forall t\in[-h_1, h_1]\}$
闭凸

$TC\subseteq C$. $|(Tx)(t) - \xi| \le \int_0^t |f(s, x(s))|ds \le Mh_1 < \varepsilon$ ⇒ $h_1 < \frac{\varepsilon}{M}$

T连续 $\|Tu - Tv\| \le h_1 \max_{|t|\le h_1} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))|$

(f一致连续) ⇒ $Tu \to Tv$ ✓

T(C)列紧 $\overset{A-A}{\Longleftrightarrow}$ 一致有界 ✓
等度连续 $|Tu(t) - Tu(t')| \le \int_t^{t'} |f(s, u(s))|ds \le M|t - t'|$ ✓

故由 Schauder ✓
]

现补证(*) 不妨设C不为独点集 且 $0\in C$ (不一定 $0\in \mathrm{Int}(C)$!)

取 $E = \mathrm{span}(C)$ $\dim E = m \ge 1$ $z_1 \cdots z_m \in C$ 无关

令 $e_0 = \frac{1}{m+1}(0 + z_1 + \cdots z_m)$. 则 $e_0 \in \mathrm{Int}_E(C)$

令 $C' = C - e_0$ 故 $0\in \mathrm{Int}(C')$ 即不妨设 $C\subseteq E \subseteq \mathbb{R}^m$ 且 $0\in \mathring{C}$

若 P 为 C 的次线性泛函 则 $\exists C_1, C_2$ s.t. $C_1\|x\| \le P(x) \le C_2\|x\|$ $(x\in E)$

$B^m(0,1)\subset E$ 为单位球 则 $\varphi(z) = \begin{cases} 0. & z = 0 \\ \frac{\|z\| z}{P(z)} & z \ne 0 \end{cases}$ 为 $B^m(0,1) \to C$ 的同胚

故只须找一个正定的次线性泛函

Minkowski泛函: $C \subseteq X$ 凸 $0 \in C$.

$$p_C(x) \triangleq \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C\} \in [0, +\infty]$$

性质: ① 若 $\frac{x}{\lambda} \in C$ 则 $(1-t)\frac{x}{\lambda} + t0 \in C \Rightarrow \frac{x}{\frac{\lambda}{1-t}} \in C$

则 $\forall \lambda' \geq \lambda$ $\frac{x}{\lambda} \in C$

② 若C闭 则若 $0 < p_C(x) < +\infty$ 则 $\frac{x}{p_C(x)} \in C$

③ 若 $0 \in \mathring{C}$ 则 $p_C(x) < +\infty$:

$\exists r > 0$ s.t. $B(0, r) \subseteq C$

则 $\forall x$ $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \frac{2\|x\|}{r} < \infty$

④ 次可加: 若 $p(x) = \infty$ 或 $p(y) = \infty$ ✓

$p(x), p(y)$ 均不为 ∞ 取 $\lambda_1 = p_C(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ $\lambda_2 = p_C(y) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{\lambda_1} \in C$ $\frac{y}{\lambda_2} \in C$

故 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{y}{\lambda_2} = \frac{x + y}{\lambda_1 + \lambda_2} \in C \Rightarrow p(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$ $\varepsilon \to 0$ ✓

⑤ 正齐次性

故若 $0 \in \mathring{C}$ $p_C(x)$ 次线性泛函.

正定性: 若C有界 则 $C \subseteq B(0, R)$

$\forall x \neq 0$ $\frac{x}{\|x\|}2R \notin C \Rightarrow p_C(x) > \frac{\|x\|}{2R} > 0$

命题: C闭凸 则 $C=\{x\in X \mid P_C(x)\le 1\}$

Pf. $\forall x\in C$ $\frac{x}{1}\in C \Rightarrow P_C(x)\le 1$

$\forall x\in X$ 且 $P_C(x)\le 1$ 若 $P_C(x)\neq 0 \Rightarrow \frac{x}{P_C(x)}\in C$ 又 $P_C(x)\le 1 \Rightarrow \frac{x}{1}\in C$

若 $P_C(x)=0$ 则 $\exists \lambda<1$ s.t. $\frac{x}{\lambda}\in C \Rightarrow \frac{x}{1}\in C$ ✓.

命题: $0\in C$. C闭凸, 则 $P_C(x): X\to[0,+\infty]$ 下半连续

Pf. 等价于 $\{x\in X \mid P_C(x)\le a\}$ 闭 $(\forall a>0)$

$\Updownarrow$

$a\{x\in X \mid P_C(x)\le 1\}$ 闭 ✓

$\|$

aC

注: C为 $(X,\|\cdot\|)$ B空间中凸子集.

$\text{ext}(C)=\{$C中端点$\}$

$x\in \text{ext}(C) \Leftrightarrow x\in C$ 且若 $x=tx_1+(1-t)x_2$ $(x_1, x_2\in C)$ 则 $x=x_1=x_2$

① $\text{ext}(C)$ 为 G_δ 集 ② 存在例子, 使得 $\text{ext}(C)$ 在 C 中稠密

1.6 Hilbert空间

共轭双线性函数: ① $a(x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\bar{\alpha}_1 a(x,y_1)+\bar{\alpha}_2 a(x,y_2)$

② $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y_2)=\alpha_1 a(x_1,y_2)+\alpha_2 a(x_2,y_2)$

内积: ①共轭双线性函数 ②对称性 ③正定性

$(X,(\cdot,\cdot))$内积空间 则 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ $(X,\|\cdot\|)$赋范线性空间

若$(X,\|\cdot\|)$完备 则$(X,(\cdot,\cdot))$为Hilbert空间

赋范→内积?

① 平行四边形法则

② 严格凸 ⟹ $C[0,1]$不是内积空间

①

Fact: B空间$(X,\|\cdot\|)$为内积空间. X为内积空间 ⟺ 平行四边形法则

$$\left(\Leftarrow:\quad (x,y)\triangleq\begin{cases}\dfrac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4} & K=R\\[2ex] \dfrac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}+i\,\dfrac{\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2}{4} & K=C\end{cases}\right)$$

② 内积诱导严格凸: $\forall x,y\in X$ $0<t<1$ $\|x\|=\|y\|=1$

则 $\|tx+(1-t)y\|\leq t\|x\|+(1-t)\|y\|=1$

$\underset{\text{取等}\Leftrightarrow x=ky!}{\downarrow}$

$\|e_\alpha\|=1\ (\alpha\in A)$

$\uparrow$

定义: 正交集. 正交规范集. 完备正交集

$\downarrow$

$S^\perp=\{0\}$

命题: 非空内积空间必有完备正交集

定理 (Bessel) $(X,(\cdot,\cdot))$ 内积空间. $S=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 正交规范集.

则 $\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2\le\|x\|^2$

[pf. ① 求和至多可数: $\forall\Lambda$ 的有限子集. 不妨为 $\{1,\cdots m\}$

$$0\le\|x-\sum_{k=1}^m(x,e_k)e_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^m(x,e_k)^2$$

即 $\sum_{k=1}^m|(x,e_k)|^2\le\|x\|^2$ (*)

由(*) $\forall n$ 满足 $|(x,e_\alpha)|>\frac{1}{n}$ 的 $\alpha\in\Lambda$ 至多有限

则 (x,e_α) 非0的 α 至多可数

② 则由于为可数求和. 利用(*)立得结果 #]

Cor. X Hilbert. $S=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 正交规范集. 则 $\forall x\in X$

$\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X$ 且 $\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$

[pf 由上. 设 $\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^\infty(x,e_n)e_n$. 且 $\sum_{n=1}^\infty|(x,e_n)|^2$ 收敛

$\Rightarrow\sum_{n=m}^{m+p}|(x,e_n)|^2\to0$ 故 $\{x_m=\sum_{n=1}^m(x,e_n)e_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ 收敛到 x

$\|\sum_{n=m}^{m+p}(x,e_n)e_n\|$

#]

定义: X. S… 若 $\forall x\in X$ $x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 则称S为规范正交基

定理 X Hilbert. $S=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 正交规范集 TFAE.

(1) S规范正交基 (2) S完备 (3) Parseval $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$

[pf (1)⇒(2) 若S不完备 $\exists x\in X\setminus\{0\}$ s.t. $(x,e_\alpha)=0\ (\forall\alpha)$ $\Rightarrow x=\sum(x,e_\alpha)e_\alpha=0$ 矛盾!

(2)⇒(3) 若x不满足(3) 则

$$\|\underbrace{x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha}_{\parallel\atop y}\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2>0$$ $y\in S^{\perp}$ 矛盾!

(3)⇒(1) $\|x-\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=0\Rightarrow x=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$ #]

例：(1) $L^2[0,2\pi]$ $S=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 规范正交基

(2) ℓ^2 $S=\{(0,\cdots \overset{n}{1},0\cdots0) \mid n\in\mathbb{N}_*\}$ 规范正交基

(3) $H^2(D)=\{u\in H(D) \mid \iint_D |u(z)|^2 dxdy<\infty\}$

$S=\{\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1} \mid n\in\mathbb{N}_*\}$ 规范正交基

可分Hilbert空间结构

定义：内积空间的同构

定理：可分Hilbert空间同构于 ℓ^2 或 K^n

[pf. ① 可分 $\Leftrightarrow$ 存在至多可数规范正交基

$\Rightarrow$ 设 $M=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 在 X 中稠密　取 M 的一组极大无关子集 $M'=\{y_n \mid n=1,\cdots N\}$ $(N\le+\infty)$

对 M' 作 Schmidt 正交化得 S 规范正交基 $\{e_n\}$

且 $\overline{\text{span}S}=\overline{\text{span}M}=X$

故 $\forall x\in X$　$\exists x_m=\sum_{k=1}^{N}a_{mk}e_k$　s.t. $x_m\to x$

固定 k　有 $\{a_{mk}\}$ 为 K 中基本列　令 $c_k=\lim_{m\to\infty}a_{mk}$ $\Rightarrow x=\sum_{k=1}^{N}c_ke_k$

$\Leftarrow$ 设 S 规范正交基 $\{e_n \mid n\le N\}$ $N\le+\infty$　则 $\forall x\in X$　$x=\sum_{k=1}^{N}c_ke_k$　$c_k=(x,e_k)\in\mathbb{C}$

取 $M=\{\sum_{n=1}^{N}a_ne_n \mid \text{Im}a_n\ \text{Re}a_n\in\mathbb{Q}\}$　则 M 可数　$\overline{M}=X$

② $T: X\to\ell^2$ 或 K^n

$x=\sum_{k=1}^{N}(x,e_k)e_k \mapsto ((x,e_1),\cdots(x,e_k)\cdots)$ #]

定理1: X Hilbert $C\subset X$ 闭凸 $x\in X$. 则 $\exists!\, y\in C$ s.t. $\|x-y\|=\inf_{y\in C}\|x-y\|$

Pf. 存在性. 只需考虑 $x\notin C$ $\quad d=\inf_{y\in C}\|x-y\|>0$

$\forall n.\ \exists z_n\in C$ s.t. $d\le\|x-z_n\|<d+\frac{1}{n}$

$\{z_n\}$ Cauchy: $\|z_n-z_m\|^2=2(\|z_m\|^2+\|z_n\|^2)-4\|\frac{z_m+z_n}{2}\|^2$

$$\le 2[(d+\tfrac{1}{n})^2+(d+\tfrac{1}{m})^2]-4d^2\to 0$$

故 $z_n\to z_0$ 且 $\|x-z_0\|=d$

唯一性: 若 y_1, y_2 均最佳逼近

则 $\|y_1-y_2\|^2=2(\|y_1-x\|^2+\|y_2-x\|^2)-4\|\frac{y_1+y_2}{2}-x\|^2$

$\le 4d^2-4d^2=0$ $\quad\Rightarrow y_1=y_2$ $\quad$ #]

定理2: X Hilbert $C\subset X$ 闭凸. 则 y 为 x 在 C 中最佳逼近 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x-y, y-z)\ge 0$ $(\forall z\in C)$

($\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)$ 是把 X 看成实向量空间的内积

$\mathrm{Re}(x-y, y-z)\ge 0 \Leftrightarrow x-y$ $z-y$ 夹角 $\ge\frac{\pi}{2}$)

Pf. $\forall z\in C$ $\quad z_t=(1-t)y+tz$

则 $\underset{\varphi_z(t)}{\underset{\shortparallel}{\|x-z_t\|^2}}=\|x-y\|^2+2t\,\mathrm{Re}(x-y, y-z)+t^2\|y-z\|^2$

$\Rightarrow \varphi_z(t)-\varphi_z(0)=2t\,\mathrm{Re}(x-y, y-z)+t^2\|y-z\|^2$

则 y 为最佳逼近 $\Leftrightarrow \varphi_z'(0)=2\mathrm{Re}(x-y, y-z)\ge 0$ $\quad$ #]

命题. X Hilbert $X_0\subset X$ 闭. $x\in X$

则 $y\in X_0$ 最佳逼近 $\Leftrightarrow x-y\perp X_0-y=X_0$

Pf. $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(x-y, y-z)\ge 0$ $(\forall z\in X_0)$

/记 $w=y-z\in X_0 \Rightarrow \mathrm{Re}(x-y, w)\ge 0$ 再用 $-w$ $\quad\mathrm{Re}(x-y, -w)\le 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(x-y, w)=0$ $(\forall w=y-z\in X_0)$

再用 iw 代替 $\Rightarrow \mathrm{Im}(x-y, w)=0$ $(\forall w=y-z\in X_0)$ $\Rightarrow x-y\perp X_0-y$ $\quad$ #]

定理. X Hilbert $X_0 \subset X$ 闭 则 $\forall x \in X$ $\exists!\, y \in X_0$ $z \in X_0^{\perp}$ s.t $x = y + z$

即 $X = X_0 \oplus X_0^{\perp}$

[Pf. 由命题 取y为x在X_0中最佳逼近 则 $y - x \perp X_0$

令 $z = x - y \in X_0^{\perp}$ 则为正交分解

唯一性: $x = y_i + z_i$ $y_i \in X_0$ $z_i \in X_0^{\perp}$ $(i=1,2)$

则 $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in X_0} = \underbrace{z_1 - z_2}_{\in X_0^{\perp}}$ $\Rightarrow y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$ #]

2 1 线性算子

$T: X \to Y$ 线性算子定义 ···

定义域 D 值域 $R(T) = \{Tx \mid x \in D\}$

(若 $D = X$ $Y = K$ 则称为线性泛函)

T连续 有界定义

命题. X Y B^*空间. $T: X \to Y$ 线性算子 则 TFAE

(1) T连续 (2) T在0连续 (3) T有界

[Pf. (1)⇔(2) 显然

(2)⇒(3) 若不有界 $\exists\, x_n \in X$ s.t. $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$

令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ 则 $\|Ty_n\| > 1$. 但 $y_n \to 0$ 矛盾!

(3)⇒(1) $x_n \to x$ 则 $\|Tx_n - Tx\|_Y \le M\|x_n - x\|_X \to 0$

则 $Tx_n \to Tx$ 故连续 #]

$(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 赋范线性空间

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T: X \to Y$ 有界线性算子$\}$

$\|T\| \triangleq \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$

命题 (1) $\mathcal{L}(X,Y)$ 为线性空间. $\|\cdot\|$为范数

(2) 若Y为Banach空间. 则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 也Banach

[pf (1) $\|T\| \geq 0$ $\|T\| = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \ (\forall x \in X) \Leftrightarrow T = 0$

$\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_2 x\|$

$= \|T_1\| + \|T_2\|$

$\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$

(2) $\{T_n\}$ Cauchy 则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ s.t. $\|T_{n+p} x - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \left(\begin{matrix} \forall n > N \\ x \in X \end{matrix} \right)$

则 $T_n x \to y \in Y$ 记 $y = Tx$

① T线性 ✓

② T有界: $\|Tx\| = \|y\| \leq \|T_n x\| + 1$ $(\exists n)$

$\leq (\|T_n\| + 1) \|x\|$ $(\forall x \in X$ 且 $\|x\| = 1)$

故 $\|T\| \leq \|T_n\| + 1$ 有界 #]

$X \longrightarrow X^* = \mathcal{L}(X, K) \longrightarrow X^{**} = \mathcal{L}(X^*, K)$

例: $p, q \geq 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p = q = 2$ $L^2[0,1] = L^2[0,1]$

$p \neq 2$ 则 $L^p[0,1] \neq L^q[0,1]$

给定 $g \in L^q[0,1]$ $T_g(f) = \int_0^1 fg \, dt$ $(\forall f \in L^p[0,1])$

$\|T_g\| = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|fg\|_{L^1}}{\|f\|_{L^p}} \overset{\text{Hölder}}{=\!=} \|g\|_q \Rightarrow T_g \in (L^p[0,1])^*$

(Hölder取等 $f = |g|^{\frac{p}{q}}$)

故当 $\begin{matrix}1\le p<\infty \\ 1\le q<\infty\end{matrix}$ 时 $\quad L^p[0,1] \xrightarrow{\cong} L^q[0,1] \xrightarrow{\cong} L^p[0,1]$

但 $(L^1[0,1])^* = L^\infty[0,1]$ $\quad \Rightarrow (L^1[0,1])^{**} \ncong L^1[0,1]$

$(L^\infty[0,1])^* \ncong L^1[0,1]$

（因为 $L^\infty[0,1]$ 不可分 $\quad L^1[0,1]$ 可分）

Banach Thm: X^* 可分 $\to X$ 可分

$L^p[0,1]$ $(1<p<\infty)$ 自反 $\quad L^1[0,1]$ 不自反

$X \hookrightarrow X^{**}$

$T \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, K)$ $\quad$ 给定 $z\in X \mapsto T_z(f) \triangleq f(z)$

$\underset{\underset{X^*}{\cap}}{f} \mapsto T(f)$ $\quad$ 则 $T_z: X^* \to K$ 线性

$$\|T_z\| = \sup_{\|f\|=1} |f(z)| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=\!=} \|z\|$$

$L^2[0,1]$: H-空间 $\quad L^2[0,1] \xrightarrow{\cong} (L^2[0,1])^*$

$g \xrightarrow{\text{等距}} T_g : (f \mapsto \int_0^1 fg)$

（范数满足平行四边形法则）$\Rightarrow$（范数也满足 …… 则诱导内积）

$\langle T_g, T_{g'} \rangle = ?$

例: X Hilbert $M\subseteq X$闭子空间 $x = x_M + x_{M^\perp}$ 正交分解

$P_M: X\to X$ $x\mapsto x_M$ 性质. ① $M=\{0\}$ $\|P_M\|=0$
$R(P_M)=M$ $M\neq\{0\}$ $\|P_M\|=1$ $\Rightarrow \|P_M\|\le 1$

② $P_M^2=P_M$

③ $(P_M x, y) = (P_M x, P_M y)$
$= (x, P_M y)$

命题: X Hilbert $P\in L(X)$. 则P为投影算子 $\Leftrightarrow$ ②③

[pf. $\Rightarrow$ ✓ $\Leftarrow$ 定义 $M=P(X)$

① M闭: $x_n\in M \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ 则$y_n\in X$ s.t. $x_n=P(y_n)$

$x_n = P(P(y_n)) = P(x_n) \xrightarrow{P连续} P(x)=x \Rightarrow x\in M$.

② $P=P_M \Leftrightarrow \forall x$ $\underset{\underset{\underset{x_M+Px_{M^\perp}}{\parallel}}{Px_M+Px_{M^\perp}}}{\overset{}{Px}} = P_M(x) = x_M \Leftrightarrow Px_{M^\perp}=0$

$\forall y\in X$ $(Px_{M^\perp}, y) = (x_{M^\perp}, Py) = 0$. #]

练习 X Hilbert $P\in L(X)$. 则P为投影算子 $\Leftrightarrow$ $\overset{\|P\|\le 1}{①}$②

2.2 Riesz表示定理

$\varphi: X\to X^*$
$y\mapsto \{f_y: x\mapsto (x,y)\}$ φ共轭线性: $\varphi_{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} = \bar\lambda_1\varphi_{y_1}+\bar\lambda_2\varphi_{y_2}$

$\|f_y\|=\|y\| \Rightarrow \varphi$等距

再次地. X上内积满足平行四边形法则

$\Rightarrow X^*$ . . . . 故为内积空间

(φ满射?)

$f\in X^*$ $x_f=\varphi^{-1}(f)$

$g\in X^*$ $x_g=\varphi^{-1}(g)$ $(f,g) \overset{?}{=} \overline{(x_f, x_g)} = \overline{(\varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(g))}$

则
$$\begin{tikzcd}(X,(\cdot,\cdot)) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[rr, bend right, "两个共轭线性复合\to线性"'] & (X^*,(\cdot,\cdot)) \arrow[r, "\Phi_{X^*}"] & (X^{**},(\cdot,\cdot))\end{tikzcd}$$

$$(x,y)=(\Phi_{X^*}\circ\Phi_X(x),\ \Phi_{X^*}\circ\Phi_X(y))$$

$X \to X^{**}$

$x \mapsto \{T_x : f \mapsto f(x)\}$ $\quad \Phi_{X^*}\circ\Phi_X(x)=Tx$?

Riesz表示定理. X Hilbert. 则 $\forall f\in X^*$. $\exists!\ x_f\in X$ s.t. $f(x)=(x,x_f)$

[pf. 唯一性. 显然

存在性: $N(f)=\{x\in X \mid f(x)=0\}$ 闭子空间

① $N(f)=X$. 取 $x_f=0$ 即可

② $N(f)\subsetneq X$ $\quad \forall x_0\in N^{\perp}(f)$

$X=N(f)\oplus\{\lambda x_0\}$: $\quad \forall x\in X \quad x=\underbrace{\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)}_{\in N(f)}+\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$ $\quad \left(\Rightarrow (x,x_0)=\|x_0\|^2\frac{f(x)}{f(x_0)}\right)$

$$\Rightarrow f(x)=f\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)$$

$$=\left(x,\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)f(x_0)=\left(x,\frac{f(x_0)x_0}{\|x_0\|^2}\right) \qquad \#]$$

X Hilbert $\quad T\in\mathcal{L}(X)$

$$\begin{tikzcd}X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ X^* & X^* \arrow[l, "T^*"']\end{tikzcd}$$

$T^*=\Phi\circ T\circ\Phi^{-1}$ (线性

由Riesz表示. 可将 T^* 视为 $\mathcal{L}(X)$ 中元素 使得 $(Tx,y)=(x,T^*y)$

$T=T^*$: 自伴

例: ① $X=\mathbb{R}^d$ $T=A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 自伴 ⟺ A对称

② $X=\mathbb{C}^d$ $T=A: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ 自伴 ⟺ A酉

定理: $(X, (\cdot,\cdot))$ Hilbert $a: X\times X \to K$ 共轭双线性 且 $\exists M>0$

s.t. $|a(x,y)| \le M\|x\|\|y\|$ 则 $\exists! A \in \mathcal{L}(X)$ s.t. $a(x,y)=(x,Ay)$

(故 T^* 可以看为双线性型 $a(x,y)=(Tx,y)$ 唯一确定的算子

$*: \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ ① $\|T\|=\|T^*\|$

$T \mapsto T^*$. ② $*$ 共轭线性)

Pf. 固定y 由Riesz Thm. $\exists! A(y)\in X$ s.t. $a(x,y)=(x, A(y))$

$X \to X^* \to X$

$y \mapsto a(\cdot,y) \to A(y)$ ⟹ A线性

共轭线性 共轭线性

$$\|A\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A(y)\|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|a(Ay,y)\|^{\frac{1}{2}}}{\|y\|} < +\infty \quad]$$

(注: $|(Tx,x)| \ge \delta\|x\|$ 时 $T \to T^*$ 可逆)

2.3 纲与开映射定理

B 第一纲集 是指存在可数个疏集 A_i s.t. $B \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

否则为第二纲集

例: $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中第一纲 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 第二纲

Residual集: $C \supseteq \bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i$ U_i 稠密开

Baire Thm: (X,ρ)完备. 可数个稠密开集的交为稠密第二纲集

[pf 记 $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$

(1) 若G第一纲集. 则 $G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 又 $X\setminus G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\underbrace{X\setminus U_i}_{B_i}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\text{无内点}}{\underline{B_i}}$

$\Rightarrow X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ $C_i = A_i \cup B_i$ 无内点闭

C_1 无内点. 取 $B(x_1, r_1) \cap C_1 = \phi$ $D_1 = \overline{B(x_1, \frac{r_1}{2})}$ $D_1 \cap C_1 = \phi$

C_2 无内点. 取 $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, \frac{r_1}{2})$ $B(x_2, r_2) \cap C_2 = \phi$

$D_2 = \overline{B(x_2, \frac{r_2}{2})}$ $D_2 \cap C_2 = \phi$ $r_2 \le \frac{r_1}{2}$

…… 则得到 Cauchy列 $\{x_n\}$ $x_n \to x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$

但 $x_1 \in X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. 矛盾!

