第章　留数

设a是$f(z)$的孤立奇点，$U: 0<|z-a|<\rho$，考虑积分$\oint_c f(z)dz$,

C为 U 内包含a的简单闭曲线的正向，$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$称为留数，记作

$$Res[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$$

$$f(z)=\cdots+a_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-a)^{-1}+a_0+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots$$

$$Res[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz=a_{-1}$$

定理 1 (留数定理) 如果函数$f(z)$在闭路 C 上解析，在 C 的内部
除去 n 个孤立奇点$a_1,a_2,\cdots$外也解析，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),a_k]$$

积分计算转换为 留数计算转换为　负一次幂的计算

定理 2 设a是$f(z)$的 m 级极点，则

$$Res[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{\,m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

特别地，当$m=1, Res[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-a)^{-1}}+a_0+a_1(z-a)+\cdots$$

$$(z-a)^m f(z)=a_{-m}+\cdots+a_{-1}(z-a)^{m-1}+a_0(z-a)^m+\cdots$$

$$[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}=(m-1)!\,a_{-1}+m(m-1)\cdots 2\,a_0(z-a)+\cdots$$

推论　设$P(z),Q(z)$都在a点解析，且$P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q^{'}(a)\neq 0$

则 $Res[\frac{P(z)}{Q(z)},a]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

证 $Res[\frac{P(z)}{Q(z)},a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim\limits_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

例 计算$Res[\frac{1}{\sin z},0]=\frac{P(0)}{Q'(0)}$

例 计算$Res[\tan z,\frac{\pi}{2}]=\frac{\sin z}{(\cos z)'}|_{z=\frac{\pi}{2}}=-1$

例 计算积分$\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{z^2-1}dz$

解　$\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i\{Res[f(z),1]+Res[f(z),-1]\}$

$Res[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2}$

$Res[f(z),-1]=\lim\limits_{z\to -1}(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to -1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{e^{-1}}{2}$

$\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2})=2\pi i\cosh 1$

$Res[f(z),1]=\frac{ze^z}{2z}|_{z=1}=\frac{e}{2}$

例 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1} dz$

解 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1} dz$

$$= 2\pi i\{Res[f(z),1] + Res[f(z),-1] + Res[f(z),i] + Res[f(z),-i]\}$$

利用定理 3, $\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{1}{4z^3} = \frac{z}{4}$

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1} dz = 2\pi i\{\frac{1}{4} + \frac{-1}{4} + \frac{i}{4} + \frac{-i}{4}\} = 0$$

例 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$

解 $Res[f(z),0] = \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z(z-1)^2} = 1$

$$Res[f(z),1] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 \frac{e^z}{z(z-1)^2}]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}(\frac{e^z}{z}) = 0$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i(1+0) = 2\pi i$$

例 计算$Res[\frac{z-\sin z}{z^6},0]$

1) $Res[\frac{z-\sin z}{z^6},0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3\frac{z-\sin z}{z^6}]$

$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{z-\sin z}{z^3})$

2) $\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\cdots$

$Res[\frac{z-\sin z}{z^6},0]=a_{-1}=-\frac{1}{5!}$

3) $Res[\frac{z-\sin z}{z^6},0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}[z^6\frac{z-\sin z}{z^6}]$

$=\frac{1}{(6-1)!}(z-\sin z)^{(5)}|_{z=0}=-\frac{1}{5!}$

例 计算$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$

$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)$

$=\cdots+\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots)+\cdots$

例 计算$\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$

5.2 定积分的计算

5.2.1 $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

$z = e^{i\theta}, \;\; dz = ie^{i\theta} d\theta,$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

$$R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = f(z) dz$$

$$I = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

例 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} \quad (a > 1)$

解 $z = e^{i\theta}$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1} dz$$

$z^2 + 2aiz - 1 = 0, \quad z_1 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1}), z_2 = i(-a - \sqrt{a^2 - 1}), |z_1| < 1, |z_2| > 1$

$$I = 2\pi i Res[\frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}, z_1] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

