微分方程引论课程笔记

授课老师：赵立丰

作者：PB21010479 王曹励文

组织：中国科学技术大学

时间：October 12, 2022

电子邮件：wclw8181@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分

常微分方程

第 1 章 常微分方程概述

1.1 微分方程学习方向

目标：

1. 给出解析表达式
2. 无法得到解析解，但要对解的行为进行描述

方法：

不同类型的方程利用不同类型的方法

1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 (常微分方程, 偏微分方程)

含有未知函数的导数 (或偏导) 的方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数, 则方程为常微分方程 (ODE); 若未知函数为多元函数, 则方程为偏微分方程 (PDE).

定义 1.2 (阶数)

ODE 的一般形式: $F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$, 其中 $n \in N^*$ 为出现导数的最高次数，称为方程的阶数.

定义 1.3 (线性)

线性 ODE 的一般形式为 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) + b(x) = 0$, 其中 $a_k(x)$ 为与 y 无关的一元函数, $k = 0, 1, \cdots, n$. 反之, 则称方程为非线性 ODE.

注 判断是否线性时，认为 $y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ “相同”，考虑是否为 1 次.

例题 1.1

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yx^2 = 0$, 这是 1 阶线性 ODE.
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = 0$, 这是 2 阶非线性 ODE.
3. Laplace 方程: $\Delta u = 0$, 其中 $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为 **Laplace 算子**.

定义 1.4 (解, 定义区间)

若函数 $\varphi(x)$ 在 $I \subset R$ 上 n 阶连续可微, 即 $\varphi(x) \in C^n(I)$, 且

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是方程在 I 上的一个解, I 称为解的定义区间.

注 对于微分方程的解应指明解的存在区间.

定义 1.5 (积分曲线)

$y = \varphi(x)$ 在 (x, y) 平面上的图形是一条光滑的曲线, 称之为积分曲线.

定义 1.6 (通解, 特解)

常微分方程的解 $y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$ 称为方程的通解, 其中 $C_i(i=1,\cdots,n)$ 为任意独立常数, 即

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0.$$

不包含任意常数的解称为方程的特解.

♣

注 通解如此定义的来源为逆映射定理, 对积分曲线上任意一点 (x_0,y_0), 由于 $Jacobbi$ 行列式不为 0, 由局部逆映射定理, 可反解出互相没有约束的常数. 自然地, 当通解中的常数确定下来, 通解自然变为特解.

第 2 章　一阶线性方程

考虑一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$, $f(x,y)$ 为区域内的连续函数. 也可写为形式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, 其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 为区域内的连续函数. 当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时, $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 处的近旁连续. 此时再将 x 视为 y 的函数, 若 $P(x_0,y_0)\neq 0$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ 在 (x_0,y_0) 处的近旁连续. 因此, 当 $P(x_0,y_0)\neq 0, Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 处的近旁, 以上两个形式虽然未知函数不同, 但可以统一写为对称形式:

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{2.1}$$

依据定义可知一阶线性方程的表达式可化简为 $y'+p(x)y=q(x)$. $p(x),q(x)$ 在区间 I 上连续.

定义 2.1 (齐次线性, 齐次非线性)

若 $q(x)\equiv 0$, 则为齐次线性方程. 若 $q(x)\neq 0$, 则为非齐次线性方程. ♣

注 研究非齐次方程时，先考察对应的齐次方程.

考察方程 $y'+p(x)y=0$. 对其稍微变形即可得到 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y+p(x)dx=0$, 该方程为一个可分离变量的方程. 可分离变量的方程为恰当方程的特殊情形，故我们从恰当方程入手，逐渐考察一阶线性方程的解.

2.1 恰当方程

定义 2.2 (恰当方程)

若存在可微函数 $\phi(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}\phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y). \tag{2.2}$$

则称方程 (2.1) 是恰当方程 (或全微分方程). ♣

定理 2.1 (恰当方程的解)

若 $P(x,y),Q(x,y)\in C(D)$, $D\subset R^2$, 且 $\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}\in C(D)$, 则 (2.1) 是恰当方程的充要条件为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 此时, (2.1) 的通积分为

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=C,\ \forall(t_0,x_0)\in D\subset R^2.\end{aligned}$$

♡

证明 必要性: 若 (2.1) 恰当, 则 $\exists\phi(x,y)\in C(D)$, s.t.(2.2) 成立.

由 $\phi(x,y)$ 二阶连续可微得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

充分性: 目标是验证 (2.1) 恰当，则应构造一个函数 $\phi(x,y)$ 满足 (2.2).

1. 方法一. 令 $\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\psi(y)$, $\psi(y)$ 为待定函数, 则此时 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x=P(x,y)$. 由

于

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y).\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)$, 则有 $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$, 即 $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y$, 这样就构造出了满足要求的函数 ϕ, 且推得方程通解为

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y=C,\ \forall(t_0,x_0)\in D\subset R^2.$$

2. 方法二. 令 $\phi(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+\varphi(x)$, 其余过程同方法一. 则可得

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

下验证 $\phi(x,y)\equiv\phi(x,y)$. 事实上, 由 $\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}\phi=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 可得 ϕ 和 ϕ 只相差一个常数. 而 $\phi(x_0,y_0)=\phi(x_0,y_0)=0$, 因此 $\phi\equiv\phi$.

注 验证是否恰当时应该注意偏导数的连续性.

例题 2.1 可分离变量的方程的简单情形 求解方程 $p(x)\mathrm{d}x+q(y)\mathrm{d}y=0$, $p(x)$,$q(y)$ 连续可微.

解. 该方程为恰当方程，通积分为

$$\int p(x)\mathrm{d}x+\int q(y)\mathrm{d}y=C.$$

2.2 可分离变量的方程

定义 2.3 (可分离变量的方程)

若 (2.1) 具有形式

$$X(x)Y_1(y)\mathrm{d}x+X_1(x)Y(y)\mathrm{d}y=0,\tag{2.3}$$

则称为可分离变量的方程. ♣

定理 2.2 (可分离变量方程的解)

在 (2.3) 中, 若 $\exists\,X_1(a)=0$ 或 $Y_1(b)=0$, $x=a$ 或 $y=b$ 为一个特解.