(2) G稠密. 否则. 存在 $B(x_1, r_1) \cap G = \phi$

又 U_1 稠密开 取 $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_1$

同理定义 $X\setminus G \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots$ 有 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = G$

又 $x_0 \in X\setminus G$ 矛盾! #]

Thm. $\mathcal{F} = \{f \in C[0,1] \mid$ 处处不可微$\}$ 为Residual集

[pf. $\forall g \in C[0,1]\setminus\mathcal{F}$ $\Rightarrow \exists s \in [0,1]$ g在s处可微

则 $\exists n \in \mathbb{N}$ 对 $|h| \le \frac{1}{n}$ 且 $0 \le s+h \le 1$. s.t. $\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h}\right| \le n$

故定义 $A_n = \{\exists s \in [0,1]$ ………… $\}$ 则 $C[0,1]\setminus\mathcal{F} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(1) A_n闭: $g_m \in A_n$ $g_m \to g$ 取子列 s.t. $S_m \to S$

$(S_m \in [0,1])$

$|g_m(S_m+h) - g_m(S_m)| \le n|h|$

$|g(S_m+h) - g(S_m)| \le n|h| + 2\|g_m - g\|$

则令 $m \to +\infty$ 可知 $g \in A_n$

(2) A_n无内点: $\forall g \in A_n$. $\varepsilon > 0$ 构造 $f \in C[0,1]$ $\|f-g\| < \varepsilon$

$f \notin A_n$.

$f=g+P_L$ $\|P_L\|<\varepsilon.$ $P_L:$  斜率 L

$\|P_L\|\le\varepsilon_0<\varepsilon$

但 g 振荡无控制.

取 q 多项式 s.t. $\|g-q\|<\varepsilon-\varepsilon_0$

$f=q+P_L$ 则 $\|f-g\|<\varepsilon.$ 且令 $m=\max\limits_{t\in[0,1]}|q'(t)|<+\infty$

取 $L>m+n$ $|f(s+h)-f(s)|\ge(L-m)|h|>n|h|$

$(\forall s.\ h$ 充分小$)$ $\Rightarrow f\notin A_n$ #]

注. (1) $f=\inf f_n$ $f_n\in C(\overset{\text{紧度量}}{\overset{\uparrow}{M}})$ $|f_n|\le L<+\infty$

$x_m\to x\in M.$ $f(x_m)\le f_n(x_m)\longrightarrow f_n(x)$

$\Rightarrow \limsup f(x_m)\le f(x)$ $\Rightarrow$ f u.s.c

$g=\sup f_n$ $\Rightarrow g$ l.s.c

则对 $f.g$ 均: $M_f=\{f$ 的连续点$\}$ 或 M_g 为稠密 G_δ 集

(2) $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ (a) $R\subseteq X$ Residual $\Rightarrow T(R)\subseteq Y$ Residual

T 满 $\Rightarrow$ 开 $\Rightarrow$ (b) $W\subseteq Y$ Residual $\Rightarrow T^{-1}(W)\subseteq X$ Residual

(设 $X=C[0,1]$ $Y=C(K)$ T: 限制映射 满 $\Rightarrow$ 开

R ⊆

↑

处处不可微

则 $T(R)\subseteq Y$ Residual)

(a)⇒(b) 证明: (a) $R\supseteq\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}U_i$ $T(X\setminus R)\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}T(X\setminus U_i)$

$Y=T(R)\cup T(X\setminus R)\Rightarrow T(R)\supseteq Y\setminus T(X\setminus R)$

$\supseteq Y\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}T(X\setminus U_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}Y\setminus T(X\setminus U_i)$

若 $Y\setminus T(X\setminus U_i)$ 不稠密 则 $\exists G$ 开 $G\cap(Y\setminus T(X\setminus U_i))=\phi$

$\Rightarrow T^{-1}(a)\cap T^{-1}(Y\setminus T(X\setminus U_i)) = T^{-1}(a)\cap U_i=\varphi$ 矛盾!

(b) $W\supseteq \bigcap_{i=1}^{有} V_i \quad T^{-1}(W)\supseteq \bigcap_{i=1}^{有} T^{-1}(V_i)$

只须证 $T^{-1}(V_i)$ 稠密　否则. $\exists U$ 开　$U\cap T^{-1}(V_i)=\varphi$

但 $T(U)\cap V_i\neq\varphi$ (V_i 稠密) 矛盾!

回到开映射定理 B空间

Thm: $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 若T满 则为开映射

分析: $\forall U\subseteq X$ 开. 欲 $T(U)$ 开 $\Leftrightarrow \forall y\in T(U)$. $\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(y,\varepsilon)\subseteq T(U)$

$\overset{\shortparallel}{Tx}$　$x=x+B(0,\delta)\subseteq U\ (\exists\delta>0)$

$\downarrow$

故欲 $B(\overset{Tx+B(0,\varepsilon)}{\overset{\shortparallel}{y,\varepsilon)}}\subseteq Tx+T(B(0,\delta))$　　$Tx+T(B(0,\delta))\subseteq T(U)$

$\Leftarrow \underset{\varepsilon B(0,1)}{\underset{\shortparallel}{B(0,\varepsilon)}}\subseteq \underset{\delta T(B(0,1))}{\underset{\shortparallel}{T(B(0,\delta))}}$　$\Leftarrow T(B(0,1))\supseteq B(0,\frac{\varepsilon}{\delta})$

只须找 $\eta>0$ s.t. $T(B(0,1))\supseteq B(0,\eta)$

应用:

Banach逆Thm $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 双射 则 $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$

[Pf. 只须证 $\|T^{-1}\|<\infty \Leftrightarrow T^{-1}(B_Y(0,1))\subset B_X(0,\eta)\ (\exists\eta>0)$

$\Leftrightarrow TB_X(0,1)\supseteq B_Y(0,\frac{1}{\eta})\ (\exists\eta>0)$

由开映射立得　#]

范数等价Thm. $(X,\|\cdot\|_1)$ $(X,\|\cdot\|_2)$ Banach $\|\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$ (↑ $\|x\|_2\le M\|x\|_1$) 则二者等价

[Pf. $Id:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$.　$\|Tx\|\le M\|x\|_1 \Rightarrow \|T\|\le M$. T有界.

又T双射 故由上面定理. T^{-1} 有界. 则 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\|_1$.　#]

闭图像定理

闭算子. X, Y 赋范空间 $T: X \to Y$ 线性. 则T闭是指 若 $\overset{\overset{D(T)}{\cup}}{x_n} \to x$. 有$x \in D(T)$, $Tx_n \to Tx$

例: $X = Y = C[0,1]$ T为求导 $D(T) = C^1[0,1]$ 则T闭. 但$\|T\| = +\infty$

Thm. X, Y B空间. $T: X \to Y$ 闭算子

(a) 若$D(T)$为X内闭子空间. 则 $T|_{D(T)} \in \mathcal{L}(D(T), Y)$

(b) 若$\|T\| < +\infty$ 则T可延拓到$\overline{D(T)}$

在$\|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$下 B空间

[Pf.(a) 不妨设 $X = D(T)$ $\mathrm{Graph}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$

T闭 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Graph}(T)$闭

定义X上范数 $\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ 强于 $\|\cdot\|_X$

$\|x\|_T$完备: x_n为$\|\cdot\|_T$ Cauchy列 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ $\|\cdot\|_X$ Cauchy $\{Tx_n\}$ $\|\cdot\|_Y$ Cauchy

$\xrightarrow{X, Y完备}$ $x_n \to x$ $Tx_n \to y \overset{闭}{=} Tx$. $\Rightarrow (x_n, Tx_n) \xrightarrow{X \times Y} (x, Tx) \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_T} x$

则由范数等价Thm. $\|x\|_T \le L\|x\|_X \Rightarrow \|Tx\|_Y \le L\|x\|_X \Rightarrow T$有界

(b) $\forall x \in \overline{D(T)}$ $\underset{\underset{D(T)}{\cap}}{x_n} \to x$ $\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \|Tx_m - Tx_n\| \le \|T\| \|x_m - x_n\|$

故$\{Tx_n\}$ Cauchy Tx_n有极限. 定义为Tx

(良定: $\begin{matrix} x_n \to x \\ x_n' \nearrow \end{matrix}$ $\{y_n\} = \{x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots\}$

同样 $\lim\limits_{n \to \infty} Ty_n$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} Tx_n = \lim\limits_{n \to \infty} Tx_n'$)

且 $\|Tx\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|Tx_n\| \le \|T\|_{D(T)} \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|T\|_{D(T)} \|x\|$ $(x \in \overline{D(T)})$

则T为延拓. 且 $\|T\|_{\overline{D(T)}} = \|T\|_{D(T)}$. #]

例: $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ Borel可测

已知 $\forall g \in L^2[0,1]$ $f \cdot g \in L^1[0,1]$

$\forall g \in L^p[0,1)$ $f \cdot g \in L^q[0,1)$

证: $f \in L^2[0,1]$

Pf. $T: L^2[0,1] \to L^1[0,1]$ (线性 且 $D(T) = L^2[0,1]$)

$g \mapsto fg$

下证 $\|T\| < +\infty \Leftarrow T$ 闭.

$g_n \xrightarrow{\|\|_2} g$

$Tg_n \xrightarrow{\|\|_1} h$

则有子列 $g_{n_k} \xrightarrow{a.e.} g$ 且 $Tg_{n_k} \xrightarrow{a.e.} h$ 则 $fg \overset{a.e.}{=} h$ ✓

$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f\chi_{|f|\le n}\|_2$. $g_n = \bar{f}\chi_{|f|\le n} \in L^2[0,1]$

$\underset{\|f\chi_{|f|\le n}\|_2^2}{\underset{\shortparallel}{\|f\cdot g_n\|}} = \|T(g_n)\| \le \|T\|\|g_n\|_2 \Rightarrow \|f\chi_{|f|\le n}\|_2 \le \|T\| < +\infty$

故 $\|f\|_2 < +\infty$ #

回到开映射 Thm 的证明. 即

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 满 则 $\exists \eta > 0$ s.t. $TB_X(0,1) \supseteq B_Y(0,\eta)$

Pf. Step(1) $\exists \eta > 0$ s.t. $\overline{TB_X(0,1)} \supseteq B_Y(0,3\eta)$

$R(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} TB_X(0,n) = T(X) = Y$ 第二纲集

$\Rightarrow \exists n$ s.t. $\overline{TB_X(0,n)}$ 有内点 $\overline{TB_X(0,n)} \supseteq y_0 + B(0,\varepsilon)$

$\supseteq -y_0 + B(0,\varepsilon)$ (对称性)

故 $\frac{1}{2}(B(y_0,\varepsilon) + B(-y_0,\varepsilon)) = B(0,\varepsilon) \Rightarrow \overline{TB_X(0,1)} \supseteq B(0,\frac{\varepsilon}{n})$

$\eta = \frac{\varepsilon}{3n}$ ✓

Step(2) $TB_X(0,1) \supseteq B_Y(0,\eta)$ $(\overline{TB_X(0,\frac{1}{3})} \supseteq B_Y(0,\eta))$

$\forall y \in B_Y(0,\eta)$. 由(1). $\exists x_0 \in B_X(0,\frac{1}{3})$. s.t. $\|Tx_0 - y\| < \frac{\eta}{3}$

$y_1 = y - Tx_0$ 则 $\|y_1\| < \frac{\eta}{3}$ $\|x_0\| < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y_2 = y_1 - Tx_1$ $\|y_2\| < \frac{\eta}{9}$ $\|x_1\| < \frac{1}{9}$ T有界 $\Rightarrow Tx = \lim_{n\to\infty} TZ_n = y$

$\cdots y_n \quad x_n$ #]

$y_n = y - T(\underbrace{x_0 + \cdots x_{n-1}}_{\overset{\shortparallel}{z_n}})$ 且 $\|y_n\| < \frac{\eta}{3^n}$

$\|z_n - z_m\| \le \frac{1}{3^m} \Rightarrow z_n \to z_0 \triangleq x$ $\|x\| \le \frac{2}{3} < 1$.

注: X, Y B空间. $T: X\to Y$ 闭. 若 $R(T)$ 第二纲集. 则 $\exists \eta>0$

s.t. $T(B_Y(0,1)\cap D(T)) \supseteq B_Y(0,\eta)$ $\Rightarrow$ T开 $R(T)=Y$

Toeplitz-Hellinger Thm. X Y B空间 $T: X\to Y$ 线性 $D(T)=X$

$S: Y^*\to X^*$ 线性 $(D(S)=Y^*)$

如果 $\forall x\in X$ $f\in Y^*$ 有 $f(Tx) = (Sf)(x)$.

则 $T\in \mathcal{L}(X,Y)$ $S\in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$

[pf 即证T闭. $\begin{matrix} x_n\to x \\ Tx_n\to y \end{matrix}$ 证 $Tx=y$

$\forall f\in Y^*$ $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(Tx_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (Sf)(x_n) = (Sf)(x) = f(Tx)$

由Hahn-Banach Y^*中元素区分了Y中的元素. 有 $y=Tx$ S同理 #]

推论: X Hilbert $A: X\to X$ 映射 $D(A)=X$

若 $\forall x\ y\in X$ $(Ax,y) = (x,Ay)$ 则 $A\in \mathcal{L}(X)$

例 $L^2[0,1] \subseteq L^1[0,1]$ 第一纲 $C^1[0,1] \subseteq C[0,1]$ 第一纲

B空间

共鸣定理(变形) $W\subseteq L(X,Y)$ $R = \{x\in X \mid \sup\limits_{T\in W}\|Tx\|<+\infty\} \ni 0$

若R为第二纲集 则 $\sup\limits_{T\in W}\|T\|<+\infty$.

[pf. $p(x) = \sup\limits_{T\in W}\|Tx\| \in [0,+\infty]$

固定 $M>0$ $E_M = \{x\in X \mid p(x)\le M\} = \bigcap\limits_{T\in W} \underbrace{\{x\in X \mid \|Tx\|\le M\}}_{闭}$

$R \subseteq \bigcup_{M=1}^{+\infty} E_M$ R第二纲 则 有 E_{M_0} 有内点. $\Rightarrow E_1$ 有内点、(因为 $ME_1 = E_M$)

E_1 对称凸集

$(x \in E_1,\ |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda x \in E_1)$

$$B(x_0, \varepsilon) \subseteq E_1$$

$$\begin{array}{l} \| \\ x_0 + B(0,\varepsilon) \\ -x_0 + B(0,\varepsilon) \subseteq E_1 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{2}\big((x_0 + B(0,\varepsilon)) + (-x_0 + B(0,\varepsilon))\big)$$

$$\| $$

$$B(0,\varepsilon) \subseteq E_1$$

$$\sup_{T\in W} \sup_{x\in B(0,\varepsilon)} \|Tx\| = \sup_{x\in B(0,\varepsilon)} \sup_{T\in W} \|Tx\| \le 1$$

$$= \varepsilon \sup_{T\in W} \|T\| \qquad \Rightarrow \sup_{T\in W} \|T\| \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

#]

回到例子 $g_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n^2})}$ $\|g_n\|_2 = 1$

定义 $T_n(f) = \int_0^1 f g_n \, dt$ $(\forall f \in L^1[0,1])$ $\|T_n\| = \|g_n\|_\infty = n$

$(\sup \|T_n\| = +\infty)$

$T_n \in L^1[0,1]^* = \Big(\overset{X}{\overset{\uparrow}{L^1[0,1]}}, \overset{Y}{\overset{\uparrow}{K}}\Big)$ 则 $R = \{ f \in L^1[0,1] \mid \sup_{n\ge1} \|T_n f\| < +\infty \}$ 第一纲

对 $f \in L^2[0,1]$ $\sup_{n\ge1} \|T_n(f)\| = \sup_{n\ge1} \left|\int_0^1 f g_n \, dt\right|$

$\overset{\text{Hdder}}{\le} \sup_{n\ge1} \|f\|_{L^2} < +\infty \Rightarrow L^2[0,1] \subseteq R.$

第一纲

更一般地 $p, q \ge 1$. 则 $L^p[0,1]$ 在 $L^q[0,1]$ 第一纲

Banach-Steinhaus Thm: X. Y B空间

$T_n \in L(X,Y)$ s.t. $\begin{cases} \sup_{n\ge1} \|T_n\| < +\infty \\ \text{存在稠密 } D \subseteq X \text{ s.t. } \forall x \in D\ \{T_n x\} \text{ Cauchy 收敛到 } Tx \end{cases}$

则 T 可以延拓到 X 上 $T \in L(X, Y)$ 且 $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$

[pf. $\underset{\mathcal{D}}{x_n} \to x$ 定义 $Tx = \lim_{n\to\infty} T x_n$

$(\|Tx_n - Tx_m\| \le \sup \|T_n\| \, \|x_n - x_m\|$. 再验证良定性)]

但不一定 $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$

例: $X=C[0,1]$ $Y=\mathbb{R}$

$M[0,1]$: $[0,1]$上Borel概率测度全体

$\mathcal{M}=B_{[0,1]}$: $[0,1]$上Borel代数

它与X^*的元素有一一对应 $J_\mu(f)\triangleq\int_0^1 f d\mu$

$J_n(f)\geq 0\ (f\geq 0)$ $J\in X^*$

$J_n(1)=1 \quad \longleftrightarrow \quad J(1)=1$

$\|J_n\|=1$ $J(f)\geq 0\ (f\geq 0)$

$\|J\|=1$

$\subseteq S(X^*)=\{J\in X^* \mid \|J\|=1\}$ 闭子集

$C[0,1]$可分 取稠密可数集 $\{f_m\}_{m\geq 1}\triangleq D$

一串 $\mu_n\in M[0,1]$ $J_{\mu_n}\in X^*$, 且 $\sup\|J_{\mu_n}\|=1$

$\uparrow$ T_n

$\forall m\in\mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty}T_n(f_m)$ 存在 $\xrightarrow{\text{Banach-Steinhaus}}$ $T(f)\triangleq\lim_{n\to\infty}\int f d\mu_n$

$\| \quad \lim_{n\to\infty}\int f_m d\mu_n$

在 $C[0,1]$上有定义

$T\in X^*$ $T(f)\geq 0\ (f\geq 0)$

$T(1)=1$

$\|T\|=1$

$\xRightarrow{\text{Riesz表示}}$ $\exists\mu$ s.t. $T(f)=\int f d\mu$

$J_{\mu_n}\to J_\mu$ (在$\forall f\in C[0,1]$, $J_{\mu_n}(f)\to J_\mu(f)$意义下)

弱*拓扑意义收敛

结论: $M[0,1]$在弱*拓扑下紧致

即 $\mu_n\to\mu \Leftrightarrow \forall f_m$, $\lim\int f_m d\mu_n=\lim\int f_m d\mu$

$\Leftrightarrow \rho(\mu_n,\mu)\to 0$ $\rho(\mu,\nu)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\int f_m d\mu-\int f_m d\nu|}{2^m(1+\|f_m\|_\infty)}$

故 $(\mathcal{M}[0,1],\rho)$ 度量空间

列紧性: 给定 $\{\mu_n\}$ $m=1$: $|\int f_m d\mu_n| \le \|f_m\|_\infty$

⋮

$\exists n_1^1<n_2^1<n_3^1<\cdots$ s.t. $J(f_1)=\lim_{i\to\infty}\int f_1 d\mu_{n_i^1}$

再取子列 可定义 $J(f_2)=\lim_{j\to\infty}\int f_2 d\mu_{n_j^2}$

……

定义 $J(f_m)=\lim_{i\to\infty}\int f_m d\mu_{n_i^i}$ 则 Riesz $\Rightarrow \mu$ 故有收敛子列 #]

2.4 Hahn-Banach Thm

目标: ① X B空间 X^* 中元素分离点:

$\forall x\neq y\in X$ 记 $x_0=x-y$ 则 $\exists f\in X^*$ s.t. $f(x_0)\neq 0$ ($\Leftrightarrow f(x)\neq f(y)$)

作法: $X_0=\{\lambda x_0 \mid \lambda\in K\}$

定义 $f_0\in X_0^*$: $f_0(\lambda x_0)=\lambda$

H-B Thm: $\exists f\in X^*$ s.t. $\|f\|=\|f_0\|<+\infty$ 且 $f|_{X_0}=f_0$ 则确定 $f(x_0)=1$ ✓

② $M\subseteq X$ 闭子空间, B空间 $x_0\notin M$

断言: ① $f(x)=0$ $(x\in M)$ ② $f(x_0)=d(x_0,M)\triangleq d_0$ ③ $\|f\|=1$

(①+③ $\Rightarrow |f(x_0)|\le d_0$)

作法: $X_0=\{\lambda x_0+x \mid \lambda\in K,\ x\in M\}$

$f_0(\lambda x_0+x)\triangleq\lambda d_0$ 则 $f_0\in X_0^*$ ($f_0(x_0)=d_0$, $\|f_0\|=\sup\limits_{\substack{\lambda\in K\\ x\in M}}\frac{|\lambda d_0|}{\|\lambda x_0+x\|}\overset{z=\frac{x}{\lambda}}{=}\sup\limits_{z\in M}\frac{d_0}{\|x_0+z\|}=1$)

H-B Thm: $\exists f\in X^*$ s.t. $f|_{X_0}=f_0$

则 $f(x)=0$ $(x\in M)$ $\|f\|=\|f_0\|=1$

$f(x_0)=d_0$

✓

H-B Thm: $X_0 \subseteq X$ 子空间 $f_0 \in X_0^*$ 则 $\exists\, f \in X^*$ s.t. $f|_{X_0} = f_0$ $\|f\| = \|f_0\|$

实情形(*) X实线性空间 $X_0 \subseteq X$ 线性子空间 $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ 线性泛函

$p: X \to \mathbb{R}$ 次线性泛函 $\left\{ \begin{array}{l} \text{次可加} \\ \text{正齐次} \end{array} \right.$ 若 $f_0(x) \le p(x)$ $(\forall x \in X_0)$