例 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \quad (0 < p < 1)$

解 $z = e^{i\theta}$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)} = 2\pi i Res[f(z), p] = \frac{2\pi}{1 - p^2}$$

5.2.2 三条引理

引理 1(大圆弧引理)　如果当R充分大时, $f(z)$
在圆弧$C_R: z = Re^{i\theta}$上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$,
则 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

引理 2(小圆弧引理)

推论 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{c_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)Res[f(z), a]$

引理 3(约当引理)　如果当R充分大时, $g(z)$
在圆弧$C_R: |z| = R, Imz > -a(a > 0)$连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$,
则对任何正数λ, 有 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$

5.2.3 有理函数的积分

设$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$是有理函数，多项式$Q(x)$至少比$P(x)$高二次,

且$Q(x)$在实轴上无零点, 在这些条件下,

积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$存在

$I = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} R(x)dx$存在

(1)取辅助函数$f(z) = R(z)$

(2)取辅助闭路$C = [-R, R] + C_R$, 由留数定理

$$2\pi i\sum Resf(z) = \oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z), a_k]$$

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}\quad(a>0)$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=\pi i\sum Resf(z)$

取辅助函数$f(z)=\frac{1}{z^4+a^4}$

四个一级极点是 $ae^{\frac{\pi}{4}i},ae^{\frac{3\pi}{4}i},ae^{\frac{5\pi}{4}i},ae^{\frac{7\pi}{4}i}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=\pi i\{Res[\frac{1}{z^4+a^4},ae^{\frac{\pi}{4}i}]+Res[\frac{1}{z^4+a^4},ae^{\frac{3\pi}{4}i}]\}$$

$$=\pi i(-\frac{1}{4a^4}ae^{\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{4a^4}ae^{\frac{3\pi}{4}i})=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}$$

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\quad(a>0,b>0)$

解 取辅助函数$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\quad(a\neq b)$

四个一级极点是 $\pm ai$, $\pm bi$, 其中 ai,bi在上半平面

$$Res[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}[(z-ai)\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}]=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}$$

$$Res[f(z),bi]=\frac{b}{2i(b^2-a^2)}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2\pi i[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}]=\frac{\pi}{a+b}$$

5.2.4 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx dx,\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx dx \quad (m>0)$

设$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$是有理函数，多项式$Q(x)$至少比$P(x)$高一次，

且$Q(x)$在实轴上无零点,在这些条件下，

积分 I_1,I_2都存在

$$I_1+iI_2=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx$$

(1)取辅助函数$f(z)=R(z)e^{imz}$

(2)取辅助闭路$C=[-R,R]+C_R$,由留数定理

$$2\pi i\sum Resf(z)=\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{R} R(x)e^{imx}dx+\int_{C_R} R(z)e^{imz}dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z),a_k]$$

例　$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx \quad (m>0)$

解　$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{1+x^2}dx=2\pi iRes[\frac{e^{imz}}{1+z^2},i]=\pi e^{-m}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\pi e^{-m}$$

例　$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{a^2+x^2}dx$

解　取辅助函数$f(z)=\frac{ze^{iz}}{a^2+z^2}$

$$I=Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{a^2+x^2}dx=Im\ 2\pi iRes[\frac{ze^{iz}}{a^2+z^2},ai]=\pi e^{-a}$$

5.2.5 杂例

例 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx$

解 $\int_{0}^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx$

(1)取辅助函数$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$

(2)取辅助闭路$C=[-R,-r]+C_r+[r,R]+C_R$,由留数定理

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

设$x=-t,\quad \int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_{R}^{r}\frac{e^{-it}}{t}dt=-\int_{r}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx$

$$2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz++\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=i(0-\pi)\lim_{z\to 0}\{z\frac{e^{iz}}{z}\}=-\pi i$$

$$r\to 0,R\to+\infty\Rightarrow\int_{0}^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