若 $X_1(x)\neq0,Y_1(y)\neq0$, 可化为

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y=0.$$

由例 2.1 可知, 可分离变量方程的通积分为

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Y(y)}{Y_1(y)}\mathrm{d}y=C.$$

♡

例题 2.2 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.

解.

1. $y=0,-\infty<x<+-\infty$ 为特解.
2. $y\neq0$ 时, 原方程可化简为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}\mathrm{d}x,$$

通积分为

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x + C,$$

化简即得

$$y^2 = (x+C)^3, x \geqslant -C, \forall C \in \mathbb{R}.$$

注 该微分方程的解的图像如图 2.1 所示.

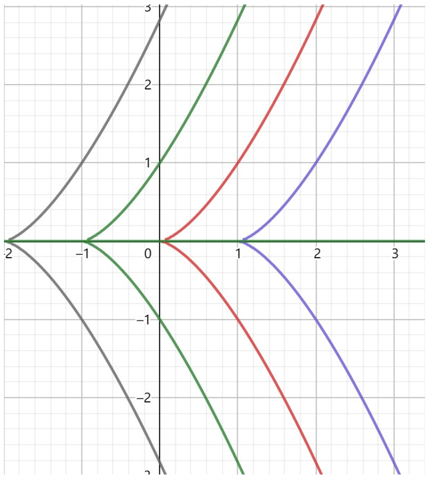

图 2.1: 例 2.2 解的图像

可以看出, 微分方程的特解与通解并不代表所有的解, 在 $y=0$ 上的任何一点均有“分支”, 不同的“分支”得到不同的解.

例题 2.3 求解微分方程 $(x^2+1)(y^2-1)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$.

解.

1. $x=0, y=\pm 1$ 为特解.
2. $x \neq 0$ 且 $y \neq \pm 1$ 时, 原方程可化简为

$$\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x + \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = 0.$$

通积分为

$$\frac{1}{2}x^2 + In|x| + \frac{1}{2}|y^2-1| = C,$$

化简即得

$$y^2 - 1 = \pm e^C x^{-2} e^{-x^2},$$

故该方程有通解

$$y^2 - 1 = Cx^{-2}e^{-x^2}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

特解为 $x=0$.

2.3 一阶线性方程

回顾一阶线性方程的一般形式, 一阶齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0. \tag{2.4}$$

一阶非齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x). \tag{2.5}$$

其中 $p(x), q(x)$ 为 I 上的连续函数.

本节考察该两种方程的解法以及解的部分性质.

定理 2.3 (一阶线性齐次方程的解)

方程 (2.4) 的解为

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

♡

证明

1. $y = 0$ 为特解.
2. $y \neq 0$ 时方程 (2.4) 可化简为可分离变量的方程

$$\frac{dy}{y} + p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

化简即得

$$y = \pm e^{C - \int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}.$$

故方程的解为 $y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}, \forall C \in \mathbb{R}$.

注 定理 2.3 中的 C 为任意常数, x_0 选取较为容易表示解的特殊点.

定理 2.4 (一阶线性非齐次方程的解)

方程 (2.5) 的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right), \forall C \in \mathbb{R}.$$

♡

证明 设方程 (2.5) 的解为

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}.$$

则

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} = q(x).$$

即

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} = q(x).$$

积分得

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C.$$

带入可得方程的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right), \forall C \in \mathbb{R}.$$

写成不定积分为

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

其中 C 为任意常数.

注

1. 定理 2.4 的结果可继续化简,

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s + C\right) \\
&= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} \\
&= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

2. 定理 2.4 的证明用到了常数变易法, 该方法考虑的初衷是猜想齐次线性方程转化为非齐次线性方程时, $q(x)$

的存在对原方程的解造成了“扰动”.

3. 若有初值条件, 如 $y(x_0)=y_0$, 则常数 C 可被唯一确定. 根据注 1 可知 $y(x_0)=C=y_0$, 此时方程的解为
$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.$$

4. 一阶微分方程有明确的几何意义, 考察
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),$$
其中 $f(x,y)$ 为平面区域内的连续函数.

若 $y=\phi(x)$ 为方程的解, 其在所有点处的导数应为可计算的函数值, 称其为微分方程的**积分曲线**.

例题 2.4 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=x^3 \quad (x\neq 0)$.

解. 先考虑齐次方程的解. 当 $x>0$ 时, 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=0$ 的解为
$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}ds}\overset{x_0=1}{=}\frac{1}{x}.$$
令非齐次方程的解为 $y=C(x)\frac{1}{x}$, 则
$$C'(x)\frac{1}{x}=x^3.$$
积分得
$$C(x)=\frac{1}{5}x^5+C.$$
$x<0$ 时, 用类似的方法计算, 最终可得原微分方程的解为
$$y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}(x>0\text{或}x<0).$$
其中 C 为任意常数. **注** 微分方程的解应指明区间.

下面讨论一阶线性微分方程解的性质.

定理 2.5

一阶齐次线性方程 (2.4) 的解或者恒等于 0, 或者恒不等于 0.

证明 若 $y(x_0)=0$ 但 y 不恒为 0, 由定理 2.3,
$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}.$$
注意到
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s})=(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y(x)p(x))e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=0.$$
则 $y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}$ 为一个常数. 而
$$y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0}p(s)\mathrm{d}s}=0.$$
故
$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=0,\forall x\in I.$$
$\forall x\in I$ 上, $|e^{\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}|<\infty$. 则 $y(x)\equiv 0$, 矛盾.

定理 2.6

线性方程的解整体存在, 即 (2.4) 与 (2.5) 的任意解在 $p(x)$ 与 $q(x)$ 上有定义且连续的整个区间 I 上存在.