则存在 $f: X \to \mathbb{R}$ 线性泛函 s.t. ① $f|_{X_0} = f_0$

② $f(x) \le p(x)$ $(\forall x \in X)$

[实情形推H-B Thm实. $f_0 \in X_0^*$ 令 $p(x) = \|f_0\|\,\|x\| : X \to \mathbb{R}$ 为次线性泛函)

则$\exists f: X \to \mathbb{R}$ s.t. $f|_{X_0} = f_0$ 且 $f(x) \le p(x)$

$\|f\| \ge \|f_0\|$ $|f(x)| \le \|f_0\|\,\|x\| \Rightarrow \|f\| \le \|f_0\|$

$\Rightarrow \|f\| = \|f_0\|$ #]

复情形只须将"次线性泛函"换成"半模"即可

故只须证(*) 归纳+Zorn

$\forall\, x_1 \in X \setminus X_0$ $X_1 = \{\lambda x_1 + x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \ x_0 \in X_0\}$

归纳假设 $\exists\, f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ 线性泛函 s.t. $\left\{ \begin{array}{l} ①\ f_1|_{X_0} = f_0 \\ ②\ f_1(z) \le p(z)\ \forall z \in X_1 \end{array} \right.$

① $\Rightarrow$ $f_1(\lambda x_1 + x_0) = \lambda f_1(x_1) + f_0(x_0)$

② $\Leftrightarrow$ $\lambda f_1(x_1) + f_0(x_0) \le p(\lambda x_1 + x_0)$

(λ=0显然成立) $\lambda > 0$. $f_1(x_1) + f_0(\frac{x_0}{\lambda}) \le p(x_1 + \frac{x_0}{\lambda})$

$\Rightarrow f_1(x_1) + f_0(z) \le p(x_1 + z)$

即 $f_1(x_1) \le \inf\limits_{z_0^+ \in X_0} (p(x_1 + z_0^+) - f_0(z_0^+))$

$\lambda < 0$. $f_1(x_1) \ge \sup\limits_{z_0^- \in X_0} (f_0(z_0^-) - p(-x_1 + z_0^-))$

要找 x_1 $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{z_0^- \in X_0} (f_0(z_0^-) - p(-x_1 + z_0^-)) \le \inf\limits_{z_0^+ \in X_0} (p(x_1 + z_0^+)) - f_0(z_0^+))$

又 $f_0(z_0^- + z_0^+) \le p(z_0^- + z_0^+) \le p(x_1 + z_0^+) + p(-x_1 + z_0^-)$

$\Rightarrow$ $f_0(z_0^-) - p(-x_1 + z_0^-) \le p(x_1 + z_0^+) - f_0(z_0^+)$ ✓

故对存在 ∃ 增加一维 ✓

$\mathcal{F} = \{(Y, f_Y) : X_0 \subseteq Y \subseteq X$ (线性子空间) $f_Y(x) \le p(x)$ $(\forall x \in Y)$ 且 $f_Y|_{X_0} = f_0\}$

$f_Y : Y \to \mathbb{R}$ 线性泛函

$(Y_1, f_{Y_1}) \le (Y_2, f_{Y_2}) \Leftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2$ 且 $(f_{Y_2})|_{Y_1} = f_{Y_1}$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ 偏序集

设 $\{(Y_i, f_{Y_i}) \mid i \in I\}$ 为全序子集 令 $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ $f(y) = f_{Y_i}(y)$ (对 $y \in Y_i$)

$f(y) \le p(y)$

则易证 (Y, f_Y) 为其上界

故由 Zorn 引理 $\mathcal{F}$ 有极大元 (W, f_W)

又由上面增加1维归纳成立. 只能 $W = X$. 则令 $f = f_W$ 即可 #

X Hilbert空间 $X = \overline{X_0} \oplus X_0^{\perp}$ $f_0 \in X_0^* \Rightarrow f_0 \in \overline{X_0}^*$

则定义 $f(x) \triangleq f_0(x_{X_0})$ 符合

一般B空间? $f_0 \in \overline{X_0}^*$. 希望 $X = \overline{X_0} \oplus Z$, $f(x) = f_0(P_{\overline{X_0}} x)$

找 $P_{\overline{X_0}} : X \to X$ s.t. ① $R(P_{\overline{X_0}}) = \overline{X_0}$

② $P_{\overline{X_0}}(x) = x$ $(x \in \overline{X_0})$

$f = f_0 \circ P_{\overline{X_0}}$ $\|f\| = \|f_0\| \Leftrightarrow \|P_{\overline{X_0}}\| \le 1$.

思考: 何时存在这样的投影算子?

复: $f_0 : X \to \mathbb{C}$ 线性泛函 被半模 p 控制.

则 $\mathrm{Re}\, f_0$ $X_0 \to \mathbb{R}$ 线性 也被 p 控制 $\xRightarrow{\text{实情形}}$ $\exists g : X \to \mathbb{R}$ 实线性

$g|_{X_0} = \mathrm{Re}\, f_0$ $g \le p$ $(\forall x \in X)$

定义 $f(z) = g(z) - i g(iz)$ 为复线性泛函

① $f|_{X_0}(z) = \mathrm{Re} f_0(z) - i\mathrm{Re} f_0(iz) = f_0(z)$

② $|f(z)| \overset{\exists\theta}{=} f(e^{2\pi i\theta}z) = \mathrm{Re} f(e^{2\pi i\theta}z) \le p(e^{2\pi i\theta}z) = p(z) \quad \forall z\in X$

#

分析: X B空间　　M 为闭子空间
or 子集

$M^\perp = \{f\in X^* \mid f(x)=0 \quad \forall x\in M\}$
or $f(z)=0 \quad \forall z\in \overline{\mathrm{span}(M)}$

M的零化子

结论 $M^* \to X^*/M^\perp$ 等距同构
$G(m^*) = [x^*]$ 其中 x^* 为 m^* 在 X 上的延拓 且 $\|x\|^* = \|m^*\|$
(良定: 若 x_1^* 为另一 如上延拓 则 $x_1^* - x^* \in M^\perp \Rightarrow [x_1^*] = [x^*]$)
显然 G 为双射.　故只须验证等距
即 $\|[x^*]\| = \|x^*|_M\|$

H-B 几何形式: 凸集分离
用超平面(余维1的线性(闭)子流形 $x+M$)

命题 L 为(闭)线性子流形 则 L 为超平面 $\Leftrightarrow \exists f: X\to\mathbb{R}$ 线性泛函 $(f\in X^*)$
s.t. $L = H_f^r := \{x\in X \mid f(x)=r\}$

[pf. $\Leftarrow$ $M = H_f^0$.　取 $f(x_0)=r$ 则 $L = M + x_0$
$\Rightarrow$ $\exists y_0 \in X\setminus\{0\}$ s.t. $X = \{\lambda y_0\}\oplus M$　　$f(\lambda y_0 + m) \triangleq \lambda$
则 $L = H_f^r$ 其中 $r = f(x_0)$
若 M 闭 则 $\|f\| = \sup \frac{|\lambda|}{\|\lambda y_0 + m\|} \overset{m=-\frac{m}{\lambda}}{=} \sup \frac{1}{\|y_0+m\|} = \frac{1}{\rho(y_0, M)} < +\infty \Rightarrow f\in X^*$　　#]

故对 $L=H_f^r$ 上方 $f(y)>r$
下方: $f(z)<r$

问题: 是否对B空间中任(闭)凸集A B. 可用(闭)超平面分离?

Rmk ① $X=\ell^2$ $A=\{x: 有限个 x_i 非零\ x\neq 0\}$ 凸子集(线性子空间)

$\mathring{A}=\phi$!   不闭 $\bar{A}=\ell^2$

$B=\{0\}$

不可用 $f\in X^*\setminus\{0\}$ 分离!   否则 若 $f(x)\geq 0$ on A. 则 $f(x)\geq 0$ on ℓ^2.
(即闭超平面) $\Rightarrow f=0$. 矛盾!

但可用 f 线性泛函分离

引理 A为B空间X中凸子集 $\mathring{A}\neq\phi$ 设 $y_0\notin A$ 则 $\exists f\in X^*\setminus\{0\}$
s.t. $L=H_f$ 分离 A和 y_0 若还有 $\rho(y_0,A)>0$ 则不仅是A有内部且严格分离

[pf 不妨设 $0\in\mathring{A}$ $x\in A\Rightarrow P_A(x)\leq 1$ $\rho(x,A)>0\Rightarrow P_A(x)>1$
↓   故 $P_A(y_0)\geq 1$ 且在 $\rho(y_0,A)>0$ 时严格
则 $P_A(x)\in\mathbb{R}$
次线性泛函

$X_0=\{\lambda y_0|\lambda\in\mathbb{R}\}$ 定义 $f(\lambda y_0)=\lambda\underset{\overset{\parallel}{c}}{\underbrace{\frac{P_A(y_0)+1}{2}}}\leq P_A(\lambda y_0)$

由H-B Thm $\exists f: X\to\mathbb{R}$ 线性 $f|_{X_0}=f_0$ 且 $f(x)\leq P_A(x)$

设 $B(0,r)\subseteq R\Rightarrow P_A(x)\leq\frac{2}{r}\|x\|\Rightarrow f\in X^*$

$L=H_f^c$ 则 $f(y_0)=c\geq 1$ ($\rho(y_0,A)>0$ 时 >1)
$f(x)\leq P_A(x)\leq 1\leq c\ (x\in A)$ 故得证.   #]

定理(凸集分离): A, B为B空间X中 两凸子集

(1) A内点非空. 则存在 $f\in X^*\setminus\{0\}$ 分离A, B

(2) $\rho(A,B)>0$ 则 . . - ~ — — -

[pf. 令 $E=A-B$ 凸

(1) 则 E° 非空 $y_0=0\notin E$. 则可用 $f\in X^*$ 分离 E 和 y_0

$$0=f(y_0)\le r\le \inf_{\substack{x_1\in A\\ x_2\in B}} f(x_1)-f(x_2)) \Rightarrow \text{分离}A.B$$

(2) 类似 #]

应用:

(1) 微分中值定理

$$f: \overset{\text{B空间}}{X\to Y} \text{ 可微于 } x_0\in X. \text{ 是指存在} L$$

s.t. $$\frac{\|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}\to 0$$

记 $f'(x_0)=L$

$f:(0,1)\to X$ 连续可微 $0<b<a<1$. 则 $\left\|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right\|\le\|f'(\theta a+(1-\theta)b)\|$

[pf $z=f(a)-f(b)$ H-B Thm. $\exists g\in X^*$ s.t. $g(\underbrace{f(a)-f(b)}_{z})=\|z\|$

$\|g\|=1$

$(0,1)\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}R$ 连续可微

$$\frac{g\circ f(a)-g\circ f(b)}{a-b}=(g\circ f)'(\theta a+(1-\theta)b)=g(f'(\theta a+(1-\theta)b))$$

$$\le\underbrace{\|g\|}_{1}f'(\theta a+(1-\theta)b)$$

$$\| \quad \frac{\|f(a)-f(b)\|}{a-b}$$

#]

命题: $C\subseteq X$ 凸子集 $f: C\to R$ 凸 $\Leftrightarrow$ 上方图 $\{(x,\delta)\mid\delta\ge f(x)\}$ 凸

结论: $f: R^d\to R$ 连续凸. 则几乎处处可微

定理. $f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{B空间}}}{X} \to \mathbb{R}$ 凸. 若 f 在 $x_0 \in X$ 处连续 则 $\underline{\partial f(x_0)} \neq \varnothing$

$\downarrow$

次微分 $= \{ g \in X^* \mid g(x) - g(x_0) \leq f(x) - f(x_0) \ \forall x \in X \}$

(若附加 f 在 x_0 可微. $f'(x_0) \in X^*$ s.t. $\dfrac{|f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)(\Delta x)|}{\|\Delta x\|} \to 0$

即 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)(\Delta x) + o(\Delta x)$

则若 $g \in \partial f(x_0) \Rightarrow g(\Delta x) \leq f'(x_0)(\Delta x) + o(\Delta x)$

$\Rightarrow g = f'(x_0)$ 此时次微分唯一 $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$

但即使 $\partial f(x_0)$ 为独点集. f' 也可能不存在)

Pf. 首先 若 Y, Z B空间 则 $Y \times Z$ B空间. $(Y \times Z)^* = Y^* \times Z^*$

$\forall f \in (Y \times Z)^*$. $\exists g \in Y^*$ $h \in Z^*$ s.t. $f(y,z) = \underset{\substack{\| \\ f(y,0)}}{g(y)} + \underset{\substack{\| \\ f(0,z)}}{h(z)}$

$\overset{A}{\| \circ}$

因 f 凸 故 f 的上方集 $\mathrm{eif}(f)$ 凸 $\subseteq X \times \mathbb{R}$

f 在 x_0 连续. 则 $z_0 = (x_0, f(x_0)) \notin (\mathrm{eif}(f))^\circ$

则对 z_0 与 A $\exists H \in (X \times \mathbb{R})^*$ 非零 s.t. $H(x_0, f(x_0)) \leq H(x, \underset{\substack{\| \\ f(x)+t}}{s})$ $\forall (x,s) \in A$

$H(x,s) = h(x) + \xi s$ $h \in X^*$. $s \in \mathbb{R}$

取 $x = x_0$ 有 $h(x_0) + \xi f(x_0) \leq h(x_0) + \xi(f(x_0)+t)$ $t > 0$

$\Rightarrow \xi \geq 0$

若 $\xi = 0$ 则 $h(x_0) \leq h(x)$ $(\forall x \in X)$ $\Rightarrow h = 0$. 矛盾

故 $\xi > 0$ $\Rightarrow -\dfrac{h(x)}{\xi} - \dfrac{-h(x_0)}{\xi} \leq f(x) - f(x_0) + t$

$t \to 0$ 令 $g(x) = -\dfrac{h(x)}{\xi} \in X^*$ 则 $g \in \partial f(x_0)$ #)

25 共轭空间与弱收敛

定义 $\Phi: X \to X^{**}$

$x \to \Phi(x)$ 其中 $\Phi(x)(f) = f(x)$ $(\forall f \in X^*)$

Φ 线性 $D(\Phi) = X$

$\|\Phi(x)\| = \sup\limits_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| \overset{\text{H-B Thm}}{=} \|x\|$ 等距

若 Φ 满 则称 X 自反

例 $X = L^p[0,1]$ ① $1 \le p < +\infty$ $X^* = L^q[0,1]$

$\forall g \in L^q[0,1]$ $T_g(f) = \int_0^1 g f \, dt$ $f \in L^p[0,1]$

$L^q[0,1] \to (L^p[0,1])^*$ 何时满射?

$g \mapsto T_g$

$p = \infty$ 时 $\underbrace{(L^\infty[0,1])^*}_{\text{不可分}} \ne \underbrace{L^1[0,1]}_{\text{可分}}$!

Banach Thm: X^* 可分 $\Rightarrow X$ 可分

$1 \le p < \infty$ 时 $\forall T \in (L^p[0,1])^*$ 定义 $\nu(E) = T(1_E)$ 对 $E \in \mathcal{B}[0,1]$ 可测

可验证 ν 为测度 且 $\nu \ll m$

由Radon-Nikodym $\exists g \in L^1[0,1]$ s.t. $\underset{\overset{\|}{T(1_E)}}{\nu(E)} = \int_0^1 1_E g \, dt$

则 $\forall f$ 特征 $T(f) = \int_0^1 f g \, dt$

一般 f $f_n \xrightarrow{a.s.} f$ 则 $\int_0^1 f_n g \, dt \to \int_0^1 f g \, dt$

特征 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ $\Rightarrow$ $T(f_n) \to T(f)$ 故 $T(f) = \int_0^1 f g \, dt$

再证 $g\in L^q$：　若 $1<p<+\infty$　　$B_N=\{x: |g(x)|\le N\}$

$f_N = g\chi_{B_N}|g|^{q-2}$　则 $|f_N|^p = \chi_{B_N}|g|^{\underbrace{(q-1)p}_{q}} \le N^q \Rightarrow f_N \in L^p[0,1]$

且 $T(f_N) = \int_{B_N}|g|^q dt$

$\le \|T\|\,\|f_N\|_{L^p} = \|T\|\left(\int_{B_N}|g|^q\right)^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow \left(\int_{B_N}|g|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|$　　$N\to+\infty \Rightarrow \|g\|_q \le \|T\|$ ✓

$\left(\int_0^1 |g\chi_{B_N}|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$

$p=\infty$ 类似，略

故 $L^p[0,1]$ $\begin{cases} \text{自反，} 1<p<\infty \\ \text{不自反 } p=1 \end{cases}$

例. $X=C([0,1])$

$(C[0,1])^* = V_0[0,1] = \{g: [0,1]\to\mathbb{R} \mid g(0)=0 \text{ 右连续 且 } V_0^1 g<+\infty\}$

$f\in C[0,1] \to T_g f = \int_0^1 f\,dg$

$\to [0,1]$上带符号测度

一般：$[0,1] \to M$ 紧度量 $\to M$ 紧 Hausdorff

Riesz表示：　M 紧 Hausdorff　　$C(M)^* = \{\mu : M\text{上复值测度}\}$

$T(f)=\int f\,d\mu$　　$\|T\| = |\mu|$.

共轭算子

X H空间 $\quad \Phi\ X^* \to X$ 共轭线性

$f \in X^* \quad \exists\, y_f \in X \quad s.t.\ f(x) = (x, y)$

$T: X \to X \quad T \in L(X) \quad T^* \in L(X)$

$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad (\forall x, y \in X)$

$X = K^d$. $T = A$ 时 $\quad T^* = A^*$ 共轭转置

$$\begin{tikzcd}
X^* \ni f \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "T^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & y_f \in X \arrow[d, "T^*"] \\
X^* \ni T^* f & T^* y_f \in X \arrow[l, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

一般 $T: X \to Y \quad T \in \mathcal{L}(X, Y) \quad \Rightarrow T^*: Y^* \to X^*$

$g \in Y^*$. 定义 $(T^* g)(x) = g(Tx)$

$\|T^* g\| \leq \|T\| \|g\| \Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\|$

给定 $x \in X$ 取 $g \in Y^*$ $\|g\| = 1$ 且 $g(Tx) = \|Tx\|$ (H-B Thm)

$\|(T^* g)(x)\| = \|g(Tx)\| = \|Tx\| \quad \Rightarrow \|Tx\| \leq \|T^*\| \|x\|$

$\quad \wedge\!|$

$\|T^*\| \|g\| \|x\| = \|T^*\| \|x\| \quad \Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\|$

故 $*$: $\mathcal{L}(X, Y) \to L(Y^*, X^*)$ 等距嵌入

X, Y 自反时

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[dd, bend right, "u"'] & Y \arrow[dd, bend left, "v"] \\
X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \\
X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**}
\end{tikzcd}$$

$\forall x \in X \quad g \in Y^* \quad (V \circ T(x))(g) = g(Tx)$

$(T^{**} \circ u(x))(g) = (u(x))(T^* g) = (T^* g)(x) = g(Tx)$

故图表交换

$\mathcal{L}(X, Y) \xrightarrow{1} L(Y^* X^*) \xrightarrow{2} L(X^{**}, Y^{**})$

1, 2 打草 $\quad$ 201篇

剛1篇

(3). (1) $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $A^*: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $A^* = A^T$ 复 $A^* = \bar{A}^T$

(2) $X = L^2[0,1]$ $T: X \to X$ 线性有界

X的一组基 $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $T(e_n) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e_m$

$C^*_{n,m} = (T^*(e_n), e_m) = \overline{(T(e_m), e_n)} = \overline{C_{m,n}}$

具体. $K(x,y) \in L^2([0,1]\times[0,1])$ $\forall f \in L^2[0,1]$

定义 $T_K f \in L^2[0,1]$ $(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$

$\|T_K f\|_{L^2} \le \|K\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$

$(T_K f, g) = (f, T_K^* g)$

$\|$

$\int_0^1 T_K f(x) g(x) dx$

$\uparrow T_K^* g(y) = \int_0^1 K(x,y) g(x) dx$

$= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y) f(y) g(x) dx dy = \int_0^1 f(y) \int_0^1 K(x,y) g(x) dx dy$

(3) $F: [0,1] \to [0,1]$ $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$t \mapsto \begin{cases} 2t, & t \le \frac{1}{2} \\ 2-2t, & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$ $f \mapsto Tf = f \circ F$

T^*?

33 收敛与弱*收敛

希望无界性条件下的某种收敛

$X = L^2[0,1]$ $e_n = e^{2\pi i n t} \in X$ 无收敛子列

但 $\forall g \in L^2[0,1]$ $\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(e_n, g)|^2 < +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (e_n, g) = 0$

一般：X B空间 x_n 弱收敛到 x，记 $x_n \rightharpoonup x$ 是指 $\forall f\in X^*$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$$

$X=L^2[0,1]$ 中的单位闭球 $S(X)=\{f: \|f\|_{L^2}\le 1\}$ 弱(自)列紧

[pf. $X^*=L^2[0,1]$ 可分　　给定 $\{x_n\}\subseteq S(X)$

稠密子集 $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$

取子列 $\{g_1(x_{n_k^1})\}$ s.t. $J(g_1)=\lim_{k\to\infty} g_1(x_{n_k^1})$ 存在

n_k^1 子列 $\{g_2(x_{n_k^2})\}$ s.t. $J(g_2)=\lim_{k\to\infty} g_2(x_{n_k^2})$ 存在

令 $n_k=n_k^k$　　则 $J(g_m)=\lim_{k\to\infty} g_m(x_{n_k})$.　$(\forall m)$

$S(X)$上度量 $\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|g_m(x)-g_m(y)|}{2^m(\|g_m\|+1)}$　则 $\{x_{n_k}\}$ Cauchy

$(S(X),\rho)$ 可度量

$\forall g\in X^*$. 令 $J(g)=\lim_{j\to\infty} J(g_{m_j})$ 其中 $g_{m_j}\to g$ in X^*

$\left(|J(g_{m_{j_1}})-J(g_{m_{j_2}})| = \lim_{i\to\infty} |g_{m_{j_1}}(x_{n_i})-g_{m_{j_2}}(x_{n_i})|\right.$

$\left.\le \|g_{m_{j_1}}-g_{m_{j_2}}\| \Rightarrow J(g_{m_j})\text{ Cauchy}\right)$

显然 $J: X^*\to K$　则 $J\in X^{**}$ $\Rightarrow \exists x\in X$　s.t. $J(g)=g(x)$ $(\forall g\in X^*)$

则 $x_{n_k}\rightharpoonup x$.　$\Rightarrow S(X)$ 弱自列紧　　#]

E-S Thm: 自反B空间X单位闭球弱自列紧

[pf. (a) Pettis Thm.　自反空间的闭子空间自反

(b) Banach Thm　Y B空间. 则 Y^*可分 → Y可分

任取 $\{x_n\}\subseteq S(X)$　　$X_0=\overline{\mathrm{span}\{x_n\}}\subseteq X$　由(a) X_0自反　且可分

故 X_0^{**}可分 $\overset{(b)}{\Rightarrow} X_0^*$可分

同上　$\exists x_{n_k}\rightharpoonup x_0$　on　X_0^*

则 $\forall f\in X^*$. $g=f|_{X_0}\in X_0^*$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = g(x_0) = f(x_0)$ $\Rightarrow x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ in X^*

故只须证 (a) (b)

(b): Y^* 可分 则 $\partial S(Y^*) = \{g\in Y^* \mid \|g\|=1\}$ 也可分: $\{f_n\}$ 为 Y^* 可数稠密集 则 $g_n=\frac{f_n}{\|f_n\|}$ 为 $\partial S(Y^*)$ 可数稠密子集

故 $\exists y_m\in Y$, s.t. $g_m(y_m)>\frac12$ $\|y_m\|=1$

$Y_0=\overline{\text{span}\{y_m\}}$ 则只须证 $Y=Y_0$

否则. $\exists y_0\notin Y_0$ 由 H-B Thm. $\exists g\in\partial S(Y^*)$. s.t. $g(y_0)=d(y_0,Y_0)>0$

$g(y)=0\ (\forall y\in Y_0)$

又取 $\|g_m-g\|<\frac14$.