定理 2.7

齐次方程 (2.4) 的解的任意线性组合均为齐次方程的解;

齐次方程 (2.4) 的任一解与非齐次线性方程 (2.5) 的任一解之和为非齐次线性方程 (2.5) 的解;

非齐次线性方程 (2.5) 的任意两解之差为齐次线性方程 (2.5) 的解.

注 该定理再次表明特解与通解并不为全部解.

定理 2.8

非齐次线性方程 (2.5) 的任一解与齐次线性方程 (2.4) 的通解之和构成非齐次线性方程 (2.5) 的通解. ♡

定理 2.9 (初值问题的解的唯一性)

一阶线性方程的初值问题的解存在且唯一. 即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$$

的解存在且唯一. ♡

证明

1. 存在性: 已由定理 2.4 注 3 给出.
2. 唯一性: 设 $y=\phi_1(x), y=\phi_2(x)$ 均为初值问题的解.
   考虑 $\psi(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$,
   $$\psi'(x)=\phi_1'(x)-\phi_2'(x)=(q(x)-p(x)\phi_1(x))-(q(x)-p(x)\phi_2(x))=-p(x)\psi(x).$$
   $\psi(x)$ 为一阶齐次线性方程的解, 且 $\psi(x_0)=0$. 由定理 2.5 知 $\psi(x)\equiv 0$. 即 $\phi_1(x)\equiv\phi_2(x)$.

注 存在性的证明通常考虑给出一个符合题意的构造, 唯一性的证明通常假设存在不同的结果后证明两者相同.

例题 2.5 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x),$$

其中 $a>0$ 为常数, 而 $f(x)$ 为以 2π 为周期的连续函数, 试求方程的 2π 周期解.

解. 由定理 2.4, 该方程的解为

$$\begin{aligned}y=&Ce^{-\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}s}+\int_{x_0}^{x}f(s)e^{-\int_s^x a\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\\ \overset{x_0=0}{=}&Ce^{-ax}+\int_0^x f(s)e^{-a(x-s)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由解的周期性, $y(0)=y(2\pi)$. 当 $y(0)=y(2\pi)$ 时, 下证明 $\forall x\in R$, 有 $y(x)=y(x+2\pi)$.

令 $u(x)=y(x+2\pi)-y(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y(x+2\pi)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(f(x+2\pi)-ay(x+2\pi))-(f(x)-ay(x))=-au(x).$$

$u(x)$ 为齐次方程的解, 而 $u(0)=0$, 故 $u(x)\equiv 0$, 即 $\forall x\in R$, 有 $y(x)=y(x+2\pi)$. 则有方程

$$\begin{aligned}C&=y(0)\\&=y(2\pi)\\&=Ce^{-2\pi a}+\int_0^{2\pi}f(s)e^{-a(2\pi-s)}\mathrm{d}s\\&=Ce^{-2\pi a}+e^{-2\pi a}\int_0^{2\pi}f(s)e^{as}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

解得

$$C=\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}f(s)e^{as}\mathrm{d}s.$$

注 本题中应用的方法可以作为通法解决一系列与周期函数有关的问题. 即构造 $u(x)=y(x+\omega)-y(x)$, 求其满足的方程, 通过定理 2.5 证明 $u(x)\equiv 0$. 对于周期性的问题有结果如下:

对方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x).$$

其中 $p(x), q(x)$ 均为以 ω 为周期的周期函数. 则:

1. 若 $q(x) \equiv 0$, 该方程的任意非零解以 ω 为周期, 当且仅当
$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)\mathrm{d}x = 0.$$
2. 若 $q(x) \not\equiv 0$, 该方程有唯一的周期解, 当且仅当
$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

2.4 几类重要的一阶常微分方程

2.4.1 齐次方程

定义 2.4 (齐次方程)

若 $P(tx, ty) = t^m P(x, y), Q(tx, ty) = t^m Q(x, y), \forall t \in R, m \in R$, 则称 (2.1) 是 m 次齐次方程. ♣

注 齐次方程可表示为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$, 此处 g 是给定的连续函数. 这是因为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{x^{-m}P(x,y)}{x^{-m}Q(x,y)} = -\frac{P(1,y/x)}{Q(1,y/x)}.$$
求解方法:
作变换 $y = ux$, 则 $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$, 从而
$$\begin{cases} P(x,y) = P(x,ux) = x^m P(1,u), \\ Q(x,y) = Q(x,ux) = x^m Q(1,u). \end{cases}$$
从而方程 (2.1) 可化为
$$x^m[P(1,u) + uQ(1,u)]\mathrm{d}x + x^{m+1}Q(1,u)\mathrm{d}u = 0. \tag{2.6}$$

这是一个可分离变量的方程. 注 方程 (2.6) 有特解 $x = 0$, 但不一定为齐次方程的解, 由于令 $y = ux$ 并做除法时, $x = 0$ 时不可逆.

例题 2.6 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$.
解. 令 $y = ux$, 则原方程可化简为
$$\frac{1}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}.$$
积分得
$$arctanu - \frac{1}{2}(1+u^2) = In|x| + C.$$
即
$$|x| = e^{arctanu}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e^C.$$
等价于
$$|x|\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctanu}, \forall C > 0.$$
将 $u = \frac{y}{x}$ 带入, 即得
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctan\frac{y}{x}}, \forall C > 0.$$
注 若采用极坐标换元, 该微分方程的解为 $r = Ce^\theta$.

例题 2.7 讨论形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l})$$
的方程的求解法. 这里 a, b, c, m, n, l 为常数.

解.