但 $\|g_m-g\|\geq\|g_m(y_m)-g(y_m)\|>\frac12$. 矛盾!

(a). $T: X^*\to X_0^*$ $\|T\|\leq 1$ $\Rightarrow T^*: X_0^{**}\to X^{**}$

$f\mapsto Tf=f|_{X_0}$ $(T^*F_0)(f)=F_0(Tf)$

$\forall F_0\in X_0^{**}$ 由 X 自反. $\exists x_0\in X$ s.t. $(T^*F_0)(f)=f(x_0)$ $(\forall f\in X^*)$

若 $x_0\in X_0$ 则令

$\forall g\in X_0^*$ 由 H-B Thm. $g=T\tilde g$. $\tilde g\in X^*$

$$(T^*F_0)(\tilde g) = \tilde g(x_0)$$
$$\| \qquad\qquad \| \ (x_0\in X_0)$$
$$F_0(T\tilde g) = F_0(g) \quad g(x_0)$$

故 $F_0(g)=g(x_0)$ $(\forall g\in X_0^*)$

故 X_0 自反!

只须证 $x_0\in X_0$. 否则 $\exists \tilde f\in X^*$. $\|\tilde f\|=1$ 且 $\tilde f(x_0)=d(x_0,X_0)=d>0$

$\tilde f(X_0)=0 \Rightarrow T\tilde f=0$

$\Rightarrow (T^*F_0)(\tilde f)=\tilde f(x_0)$. 矛盾 故 $x_0\in X_0$

$\| $

$F_0(T\tilde f)=0$

]

称 $f_n \in X^*$ *弱收敛于 $f \in X^*$. 记 $w\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$. 是指

$\forall x \in X.\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

X^*中弱收敛 $\underset{\overset{\text{自反}}{\Leftarrow}}{\Rightarrow}$ *弱收敛

例: $X = C([0,1])$ $\quad J_n \in X^* \xrightarrow{*弱} J \in X^*$ $\quad (\|J_n\|\ \|J\| \le L)$

$\{f_m\}$为X稠密子集 $\Leftrightarrow \forall f \in C([0,1])\quad J_n(f) \to J(f)$

$\overset{\text{Banach-Steinhaus}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} J_n(f_m) = J(f_m)\quad (\forall m)$

$\rho(J, \tilde{J}) \triangleq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|J(f_m) - \tilde{J}(f_m)|}{(\|f_m\|+1)}$

故对 $J_n. J \in S(X^*)$ $\quad J_n \xrightarrow{*弱} J \Leftrightarrow J_n \xrightarrow{\rho} J$

由对角线原理 $(S(X^*), \rho)$紧

故: 可分B空间X $\quad S(X^*)$ *弱自列紧

例: 设 $S: \underset{\underset{M}{\shortparallel}}{[0,1]} \to [0,1]$ 连续自映射 $\quad$ S满射 $\|S\| = 1$

S诱导了 $X = C(M)$上线性算子 $T: X \to X$ $\quad \|T\| \le 1$

$f \mapsto f \circ S$

结论. $\partial_+ S(X^*) = \{J \in X^* \mid \|J\| = 1, J \ge 0\ \ J(1) = 1\}$

$\overset{\text{Riesz}}{=} \mathcal{M}(M)$. M上Borel概率测度

$J = J_\mu \in \partial_+ S(X^*)$ 则 $(T^*J)(f) = J(Tf) = J(f \circ S) \overset{\text{验证}}{\Rightarrow} T^*J \in \partial_+ S(X^*)$

$T^*.\ \partial_+ S(X^*) \to \partial_+ S(X^*)$

$\partial_+ S(X^*)$为$S(X^*)$中关于ρ的闭凸子集 $\Rightarrow$ *弱收敛下紧

claim: $\exists J_m\in\partial_+S(X^*)$. s.t $T^*J_m=J_m$ (比较 Schauder)

[pf. 任取 $J_0\in\partial_+S(X^*)$ $J_{n+1}=T^*J_n$

$$\hat{J}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}J_n$$

由 $(\partial_+S(X^*),\rho)$ 紧. $\exists\ \hat{J}_{N_i}\xrightarrow{\rho}J\in\partial_+S(X^*)$

$(T^*J)(f)=J(f\circ S)=\lim\limits_{i\to\infty}\hat{J}_{N_i}(f\circ S)$

$J(f)=\lim\limits_{i\to\infty}\hat{J}_{N_i}(f)$

$\hat{J}_{N_i}(f)=\frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}(T^*)^nJ_0(f=\frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}J_0(f\circ S^n)$

$\hat{J}_{N_i}(f\circ S)=\frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}J_0(f\circ S^{n+1})$

$\Rightarrow\hat{J}_{N_i}(f)-\hat{J}_{N_i}(f\circ S)=\frac{1}{N_i}(J_0(f\circ S^{n+1})-J_0(f))\to0$

故 $(T^*J)(f)=Jf\Rightarrow T^*J=J$ #]

X不可分呢？ 例 $X=C(M)$ 不可分 M紧Hausdorff (如 $M=[0,1]^{\mathbb{R}}$)

$S: M\to M$ 自连续映射 $T:X\to X$ $T\in\mathcal{L}(X)$

$f\mapsto f\circ S$

是否仍还 $T^*:\partial_+S(X^*)\to\partial_+S(X^*)$ 有不动点？ (*)

定义X^*中的*弱拓扑. 基 $B(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)=\{f\in X^*:\max\limits_{1\le i\le n}|f(x_i)-g(x_i)|<\varepsilon\}$

称 $A\subseteq X^*$ 为*弱紧. 是指任何开覆盖有有限子覆盖

$M=[0,1]^{\mathbb{R}}$. $g\in M$. $g(t)=0$ $(\forall t\in\mathbb{R})$

包含g的特殊开集 $U=\prod_{t\in\mathbb{R}}U_t$ $U_t\ne[0,1]$ (有限个t)

$I=\{U.\ U=\prod_{t\in\mathbb{R}}U_t\}$ $g\in U\Leftrightarrow0\in U_t$ $(\forall t)$

不可数

*弱紧 $\Leftrightarrow$ ∀网 有收敛子网

pf of (*): $\{J_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 视为 $\partial_+S(X^*)$ 中的网

$\Rightarrow$有收敛子网 $\{J_{\phi(j)}\}$ $J_{\phi(j)})=J$. $T^*J=J$

算子的收敛: X, Y B^*. $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

(1) 若 $\|T_n - T\| \to 0$ 则称 $T_n \rightrightarrows T$ (一致收敛)

(2) $\|(T_n - T)x\| \to 0$ $(\forall x)$ 则记 $T_n \to T$ (强收敛)

(3) $\forall x \in X$ $f \in Y^*$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx)$ 则记 $T_n \longrightarrow T$ (弱收敛)

一致收敛 → 强收敛 → 弱收敛

例 (1) $X = \ell^2$. $T: \ell^2 \to \ell^2$ $T_n \triangleq T^n$

$(x_1, \cdots x_i) \mapsto (x_2, x_3 \cdots)$

则 $\|T_n e_{n+1}\| = \|e_1\| = 1 \Rightarrow \|T_n\| \geq 1$ 故 $T_n \not\rightrightarrows 0$

但 $\forall x$ $\|T_n x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n+i}|^2} \to 0$ 故 $T_n \to 0$

(2) $X = \ell^2$ $S: \ell^2 \to \ell^2$ $S_n \triangleq S^n$

$(x_1 \cdots x_n \cdots) \to (0, x_1, \cdots)$

$\|S_n x\| = \|x\| \Rightarrow S_n \not\to 0$

$\forall f = (y_1 \cdots y_n \cdots) \in (\ell^2)^* = \ell^2$

$|\langle f, S_n x\rangle| = |\sum_{i=1}^{\infty} y_{i+n} x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_{i+n}^2}\, \|x\| \to 0$ $(n \to \infty)$

故 $S_n \longrightarrow 0$

例 $T: \ell^2 \to \ell^2$

$x \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$

$\|Tx\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq 1$

$\forall x \in \ell^2$ $y \in (\ell^2)^*$

$(T^* y)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(T^* y)_k}\, x_k \Rightarrow (T^* y)_k = \frac{y_k}{k}$

$\overset{\|}{y}(Tx) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{y_k} \frac{x_k}{k}$ 故 $T^* = T$

例: $\{x_n\} \subseteq C[a,b]$ $x \in C[a,b]$ $x_n \rightharpoonup x$. 证 $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ $\forall t$

pf. $\forall t_0 \in [a,b]$ 定义 $f_{t_0}: C[a,b] \to K$

$$x(t) \mapsto f_{t_0}(x_n(t)) = x(t_0)$$

则 f_{t_0} 线性 且 $\|f_{t_0}\| \leq 1$

$x_n \rightharpoonup x$ 则 $\underset{x_n(t_0)}{\overset{\shortparallel}{f_{t_0}(x_n)}} \to \underset{x(t_0)}{\overset{\shortparallel}{f_{t_0}(x)}}$]

例 $x_n \rightharpoonup x_0$. 则 $\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x_0\|$

pf 记 $i: X \to X^{**}$ 自然嵌入. $\tilde{x}_n = i(x_n)$ $\tilde{x}_0 = i(x_0)$

$\forall f \in X^*$. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n(f)$

$$\overset{\shortparallel}{f(x_0)} = \tilde{x}_0(f)$$

由共鸣定理 $\{\|\tilde{x}_n\|\}$ 有界

$$|f(x_0)| = |\lim_{n\to\infty} f(x_n)| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f\| \|x_n\|$$

$$\overset{\shortparallel}{|\tilde{x}_0(f)|} \Rightarrow \|x_0\| = \|\tilde{x}_0\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$]

例. X H空间 $\{e_n\}$ 正交规范基. 则 $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \begin{cases} \|x_n\| \text{有界} \\ \forall k \quad (x_n, e_k) \to (x, e_k) \end{cases}$

pf. $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$. $X = X^*$. 且 $\text{span}\{e_n\}$ 稠密. 由 Banach-Steinhaus.]

例 X H空间 $x_n \rightharpoonup x_0$ $y_n \to y_0$ 则 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

pf $(x_n, y_n) - (x_0, y_0) = (x_n, y_n - y_0) + (y_0, x_n - x_0)$

由 $x_n \rightharpoonup x_0$ $\exists M$. s.t $\|x_n\| \leq M$ 故得证]

例1. X Hilbert. $\{e_n\}$ 正交规范集. 则 $e_n \to 0$. 但 $e_n \not\to 0$

[Pf. 显然 $e_n \not\to 0$ $\forall x \in X = X^*$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \text{ 收敛}$$

故 $(x, e_k) \to 0 \Rightarrow e_k \to 0$]

例: X 内积空间 $x_n \to x \Leftrightarrow \begin{cases} \|x_n\| \to \|x\| \\ x_n \to x \end{cases}$

[Pf. $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n)$

又 $(x_n, x) \to (x, x) = \|x\|^2$. $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$. 得证]

例: $f \in L^p(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ $(1 < p < +\infty)$ $f_n(x) \triangleq f(x+n)$. 则 $f_n \to 0$. $f_n \not\to 0$

[Pf. $\|f_n\|_p = \|f\|_p$ $\Rightarrow f_n \not\to 0$

$\because$ $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^q(\mathbb{R})$ 中稠密 $\|f_n\|$ 有界

只须 $\forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\,dx$$

① 若 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. 则 $f(x) g(x-n) \xrightarrow{a.e.} 0$

由控制收敛 $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-n)\,dx \to 0$

② $f \in L^p(\mathbb{R})$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, s.t. $\|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x)\,dx\right| \le \left|\int_{\mathbb{R}} (f - f_\varepsilon) g(x-n)\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon g(x-n)\,dx\right|$$

$$\le \underbrace{\|f - f_\varepsilon\|_p \|g\|_q}_{\downarrow \varepsilon} + \left|\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_\varepsilon g(x-n)\,dx}_{\downarrow 0}\right|$$

\#]

26 线性算子的谱

$T: X \to X$ 闭算子 $(T \in \mathcal{L}(X))$

λ为正则值: ① $\lambda I - T$ 单射 $R(\lambda I - T) = X$ $\rho(T)$

② $(\lambda I - T)^{-1}: X \to D(T)$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

谱集

① $\lambda I - T$ 不是单射. 则 $\exists x_0 \neq 0$ $(\lambda I - T)x_0 = 0$

称λ为特征值. x_0为特征向量

↓

点谱 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\text{为特征值}\}$

② $\lambda I - T$ 单射 则 $R(\lambda I - T) \neq X$

(i) $\overline{R(\lambda I - T)} = X$ 连续谱 $\sigma_c(T)$

(ii) $\overline{R(\lambda I - T)} \subsetneqq X$ 剩余谱 $\sigma_R(T)$

$\mathbb{C}(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_R(T)$

Rmk. $\dim X < +\infty$ 时 $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T)$

例 (1) $X = l^2$ $\forall A \subseteq \mathbb{C}$ 非空有界闭 A有可数稠密子集 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$

定义 $T(x) = (\lambda_i x_i)_{i=1}^{+\infty}$ $\|T\| \leq \sup|\lambda_i| < +\infty$ $\Rightarrow T \in \mathcal{L}(l^2)$

① $\lambda \notin A$ $d \triangleq d(\lambda, A)$ $(\lambda - \lambda_i)x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$

故 $\lambda I - T$ 单 且 $\forall y = (y_i) \in l^2$. $(\lambda I - T)x = y \Leftrightarrow x = \left(\frac{y_i}{\lambda - \lambda_i}\right) \in l^2$

故 $\lambda I - T$ 满 且 $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{d} < +\infty$ $\Rightarrow \lambda \in \rho(T)$

② $\lambda = \lambda_i$ $(\lambda_i I - T)x = 0 \Leftrightarrow x = e_i$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$

若能证 $\underbrace{\sigma(T)\text{闭}}_{?}$ 则 $\sigma(T) = A$.

(2) $Tf(t) = tf(t)$ $(\forall f: [0,1] \to \mathbb{C})$

(i) $X = C[0,1]$

(ii) $X = L^2[0,1]$ 计算 $\rho(T)$ $\sigma(T)$

$(\lambda I-T)f=0 \Leftrightarrow (\lambda-t)f(t)=0 \Leftrightarrow f=0$

$\lambda I-T$ 为单射 $\Rightarrow \sigma_p(T)=\phi$

$(\lambda I-T)f=g \Leftrightarrow f(t)=\frac{g(t)}{\lambda-t}$

若 $\lambda\notin[0,1)$ 则 $R(\lambda I-T)=X$ 则 $\lambda\in\rho(T)$

若 $\lambda\in[0,1]$

- $X=C[0,1]$ 则只能 $g(\lambda)=0 \Rightarrow \overline{R(\lambda I-T)}\subseteq\{g\in C[0,1]\,|\,g(\lambda)=0\}$ $\neq X \Rightarrow \lambda\in\sigma_R(T)=[0,1]$

- $X=L^2[0,1]$ $1\notin R(T)$

  $\forall g\in L^2[0,1]$ $f_n=\begin{cases}\frac{g}{\lambda-t} & |\lambda-t|\geq\frac{1}{n}\\ 0 & |\lambda-t|\leq\frac{1}{n}\end{cases}\in L^2[0,1]$

  $(\lambda I-T)f_n=g_n=\begin{cases}g & |\lambda-t|\geq\frac{1}{n}\\ 0 & |\lambda-t|<\frac{1}{n}\end{cases}$

  $g_n\in R(\lambda I-T)$ $g_n\xrightarrow{L^2}g$ $\Rightarrow \overline{R(\lambda I-T)}=X$

  $\Rightarrow \lambda\in\sigma_c(T)=[0,1]$

断言、$T\in\mathcal{L}(X)$ 则 $\sigma(T)$ 为 $\mathbb{C}$ 的非空有界闭集

若 T 仅为闭算子. 则结构未知 $\begin{cases}\text{可以无界}\\ \sigma(T)\text{ 闭}\Leftrightarrow\rho(T)\text{ 开}\\ \sigma(T)\neq\phi\,?\end{cases}$

例. $X=L^2[0,1]$ $f\in L^2[0,1]$ $f=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}C_ne^{2\pi int}$

$Tf\triangleq\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}-(2\pi n)^2C_ne^{2\pi int}$

$D(T)=\{f\in L^2[0,1]:Tf\in L^2[0,1]\}$

$=\{\sum C_ne^{2\pi int}:\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|C_n|^2<+\infty \text{ 且 } \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(2\pi n)^4|C_n|^2<\infty\}$

可验证 T 为闭算子

$\lambda=(2\pi n)^2$: $T\sin(2\pi nt)=-(2\pi n)^2\sin(2\pi nt)\Rightarrow\lambda\in\sigma_p(T)$

$\lambda\notin A=\{(2\pi n)^2\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ $d=d(\lambda,A)$

$(\lambda I-T)f=0\Rightarrow f=0$

则 $(\lambda I-T)f = g = \sum d_n e^{2\pi i n t}$

$$\Rightarrow f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d_n}{\lambda-(2\pi n)^2} e^{2\pi i n t}$$

$$f\in D(T) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d_n^2}{(\lambda+(2\pi n)^2)^2} \le \frac{1}{d^2}\sum |d_n|^2 < +\infty \ \checkmark$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(2\pi n)^4 |d_n|^2}{|\lambda-(2\pi n)^2|^2} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 < +\infty \checkmark$$

故 $\lambda \in \rho(T)$

断言: $T\in L(X)$ (1) $\sigma(T)$ 为非空有界闭集 in $\mathbb{C}$

(2) 谱半径公式 (Gelfand)

$$r_{\sigma(T)} = \sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\} = \inf_{n\ge 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

下证明之.

称 $\{a_n\}$ 为次可加序列 是指 $a_n \in [-\infty,+\infty)$ $\quad a_{n+m} \le a_m + a_n$ $(n,m\in\mathbb{N})$

(超) $\qquad (-\infty,+\infty]$ $\qquad \ge$

命题: $\{a_n\}$ 为次可加序列 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$

[Pf. $\liminf \frac{a_n}{n} \ge \inf \frac{a_n}{n}$

固定 m. $n = mk_n + r_n$

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{k_n a_m + a_{r_n}}{k_n m + r_n} \xrightarrow{m\to+\infty} \frac{a_m}{m} \Rightarrow \limsup \frac{a_n}{n} \le \frac{a_m}{m} \ (\forall m).\ ]$$

例: $A\in GL(d,\mathbb{R})$ $\quad a_n = \log\|A^n\|$ $\quad$ 则 $\{a_n\}$ 次可加

设 $A(x): [0,1] \to GL(d,\mathbb{R})$ 连续 $\qquad a_n(x) = \log\|A^n x\|$ 连续

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(x)}{n} = \underbrace{\inf_{n\ge 1}}_{\text{下半连续}} \frac{\log\|A^n x\|}{n}$$

回到 X B空间　　$L(X)$：含幺Banach代数

$T\in L(X)$　　$a_n=\log\|T^n\|$ 次可加 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf\limits_{n}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

① $\sigma(T)$有界

若$|\lambda|>\|T\|$　$(\lambda I-T)x=0 \Rightarrow \lambda x=Tx \Rightarrow \|T\|\|x\|\le\|\lambda\|\|x\| \Rightarrow \|x\|=0$.

$\lambda I-T=\lambda(I-\frac{T}{\lambda})\overset{\Delta}{=}\lambda(I-S)$　　$\|S\|<1$

$(I-S)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S^n$　　记 $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}S^n\in L(X)$

$\|S_{n+p}-S_n\|\le\sum\limits_{n+1}^{+\infty}\|S^n\|\to 0$　故$\{S_n\}$ Cauchy

定义 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S^n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\overset{可验证}{=\!=}(I-S)^{-1}$

故$I-S$可逆 $\Rightarrow \lambda\in\rho(T)$

故$\sigma(T)$有界

② $\rho(T)$开集　$T\in L(X)$

$\forall\lambda_0\in\rho(T)$　$R_{\lambda_0}(T)=(\lambda_0 I-T)^{-1}: X\to X$

$\forall|\lambda-\lambda_0|<<1$　$\lambda I-T=\lambda_0 I-T+(\lambda-\lambda_0)I$

$=(\lambda_0 I-T)(I+R_{\lambda_0}(T)(\lambda-\lambda_0))$

则$|\lambda-\lambda_0|$充分小时　$S=(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T)$　$\|S\|<1$

故开集

$R(T): \rho(T)\to L(X)$　　是解析的：

$\lambda\mapsto R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$　（ $\varphi: U\to Y$ (B空间) 在λ可微是指 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$ 存在

$U\subset\mathbb{C}$　在U中处处可微称为解析）

给定 $\lambda_0\in\rho(T)$ $|\lambda-\lambda_0|<<1$时

$R_\lambda(T)=(I+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n R^n_{\lambda_0}(T))R_{\lambda_0}(T)$

故 $\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^{n-1}R_{\lambda_0}^{n+1}(T)$ 存在 故解析

$|\lambda|>\|T\|$ 时

$R_\lambda(T) = \lambda^{-1}(I-\frac{T}{\lambda})^{-1} = \lambda^{-1}(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^n}+I) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$

$\Rightarrow \|R_\lambda(T)\| \le \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|-\|T\|} \to 0 \quad (|\lambda|\to+\infty)$

故 $\{R_\lambda(T) : \underset{|\lambda|>\|T\|}{\lambda\in\rho(T)}\}$ 在 $\mathcal{L}(X)$ 中有界

③ $\sigma(T)\neq\phi$ 否则 $\rho(T)=\mathbb{C}$ 则 $R(T): \mathbb{C}\to\mathcal{L}(X)$ 有界

Liouville $\Rightarrow R_\lambda(T)$ 为常值

与 $R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ $(|\lambda|>\|T\|)$ 矛盾!

(Liouville: $\varphi: \mathbb{C}\to \overset{\overset{\text{B空间}}{\uparrow}}{Y}$ 有界解析 → 常值.

$\forall f\in Y^*$ $f\circ\varphi: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 有界 ⇒ 常值 再利用 Y^* 区分 Y 中点)

④ Gelfand 公式 (推论: $\begin{aligned} r_\sigma: \mathcal{L}(X) &\to \mathbb{R}^+ \\ T &\mapsto r_\sigma(T)\end{aligned}$ 下半连续)

(i) $|\lambda|>\|T\|$ 时 $\lambda\in\rho(T)$ $\Rightarrow r_\sigma(T)\le\|T\|$ $\Rightarrow r_\sigma(T^n)\le\|T^n\|$

若 $\lambda^n\in\rho(T^n)$ 则 $\lambda^n I-T^n$ 可逆

$\overset{\|}{(\lambda I-T)(\cdots)} = \Box\circ(\lambda I-T)$ $\Rightarrow \lambda I-T$ 可逆 $\lambda\in\rho(T)$

$\Rightarrow (r_\sigma(T))^n \le r_\sigma(T^n)$

$\Rightarrow r_\sigma(T)\le(\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}$

(ii)
$$\begin{tikzcd} R(T): \{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|>r_\sigma(T)\} \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "解析"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[d, "f\in\mathcal{L}(X)^*"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$f\circ R(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n\lambda^n$. 又 $R(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ $(|\lambda|>\|T\|)$. Laurent 展开唯一

故 $f\circ R(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}$ $(\forall |\lambda| > r_\sigma(T))$

$\Rightarrow \left\{ \frac{f(T^n)}{(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{n+1}} \right\}_{n\geq 1}$ 有界 $(\forall f \in \mathcal{L}(X)^*, \varepsilon>0)$

固定 $\varepsilon>0$ $T_n: \mathcal{L}(X)^* \to \mathbb{R}$

$f \mapsto \frac{f(T^n)}{(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{n+1}}$

$T_n \in \mathcal{L}(X)^{**} \hookrightarrow \mathcal{L}(X)$

$\|T_n\| = \left\|\frac{T^n}{(r_\sigma+\varepsilon)^{n+1}}\right\|$

故 $\forall f \in \mathcal{L}(X)^*$ $T_n(f)$ 有界. 由共鸣定理 $\sup\limits_{n\geq 0} \|T_n\| = M < +\infty$

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_\sigma(T)+\varepsilon$

$\varepsilon \to 0$ ✓

#

例: X H空间 $T\in\mathcal{L}(X)$ 且自伴 算 $r_\sigma(T)$ σ_p, σ_c, σ_r

结论: $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ $\sigma_R(T) = 0$

(如 $X = \ell^2 \to \ell^2$ $\{\lambda_i\}$ 为 $\mathbb{C}$ 的可数稠密子集 $\mathbb{C}$ 有界闭

$(x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$ $\Rightarrow \lambda_i \in \sigma_p(T) \Rightarrow \sigma(T) = \mathbb{C}$

则 $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_i\} \subseteq \sigma_c(T)$)

$\forall \lambda = a+ib$ $((\lambda I-T)x, (\lambda I-T)x) = ((aI-T)x+ibx, (aI-T)x+ibx)$

$= \|(aI-T)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2$

$+ \underbrace{((aI-T)x, ibx) + (ibx, (aI-T)x)}_{0}$

若 $b\neq 0$ $\|(\lambda I-T)x\|^2 \geq |b|^2\|x\|^2 \Rightarrow$ 单射 $\lambda I-T$

再证 $\lambda I-T$ 满: ① $R(\lambda I-T)$ 闭

$y_n = (\lambda I - T) x_n$ $\quad y_n \to y \Rightarrow \underset{\|y_n - y_m\|}{\underset{\parallel}{\|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\|}} \geq |b| \|x_n - x_n\|$ $\Rightarrow \{x_n\}$ Cauchy

$x_n \to x$ 则 $(\lambda I - T)x = y \Rightarrow y \in R(\lambda I - T)$.

② $R(\lambda I - T)^{\perp} = \{0\}$: $((\lambda I - T)x, y) = 0 \quad (\forall x \in X)$

$$\Rightarrow (x, (\bar{\lambda} I - T^*)y) = 0 \Rightarrow (\bar{\lambda} I - T)y = 0 \xRightarrow[\bar{\lambda} I - T\text{单}]{\text{同上}} y = 0.$$

故 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

(一般地: $S: X \to X$ 单的闭映射 $S^{-1}: R(S) \to X$ 连续 则 $R(S)$ 闭)

设 $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda I - T$ 单射

$R(\lambda I - T)^{\perp} = \{y : ((\lambda I - T)x, y) = 0 \ \forall x \in X\}$

$= N(\bar{\lambda} I - T^*) = N(\lambda I - T) = \{0\} \Rightarrow \overline{R(\lambda I - T)} = X$

$\lambda \in \sigma_c(T)$.

例: $T: l^2 \to l^2$

$(x_1, x_2 \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$ $\quad \sigma(T) = \sigma(T^*)$

$$\begin{tikzcd} \sigma_R(T) \arrow[dr, dash] & \sigma_R(T^*) \\ \sigma_C(T) \arrow[ur] & \sigma_C(T^*) \end{tikzcd}$$

结论: $r_\sigma(T) = 1$ $\quad \sigma(T) = \underset{\phi}{\underset{\parallel}{\sigma_p(T)}} \cup \underset{\{|\lambda|=1\}}{\underset{\parallel}{\sigma_c(T)}} \cup \underset{\{|\lambda|<1\}}{\underset{\parallel}{\sigma_r(T)}}$

$T^n(x_1, x_2, \cdots) = (0 \cdots 0, x_1, \cdots)$ $\quad \|T^n\| = 1 \xRightarrow{\text{Gelfand}} r_\sigma(T) = 1$

$(\lambda I - T)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \cdots) = 0 \Rightarrow x = 0$. 故单射 $\sigma_p(T) = \phi$

右移. $\sigma_p(T) = \phi$

$\sigma_c(T) = \{|\lambda| = 1\}$ $\quad \sigma_r(T) = \{|\lambda| < 1\}$

$\lambda\in\mathbb{C}$ 若 $|\lambda|<1$ 令 $w=(1,\bar{\lambda},\bar{\lambda}^2,\cdots)\in\ell^2$

$\Rightarrow((\lambda I-T)x,w)=0 \Rightarrow \overline{R(\lambda I-T)}\neq\ell^2 \Rightarrow \lambda\in\sigma_R(T)$

若 $|\lambda|=1$ $y=(\lambda I-T)x\in\ell^2$ $y_1=\lambda x_1$ $y_2=\lambda x_2-x_1$

$\Rightarrow y_1+\lambda y_2+\cdots+\lambda^n y_{n+1}=\lambda^{n+1}x_{n+1}$

$\Rightarrow \bar{\lambda}^N y_1+\bar{\lambda}^{N-1}y_2+\cdots+\bar{\lambda}y_N=x_N$

故欲 $\sum_{N=1}^{+\infty}|\bar{\lambda}^N y_1+\cdots+\bar{\lambda}y_N|^2<+\infty$ 则 $(1,0,0,\cdots0\cdots)\notin R(\lambda I-T)$

故 $R(\lambda I-T)\neq\ell^2$

$\overline{R(\lambda I-T)}=\ell^2$: $y\in R(\lambda I-T)\Leftrightarrow y\in\ell^2$, 且 $\sum_{N=1}^{+\infty}|\bar{\lambda}^N y_1+\cdots+y_N\bar{\lambda}|<+\infty$

则 $\forall y\in\ell^2$ $\varepsilon>0$ 定义 $\tilde{y}=(y_1\cdots y_N,y'_{N+1},\cdots y'_{N+p},0\cdots0)$

希望 $\|y-\tilde{y}\|_{\ell^2}^2<\varepsilon^2$ 且 $\tilde{y}\in R(\lambda I-T)$

$$\sum_{n=N+1}^{N+p}|y'_n|^2+\sum_{n=N+1}^{+\infty}|y_n|^2$$

先取 N s.t. $\sum_{n=N+1}^{+\infty}|y_n|^2<\frac{\varepsilon^2}{3}$

$$(\lambda I-T)\tilde{x}=\tilde{y}\Rightarrow\begin{cases}\bar{\lambda}^m y'_1+\cdots+\bar{\lambda}y'_m=x'_m & (m\geq1)\\ \bar{\lambda}^m y_1+\cdots+\bar{\lambda}y_m=x_m & (1\leq m\leq N)\end{cases}$$

若 $x'_m=0$ 则 $x'_{m+1}=\bar{\lambda}^{m+1}y'_1+\cdots+\bar{\lambda}^2y'_m+\bar{\lambda}y'_{m+1}$

(这里 $m=N+p$) $=\bar{\lambda}x'_m=0$ $x'_{m+2}=0\cdots$

此时 $\tilde{x}=(x'_1,\cdots x'_{m-1},0,\cdots0)\in\ell^2$ 且 $(\lambda I-T)x'=y'$

则只需 $x'_{N+p}=0$ 而 $x'_{N+p}=\underbrace{\bar{\lambda}^{-N+p}y_1+\cdots+\bar{\lambda}^{p+1}y_N}_{\bar{\lambda}^p x_N}+\bar{\lambda}^p y'_{N+1}+\cdots+\bar{\lambda}y'_{N+p}$ (*)

令 $C=\frac{\bar{\lambda}^p}{p}x^N$. $y'_{N+i}=C\lambda^{p-i+1}$ 则 (*) 成立

且 $\sum_{n=N+1}^{N+p}|y'_n|^2=\sum_{n=N+1}^{N+p}\left|\frac{x_N^2}{p^2}\right|=\frac{|x_N^2|}{p}<\frac{\varepsilon^2}{3}$

(取 p 大)

故得证 $\lambda\in\sigma_c(T)$

谱映射. $\sigma(T)$ 紧集 $\subseteq \mathbb{C}$ $T\in L(X)$

1. $P(T)=\sum_{n=0}^{N} a_n T^n \in L(X)$

遇告: $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) = \{P(t) \mid t\in\sigma(T)\}$

例如 $p(T)=T^2$ $\lambda^2 I - T^2 = (\lambda I - T)(\lambda I + T) = (\lambda I + T)(\lambda I - T)$

若 $\lambda\in\sigma(T)$ 则 $\lambda I - T$ 不单或不满 $\Rightarrow$ $\lambda^2 I - T^2$ 不单或不满

反之一样

2. $f: \underset{\Omega}{\underset{\cap}{\sigma(T)}} \to \mathbb{C}$ 解析 $\underset{\underset{\text{区域}}{\downarrow}}{\Omega} \supseteq \{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda| \geq r_{\sigma}(T)\}$

$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ 且 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n < +\infty$ $(\exists R > r_{\sigma}(T))$

形式定义 $f(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n T^n$

(定义 $M = \sup_{n\geq 0} |a_n| R^2 < +\infty$ 则 $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$

$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq R' < R \Rightarrow \|T^n\| \leq (R')^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n T^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{R^n}(R')^n < +\infty$. 故定义合理)

结论: $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$

(分析. $\lambda = f(u_0) \in f(\sigma(T))$. $u_0\in\sigma(T)$

$f(t) - f(u_0) = (t-u_0)\underset{\text{解析}}{\underline{g(t)}}$

$\Rightarrow f(T) - \lambda I = (T - u_0 I)\, g(T) = g(T)(T - u_0 I)$

若 $T - u_0 I$ 不单 $\to$ $f(T) - \lambda I$ 不单

$T - u_0 I$ 不满 $\to$ $f(T) - \lambda I$ 不满 $\Rightarrow \lambda\in\sigma(f(T))$

反之 $\lambda\notin f(\sigma(T)) \Rightarrow \lambda - f(z) = 0$ 在 $\sigma(T)$ 无解

$\lambda - f(z)$在$\{|\lambda|\le R\}$上有限个零点 $t_1 \sim t_m \notin \sigma(T)$

$\lambda I - f(T) = \underbrace{(t_1 I - T)\cdots(t_m I - T)}_{\text{可逆}}\, g(T)$ （可交换） g无零点

↓

$\frac{1}{g}$在$\{|\lambda|\le R\}$解析

故$\lambda I - f(T)$可逆 $\Leftrightarrow g(T)$可逆　又$g(T)\frac{1}{g}(T) = I$ ✓

故 $\lambda \notin \sigma(f(T))$

)

更进一步：$f: \sigma(T) \to \mathbb{C}$ 连续 能否定义$f(T)$ 且 $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$?

用$f_n: \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le R\} \to \mathbb{C}$ 多项式逼近

$(\|f_n(T) - f_m(T)\| \le \|f_n - f_m\| \|T\| ?)$

$\to$ 定义$f(T) = \lim_{n\to\infty} f_n(T)$ 合理定义

第三章　紧算子与Fredholm算子

定义 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$为Fredholm算子 是指

① $\dim N(T) < +\infty$　② $R(T)$为Y中闭子空间　③ $\operatorname{codim} R(T) < +\infty$

此时记$\operatorname{ind} T = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T) \in \mathbb{Z}$

例 $T: \ell^2 \to \ell^2$　　$N(T) = \{0\}$　$R(T) = \{(0, x_1, x_2, \cdots)\}$ 闭

$(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (0, x_1, \cdots x)$　　$\dim \ell^2 / R(T) = 1 \Rightarrow T$为Fredholm

$\operatorname{ind} T = -1$　$\operatorname{ind} T^n = -n$

T^*也Fredholm $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind} T$

可算$T^*(y_1, y_2, \cdots) = (y_2, y_3, \cdots)$　　$\dim N(T^*) = 1$　$\operatorname{codim} R(T^*) = 0$

$\operatorname{ind}(T^*) = 1$

$T: X\to Y$ 有界线性 $D(T)=X$ 若 $\dim R(T)<+\infty$ 则称 T 有限秩.

$F(X,Y)\triangleq\{$全体有限秩算子$\}$

$\forall y_0\in Y$ $f_0\in X^*$ $(y_0\otimes f_0): X\to Y$ 为1秩算子

$(f_0\neq 0)$ $x\mapsto f_0(x)y_0$

反之 若 $\dim R(T)=1$ $R(T)=\{\lambda y_0\}$

则 $T(x)=C(x)y_0$ C线性

H-B Thm $\Rightarrow$ $\exists f_0\in X^*$ $f_0(y_0)=1$ 则 $C(x)=f_0(T(x))\in X^*$

$T=y_0\otimes f_0$

类似地 $\dim R(T)=n \Leftrightarrow T=\sum_{i=1}^{n} y_i\otimes f_i$

当 $\dim Y=+\infty$ 时 $\overline{F(X,Y)}\neq F(X,Y)$

$\left(T=\sum_{t=1}^{+\infty}\frac{1}{2^t}y_t\otimes f_t\quad f_t\in X^*\quad y_t\in Y\quad \|f_t\|=\|y_t\|=1\right)$

$T\in\overline{F(X,Y)}$ 则: $T(B_X(0,1))$ 列紧

($\Leftrightarrow T(B_X(0,1))$ 完全有界 $\Leftrightarrow T(C)$ 完全有界 $\forall C$ 有界)

定义: $T: X\to Y$ 线性. 把有界集映为列紧集. 称 T 为紧算子. 紧算子全体记 $C(X,Y)$

命题 (1) $\overline{F(X,Y)}\subseteq C(X,Y)$ (2) $C(X,Y)$ 为 $L(X,Y)$ 闭子空间

[Pf. (1) $T_n\in F(X,Y)$ $T_n\to T\in L(X,Y)$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\|T-T_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$ 则 $\forall x\in B_X(0,1)$ $\|Tx-T_nx\|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $T_n(B_X(0,1))$ 有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 $\Rightarrow$ 为 $T(B_X(0,1))$ ε-网 (2) 同(1)]

(3) $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ $S\in\mathcal{L}(Y,Z)$. 若有一个紧 则 $S\circ T\in\mathcal{C}(X,Z)$

(4) $T\in\mathcal{C}(X,Y)$ $X_0\subseteq X$ 闭子空间 则 $T|_{X_0}\in\mathcal{C}(X_0,Y)$

(5) $T\in\mathcal{C}(X,Y)$ 则 $R(T)$ 可分

$$\overset{\shortparallel}{\bigcup_n}\underbrace{T(B_X(0,n))}_{\text{列紧}}$$

例1 (a) $Id_X\in\mathcal{C}(X,X)\Leftrightarrow \dim X<+\infty$

(b) $A\in\mathcal{C}(X)$ 则 $I-A\in\mathcal{C}(X)\Leftrightarrow\dim X<+\infty$

例2 $K(x,y)\in C([0,1]^2)$

$T_K: C([0,1])\to C([0,1])$

$$(T_Kf)(x)=\int_0^1K(x,y)f(y)dy$$

T_K 紧算子 $\Leftarrow$ $T_K(B_X(0,1))$ 一致有界+等度连续

一致有界: $\|T_Kf\|\le\max\limits_{x,y}|K(x,y)|$

等度连续: $|(T_Kf)(x)-(T_Kf)(x_2)|\le\max\limits_{y}|K(x,y)-K(x_2,y)|$

or 设 $\overset{\text{多项式}}{P_n(x,y)}\rightrightarrows K(x,y)$

则 $\|T_K-T_{P_n}\|=\sup\limits_{\|f\|=1}\max\limits_{0\le x\le1}\int_0^1|K(x,y)-P_n(x,y)|\overset{|f(y)|}{}dy$

$\le\|K-P_n\|$

同时计算可知 $R(T_{P_n})\subseteq\text{span}\{1,x,x^2,\cdots x^{n}\}$

故 $R(T_K)$ 列紧

例3 $K\in L^2([0,1]^2)$ T_K 同上. 则也有 $T_K\in\mathcal{C}(L^2[0,1])$

(方法: 用 T_{P_n} 逼近)

定义：$A\in L(X,Y)$ 全连续 是指 $x_n \rightharpoonup x$，则 $Ax_n \longrightarrow Ax$

结论：对 $A\in L(X,Y)$　　(1) A紧 → 全连续

(2) 若X自反 则A紧 ⟺ A全连续

(应用 $X=L^2[0,1)$　　T_K.

对 $f_n \rightharpoonup f$　有 $\sup\limits_n \|f_n\|<+\infty$

且 $\forall g\in L^2[0,1]$　$\int_0^1 g(y)(f_n(y)-f(y))dy \to 0$

取 $g_x(y)=K(x,y)$ 则 a.e. x　$\int_0^1 K(x,y)(f_n(y)-f(y))dy\to 0$

由控制收敛　$T_K f_n \to T_K f$)

[Pf: (1) $A\in C(X,Y)$　$x_n\rightharpoonup x$　若 $Ax_n \not\to Ax$

则不妨设 $\|Ax_n-Ax\|\geq\varepsilon$

$\forall g\in Y^*$　$(A^*g)(x_n)=g(Ax_n)\xrightarrow{x\rightharpoonup x}(A^*g)(x)=g(Ax)$　(*)

又 $\{x_n\}$ 有界 ⟹ $\{Ax_n\}$ 列紧　设 $Ax_{n_i}\to z$

则 $\|z-Ax\|\geq\varepsilon$ ⟹ $z\neq Ax$　与(*)矛盾

(2). X自反 ⟹ X的单位闭球 弱自列紧

则 $\{Ax_n\}\subseteq T(B_X(0,1))$　$\exists x_{n_i}\rightharpoonup x \overset{\text{续}}{\Longrightarrow} Ax_{n_i}\to Ax$　故列紧]

$\overline{F(X,Y)} = C(X,Y)$?

设 Y Hilbert，给定 $T \in C(X,Y)$，$\varepsilon > 0$ 则 $TB_X(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_Y(y_i, \frac{\varepsilon}{3})$

令 $M = \text{span}\{y_1, \dots, y_k\}$ $\quad$ P_M 为投影)

令 $T_n = P_M \circ T \in F(X,Y)$

$\|T - T_n\| = \sup\limits_{x \in B_X(0,1)} \|Tx - P_M(Tx)\|$ $\quad$ 设 $\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$< \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ $\quad$ 则 $\|P_M(Tx) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\|P_M\| \le 1)$

(不是Hilbert)

一般地 对 Y，若 $\forall \dim M < +\infty$，存在 $P_M : Y \to Y$ s.t. $\begin{cases} R(P_M) = M \\ P_M|_M = Id \\ \|P_M\| \le c \ (c\text{与}M\text{无关}) \end{cases}$

则 $\overline{F(X,Y)} = C(X,Y)$

分析：Y B空间，$\dim M < +\infty \Rightarrow M$ 闭子空间

[(*)] 此时存在另一个闭子空间 M_1 s.t. $Y = M \oplus M_1$ $\quad$ $y = y_M + y_{M_1}$

定义 $P_M : Y \to Y$ $\quad$ $R(P_M) = M$

$y \mapsto y_M$ $\quad$ $P_M|_M = Id$

$M \oplus M_1 \cong M \times M_1$ $\quad$ $M \times M_1$ 上范数 $\underset{\|(y_M, y_{M_1})\|^*}{\overset{}{}}$ $\overset{\|(y_M, y_{M_1})\|^*}{\overset{\shortparallel}{\|y_M\|_Y}} + \|y_{M_1}\|_Y$ 完备

故可得到 $\underset{\overset{\shortparallel}{Y}}{M \oplus M_1}$ 上范数 $(\underset{\overset{\shortparallel}{Y}}{M \oplus M_1}, \|\cdot\|^*)$ 也完备 且 $\|\cdot\|^*$ 与 $\|\cdot\|$ 等价

由范数等价 $\|\cdot\|^* \le C_M \|\cdot\|$ $\quad$ $\Rightarrow \|P_M y\| = \|y_M\| \le C_M \|y\|$

若 $\sup\limits_{M} C_M < +\infty$ 则满足条件

证(*): 设 $M=\mathrm{span}\{\underset{(\text{无关})}{y_1,\cdots,y_k}\}$ 则由习题 $\exists f_i\in Y^*$ st $f_i(y_j)=\delta_{ij}$

令 $\varphi: Y\to Y$ $\varphi(y)=\sum_{i=1}^{k} f_i(y)y_i$ 则 $\varphi|_M=Id$ 取 $M_1=\ker(\varphi)$ 即可

一般地: 若 $M\subseteq Y$ 闭子空间 (不必有限维) 且存在 $\varphi: Y\to Y$ st $\begin{cases}\varphi\in\mathcal{L}(Y)\\ \varphi|_M=Id\\ R(\varphi)=M\end{cases}$

则 $M_1=\ker\varphi$ $Y=M\oplus M_1$

反之 若有分解 $M\oplus M_1$ 则 $\underset{\overset{\|}{P_M}}{\varphi}: Y\to Y$ 为投射

结论: 若 $\overset{(1)}{\dim M<+\infty}$ 或 $\overset{(2)}{\mathrm{codim}\, M<+\infty}$ 则有如上投射(分解)

[(1) 上面已证

(2) $\pi_M: Y\to Y/M$ $\|\pi_M\|=1$ $Y/M=\mathrm{span}\{\overset{(\text{无关})}{e_1,\cdots,e_k}\}$

$y\mapsto[y]$

$e_i=\pi_M(y_i)$ $y_i\in Y$

则 $\{y_i\}$ 也无关

$M_1=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_k\}$

$M=\ker(\pi_M)$ 则 $Y=M\oplus M_1$:

若 $y\in M\cap M_1$ $y=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i$ $(y\in M_1)$

$\overset{\pi_M}{\downarrow}$

$0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\pi_M(y_i)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i$ $\Rightarrow\lambda_i=0.$ $y=0$

$\forall y\in Y$ 设 $\pi_M(y)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i$ $y_{M_1}:=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i\in M_1$

$\pi_M(y-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i)=0\Rightarrow y_M:=y-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i\in M$ $\Rightarrow y=y_M+y_{M_1}$ #]

定义: 称Y有Schauder基 是指Y可分. 存在$\{e_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq Y$

$\forall y\in Y$ 有唯一分解 $y=\sum_{n=1}^{+\infty} C_n(y)e_n$ (即 $S_N(y)=\sum_{n=1}^{N} C_n(y)e_n$ 构成Cauchy列 $S_N(y)\to y$)

结论: Y B空间且有Schauder基 则 $C(X,Y)=\overline{F(X,Y)}$

[pf: 只需证 $\exists C>0$ $M^1\subseteq M^2\subseteq \cdots$ Y M^i有限维 $Y=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$

且有投影 $P_{M^i}: Y\to Y$ $\begin{cases} R(P_{M^i})=M_i \\ P_{M^i}|_{M^i}=Id \\ \|P_{M^i}\|\le C \end{cases}$ (*)

(原因: $\forall T\in C(X,Y)$ $\varepsilon>0$. $TB_X(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \frac{\varepsilon}{4(C+1)})$

J足够大 $\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i', \frac{\varepsilon}{2(C+1)})$

$(y_i' \in M^J)$

定义 $T_n = \overset{\in F(X,Y)}{P_{M^J}\circ T}$ $\|T_n\|\le C$

$\|T-T_n\| = \sup_{x\in B_X(0,1)} \|Tx - P_{M^J}(Tx)\| \le \frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon$ $\quad \|Tx-y_i'\|_Y<\frac{\varepsilon}{2(C+1)}$ $\|P_{M^J}(Tx)-y_i'\|_Y < \frac{\varepsilon C}{2(C+1)}$)

回到(*). 设Y有Schauder基$\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$

$M^i=\mathrm{span}\{e_1, \cdots e_i\}$ Claim: $C_n(y): Y\to K$. $C_n\in Y^*$

$P_{M^i}(y) = \sum_{n=1}^{i} C_n(y)e_n \Rightarrow \begin{cases} P_{M^i}\in L(Y) \\ \text{由分解唯一性} \quad P_{M^i}|_{M^i}=Id \\ R(P_{M^i})=M^i \end{cases}$

$\forall y\in Y$ $y=\lim_{i\to+\infty} P_{M^i}(y) \Rightarrow \sup_{i\ge1} \|P_{M^i}(y)\|<+\infty$

$\overset{\text{共鸣}}{\Rightarrow} \sup_{i\ge 1}\|P_{M^i}\| = C<+\infty$.