1. $c = l = 0$ 时, 齐次方程.
2. c 与 l 不全为 0 时, 令
$$\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta. \end{cases}$$
其中 α, β 为常数. 则原方程变为
$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{m\xi + n\eta + m\alpha + n\beta + l}).$$
   (a). $an - bm \neq 0$ 时, $\exists\, \alpha, \beta$, s.t.
$$\begin{cases} a\alpha + b\beta = -c, \\ m\alpha + n\beta = -l. \end{cases}$$
   此时该方程转化为齐次方程.
   (b). $an - bm = 0$ 时, 令
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \lambda,$$
   则原方程可化简为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{\lambda(mx + ny) + c}{mx + ny + l}).$$
   令 $v = mx + ny$, 则
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = m + n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m + nf(\frac{\lambda v + c}{v + l}).$$
   此时该方程转化为可分离变量的方程.

2.4.2 Bernoulli 方程

定义 2.5

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n.$$
的方程称作 *Bernoulli* 方程. 其中 n 为常数, 且 $n \neq 0, 1$.

♣

求解方法:

1. $y = 0$ 为方程的特解.
2. $y \neq 0$ 时, 有
$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x).$$
注意到
$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x}.$$
令 $z = y^{1-n}$, 即有
$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = q(x).$$
即转化为一阶线性方程.

2.4.3 Riccati 方程

定义 2.6

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x).$$

的方程称作 *Riccati* 方程. 其中 $p(x),q(x),r(x)$ 在区间上连续, 且 $p(x)\not\equiv 0$.

该方程为形式最简单的非线性方程, 但已经无法用初等方法解决. 但有如下两个命题对解进行刻画.

定理 2.10

设方程的一个特解为 $y=\varphi(x)$, 则可用积分法求得通解.

证明 设 $y(x)=u(x)+\varphi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=p(u+\varphi)^2+q(u+\varphi)+r.$$

将 φ 为特解的条件带入, 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(2\varphi P+q)u+pu^2.$$

即转化为 *Bernoulli* 方程.

例题 2.8 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^{-2}.$$

其中 a,b 为常数.

解.

1. $y=0$ 不是解.
2. $y\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2y^2}.$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{y})}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(\frac{1}{y})^2.$$

令 $z=\frac{1}{y}$, 则有

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot z^2.$$

即转化为齐次方程.

定理 2.11

对 *Riccati* 方程的特殊情形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^m,$$

其中 $a\neq 0,b,m$ 均为常数. 当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时, 当

$$m=0,\ -2,\ \frac{-4k}{2k+1},\ \frac{-4k}{2k-1}\quad (k=1,2,\cdots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.

证明 不妨设 $a=1$, 否则可以通过令 $x'=ax$ 化简. 故讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=bx^m.$$

1. $m=0$ 时,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=b$$
为可分离变量的方程.
2. $m=-2$ 时, 在例 2.8中已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.
3. $m=\frac{-4k}{2k+1}$ 时,
4. $m=\frac{-4k}{2k-1}$ 时,

注 本充分条件为 1725 年 *Daniel Bernoulli* 得到的结果. 事实上该条件同样为必要条件, 在 1841 年被刘维尔证明. 表明即使是形式简单的 *Riccati* 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

2.4.4 Gronwall 不等式

定理 2.12 (Gronwall 不等式)

令 k 是非负常数, $f(x),g(x)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续非负函数, 且满足不等式
$$f(x)\leqslant k+\int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s,\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$
则
$$f(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}.$$
♡

证明 令
$$A(x)=k+\int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s,$$
则
$$A'(x)=f(x)g(x)\leqslant A(x)g(x).$$
注意到
$$(A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s})'=e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}(A'(x)-A(x)g(x))\leqslant 0.$$
故
$$A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\leqslant A(\alpha)=k.$$
即
$$A(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}.$$
故
$$f(x)\leqslant A(x)\leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

定理 2.13 (Gronwall 不等式, 微分形式)

令 $f\in C^1([\alpha,\beta])$ 非负, 且满足
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\leqslant g(x)f(x),\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$
其中 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 非负. 则有
$$f(x)\leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$
♡

证明 注意到
$$(f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s})'=e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}(f'(x)-f(x)g(x))\leqslant 0.$$
故
$$f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\leqslant f(\alpha),\ \forall\alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

即
$$f(x) \leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s},\ \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

注 微积分不等式的解决过程中,我们通常构造导数 $\leqslant 0$或 $\geqslant 0$ 的函数,从而得到好的不等式关系. *Gronwall* 不等式的应用极其广泛.

2.5 一阶隐式方程

前面我们通常考虑形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ 的方程,事实上给出了一个对一阶导数的显式表达. 若无法给出显式表达,则考虑更一般的一阶方程
$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0. \tag{2.7}$$
本节探讨该方程的解.

2.5.1 微分法

设从可以解出 $y = f(x,p), p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
则两边对于 x 求导,可得
$$p = f'_x + f'_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$
即
$$(f'_x - p)\mathrm{d}x + f'_p\mathrm{d}p = 0.$$
化简为关于 x,p 的一阶显式微分方程.

1. 若该方程有通解 $p = u(x,C)$, 则方程 (2.7) 有通解
$$y = f(x,u(x,C)),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$
2. 若该方程有特解 $p = \omega(x)$, 则方程 (2.7) 有特解
$$y = f(x,\omega(x)).$$
由于 x,p 有良好的对称性,故可能容易得到 x 关于 p 的表达但反解较为困难. 故有:
3. 若该方程有通解 $x = v(p,C)$, 则方程 (2.7) 有通解
$$\begin{cases} x = v(p,C), \\ y = f(v(p,c),p), \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$
此时 p 可以看作一个参数.
4. 若该方程有特解 $x = z(p)$, 则方程 (2.7) 有特解
$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p),p). \end{cases}$$
此时 p 可以看作一个参数.

注 微分法适用于可用 x,p 表示 y 的部分方程.

例题 2.9 求解克莱洛方程
$$y = xp + f(p),$$
其中 $f''(p) \neq 0$.

解. 两边对 x 求导,有
$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

即

$$(x+f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0.$$

1. $p=C$ 为该方程的一个通解, 则原方程有一个通解为

$$y=Cx+f(C),\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

2. $x+f'(p)=0$ 时, $x=-f'(p)$ 为该方程的一个特解, 则原方程有一个特解为

$$\begin{cases}x=-f'(p)\\ y=-f'(p)p+f(p).\end{cases}$$

下考虑特解是否由通解得到, 事实上由于 $f''(p)\neq 0$, 由隐函数定理可解得 $p=\omega(x)$, 且

$$x=-f'(\omega(x)).$$

对 x 求导有,

$$1=-f''(\omega(x))\omega'(x).$$

故

$$\omega'(x)\neq 0.$$

即 $\omega(x)$ 不为常数, 这就证明了特解不能由通解得到. **注**

1. 特解上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线为

$$y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0)+y_0=\omega(x_0)x+f(\omega(x_0)).$$

   故通解与特解处的切线相对应, 这也证明了特解不能由通解得到.
2. 对 $f(p)=-\frac{1}{4}p^2$ 的情形, 通解为 $y=Cx-\frac{1}{4}C^2$, 特解为 $y=x^2$. 图像如图 2.2 所示.

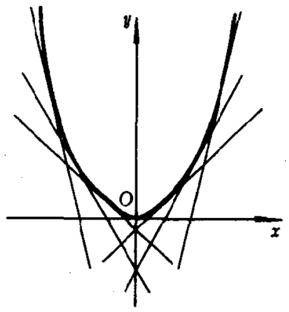

图 2.2: 例 2.9 解的图像

   该图像的特解恰好包络了所有通解.

2.5.2 参数法

对不明显包含自变量的方程, 即

$$F(y,p)=0,\ p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

设 $y=g(t),\ p=h(t)$.

1. $h(t)=0$ 时, y 为常数满足 $F(y,0)=0$, 则得到方程的特解.
2. $h(t)\neq 0$ 时, 有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y.$$

   故

$$\mathrm{d}x=\frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t.$$

故微分方程有通解

$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} \mathrm{d}t + C \\ y = g(t). \end{cases}$$

例题 2.10 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y^2 = 1.$$

解. 令 $y = cost, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = sint.$

1. $y = \pm 1$ 为方程的特解.
2. $y \neq \pm 1$ 时, 有

$$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t.$$

故方程有通解为

$$\begin{cases} x = -t + C \\ y = cost. \end{cases}$$

即方程有通解

$$y = cos(C - x), \ \forall C \in \mathbb{R}.$$

对更一般的微分方程 (2.5.1),
若将 x, y, p 均看为变量, 则 $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ 表示空间中的曲面. 令

$$x = f(u, v), y = g(u, v), p = h(u, v),$$

其中 u, v 为参数. 由

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x,$$

知

$$g'_u \mathrm{d}u + g'_v \mathrm{d}v = h(f'_u \mathrm{d}u + f'_v \mathrm{d}v).$$

即

$$(g'_u - hf'_u)\mathrm{d}u + (g'_v - hf'_v)\mathrm{d}v = 0.$$

1. 若该方程有通解 $v = Q(u, C)$, 则方程 (2.5.1) 有通解

$$\begin{cases} x = f(u, Q(u, C)), \\ y = g(u, Q(u, C)). \end{cases}$$

2. 若该方程有特解 $v = S(u)$, 则方程 (2.5.1) 有特解

$$\begin{cases} x = f(u, S(u)), \\ y = g(u, S(u)). \end{cases}$$

由于 u, v 有良好的对称性, 故可能容易得到 u 关于 v 的表达但反解较为困难. 此时有另一种对称的表达方式, 在此不做说明.

例题 2.11 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y - x = 0.$$

解. 令

$$x = u, \ p = v, \ y = u - v^2.$$

于是

$$\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = v\mathrm{d}u.$$

即

$$(1-v)\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = 0.$$

1. $v=1$ 为该方程的一个特解, 故
$$y = x-1$$
为原方程的一个特解.
2. $v \neq 1$ 时, 有
$$\mathrm{d}u - \frac{2v}{1-v}\mathrm{d}v = 0.$$
知通解为
$$u + 2v + 2In|v-1| = C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$
即
$$u = -2v - In(v-1)^2 + C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$
故方程有通解为
$$\begin{cases} x = -2v - In(v-1)^2 + C, \\ y = -2v - In(v-1)^2 - v^2 + C. \end{cases} \forall C \in \mathbb{R}$$

第 3 章 存在唯一性定理

3.1 Picard 存在唯一性定理

本节考察初值问题. 即方程 (3.1) 的解的理论.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

定义 3.1 (Lipschitz 条件)

设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

常数 $L > 0$. 称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足 Lip-条件. ♣

注 若 D 为有界闭凸区域, f'_y 连续, 则 f 关于 y 满足 Lip-条件. 由于

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\int_{y_2}^{y_1} f'_y(x,z)\mathrm{d}z| \leqslant M|y_1 - y_2|.$$

其中 M 为界.

定理 3.1 (Picard 存在唯一性定理)

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 R:$|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ 上连续, 且对于 y 满足 Lip-条件, 则初值问题 (3.1) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有并且只有一个解, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},\ M > \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|.$$

♡

注

1. 该定理为 ODE 中最重要的定理之一, 在偏微分方程中也有重要的应用。
2. 该定理描述了, 在函数 $f(x,y)$ 连续的条件下, 且对 y 满足 Lip-条件, 则在一个区域内方程存在唯一解, 该区域取决于 a 与 $\frac{b}{M}$ 的大小关系.

证明

1. *Step* 1. 转化为等价的积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x.$$

   (a). 若满足该积分方程, 且 y(x) 为连续函数, 且 $f(x,y(x))$ 应该满足定义域的限制, 由 $y(x)$ 的连续性知 $f(x,y(x))$ 连续, 则变上限积分函数可导, 即 $y(x)$ 可导, 且满足方程 (3.1).