Pf of claim: Y上新范数 $\Box y\Box = \sup_{N\ge1}\|S_N(y)\| \ge \|y\|$

若该范数完备 由范数等价 $\|S_N(y)\|\le C\|y\|$ $\Rightarrow \|C_n(y)e_n\|\le 2C\|y\|$

$\|S_{N-1}(y)\|\le C\|y\|$ $\Rightarrow \|C_n(y)\| \le \frac{2C}{\|e_n\|}\|y\|$ ✓

↓

设$\{y^i\}$为Cauchy列 $\Rightarrow \exists M(\varepsilon)>0$ $\forall p.k>M(\varepsilon)$ $\underset{\sup_{N\ge1}\|S_N(y^p-y^k)\|}{\underset{\|}{\Box y^p\Box - \Box y^k\Box}} \le \varepsilon$

则 $\sup\limits_{N\geq 1} \| S_N(y^p) - S_N(y^k) - S_{N-1}(y^p) + S_{N-1}(y^k) \| \leq 2\varepsilon$

$\overset{\shortparallel}{\sup\limits_{N\geq 1}} | C_N(y^p) - C_N(y^k) | \|e_N\| \Rightarrow | C_N(y^p) - C_N(y^k) | \leq \frac{2\varepsilon}{\|e_N\|}$

则 $\forall N$. $C_N(y_i)$ Cauchy 故 $C_N(y_i) \to C_N$

故 $\forall N \geq 1$. $S_N(y^k) = \sum\limits_{n=1}^{N} C_n(y^k) e_n \xrightarrow{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n$

故 在 $\sup\limits_{N\geq 1} \| S_N(y^k) - S_N(y^p) \| \leq \varepsilon$ 中令 $k \to +\infty$ 有

$\sup\limits_{N\geq 1} \| S_N(y^p) - \sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n \| \leq \varepsilon$ $(*)$

又 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(y^p) = y^p$ $\Rightarrow \{\sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n\}_N$ 为 Cauchy 列

令 $y = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} C_n e_n$

故 $(*)$ 给出 $\sup\limits_{N\geq 1} \| S_N(y^p) - S_N(y) \| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow y^p \xrightarrow{\square\square} y$ #]

$\| \square y^p \square - \square y \square \|$

3.2 Riesz-Fredholm 理论

R-F 定理：X B 空间 $A \in C(X)$ 则 $T = I - A$ 满足

(1) $N(T) = \{0\} \Leftrightarrow R(T) = X$ (2) $G(T) = G(T^*)$

(3) $\dim N(T) = \dim N(T^*) < +\infty$ (4) $R(T) = N(T^*)^{\perp}$ $R(T^*) = {}^{\perp}N(T)$

(5) $\operatorname{codim} R(T) = \dim N(T)$

$(= \operatorname{codim} R(T^*) = \dim N(T^*))$

对 $M \subseteq X$. ${}^{\perp}M = \{ f \in X^* \mid f(x) = 0 \ x \in M \}$

$N \subseteq X^*$. $N^{\perp} = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \ f \in N \}$

Schauder 定理：$T \in L(X, Y)$. 则 $T \in C(X, Y) \Leftrightarrow T^* \in C(Y^*, X^*)$

Rmk. 1 R-F 定理说明 会给出 $R(T)$ 闭 $\Rightarrow T$ 为 Fredholm 算子. $\operatorname{ind} T = 0$

2 X Hilbert 另记 $R(T) = N(T^*)$

一旦 $R(T)$ 闭 则 $({}^{\perp}R(T))^{\perp} = \underline{(N(T^*))}^{\perp} = R(T)^{\perp\perp} = \overline{R(T)} = \underline{R(T)}$

[pf. (4) 引理: ${}^{\perp}R(T)=N(T^*)$ $\quad$ $R(T^*)^{\perp}=N(T)$

因为 $f\in{}^{\perp}R(T)\Leftrightarrow f(Tx)=0(\forall x\in X)\Leftrightarrow T^*f=0\Leftrightarrow f\in N(T^*)$

$x\in R(T^*)^{\perp}\Leftrightarrow (T^*f)(x)=0\ (\forall f\in Y^*)\Leftrightarrow f(Tx)=0\Leftrightarrow x\in N(T)$

引理 $\Rightarrow$ $\overline{R(T)}=N(T^*)^{\perp}$ ① $\quad$ $\overline{R(T^*)}={}^{\perp}N(T)$ ②

① 因为 $\forall \underset{Tx}{\underset{\shortparallel}{y}}\in R(T)$ $\quad$ $\forall f\in N(T^*)$ $\quad$ $T^*f=0\Rightarrow \overset{f(y)}{\overset{\shortparallel}{f(Tx)}}=0\Rightarrow y\in N(T^*)^{\perp}$

$\Rightarrow R(T)\subseteq N(T^*)^{\perp}$. 则 $\overline{R(T)}\subseteq N(T^*)^{\perp}$

反之. 由引理 $N(T^*)^{\perp}=({}^{\perp}R(T))^{\perp}$ 只须 $({}^{\perp}R(T))^{\perp}\subseteq\overline{R(T)}$

$\forall x_0\in({}^{\perp}R(T))^{\perp}$ $\quad$ $f(x_0)=0$ $(\forall f\in{}^{\perp}R(T))$

若 $x_0\notin\overline{R(T)}$. 由H-B Thm $\exists$ $\underset{\downarrow}{\underline{f(\overline{R(T)})=0}}$ $\quad$ $\underset{f_0}{f(x_0)}=d(x_0,\overline{R(T)})$ $\quad$ $\|f\|=1$

H-B 应用

$f\in{}^{\perp}R(T)$ 矛盾! 故①✓

② $\forall \underset{T^*g}{\underset{\shortparallel}{f}}\in R(T^*)$ $\quad$ $\forall x\in N(T)$. $\quad$ $fx=(T^*g)(x)=g(Tx)=0\Rightarrow f\in{}^{\perp}N(T)$

$\Rightarrow\overline{R(T^*)}\subseteq{}^{\perp}N(T)$

反之 同理只须证 ${}^{\perp}(R(T^*)^{\perp})\subseteq\overline{R(T^*)}$. 类似, 略

$\longrightarrow$ 则命题 + Schauder Thm $\Rightarrow$(4)

命题: $T=I-A$ $\quad$ $A\in C(X)$ $\quad$ 则$R(T)$闭

(pf. Fact: $S\in L(Y,Z)$ $\quad$ $D(S)=Y$ 且 $\begin{cases}S\text{单}\\ S^{-1}:R(S)\to Y\text{连续}\end{cases}$ 则 $R(S)$闭

原因: $M=\|S^{-1}\|<+\infty$ 则 $\forall z\in\overline{R(S)}$. $\quad$ $z_n=S(y_n)\to z$ $\quad$ $\{z_n\}$ Cauchy

则 $\|y_n-y_m\|\le M\|z_n-z_m\|$ $\quad$ $\{y_n\}$Cauchy $\Rightarrow y_n\to y$. $\quad$ $Sy=z$ ✓.

$\hat{T}: X/N(T)\to X$ $\quad$ 则 $D(\hat{T})=X/N(T)$ 且单 $\quad$ $\|\hat{T}\|<+\infty$

$[x]\mapsto Tx$.

$$\|\hat{T}\|=\sup_{\|[x]\|=1}\|\hat{T}[x]\|\le\sup_{\|[x]\|=1}\|T\|\inf_{z\in[x]}\|z\|\le\|T\|<\infty$$

由Fact. 只须证 $\hat{T}^{-1}$ 连续: 否则 $\exists x_n\in R(T)$

s.t. $\|\hat{T}^{-1}x_n\|\ge n\|x_n\|$ $\quad$ $\hat{T}^{-1}x_n=[y_n]$ $\quad$ $Ty_n=x_n$

不妨 $\|[y_n]\|=1$ 且 $\|y_n\|\le2$ $\quad$ 则 $x_n\to0$. $\quad$ $\overset{y_n-Ay_n}{\overset{\shortparallel}{Ty_n}}\to0$ $\quad$ $\|[y_{n_k}-z]\|\le\|y_{n_k}-z\|\to0$

又 $\|y_n\|\le2$ $\quad$ A紧 $\Rightarrow$ 子列 $Ay_{n_k}\to z\Rightarrow y_{n_k}\to z\Rightarrow Az=z\Rightarrow z\in N(T)$ 与 $\|[y_{n_k}]\|=1$ 矛盾)

Schauder 证明 $\Rightarrow$: A紧 证 A^*紧. 即 $A^* B_{Y^*}(0,1)$ 列紧

即 $\forall \|g_n\| \leq 1$. $g_n \in Y^*$. 找 $\{A^* g_n\}$ 收敛子列

A紧 $\Rightarrow C = \overline{A B_X(0,1)}$ 紧. $\quad \varphi_n : C \to K$, $y \mapsto g_n(y)$ $\quad \{\varphi_n\} \subseteq C(C, K)$

(C紧)

一致有界 $|\varphi_n(y)| \leq |g_n(y)| \leq \|g_n\| \|y\| \leq \|y\| \leq M < +\infty$ $\quad \xRightarrow{A-A} \{\varphi_n\}$ 列紧

等度连续: $|\varphi_n(y_1) - \varphi_n(y_2)| \leq \|g_n\| \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|$ $\quad \varphi_{n_k} \to \varphi_0$

$\|A^* g_{n_k} - A^* g_{n_{k'}}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A^* g_{n_k}(x) - A^* g_{n_{k'}}(x)\| \leq \sup\limits_{x \in C} \|g_{n_k}(x) - g_{n_{k'}}(x)\| \to 0$

故 $A^* g_{n_k}$ Cauchy $\quad A^* g_{n_k} \to g \in Y^*$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "u"] \\ X^{**} \arrow[r, "A^{**}"'] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$. A^*紧 $\Rightarrow A^{**}$紧 $\quad A = A^{**}|_{u(X)}$

$A^{**}|_{u(X)}$ 紧 $\Rightarrow A$ 紧

(2): 事实上 对 $S \in L(X)$. $\sigma(S) = \sigma(S^*) \Leftrightarrow \rho(S) = \rho(S^*)$

$\Leftrightarrow (\lambda I - S$ 可逆$) \Leftrightarrow (\lambda I - S^*$ 可逆$)$

故只须证对 $R \in L(X)$ R可逆 $\Leftrightarrow R^*$可逆

$\Rightarrow$: $(R^{-1})^* \circ R^* = R^* \circ (R^{-1})^* = Id$ 故 R^*可逆. 逆为 $(R^{-1})^*$

$\Leftarrow$ R^*可逆. 则 R^{**}可逆

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "u"] \\ X^{**} \arrow[r, "R^{**}"'] & X^{**} \end{tikzcd}$$

$(R^{**})^{-1}|_{u(X)}$: $(u(X) \to u(X)$ 有界

$\Rightarrow R^{-1}: R(X) \to X$ 有界

R单射 $\quad R(X)$ 闭

若 $R(X) \neq X$. 取 $x_0 \notin R(X)$. H-B Thm $\Rightarrow \exists f \in X^*$ $\quad f(R(X)) = 0$

$\|f\| = 1$. $\quad f(x_0) = d(x_0, R(X))$

$\Rightarrow R^* f = 0 \quad \Rightarrow f = 0$ 矛盾!

(1) ⇒. 由之前命题 $R(T)$闭. 若 $\underset{X_1}{R(T)} \neq X$

则设 $T = I - A: X_1 \to X_1$

$A|_{X_1}: X_1 \to X_1$ 紧 $(A(Tx) = T(Ax) \in X_1)$

$T|_{X_1}: X_1 \to R(T|_{X_1}) = \underset{\text{闭}}{X_2}$ 又T单. $T: X \to X_1$ 故 $X_2 \subsetneq X_1$

还是由命题

故得到 $\overset{X_0}{\overset{\parallel}{X}} \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots$ $X_{n+1} = T(X_n)$

由Riesz引理 $\exists y_k \in X_k$ $\|y_k\| = 1$ 且 $d(y_k, X_{k+1}) \geq \frac{1}{2}$

$\{y_k\}$有界 $\to \{Ay_k\}$列紧. 设 $Ay_{n_i} \to z$

另一方面 $$\|Ay_{n_{i+p}} - Ay_{n_i}\| = \|\underbrace{\underset{\underset{X_{n_{i+p}}}{\in}}{y_{n_{i+p}}} - \underset{\underset{X_{n_{i+p}+1}}{\in}}{Ty_{n_{i+p}}} + \underset{\underset{X_{n_i+1}}{\in}}{Ty_{n_i}}}_{\underset{X_{n_i+1}}{\in}} - y_{n_i}\|$$

$\geq d(y_{n_i}, X_{n_i+1})$

$\geq \frac{1}{2}$ 矛盾!

(3) 一部分: $x \in N(T)$ $Tx = 0 \Leftrightarrow Id(x) = A(x) \Rightarrow A|_{N(T)} = Id|_{N(T)}$

又 $\underset{Id|_{N(T)}}{\overset{\parallel}{A|_{N(T)}}} \in C(N(T))$ 故只能 $\dim N(T) < +\infty$

同理 $\dim N(T^*) < +\infty$

另一部分: $\operatorname{codim} R(T) = \dim X/R(T) = \dim (X/R(T))^* \overset{\text{引理}}{=\!=} \dim {}^{\perp}R(T)$

$\overset{\text{前面已证}}{=\!=} \dim N(T^*)$ (*)

同理 $\operatorname{codim} R(T^*) = \dim N(T^{**})$ (**)

$\geq \dim N(T)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "u"] \\ X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & X^{**} \end{tikzcd}$$

$x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0$

$(T^{**}u(x))(f) = (u(x))(T^*f)$ $\Rightarrow \overset{u(x)}{\overset{\uparrow}{x}} \in N(T^{**})$

$= (T^*f)(x) = f(Tx) = 0$

$\Rightarrow \dim N(T^{**}) \geq \dim N(T)$

故⑤ $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ ③ 则欲证③

$\Rightarrow$ ①

又 $\dim N(T^*) \overset{(*)}{=} \operatorname{codim} R(T) \overset{引理2}{\leq} \dim N(T) \overset{(**)}{\leq} \operatorname{codim} R(T^*) \overset{引理2}{\leq} \dim N(T^*)$

又上述所有均有限 故③得证 则全部得证.

故只须如下的引理1,2.

引理1: $M \subseteq X$ 闭 则 $\dim(X/M)^* = \dim {}^{\perp}M$.

pf. $\Phi: {}^{\perp}M \to (X/M)^*$ $\Phi f: X/M \to K$ 良定

$[x] \mapsto f(x)$

Φf 有界: $\|\Phi f\| = \sup_{\substack{[x]\in X/M \\ \|[x]\|=1}} |\Phi f([x])|$

$= \sup_{\|[x]\|\leq 1} \inf_{z\in[x]} |f(z)| \leq \|f\| \sup_{\|[x]\|\leq 1} \inf_{z\in[x]} \|z\| = \|f\|$

给定 $\tilde{f} \in (X/M)^*$ $f = \tilde{f}\circ \pi_M \in X^*$. $f(M)=0 \Rightarrow f \in {}^{\perp}M$

且 $(\Phi f)[x] = f(x) = \tilde{f}(\pi_M(x)) = \tilde{f}([x])$)

故 Φ 满. $\|\Phi\| \leq 1$

另一方面 $\|\tilde{f}\| = \|\Phi f\| \leq \|f\| \leq \|\tilde{f}\|\|\pi_M\| \leq \|\tilde{f}\| \Rightarrow \|f\| = \|\tilde{f}\|$

故 Φ 等距同构 得证.

引理2: $\operatorname{codim} R(T) \leq \dim N(T) < +\infty$

pf. 否则 若 $\operatorname{codim} R(T) > \dim N(T)$ 则 claim $\exists M_1 \subseteq X$ $\dim M_1 = \overset{\overset{k}{\parallel}}{\dim N(T)}$

s.t. $R(T) \oplus M_1 \subseteq X$

$(R(T)\cap M_1 = \phi)$

(pf of claim: 取 $\underset{\overset{\uparrow}{x_1}}{e_1} \sim \underset{\overset{\uparrow}{x_k}}{e_k}$ 在 $X/R(T)$ 无关 $x_k \in X$ $\pi_{R(T)}(x_i) = e_i$ 故 x_i 无关

令 $M_1 = \operatorname{span}\{x_i\}$ 若 $x \in M_1$ $x = \sum \lambda_i x_i$

若 $x \in R(T)$ 则 $\pi_{R(T)}(x) = 0$ $\rightarrow \Rightarrow \sum \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow x = 0$)

则 取 $V: N(T) \to M_1$ 线性同构

且由 $\dim M_1 < +\infty$. $\exists \varphi: X \to X$ $R(\varphi) = N(T)$ $\varphi|_{N(T)} = Id$

则定义 $\tilde{T}: X\to X$　　　　$\tilde{T}\in L(X)$　　$R(\tilde{T})\supseteq R(T)\oplus M_1 \neq X$

$x\mapsto Tx+V\circ\varphi(x)$

$$\tilde{T}-x=(T-I)x+V\circ\varphi(x)=-Ax+\underbrace{V\circ\varphi(x)}_{\text{有限秩}}\in C(X)$$

故 $\tilde{T}=I-\tilde{A}$　$\tilde{A}\in C(X)$

$$x\in N(\tilde{T})\Leftrightarrow \underset{R(T)}{\overset{\cap}{Tx}}+\underset{M_1}{\overset{\cap}{V\circ\varphi(x)}}=0 \Leftrightarrow Tx=V\circ\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x\in N(T)\cap N(\varphi)$$

$\varphi|_{N(T)}=Id$
$\Leftrightarrow x=0$

故 $N(\tilde{T})=0$.　由"(1)⇒" $R(\tilde{T})=X$. 矛盾!　故得证.]

定义: X. Y B空间 $T\in L(X,Y)$ 是 Fredholm 算子是指

① $R(T)$ 闭 ② $\operatorname{codim}R(T)<\infty$ ③ $\dim N(T)<\infty$

此时 $\operatorname{ind}(T)=\dim N(T)-\operatorname{codim}R(T)$

故 $T=I-A$. $A\in C(X)\Rightarrow \begin{matrix}T \text{ Fredholm}\\ \operatorname{ind}T=0\end{matrix}$

$\to \operatorname{ind}R(T)=0$

$T\in L(X)$ 可逆.　① $\|S\|\ll 1$　$\Rightarrow T_S=T-S=T\circ(I-T^{-1}S)$ 可逆. $\operatorname{ind}(T_S)=0$

② $S\in C(X)$　$T_S=T-S=\underset{\text{可逆}}{T}\circ(\underbrace{I-T^{-1}S}_{\substack{\text{Fredholm.}\\ \operatorname{ind}=0}})$

故仍 T_S Fredholm.　$\operatorname{ind}(T_S)=0$

3.3 紧算子的谱

定理: X为B空间 $T\in C(X)$. 则

(1) $\dim X=+\infty \Rightarrow 0\in\sigma(T)$

(2) $\sigma(T)=\begin{cases}\{\lambda_1\cdots\lambda_m\} & m\le\dim X<+\infty\\ \{0\} & \\ \{0,\lambda_1\cdots\lambda_m\} & \dim X=+\infty\\ \{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}\quad \lambda_i\to0 & \end{cases}$

(3) $\sigma(T)\setminus\{0\}=\sigma_p(T)\setminus\{0\}$

例: $X=\ell^2$ $\quad T:\ell^2\to\ell^2$ $\qquad$ T有限秩 $\Rightarrow T\in C(X)$

① $(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots,\lambda_mx_m,0,0,\cdots)$

则 $0,\lambda_1,\cdots\lambda_m\in\sigma_p(T)$ $\qquad$ 即 $\sigma(T)=\{0,\lambda_1,\cdots\lambda_m\}$

② $(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots)$

$T\in C(\ell^2)\Leftrightarrow\lambda_i\to0$ (截断逼近)

则 $\sigma(T)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\ \}$

③ $(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots)$ $\quad\lambda_i\to0$

为紧算子复合有界算子 $\Rightarrow T\in C(X)$

$Tx=\lambda x\Leftrightarrow(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots)=(0,\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots)$

若$\lambda\ne0$、则$x_1=0\Rightarrow x_2=0,\cdots$ $\quad$ 故$x=0$ $\quad\Rightarrow\sigma_p(T)=\phi$

若$\lambda=0$ $\quad$ 则$x_1=x_2=\cdots=0$ $\quad$ 故$x=0$

故$\sigma(T)=\{0\}$

且 $\overline{R(T)}\subseteq\{(0,x_1,x_2,\cdots)\}\ne\ell^2$ $\quad$ 故$0\in\sigma_R(T)$

定义 ($\underset{\substack{\downarrow\\ TM=M}}{\text{平稳}}$)不变子空间(子集) $\qquad$ (例③: 无平稳真不变子空间 否则 $TM=M$, $\underset{\substack{\downarrow\\ \{0,0,0,\cdots\}}}{T^nM}=M$)

$\sigma_p(T)=\phi\Rightarrow$ 无非平凡有限维不变子空间 (线性代数)

Cpf{ (1) 否则 $0\in\rho(T)$. $\Rightarrow -T$可逆

则 $X \xrightarrow[\text{紧}]{-T} X \xrightarrow[\text{有界}]{(-T)^{-1}} X$ 紧. 即 $Id\ X\to X$ 紧. 与 $\dim X=+\infty$矛盾!

(3) $\sigma_p(T)\setminus\{0\}\subseteq\sigma(T)\setminus\{0\}$.