   (b). 若满足方程 (3.1), 两边同时积分即可得到积分方程.

2. *Step* 2. 构造 *Picard* 序列. 目标: 构造 $\{y_n(x)\}$, s.t. $y_n(x) \to y(x) (n \to \infty)$.

$$def. \begin{cases} y_0(x) = y_0, \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x. \end{cases}$$

   需要验证定义的合理性, 即 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0(x))|\mathrm{d}x\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

   利用归纳: 设 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$, 考察 $|y_{n+1}(x) - y_0|$. 有

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n(x))|\mathrm{d}x\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

3. *Step* 3. 证明皮卡序列在区间 I 上一致收敛到积分方程的解.
注意到
$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}[y_{k+1}(x)-y_k(x)]+y_0(x).$$
故序列 $\{y_n\}$ 的一致收敛性等价于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|$ 的一致收敛性.
下用归纳的办法证明
$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
$n=0$ 时已证.
设命题对 $n-1$ 成立, 对 n 的情形有:
$$\begin{aligned}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_n(x))-f(x,y_{n-1}(x))]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}|\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$
即表明皮卡序列一致收敛, 设其收敛到函数 $\varphi(x)$. 下验证 $\varphi(x)$ 为方程的解. 只需在定义式中令 $n\to\infty$, 知 $\varphi(x)$ 为积分方程的解, 亦为方程 (3.1) 的解.
4. *Step* 4 唯一性.
令 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 为方程的解, 设 $\omega(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, 则
$$|\omega(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x))]\mathrm{d}x\right|\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\mathrm{d}x=L\int_{x_0}^{x}|\omega(x)|\mathrm{d}x.$$
由 *Gronwall* 不等式知 $|\omega(x)|\leqslant 0$. 即 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$.

注

1. 转化为积分方程的好处在于解 $y(x)$ 连续即可推出 $y(x)$ 可微; 积分表达式可由三角不等式估计; 且 *Picard* 序列的构造目的在于逼近方程的解, 而积分与极限的换序问题有固定的结论. 将积分方程转化为微分方程在 *PDE* 时同样重要.
2. 构造 *Picard* 序列时, n 的取值与 x 无关, 即对任意的 x, 总存在极大的 N, 使得 $n>N$ 时, $y_n(x)$ 与 $y(x)$ 的差值无比的小, 即一致收敛. 构造后应验证满足定义域的限制.
3. 证明序列一致收敛时的估计来源于对简单情形, 角标较小时的尝试.
4. 唯一性此处的证明利用了 2.4 中的结论, 但方法仍然为 “设不同与证相等” .
5. 本定理中对于 h 的定义显得奇特, 探索过程中有更深刻的考虑, 从压缩映射的角度考虑 *Picard* 存在唯一性定理的发现过程.
令
$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,$$
其中 T 表示一个算子. 要证:$\exists\,!\,y(x)\in C([x_0-h,x_0+h])$, s.t. $y(x)=Ty(x)$.
$$def.X=\{y(x)\in C([x_0-h,x_0+h])\big|\ |y(x)-y_0|\leqslant b\}.$$
$$def.\parallel y\parallel=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|y(x)|.$$
先证明 X 为 *Banach* 空间上的闭集, 而 $C([x_0-h,x_0+h])$ 本身为一个 *Banach* 空间, 只需证明闭集. 事实上, 若 $y_n\in X$, 且 $y_n\to y\in C[x_0-h,x_0+h]$, 则
$$|y(x)-y_0|=\lim_{n\to\infty}|y_n(x)-y_0|\leqslant b.$$

即证明了 X 为 $Banach$ 空间上的闭集. 下证 $T: X \to X$ 为 X 上的压缩映射.

(a). 压缩映射原理: X 为 $Banach$ 空间的闭集, $T: X \to X$ 且满足

$$\forall\, y_1, y_2 \in X,\ \| Ty_1 - Ty_2 \| \leqslant \theta \| y_1 - y_2 \|,\ 0 \leqslant \theta < 1.$$

则 $\exists\,!\, y(x) \in C([x_0 - h, x_0 + h])$, s.t. $y(x) = Ty(x)$. 这里 h 仍然待定.

(b). 为保证对 $\forall\, y(x) \in X$, 有 $Ty \in X$. 对 $\forall y(x) \in X$,

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x \right|.$$

令 $h \leqslant a$, 才有

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh.$$

由于 $h \leqslant a$ 时才可以利用有界性. 而为了满足 T 的良定义, 要求 $Mh \leqslant b$. 即为 h 定义的合理性.

(c). 为保证压缩映射的条件成立. 考察

$$|Ty_1(x) - Ty_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] \right| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} [y_1(x) - y_2(x)] \right|.$$

尝试要求上述等式对一切的 $y_1(x), y_2(x)$ 成立, 根据范数的定义可以要求以下的等式成立:

$$\| Ty_1(x) - Ty_2(x) \| \leqslant Lh \| y_1(x) - y_2(x) \| .$$

保证压缩映射的合理性, 只需 $Lh < 1$, 但定理中并没有如此要求, 由于对不同的函数 L 很难估计. 针对问题提出 (d) 与 (e) 的两种方案.

(d). 取 $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$, 对 x_1 再次定义, 可得到相同的 h, 定义更多区间上的函数 $y(x)$, 最终在有限次定义后必然能得到不需要条件 $Lh < 1$ 的函数.

(e). 调整范数的定义,

$$def. \| y \| = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y(x)e^{-\alpha|x - x_0|}|.$$

最后由压缩映射原理得到了定理的证明.

例题 3.1 对 $Riccati$ 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2.$$

$f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是局部 Lip 的 (即在任意一点 (x_0, y_0), 存在一个包含该点的矩形, 该矩形内满足 Lip—条件). 由 $Picard$ 存在唯一性定理, 对于任意一点 (x_0, y_0), 在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一解.

注 局部 Lip 与全局 Lip 的区别在于, 局部 Lip 找不到一个 L, s.t. $\forall\, y1, y2 \in R$, 均有 Lip 条件成立, 如本题.

定理 3.2 (Peano 存在性定理)

设 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题 (3.1) 在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$. h, R 同 $Picard$ 存在唯一性定理. ♡

注 相比 $Picard$ 存在唯一性定理, 该定理的条件变弱, 故得到的结论变弱. 若 $f(x, y)$ 不满足连续, 则初值问题有可能无解.

例题 3.2 回顾方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}.$$

$f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y \neq 0$ 时存在连续的偏导数, 故满足 lip-条件, 则由 $Picard$ 存在唯一性定理, 在临近的矩形内只有一个解. 而对于 $y = 0$ 的情形, 由 $Peano$ 存在性定理, 只能表明存在解. 事实上也不存在唯一解, 与解的图像对应.

在讨论了存在性定理, 存在唯一性定理后, 我们将 Lip-条件进行推广, 得到更广泛的唯一性定理.

定义 3.2 (Osgood 条件)

设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|).$$

其中 $F(r)>0$ 为 $r>0$ 上的函数，且

$$\int_0^{r_1}\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r=\infty,\ r_1>0\text{为常数}.$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 内满足 *Osgood* 条件. ♣

注 *Lipschitz* 条件为 *Osgood* 条件的特例，由于 $F(r)=kr$，而

$$\int_0^{r_1}\frac{1}{kr}\mathrm{d}r=\infty.$$

定理 3.3 (Osgood 定理)

设 $f(x,y)$ 在 G 内满足 *Osgood* 条件，则过 G 内任何一点的积分曲线是唯一的. ♡

证明 设过 $(x_0,y_0)\in G$ 有两个解 $y=y_1(x)$ 与 $y=y_2(x)$，则 $\exists\ x_1\neq x_0$, s.t. $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$, $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x}=sup\{x_0<x<x_1|y_1(x)=y_2(x)\},$$

则在 $(\bar{x},x_1]$ 上，$y_1(x)>y_2(x)$. 令

$$r(x)=y_1(x)-y_2(x),$$

则 $r(x)>0$ 在 $(\bar{x},x_1]$ 上成立，且

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=y_1'-y_2'=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\leqslant F(y_1(x)-y_2(x))=F(r(x)),$$

故

$$\int_0^{r(x_1)}\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}\leqslant\int_{\bar{x}}^{x_1}\mathrm{d}x=x_1-\bar{x}<\infty.$$

与 *Osgood* 条件矛盾.

注 上述的 *Lipschitz* 与 *Osgood* 条件均为判断唯一性的充分条件，迄今为止没有对唯一性的充要条件的刻画.

3.2 解的延伸

定理 3.4 (延伸定理)

设 P_0 为区域 G 内任一点，并设 Γ 为微分方程 (3.1) 经过 P_0 点的任意一条积分曲线，则 Γ 将在 G 内延伸到边界. 即对任何有界闭区域 $P_0\in G_1\subset G$，积分曲线可以延伸到 G_1 之外. ♡

注 若 $G=\mathbb{R}^2$，则必有 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$.

证明 设经过 P_0 的积分曲线 $\Gamma: y=\varphi(x),\ x\in J$. J 为最大存在区间. 只考虑积分曲线在 x_0 右侧的延伸情况，令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$，则 J^+ 为 Γ 在 P_0 的右行最大区间.

1. $J^+=[x_0,+\infty)$，则 Γ 延伸到 G 的边界.
2. $J^+=[x_0,x_1]$，令 $y_1=\varphi(x_1)$, $(x_1,y_1)\in G$. 令 $P_1=(x_1,y_1)$，由于 G 为开集，存在以 P_1 为中心的矩形 R, s.t. $R\subset G$，由 *Peano* 存在定理，在 $[x_1-h,x_1+h]$ 上至少存在一个解 $y=\varphi_1(x)$. 令

$$\bar{y}(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x_0\leqslant x\leqslant x_1\\ \varphi_1(x),\ x_1<x\leqslant x_1+h\end{cases}$$

事实上, 由于 $\bar{y}(x)$ 在 $[x_0, x_1+h]$ 上连续, 只需要证明

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

(a). 若 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, 上式等价于

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x.$$

由于 $\varphi(x)$ 为方程在 $[x_0, x_1]$ 上的解, 此式成立.

(b). 若 $x_1 < x \leqslant x_1 + h$, $\varphi_1(x)$ 为 $[x_1 - h, x_1 + h]$ 上方程的解, 满足 $\varphi_1(x_1) = y_1$, 故

$$\begin{aligned}
\bar{y}(x) = \varphi_1(x) &= y_1 + \int_{x_1}^{x} f(x, \varphi_1(x))\mathrm{d}x \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)) + \int_{x_1}^{x} f(x, \varphi_1(x))\mathrm{d}x \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

找到了在区间 $[x_0, x_1+h]$ 上定义的方程的解, 与 J^+ 为右行最大区间矛盾.

3. $J^+ = [x_0, x_1)$, 若积分曲线无法延伸到边界, 则存在有界闭集 $K \subset G$, s.t. $\Gamma \subset K$.
对任意的 $x_n, x_m \to x_1^-$, 有

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| &= |\int_{x_m}^{x_n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x| \\
&= |\int_{x_m}^{x_n} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x| \\
&\leqslant \max_{(x,y)\in K} |f(x,y)||x_n - x_m| \\
&\leqslant M|x_n - x_m| \to 0\ (n, m \to \infty).
\end{aligned}$$

故 $\{\varphi(x_n)\}$ 为 *Cauchy* 列, 则 $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ 存在, 令 $y_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, 令

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \varphi(x),\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ y_1,\ x = x_1 \end{cases}$$

事实上, 由于 $\bar{y}(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上连续, 只需要证明

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

而

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x,\ x_0 \leqslant x < x_1.$$

已经成立, 对两边令 $x \to x_1^-$, 有

$$\bar{y}(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{y}(x))\mathrm{d}x.$$

找到了在区间 $[x_0, x_1]$ 上定义的方程的解, 与 J^+ 为右行最大区间矛盾.