反向: $\sigma(T)\setminus\{0\}\subseteq\sigma_p(T)\setminus\{0\} \Leftrightarrow \lambda\notin\sigma_p(T)\cup\{0\}\Rightarrow\lambda\in\rho(T)$

取 $\lambda\notin\sigma_p(T)\cup\{0\}$ 则 $\lambda I-T=\lambda(I-\frac{T}{\lambda})$ 单射 $\xRightarrow{R-F}$ $I-\frac{T}{\lambda}$满射

$\Rightarrow \lambda I-T$可逆. ✓

(2) 证: $\sigma_p(T)$至多以0为聚点. ($\Rightarrow \sigma_p(T)$可数)

否则. 设 $\lambda_i\in\sigma_p(T)$ $\lambda_i\to\lambda\neq0$ $\lambda_i\neq\lambda_j$ $\lambda_i\neq0$

则 $\exists\ Tx_i=\lambda_i x_i$ $\|x_i\|=1$ 取 $z_i=\frac{x_i}{\lambda_i}$ 则 $\sup\|z_i\|<+\infty$

由T紧. 不妨设 $Tz_i\to z$ 则 $\|\underset{x_i}{\underset{\shortparallel}{Tz_i}}-\underset{x_{i+1}}{\underset{\shortparallel}{Tz_{i+1}}}\|\to0$ ✗

$E_n=\text{span}\{x_1,\cdots x_n\}$ 则 $T: E_n\to E_n$ (λ_i不同$\Rightarrow x_i$无关) $\dim E_n=n$

取 $y_{n+1}\in E_{n+1}$ s.t. $\|y_{n+1}\|=1$ $d(y_{n+1},E_n)\geq\frac12$ (Riesz引理)

令 $z_n=\frac{y_n}{\lambda_n}$. 则 $\sup\|z_i\|<+\infty$

由T紧 不妨设 $Tz_i\to z$. 则 $\|Tz_i-Tz_{i+1}\|\to0$

$$=\|T(\frac{c_{i+1}x_{i+1}-\overset{\to *\in E_n}{*}}{\lambda_{i+1}})-Tz_i\|$$

$$=\|\underbrace{c_{i+1}x_{i+1}+*}-*+T*-Tz_i\|$$

$$=\|y_{i+1}-(*\underbrace{-T*+Tz_i}_{E_i})\|\geq\frac12.$$ 矛盾]

$\forall x\in X$ x 生成的最小不变子空间 $L(x) = \{p(T)x \mid p(T)$ 为 T 的多项式$\}$

（闭） $\overline{L(x)}$

$x=0$ 时 $L(x)=\{0\}$ 平凡

是否 $\forall x\neq 0$ $\overline{L(x)}=X$? ($\Leftrightarrow$ X 无非平凡不变闭子空间)

定理：X 为 B 空间 $\dim X\geq 2$. $T\in C(X)$. 则

T 有真不变闭子空间 $\Leftrightarrow \exists x\in X$ $x\neq 0$ s.t. $\{0\}\subsetneq \overline{L(x)}\subsetneq X$)

Pf. 否则 $\forall x\in X\setminus\{0\}$ $\overline{L(x)}=X$

则 $\sigma_p(T)=\emptyset$. 否则取 $\lambda\in\sigma_p(T)$ $Tx_\lambda=\lambda x_\lambda \Rightarrow L(x_\lambda)$ 一维不变子空间 矛盾！

故 $\sigma(T)=\{0\}$. $\dim X=+\infty$ $\Rightarrow r(T)=0$

另一方面 取 $x_0\in X$. $\|Tx_0\|>1$

不妨设 $\|T\|=1$ 则取 x_0 s.t. $\|Ax_0\|>1 \Rightarrow \|x_0\|>1$

令 $C=\overline{TB_X(x_0,1)}$ 紧 $0\notin C$

$\forall y_0\in C$ $\exists$ 多项式 $P_{y_0}(T)$ s.t. $\|P_{y_0}(T)(y_0)-x_0\|<1$

由连续 $\exists\delta_{y_0}$ s.t. $P_{y_0}(T)(B(y_0,\delta_{y_0}))\subseteq B_X(x_0,1)$

取有限覆盖 $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\delta_i)$

$\Rightarrow \forall y\in C$ $\exists i_1$ s.t. $\|P_{y_{i_1}}(T)(y)-x_0\|<1 \Rightarrow T(P_{y_{i_1}}(T)(y))\in C$

$\Rightarrow \exists i_2$ s.t. $\|P_{y_{i_2}}(T)(TP_{y_{i_1}}(T)(y))-x_0\|<1 \Rightarrow \|P_{y_{i_2}}P_{y_{i_1}}(T)(Ty)-x_0\|<1$

一直下去 $\Rightarrow \|\prod_{j=1}^{k+1}P_{y_{i_j}}(T)(T^k y)-x_0\|<1$

取 $\mu=\max\limits_{1\leq i\leq n}\|P_{y_i}(T)\|$ $\Rightarrow \|x_0\|-1\leq \mu^{k+1}\|T^k y\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\|x_0\|-1}{\mu\|y\|}\right)^{\frac{1}{k}}}_{\downarrow\ \frac{1}{\mu}}\leq\left(\frac{\|T^k y\|}{\|y\|}\right)^{\frac{1}{k}}\leq \underset{\downarrow\ 0}{\|T^k\|^{\frac{1}{k}}}$$

矛盾！ #

$A\in C(X)$. $\dim X=+\infty$. 则 $0\in\sigma(A)$

对 $\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{0\}$ $N(\lambda I-A)=N(I-\frac{A}{\lambda})\overset{R-F}{<}+\infty$

且 $A: N(\lambda I-A)\to N(\lambda I-A)$ → 闭不变子空间

$$\begin{tikzcd}
X=N(\lambda I-A) \arrow[d, "A"] & \oplus & \square \arrow[d] \\
N(\lambda I-A) & \oplus & ?
\end{tikzcd}$$

一般的 $T\in L(X)$

观察: ① 若∃n s.t. $N(T^n)=N(T^{n+1})$, 则 $N(T^{n+i})=N(T^n)$ $(i\ge1)$

用 $p(T)$ 表示最小的这样的n. 零链长

② 若不存在. 记 $p(T)=+\infty$

例: ① $T\ l^2\to l^2$

$(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\lambda_2x_2,\lambda_3x_3,\cdots)$

$N(T^0)=\{0\}\subsetneq N(T^1)=\{(x_1,0,0,\cdots)\}$ $\cdot\subsetneq N(T^n)=\{(x_1,\cdots x_n,0,\cdots 0\cdots)\}$

②: $T_\lambda=\lambda I-A$, $A\in C(X)$ 即 $\frac{A}{\lambda}\in C(X)$

$N(T_\lambda^n)=N((I-\frac{A}{\lambda})^n)=N(T^n)$ $T=I-B$

Fact: $p(T)<+\infty$.

(pf. $T^n=I+\sum_{i=1}^{n}(-1)^iC_n^iB^i\triangleq I-\underset{\in C(X)}{\underline{A_n}}$

由 R-F. $\dim N(T^n)=\operatorname{codim}R(T^n)$ 且 $R(T^n)$ 闭

则 $R(T)\supseteq R(T^2)\cdots\supseteq R(T^n)\supseteq R(T^{n+1})$

(观察: ① ∃n s.t. $R(T^n)=R(T^{n+1})$ 则 $R(T^n)=R(T^{n+i})$ $(\forall i\ge1)$

用 $q(T)$ 表示最小这样的n: 像链长)

② 否则. 若不存在这样的n. 记 $q(T)=+\infty$)

若 $q(T)=+\infty$ 则可类似书 Thm 3.2.5 可证矛盾! ⇒ $q(T)<\infty$

$R(T^{q(T)}) = R(T^{q(T)+1})$

$\Leftrightarrow \operatorname{codim}(T^{q(T)}) = \operatorname{codim}(T^{q(T)+1}) \overset{R-F}{\Leftrightarrow} \dim N(T^{q(T)}) = \dim N(T^{q(T)+1})$

$\Leftrightarrow N(T^{q(T)}) = N(T^{q(T)+1}) \Rightarrow p(T) \le q(T) < +\infty$]

即实际上证明了 若$T=I-A$. $A\in C(X)$. 有$p(T)=q(T)<+\infty$

$\lambda \notin \sigma_p(A)\cup\{0\}$ 则$N((\lambda I-A)^0) = N(\lambda I-A)=\{0\} \rightarrow p(T)=0$

$\lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}$

命题 (D-32). $T=I-B$. $B\in C(X)$ 则 $p(T)=q(T)<+\infty$

且 $X = R(T^{p(T)}) \oplus N(T^{p(T)})$

$$\begin{tikzcd} R(T^{p(T)}) \arrow[d, "T.B"] & N(T^{p(T)}) \arrow[d, "T.B"] \\ R(T^{p(T)}) & N(T^{p(T)}) \end{tikzcd}$$

且 $T|_{R(T^{p(T)})} : R(T^{p(T)}) \rightarrow R(T^{p(T)})$ 双射可逆

pf. 要证 $N(T^{p(T)})$ $R(T^{p(T)})$ 关于 T, B 不变

$\forall x \in N(T^{p(T)}) \cap R(T^{p(T)})$ $\quad x = T^{p(T)}y \Rightarrow T^{2p(T)}y = 0$

$\Rightarrow y \in N(T^{2p(T)}) = N(T^{p(T)})$

$\Rightarrow x = 0$

$\forall x\in X$ $\quad T^{p(T)}x \in R(T^{p(T)}) = R(T^{2p(T)})$

$\Rightarrow T^{p(T)}x = T^{2p(T)}u \Rightarrow x = \underbrace{x - T^{p(T)}u}_{\overset{\uparrow}{N(T^{p(T)})}} + \underbrace{T^{p(T)}u}_{\overset{\uparrow}{R(T^{p(T)})}}$

又由RF Thm $\quad T|_{R(T^{p(T)})}$ 可逆 $\Leftrightarrow N(T|_{R(T^{p(T)})}) = \{0\}$

而 $\forall x \in R(T^{p(T)})$. $Tx=0 \Leftrightarrow T^{p(T)+1}y=0$

$\overset{\|}{T^{p(T)}y}$

$\Leftrightarrow y\in N(T^{p(T)+1}) = N(T^{p(T)})$

$\Rightarrow x=0$ #]

回到 $\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{0\}$ $p_\lambda = p(\lambda I-A) = q(\lambda I-A) < +\infty$

$$X = N((\lambda I-A)^{p_\lambda}) \oplus R((\lambda I-A)^{p_\lambda})$$

$$A: \underbrace{N((\lambda I-A)^{p_\lambda})}_{\text{有限维}} \to N((\lambda I-A)^{p_\lambda}) \rightsquigarrow \text{线性代数}$$

$$\text{分解 } X = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_p\setminus\{0\}} N((\lambda I-A)^{p_\lambda}) \oplus \underbrace{\bigcap_{\cancel{\lambda\in\sigma_p\setminus\{0\}}} R((\lambda I-A)^{p_\lambda})}_{\overset{\|}{X_0}}$$

X_0 闭子空间 且 $AX_0 \subseteq X_0$

记 $A_0 = A|_{X_0}: X_0 \to X_0$

断言. $\sigma_p(A_0) = \phi$ 或 $\{0\}$.

(否则 $\exists\lambda\neq 0$ s.t. $A_0 x_\lambda = \lambda x_\lambda$. $\Rightarrow \begin{cases}\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{0\} \\ x_\lambda \in N((\lambda I-A)^{p_\lambda})\end{cases}$. 与分解矛盾!)

分析 (A_0, X_0)

(a) $\dim X_0 < +\infty$ A_0 幂零阵 $\sigma_p(A_0)=\{0\}$

(b) $\dim X_0 = +\infty$ (b1). $\sigma_p(A_0)=\phi$ $\Rightarrow \sigma(A)=\{0\} \Rightarrow \sigma(A)=\{0\}$

例: $A: l^2\to l^2$ $(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 \cdots)$

(b2) $\sigma_p(A_0)=\{0\}$ $N(0I-A)$ 可能无限维

例: $A: l^2\to l^2$ $(x_1, x_2 \cdots) \mapsto (\lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \cdots)$

3.4 对称紧算子

对称算子: X H空间 $T\in\mathcal{L}(X)$ 对称 是指 $(Tx,y)=(x,Ty)$ $(\forall x,y)$

例: (1) $X=\mathbb{C}^d$ 或 $\mathbb{R}^d$ $T=A$ 对称 $\Leftrightarrow A=A^T$ (实) $A=A^H$ (复)

(2) $X=L^2[0,1]$ $K\in L^2([0,1]^2)$ $(T_K f)(x)=\int_0^1 f(y)K(x,y)dy$ 紧

T_K 对称 $\Leftrightarrow T_K = T_K^* = T_{\tilde K}$ 其中 $\tilde K(x,y) = \overline{K(y,x)}$

$\Leftrightarrow K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ a.e. (x,y)

$\sigma(T_K)$?

对称紧算子结构 X H空间. $T\in L(X)$ 对称紧. 则 ∃正交规范基 $\{e_i\}_{i\in I}$

s.t. $T=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\otimes e_i$?

$(e_i\otimes e_i)(x)=(x,e_i)e_i \Rightarrow T(x)=\sum_{i\in I}\lambda_i(x,e_i)e_i$

① $\|T\|<+\infty \Leftrightarrow \sup_{i\in I}|\lambda_i|<+\infty$ （用Parseval）

② T紧 $\Leftrightarrow \{i\in I\mid\lambda_i\neq 0\}$ 至多可数

λ_i 至多只取以0为聚点

③ T对称 $\Leftrightarrow \lambda_i\in R$ （$x=e_i$ 则 $(Te_i,e_j)=\lambda_i(e_i,e_j)$

$(e_i,Te_j)=\overline{\lambda_j}(e_i,e_j)$

取 $i=j\Rightarrow\lambda_i=\overline{\lambda_i}$ ）

Thm (Hilbert-Schmidt) X H空间 T有界紧对称

$\Leftrightarrow$ ∃正交规范基 $\{e_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\lambda_i\}_{i\in I}\subseteq R$ s.t. $\begin{cases}(a)\ T=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\otimes e_i\\(b)\ \forall n\ \Big|\underbrace{\{i\in I\mid|\lambda_i|\geq\frac{1}{n}\}}_{I_n}\Big|<+\infty\end{cases}$

Pf $\Leftarrow$ 对称 $(Tx,y)=(\sum\lambda_i(x,e_i)e_i,\ \sum(y,e_j)e_j)$

$=\sum\lambda_i(x,e_i)(y,e_i)$

$(x,Ty)=\sum\overline{\lambda_i}(x,e_i)(y,e_i)=(Tx,y)$

紧 $T_n=\sum_{i\in I_n}\lambda_i e_i\otimes e_i$ 逼近 T

有界 显然

$\Rightarrow$ T对称紧算子

性质1 $\sigma(T)\subseteq R$. $\sigma_R(T)=\phi$

性质2 $X_1\subseteq X$ 为T不变子空间 则 $T|_{X_1}$ 对称（显然）

性质3 $c=\sup_{\substack{\|x\|\leq1\\\|y\|\leq1}}|(Tx,y)|$ 则 $\|T\|=c$

（$c=\sup_{\|x\|\leq1}\sup_{\|y\|\leq1}|(Tx,y)|\xlongequal{y=\frac{Tx}{\|Tx\|}}\sup_{\|x\|\leq1}\|Tx\|=\|T\|$）

T对称条件下 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |(Tx,x)| \overset{\Delta}{=} C'$

(由上显然 $C' \le C = \|T\|$

$\forall \|x\|=\|y\|=1$. $\mathrm{Re}(Tx,y) = \frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)]$

$\le \frac{C'}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) \le C'$

取 $\underset{|\alpha|=1}{\alpha\in\mathbb{C}}$ s.t. $\alpha(Tx,y)=|(Tx,y)|$ 则 $|(Tx,y)| = (Tx,\bar{\alpha}y)$

$= \mathrm{Re}(Tx,\bar{\alpha}y) \le C')$

$\Rightarrow C \le C'$

性质4 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |(Tx,x)| \underset{\substack{否则用\\ -T代替}}{\overset{不妨设}{=}} \sup\limits_{\|x\|\le 1} (Tx,x)$

(T对称 $\Leftrightarrow \forall x\in X \ (Tx,x)\in\mathbb{R}$)

则 $\exists x_0\in X$ $\|x_0\|=1$ s.t. $Tx_0=\lambda_0 x_0$ $\lambda_0 = \|T\| \in \sigma_p(T)$

(设 $\lambda_0 = \sup\limits_{\|x\|\le 1}(Tx,x) = \|T\|$ 取 $x_n\in X$ $\|x_n\|\le 1$ $(Tx_n,x_n)\to\lambda_0$

自反 $\Rightarrow$ 不妨 $x_n \rightharpoonup x_0 \xrightarrow[全连续]{T紧} Tx_n \to Tx_0$

$|(x_0,y)| = \lim\limits_{n\to\infty} |(x_n,y)| \underset{(\forall y)}{\le} \|y\| \Rightarrow \|x_0\|\le 1$

$(Tx_0,x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(Tx_n,x_n) = \lambda_0 \overset{(若\|T\|\ne 0)}{\Rightarrow} \|x_0\|=1$ (否则用 $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ 代替会变大)

$(Tx_n,x_n)-(Tx_0,x_0) = (Tx_n-Tx_0,x_n)+(Tx_0,x_n-x_0)\to 0$

直证 $Tx_0=\lambda_0 x_0$

$\forall y\in X$ $|t|\ll 1$. $\varphi_y(t) = (Tz_t,z_t) = \frac{(T(x_0+ty),x_0+ty)}{(x_0+ty,x_0+ty)}$ $z_t = \frac{x_0+ty}{\|x_0+ty\|}$

t充分小时 $\varphi_y(t)\le\varphi_y(0)$

$$\varphi_y(t) = \frac{(Tx_0,x_0)+2t\,\mathrm{Re}(Tx_0,y)+t^2(Ty,y)}{(x_0,x_0)+2t\,\mathrm{Re}(x_0,y)+t^2(y,y)}$$

$\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi_y'(0)}} = \frac{2\mathrm{Re}(Tx_0,y)-2\lambda_0\mathrm{Re}(x_0,y)}{(\cdot\cdot)^2} \Rightarrow \mathrm{Re}(Tx_0-\lambda_0 x_0,y)=0 \ (\forall y)$

$\Rightarrow Tx_0=\lambda_0 x_0$

性质5: $\forall \lambda \neq \lambda' \in \sigma_p(T)$ $N(\lambda I-T) \cap N(\lambda' I-T)=\{0\}$

回到原命题. (a) $\forall \lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}$ $N(\lambda I-T)=N(I-\frac{T}{\lambda})$ 有限维

$|I_\lambda| = \dim N(\lambda I-T) < +\infty$ 正交规范基 $\{e_i^\lambda\}_{i\in I_\lambda}$

(b) 若 $\lambda=0\in\sigma_p(T)$ (当 $\dim X=+\infty$ 时必有 $0\in\sigma_p(T)$)

$\Rightarrow \{e_i^0\}_{i\in I_0}$ 正交规范基 of $N(T)$ (可能不可数)

令 $\{e_i\}_{i\in I} = \bigsqcup_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} \{e_i^\lambda\}_{i\in I_\lambda} \sqcup \{e_i^0\}_{i\in I_0}$ 正交规范基

$M=\operatorname{span}\{e_i\}_{i\in I}$

$\forall x\in M$. $x=\sum_{i\in I}(x,e_i)e_i \Rightarrow Tx=\sum_{i\in I}(x,e_i)\lambda_i e_i$

$\Rightarrow \forall x\in\overline{M}$ $Tx=\sum_{i\in I}\lambda_i\, e_i\otimes e_i(x)$

只需证 $\overline{M}=X$ ($TM\subseteq M \Rightarrow T\overline{M}\subseteq\overline{M}$

$\forall y\in\overline{M}^\perp$. $(x,y)=0$ $(\forall x\in\overline{M}) \Rightarrow (Tx,y)=0$ $(\forall x\in\overline{M})$

$\Rightarrow (x,Ty)=0$ $(\forall x\in\overline{M}) \Rightarrow Ty\in\overline{M}^\perp \Rightarrow T\overline{M}^\perp\subseteq\overline{M}^\perp$

令 $\tilde{T}=T|_{\overline{M}^\perp}$ 对称紧. 若 $\overline{M}^\perp\neq\{0\}$

由性质4. $\exists \hat{x}_0\in\overline{M}^\perp$ $\|\hat{x}_0\|=1$ $\tilde{T}\hat{x}_0=\|\tilde{T}\|\hat{x}_0$

$T\overset{\shortparallel}{\hat{x}_0}=\|\tilde{T}\|\hat{x}_0$

$\Rightarrow \hat{x}_0\in N(\|\tilde{T}\|I-T)\subseteq\overline{M}$ 矛盾!]

Cor. T 对称紧. 则 $\sigma_p(T)=\{0\} \Leftrightarrow r_\sigma(T)=0 \Leftrightarrow T=0$

对称紧 $\|T\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$

$\qquad\qquad\qquad e_1 \qquad e_2 \quad \cdots$

$$|\lambda_n| \overset{?}{=} \sup_{\|x\|=1} \{|(Tx,x)| \mid x \perp \text{span}\{e_1 \cdots e_{n-1}\}\}$$

$n=1$ ✓

$n>1$: $x = \sum_{i\geq n} x_i e_i$ $\quad Tx = \sum_{i\geq n} \lambda_i x_i e_i$ $\quad (Tx,x) = \sum_{i\geq n} \lambda_i |x_i|^2$

$\Rightarrow \sup (Tx,x) = \|T_n\|$

$\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \cdots \geq 0 \geq \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \cdots$

$\overset{\downarrow}{e_1^+} \quad \overset{\downarrow}{e_2^+} \qquad\qquad \overset{\downarrow}{e_1^-} \quad \overset{\downarrow}{e_2^-}$

定理: $T \in L(X)$ 对称紧 则 $\lambda_n^+(T) = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\limits_{\substack{x \perp E_{n-1} \\ x \neq 0}} \dfrac{(Tx,x)}{(x,x)}$

$$\lambda_n^-(T) = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x \perp E_{n-1} \\ x \neq 0}} \frac{(Tx,x)}{(x,x)}$$

E_{n-1} 取遍 X 的 $n-1$ 维子空间.

[Pf 由 $\lambda_n^+(T) = -\lambda_n^-(-T)$ 只须证第一式. 设右边为 μ_n

$Te_n^+ = \lambda_n^+ e_n^+$ $\quad e_n^+ \perp \hat{E}_{n-1} = \text{span}\{e_1^+ \cdots e_{n-1}^+\}$ $\Rightarrow \mu_n \leq \sup\limits_{x \perp \hat{E}_{n-1}} \dfrac{(Tx,x)}{(x,x)}$

对 $x \perp \hat{E}_{n-1}$. $x = \sum_{i\geq n} x_i e_i^+ + \sum_{jK_0} x_j e_j^- + \sum_{i \in I_0} x_i e_i$

$$Tx = \sum_{i \geq n} \lambda_i^+ x_i e_i^+ + \sum_{K_0} \lambda_j^- x_j e_j^-$$

$$\Rightarrow (x, Tx) = \sum_{i \geq n} \lambda_i^+ |x_i|^2 + \sum_{K_0} \lambda_j^- |x_j|^2$$

$$(x,x) = \sum_{i \geq n} |x_i|^2 + \sum_{K_0} |x_j|^2 + \sum_{i \in I_0} |x_i|^2$$

$$\Rightarrow \frac{(Tx,x)}{(x,x)} \leq \lambda_n^+ \qquad \Rightarrow \mu_n \leq \lambda_n^+$$

再 $\forall E_{n-1} \subsetneq \text{span}\{e_1^+ \cdots e_n^+\}$ $\exists x \in \text{span}\{e_1^+, \cdots e_n^+\}$ $\|x\|=1$ s.t. $x \perp E_{n-1}$

$(Tx,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^+ \|x_i\|^2 \geq \lambda_n^+ (x,x) \Rightarrow \lambda_n^+ \leq \mu_n$ #]

A. B对称　$A \geq B \Leftrightarrow (Ax, x) \geq (Bx, x) \quad (\forall x \in X)$

特别当$B=0$. 记A为正对称算子

若还有A, B紧. 则有 $A \geq B \Rightarrow \lambda_n^+(A) \geq \lambda_n^+(B)$

若A正对称　$A = \sum \lambda_i e_i \otimes e_i \quad \lambda_i \geq 0$

$\Rightarrow$ 可定义 $\sqrt{A} = \sum \sqrt{\lambda_i}\, e_i \otimes e_i$

对一般对称紧 $A = \sum \lambda_i e_i \otimes e_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$. 有 $\lambda_i \in [-\|A\|, \|A\|]$

$\Rightarrow -\|A\| I \leq A \leq \|A\| I$

则对 $f: [-\|A\|, \|A\|) \to \mathbb{R}$ cts. 可定义 $f(A) = \sum f(\lambda_i)$

$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$

3.5 Fredholm算子

例1　$X=Y \quad A \in C(X) \quad \underset{\uparrow}{T} = I - A \quad \text{ind}(T) = 0$

$F(X,Y)$: Fredholm算子全体

例2　$T: \ell^2 \to \ell^2$

$(x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, \cdots) \quad \dim N(T) = 1 \quad \text{codim}\, R(T) = 0 \Rightarrow \text{ind}\, T = 1$

$T^*(y_1, y_2, \cdots) = (0, y_1, y_2, \cdots) \quad \text{ind}(T^*) = -1 \quad \overset{类似}{\Rightarrow} \text{ind}\, T^n = n$

注: ① $T \in F(X,Y) \Rightarrow T^* \in F(Y^*, X^*)$ 且 $\text{ind}(T^*) = -\text{ind}(T)$

② $T \in F(X) \Rightarrow T^n \in F(X) \quad \text{ind}(T^n) = n\, \text{ind}(T) \quad (n \geq 0)$

例3.　$X = C^1[0,1] \quad Y = C[0,1] \quad Tf = f' \quad \text{ind}(T) = 1$

定理：(1) $F\in F(X,Y)$ $S\in C(X,Y)$ $\Rightarrow$ $T+S\in F(X,Y)$ $\mathrm{ind}(T+S)=\mathrm{ind}(T)$

(2) $T_1\in F(X,Y)$ $T_2\in F(Y,Z)$ $\Rightarrow T_2\circ T_1\in F(X,Z)$ $\mathrm{ind}(T_2\circ T_1)=\mathrm{ind}(T_1)+\mathrm{ind}(T_2)$

(3) $F(X,Y)\subseteq L(X,Y)$ 开集 且 $\mathrm{ind}: F(X,Y)\to \mathbb{Z}$ 局部常值

Fredholm 算子的等价刻画：TFAE

(1) $T\in F(X,Y)$ (2) $\exists\, \hat{T}\in L(Y,X)$ $K_1\in \overset{\text{有限秩}}{\mathcal{F}(X)}$ $K_2\in\mathcal{F}(Y)$

s.t. $\hat{T}\circ T=I_X-K_1$ $T\circ\hat{T}=I_Y-K_2$

(3) $\cdots\cdots$ $K_1\in C(X)$, $K_2\in C(Y)$, $\cdots$

(4) $\exists\, \hat{T}_1,\hat{T}_2\in L(Y,X)$ $K_1\in C(X)$ $K_2\in C(Y)$ s.t. $\hat{T}_1\circ T=I_X-K_1$

$T\circ\hat{T}_2=I_Y-K_2$

[证 (2)⇒(3)⇒(4)显然

(4)⇒(1) $N(T)\subseteq N(\hat{T}_1\circ T)=N(I_X-K_1)$ 有限维

$R(T)\supseteq R(T\circ\hat{T}_2)=R(I_Y-K_2)$ $R(I_Y-K_2)$ 闭

$\overset{\text{引理}}{\Longrightarrow} R(T)$ 闭 $\mathrm{codim}\,R(T)<+\infty$ $\mathrm{codim}\,R(I_Y-K_2)<+\infty$

$Y=R(I_Y-K_2)\oplus\underset{\text{有限维}}{\underline{\cdots}}$

(1)⇒(2)

$$\begin{tikzcd}
X=N(T)\oplus X_1 \arrow[r, "T"] & Y=R(T)\oplus Y_1 \arrow[d, "P_1"', "\text{投影}"] \\
X_1 \arrow[u, "i_1", "\text{嵌入}"'] \arrow[r, "T_0=P_1\circ T\circ i_1"] & R(T)
\end{tikzcd}$$

$T_0\in L(X_1,R(T))$ 且可逆 (check)

令 $\hat{T}=i_1\circ T_0^{-1}\circ P_1\in L(Y,X)$

$\hat{T}\circ T(\underset{\in N(T)}{x_0}+\underset{\in X_1}{x_1})=\hat{T}(Tx_1)=\hat{T}(T_0x_1)=x_1$

取 $K_1: Y\to \overset{\overset{X}{\cup}}{N(T)}$ 投影 $K_1\in C(X)$. $\Rightarrow \hat{T}\circ T=I_X-K_1$

$T\circ\hat{T}(\underset{\in R(T)}{y_0}+\underset{\in Y_1}{y_1})=T|_{X_1}(T_0^{-1}(y_0))=y_0=I_Y-K_2$ $K_2: Y\to \overset{\overset{Y}{\cup}}{Y_1}$ 投影]

pf 定理(1): $\tilde{T}\circ T = I_X - K_1 \Rightarrow \tilde{T}\circ(T+S) = I_X \underbrace{-K_1+\tilde{T}\circ S}_{紧}$

$T\circ\tilde{T} = I_Y - K_2 \quad (T+S)\circ\tilde{T} = I_Y \underbrace{-K_2+S\circ\tilde{T}}_{紧} \Rightarrow T+S\in F(X,Y)$

$\Downarrow$

$\tilde{T}\in F(Y,X)$

由(2) $\mathrm{ind}(\tilde{T}\circ(T+S)) = \mathrm{ind}(\tilde{T}) + \mathrm{ind}(T+S)$

$\shortparallel$

$\mathrm{ind}(I_X - 紧) = 0 = \mathrm{ind}(\tilde{T}\circ T) = \mathrm{ind}(\tilde{T}) + \mathrm{ind}(T) \Rightarrow \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T+S)$

定理(3): $T\in F(X,Y) \Rightarrow \exists\,\tilde{T}\in F(Y,X)$ s.t. $\tilde{T}\circ T = I_X - K_1$

$T\circ\tilde{T} = I_Y - K_2$

当$\|S\| < \overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{\|\tilde{T}\|}}}$时 $S\in L(X,Y)$

$\underset{E_X}{\underset{\shortparallel}{I_X+\tilde{T}\circ S}}$ 和 $\underset{E_Y}{\underset{\shortparallel}{I_Y+S\circ\tilde{T}}}$ 可逆

$\Rightarrow \tilde{T}\circ(T+S) = E_X - K_1 = E_X\circ(I_X - \underbrace{E_X^{-1}\circ K_1}_{紧})$

$(T+S)\circ\tilde{T} = (I_Y - \underbrace{K_2\circ E_Y^{-1}}_{紧})\circ E_Y$

$\Rightarrow (E_X^{-1}\circ\tilde{T})\circ(T+S) = I_X - 紧$

$(T+S)\circ(\tilde{T}\circ E_Y^{-1}) = I_Y - 紧$ $\xRightarrow{由(4)}$ $T+S\in F(X,Y)$

$0 = \mathrm{ind}((E_X^{-1}\circ\tilde{T})\circ(T+S)) \overset{(2)}{=} \mathrm{ind}(E_X^{-1}\circ\tilde{T}) + \mathrm{ind}(T+S)$

$\shortparallel$

$\mathrm{ind}(T)+\mathrm{ind}(\tilde{T}) \quad = \underbrace{\mathrm{ind}(E_X^{-1})}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \mathrm{ind}(\tilde{T}) + \mathrm{ind}(T+S)$

$\Rightarrow \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(T+S)$

定理(4): 若$T\in L(X,Y)$,则

$T\in F(X,Y)$且$\mathrm{ind}\,T=0 \Leftrightarrow \exists\, L\in L(X,Y)$可逆 $L\in L(X,Y)$, $L^{-1}\in L(Y,X)$ 和 $K\in C(X,Y)$ s.t. $T=L-K$

Pf $\Leftarrow$ 由定理(1)立得

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X=N(T) \arrow[d, "K_1"] & \oplus\, X_1 \arrow[r, "T"] & R(T) \arrow[d, "P"] & \oplus\, Y_1 = Y \arrow[d, "K_2"] \\ N(T) & X_1 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T_0=P\circ T\circ i"] & R(T) & Y_1 \end{tikzcd}$$

T_0双射且由$\mathrm{ind}\,T=0$

$\exists$线性同构 $\varphi: N(T)\to Y_1$

$$X = N(T) \oplus X_1 \xrightarrow{k_1} N(T) \xrightarrow{\varphi} Y_1 \subseteq Y$$

取 $L = T + \underbrace{\varphi \circ k_1}_{\text{有限秩扰}}$

① L单 $L(x)=0 \Rightarrow T(x)=0 \quad \varphi(k_1(x))=0 \Rightarrow k_1(x)=0 \Rightarrow x=0$

② L满 $\forall y \in Y \qquad y = \underset{\overset{\uparrow}{R(T)}}{\underline{y_0}} + \underset{\overset{\uparrow}{Y_1}}{\underline{y_1}}$ 取 $x_0 = T_0^{-1}(y_0) \in X_1$

$x_1 = \varphi^{-1}(y_1) \in N(T)$

则 $L(x_0+x_1)=y$ 故满 #)

Pf of 定理(2)

$$\begin{tikzcd}
X = N(T_1) \oplus X_1 \arrow[r, "T_1"] & Y = R(T_1) \oplus Y_1 \arrow[d, "P_1"] \\
X_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "T_{01} = P_1 \circ T_1 \circ i_1"'] & R(T_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y = N(T_2) \oplus Y_2 \arrow[r, "T_2"] & Z = R(T_2) \oplus \arrow[d, "P_2"] \\
Y_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "T_{02} = P_2 \circ T_2 \circ i_2"'] & R(T_2)
\end{tikzcd}$$

$W_1 = R(T_1) \cap Y_2$

$W_2 = R(T_1) \cap N(T_2)$

$W_3 = Y_1 \cap N(T_2)$

$W_4 = Y_1 \cap Y_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} W_1 \oplus W_2 = R(T_1) & & \\ \oplus & \oplus & \to Y \\ W_3 \oplus W_4 = Y_1 & & \end{array}$$

$$\underset{\subseteq X_1}{X_2} = T_{01}^{-1}(W_2) \Rightarrow \dim X_2 = \dim W_2 < +\infty$$

$$T_2(W_2) = T_2(W_3) = 0$$

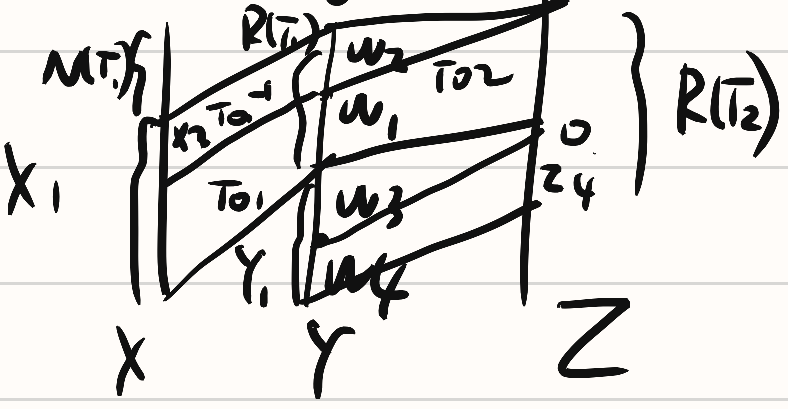
$$T_{0,2}(W_4) = Z_4 \quad \dim W_4 = \dim Z_4 < +\infty$$

$$R(T_2) = R(T_2 \circ T_1) \oplus Z_4$$

$$N(T_2 \circ T_1) = X_2 \oplus N(T_1)$$

$$\Rightarrow \dim N(T_2 \circ T_1) = \dim N(T_1) + \dim W_2$$

$$\operatorname{codim} R(T_2 \circ T_1) = \operatorname{codim} R(T_2) + \dim W_4$$



$\Rightarrow \mathrm{ind}(T_2\circ T_1) = \dim N(T_1) + \dim W_2 - \operatorname{codim} R(T_2) - \dim W_4$

$= (\mathrm{ind}(T_1) + \dim W_3 + \dim W_4) + \dim W_2 - (\dim W_2 + \dim W_3 - \mathrm{ind}(T_2)) - \dim W_4$

$= \mathrm{ind}(T_1) + \mathrm{ind}(T_2)$.

$T_2\circ T_1 \in F(X,Y)$，此时： $\hat{T}_1\circ T_1 = I_X - K_{1,1}$ $\hat{T}_2\circ T_2 = I_Y - K_{2,1}$

$T_1\circ \hat{T}_1 = I_Y - K_{1,2}$ $T_2\circ \hat{T}_2 = I_Z - K_{2,2}$

$$(\hat{T}_1\circ\hat{T}_2)(T_2\circ T_1) = \hat{T}_1\circ(I_Y - K_{2,1})\circ T_1 = I_X - (\underbrace{K_{1,1} + \hat{T}_1\circ K_{2,1}\circ T_1}_{紧})$$

$$(T_2\circ T_1)(\hat{T}_1\circ\hat{T}_2) = T_2\circ(I_Y - K_{1,2})\circ\hat{T}_2 = I_Z - (K_{2,2} + \underbrace{T_2\circ K_{1,2}\circ\hat{T}_2}_{紧})$$

故 $T_2\circ T_1 \in F(X,Y)$ #

$T\in L(X)$ X H空间 T对称 $f: \sigma(T)\to\mathbb{R}$ 连续函数 $f(T)$?

(1) 正算子： $T\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T\text{对称} & ① \\ (Tx,x)\geq 0\ (\forall x\neq 0) & ② \end{cases}$ （X复空间时 ②⇒①）

定理： $T_0, T_1 \cdots$ 对称 $T_0\leq T_1\leq \cdots \leq T$ T对称有界

则 $\exists$ 对称算子 T_∞ s.t. $T_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

[pf]: 注意： ① 由 $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$ $A\geq B \Rightarrow \|A\|\geq\|B\|$

② $A\geq 0$ 且 $A\leq 0 \Rightarrow A=0$

③ $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$ 一般：若 $aI\leq A\leq bI \Rightarrow \sigma(A)\subset[a,b]$

④ $T\geq 0$ 时， $\forall x,y$ $|(Tx,y)| \leq \sqrt{(Tx,x)}\sqrt{(Ty,y)}$

（$\forall\lambda\in K$ $0\leq (T(x+\lambda y), T(x+\lambda y))$ 判别式）

回到原理 不妨 $T_0=0$ 有 $\sup\|T_n\|\le\|T\|<+\infty$ 且 $\|T_n-T_m\|\le\|T\|$

$\forall x\in X$ $\{T_n x\}$ Cauchy：(则令 $T_\infty x\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}T_n x$ 线性 且 $\|T_\infty\|\le\|T\|$ 有界

$(T_\infty x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}(T_n x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}(x,T_n y)=(x,T_\infty y))$

首先 $\{(T_n x,x)\}$ 单增有界 $\Rightarrow$ Cauchy

$$\|T_n x-T_m x\|^2=((T_n-T_m)(x),(T_n-T_m)(x))$$

$$\le\sqrt{((T_n-T_m)x,x)}\sqrt{((T_n-T_m)(T_n-T_m)(x),x)}$$

$$\le\sqrt{\underbrace{(T_n x,x)-(T_m x,x)}_{\downarrow\ 0}}\ \|T\|^{\frac{3}{2}}\|x\|$$ 故得证 #]

(2) $T\in L(X)$ 对称 $mI\le T\le MI$ $a<m\le M<b$

f 实多项式 则 $f(T)$ 有界对称

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续 则∃多项式 $p_1\ge p_2\ge\cdots\ge \overset{\ge q(t)}{f(t)}=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t)$ on $[a,b]$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} p_1(T)\ge p_2(T)\ge\cdots \quad =f(T)\ge q(T)$

$\Rightarrow$ 定义 $f(T)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(T)$

进一步 $K[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid$ ①有界 ② ∃用多项式 $p_1(t)\ge\cdots\ge p_n(t)\ge\cdots$ 逼$f\}$

则定义 $f(T)\overset{(*)}{=}\lim\limits_{n\to\infty}p_n(T)$ 对称.

再 $\underline{K[a,b]-K[a,b]}=\{f_1-f_2\mid f_1,f_2\in K[a,b]\}$

$\varphi\in$
$=f_1-f_2$

可定义 $\varphi(T)=f_1(T)-f_2(T)$

性质：①线性封闭

②乘法封闭

③ $\varphi_1\ge\varphi_2\Rightarrow\varphi_1(T)\ge\varphi_2(T)$ (单调性)

$\overset{\circ}{(*)}$：$T\in L(X)$ $mI\le T\le MI$ p 实多项式满足 $p(t)\ge0$ ($\forall t\in[m,M]$)

$\Rightarrow p(T)\ge0$

pf of (*)①: 不妨 $m<M$ $\quad p(t)=c\prod_{\alpha_i\le m}(t-\alpha_i)\prod_{k=1}^{t}\left((t-r_k)^2+\delta_k^2\right)\prod_{\beta_j\ge M}(\beta_j-t)$

$$\Rightarrow p(T)=c\prod_{\alpha_i\le m}(T-\alpha_i I)\prod_{k=1}^{t}\left((T-r_kI)^2+\delta_k^2 I\right)\prod_{\beta_j\ge M}(\beta_j I-T)$$

同时 $T-\alpha_i I\ge 0$ $\quad \beta_j I-T\ge 0$

$$\left(\left((T-r_kI)^2+\delta_k^2 I\right)x,x\right)=\delta_k^2(x,x)+\left((T-r_kI)x,(T-r_kI)x\right)\ge 0$$

故 $p(T)\ge 0$

$\uparrow$

(Thm (Riesz-Nagy) $\quad \begin{matrix}A\ge 0\\ B\ge 0\end{matrix}$ $\quad AB=BA\Rightarrow AB\ge 0$)

(*)② 唯一性 是下面 Fact 的直接结果

Fact: $mI\le T\le MI$. $p_i\ q_j$ 在 $[a,b]$ 上递减多项式

若 $p_i(t)\to\varphi(t)$ $\quad q_j(t)\to\psi(t)$ $\quad \varphi(t)\to\psi(t)$ 则 $\lim_{i\to\infty}p_i(T)\ge\lim_{j\to\infty}q_j(T)$

pf of Fact: 固定 $n\in\mathbb{N}$ $\quad \forall t_0\in[m,M]$

$\exists N(t_0,n)$ $\quad$ s.t $\quad q_N(t_0)<\psi(t_0)+\frac{1}{n}\le\varphi(t_0)+\frac{1}{n}\le p_n(t_0)+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \exists I_{t_0}=(t_0-\varepsilon_{t_0},t_0+\varepsilon_{t_0})$ $\quad \forall t\in I_{t_0}$ $\quad q_N(t)<p_n(t)+\frac{1}{n}$

$\{I_{t_0}\}$ 覆盖 $\Rightarrow$ 有限子覆盖 $I_{t_1}\cup I_{t_k}$ $\quad$ 令 $\bar{N}=\max_{1\le v\le k}N(t_v,n)$

则 $N\ge\bar{N}$ 时 $\quad q_N(t)<p_n(t)+\frac{1}{n}$ $\xRightarrow{(*)①}$ $q_n(T)<p_n(T)+\frac{1}{n}I$

$(\forall t\in[m,M])$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty}q_i(T)\le p_n(T)+\frac{1}{n}I$ #]

(再 $n\to\infty$)

例 对 $A\ge 0$ $\quad m=0$ $\quad M=\|A\|$ $\quad f(t)=\sqrt{t}$. $\quad$ 则可定义 $f(A)=\sqrt{A}$

$\Rightarrow A=\sqrt{A}\circ\sqrt{A}$

FP. 压缩

H空间 (投影)

H-B

共鸣 (闭图像/开映射)

谱

1. X H空间 $x_n \to x_0$ $A \in C(X)$ 证：$(x_n, Ay_n) \to (x_0, Ay_0)$
$y_n \to y_0$

(由A全连续立得)

2. X B空间 (1) 若 $T \in C(X)$ $\inf\limits_{\|x\|=1} \{\|Tx\|\} = 0$ 则 $0 \in \overline{T(S_X(1))}$

(2) 若 $T \in C(X) \setminus \overline{F(X)}$ 则 $0 \in \overline{T(S_X(1))}$

pf (1) $\exists x_n \in S_X(1)$ $\|Tx_n\| \le \frac{1}{n}$

又T紧 $\exists x_{n_k}$ s.t Tx_{n_k} 收敛 $\Rightarrow Tx_{n_k} \to 0 \Rightarrow 0 \in \overline{T(S_X(1))}$

(2) 若不然 由(1) $\inf\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = m > 0 \Rightarrow \forall x \in X, \|Tx\| \ge m\|x\|$ (*)

① R(T)闭: 设 $\{Tx_n\} \subset R(T)$ Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow} \{x_n\}$ Cauchy

$x_n \to x$ 则 $Tx_n \to Tx \Rightarrow R(T)$闭

② $0 \in \overline{T(S_X(1))}$. $T: X \to R(T)$满. $\overset{开映射}{\Rightarrow} \exists \delta > 0$ s.t. $B_{R(T)}(\delta) \subset TB_X(1)$

$\forall R(T)$中有界集K $\exists \rho > 0$ s.t. $K \subseteq B_{R(T)}(\rho\delta) \subseteq \underbrace{TB_X(\rho)}_{列紧}$

$\Rightarrow$ K列紧. 则 $\dim R(T) < +\infty$ 矛盾!
(取K为R(T)中单位球)

压缩不动点：证明X完备✓

第一章. 赋范空间 完备/健 ⇒ B*/B ⇒ H

① 压缩映像 积分方程/数列 (1)
(构造) 赋范空间要完备

② 正交投影定理 Parseval (综合题) (5)

第二章 共鸣. 闭图像. 开映像 (判定有界算子 ←闭图像
-道题)

(2)

L-B Thm
范数等价

收敛性： 弱收敛 弱*收敛 （一道） (3)

算子的谱 < 谱集 / 谱半径：Gelfand/定义 （一道题） (4)

Chap3

紧算子 → 点谱

书上例子

R(T)闭值域 RF-Thm

记号 ${}^{\perp}M$ $N^{\perp}$

综合题 (6)

（书上例子）

Fredholm 算子

（判定 + ind）

紧/小扰动