注

1. 该证明的核心思路为假设存在最大延伸区间, 构造微分方程在更广区间内的解. 此时再次表明了转化为积分方程的优越性, 即只需要表明解的连续性.
2. 开区间与闭区间的解法略有不同, 闭区间构造了新的邻域, 而开区间仅定义了端点处的取值.
3. 在开区间解的验证过程中, 用到了变上限积分函数的连续性以及函数积分值不随有限个点取值的改变而改变.

推论 3.1

设函数 $f(x,y)$ 在 G 内连续, 且关于 y 满足 lip-条件, 则过 G 内任意一点 P_0, 存在唯一的积分曲线 Γ, 并且 Γ 将在 G 内延伸到边界.

♡

注 由于在 G 内均满足 Lip-条件, 该积分曲线 Γ 在 G 中唯一确定.

例题 3.3 试证明微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2.$$

任一解的存在区间是有界的.

证明 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且关于 y 局部 lip, 则经过任意一点, 存在唯一的积分曲线 $\Gamma : y = \varphi(x)$, 并在 Γ 内延伸到边界.

只证明 Γ 的右行最大区间有界, 否则 $[x_0, +\infty]$ 是最大右行区间, 取 $x_1 > 0, x_1 > x_0$, 则在 $[x_1, +\infty)$ 上, $f(x,y) \geqslant x_1^2 + y^2$.

故

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \geqslant x_1^2 + \varphi^2,\ x \geqslant x_1.$$

对不等式两边分离变量与积分, 得

$$x - x_1 \leqslant \frac{1}{x_1}(arctan\frac{\varphi(x)}{x_1} - arctan\frac{\varphi(x_1)}{x_1}) \leqslant \frac{\pi}{x_1}.$$

则

$$x \leqslant x_1 + \frac{\pi}{x_1} < +\infty.$$

故右行最大区间有界.

注

1. 存在区间有界, 即存在最大存在区间, 此时解 y 必然趋近于 $+\infty$ 或 $-\infty$.
2. 证明解的最大区间存在前, 应证明解的存在性.
3. 本题的思路在于找到某一个可以写出明确解的积分曲线, 在有限值趋近于 ∞, 但该积分曲线在某一点后恒小于原方程的解.

例题 3.4 在平面上任取 $P_0(x_0, y_0)$, 试证明初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x-y)e^{xy^2} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

的右行解都在区间 $x_0 \leqslant x < \infty$ 上存在.

证明 令 $f(x,y) = (x-y)e^{xy^2}$, 则 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 并且关于 y 局部 lip, 故经过 P_0 存在唯一的积分曲线, 且延伸到边界.

1. P_0 在 $L : y = x$ 的上方.
   若右行最大存在区间有限, 则过 P_0 的右行解延伸到 $y = +\infty$ 或 $y = -\infty$. 在 L 上方, 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, 积分曲线向右单调递减, 由延伸定理, 它必与 L 在 (x_0, y_0) 上相交, 并且穿越 L 到达下方.
2. P_0 在 $L : y = x$ 的下方.
   此时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, 则积分曲线单调递增, 但是积分曲线不会再次穿过 L 到达 L 上方. 事实上, 若积分曲线从下方接近 L, 则斜率 $\ll 1$, 但 L 的斜率为 1.

因此, 积分曲线无法在有限的区间趋于 $\pm\infty$, 这与最大存在区间有限矛盾.

注

1. 证明最大存在区间不存在时, 应说明在 x 有限时, y 无法趋近于 $+\infty$ 或 $-\infty$.
2. 考虑 $y = x$ 这条直线的原因在于在该条线上导数为 0, 也被称作零趋势线.

定理 3.5

设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 在条形区域 S: $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < +\infty$ 内连续, 且满足不等式

$$|f(x, y)| \leqslant A(x)|y| + B(x),$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 为 (α, β) 上的连续函数, 则微分方程的每一个解都以 (α, β) 为最大存在区间.

证明 由 *Peano* 存在定理, 经过 S 中的任一点, 存在一条积分曲线, 由延伸定理, 每一条积分曲线都可延拓到 S 的边界. 只证明经过 P_0 的积分曲线的右行最大区间为 $[x_0, \beta)$. 否则 $\exists\, \beta_0$, $x_0 < \beta_0 < \beta$, s.t. 右行最大区间为 $[x_0, \beta_0)$.

任取 $x_0 < x_1 < \beta_0, y_1 = y(x_1)$, 令 $\beta_0 < \beta_1 < \beta$, 令 R: $|x - x_1| \leqslant a$, $|y - y_1| \leqslant b$, s.t. $x_1 + a < \beta_1$. 由于 $A(x), B(x)$ 在 $\alpha < x < \beta$ 上连续, 令他们在 $[x_0, \beta_1]$ 上的上界分别为 A_0, B_0. 则在 R 上,

$$|f(x, y)| \leqslant A_0(|y_1| + b) + B_0 =: M - 1.$$

故

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1| + b) + B_0 + 1} \to \frac{1}{A_0},\ b \to +\infty.$$

当 b 充分大时, $\frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2A_0}$.

选取 a, s.t. $a < \frac{1}{4A_0}$, 则 $h = min\{a, \frac{b}{M}\} = a$. 由 *Peano* 存在性定理, 经过 P_1 在区间 $[x_1 - a, x_1 + a]$ 上存在积分曲线.

只要取 x_1 充分接近 β_0, 则积分曲线在 $[x_1, x_1 + a]$ 上存在, 因此积分曲线在 $[x_0, x_1 + a]$ 上存在, 与右行最大区间为 $[x_0, \beta_0)$ 矛盾.