例 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{sin^2x}{x^2}dx$

例 $I_1=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx,\quad I_2=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$

$$I_1+iI_2=\int_0^{+\infty}e^{ix^2}dx$$

取辅助函数$f(z)=e^{iz^2}$

取辅助闭路(1)三角形闭路 见课本

取辅助闭路(2)扇形闭路$C=\widehat{OA}+C_R+\widehat{BO}$

$$\int_{\widehat{OA}}+\int_{C_R}+\int_{\widehat{BO}}=0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{iR^2e^{i2\theta}}Rie^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{ir^2e^{\frac{\pi i}{2}}}e^{\frac{\pi i}{4}}dr=0$$

$$\int_R^0 e^{ir^2e^{\frac{\pi i}{2}}}e^{\frac{\pi i}{4}}dr=-e^{\frac{\pi i}{4}}\int_0^R e^{-r^2}dr\to -e^{\frac{\pi i}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}dr=-e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{iR^2e^{i2\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$$

$$\int_0^{+\infty}e^{ix^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

还可取辅助函数$f(z)=e^{-z^2}$

取辅助闭路为扇形闭路$C=\widehat{OA}+C_R+\widehat{BO}$

$$\int_0^R e^{-x^2}dx+\int_{C_R}+\int_R^0 e^{-r^2e^{\frac{\pi i}{2}}}e^{\frac{\pi i}{4}}dr=0$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx-e^{\frac{\pi i}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-ir^2}dr=0$$

例 $I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos\ bxdx\quad (a>0)$

解$u=\sqrt{a}x, t=\dfrac{b}{2\sqrt{a}}, t^2=\dfrac{b^2}{4a}$

$I=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\cos\dfrac{b}{\sqrt{a}}u\,du=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2txdx$

取辅助函数$f(z)=e^{-z^2}$

取辅助闭路为矩形

$$\int_l f(z)dz=\int_{-R}^{R} e^{-(x+ti)^2}dx=-e^{t^2}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cos 2txdx$$

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\to\sqrt{\pi}$$

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos\ bxdx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad (a>0)$$

例　$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$

例　$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \quad (0<a<1)$

5.2.6 多值函数的积分

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx$

解 作辅助函数$f(z)=\frac{lnz}{(1+z^2)^2}$

(2)取辅助闭路$C=[-R,-r]+C_r+[r,R]+C_R$,由留数定理

$$\int_{-R}^{-r}f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_r^R\frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi iRes[\frac{lnz}{(1+z^2)^2},i]$$

$$Res[\frac{lnz}{(1+z^2)^2},i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[f(z)(z-i)^2]=\frac{d}{dz}\frac{lnz}{(z+i)^2}|_{z=i}=\frac{\pi+2i}{8}$$

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)dz=0 \quad ,\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$$

$z\in[-R,-r],\quad z=xe^{i\pi},(x>0)$

$lnz=lnx+i\pi,\quad dz=-dx$

$$\int_{-R}^{-r}f(z)dz=\int_R^r\frac{lnx+i\pi}{(1+x^2)^2}(-dx)=\int_r^R\frac{lnx+i\pi}{(1+x^2)^2}dx$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{lnx+i\pi}{(1+x^2)^2}dx=2\pi i\frac{\pi+2i}{8}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\pi}{4}$$

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x}dx \quad (-1<p<0)$

5.3 辐角原理

用于解决零点分布问题

定理 1 设a,b分别是$f(z)$的 m 级零点和 n 级极点，则

a,b都是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的 1 级极点，且

$$Res[\frac{f'(z)}{f(z)},a]=m, \qquad Res[\frac{f'(z)}{f(z)},b]=-n$$

证 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

$$Res[\frac{f'(z)}{f(z)},a]=m$$

$$f(z)=(z-b)^{-n}\psi(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

$$Res[\frac{f'(z)}{f(z)},b]=-n$$

定理 2 设$f(z)$在闭路 C 上解析且不为零, 在 C 的内部除去有限个极点外也解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$$

证 零点$a_1,a_2,\cdots,a_n$,级数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$$Res[\frac{f'(z)}{f(z)},a_k]=\alpha_k$$

极点$b_1,b_2,\cdots,b_m$,级数$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

$$Res[\frac{f'(z)}{f(z)},b_k]=-\beta_k$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-\sum_{k=1}^{m}\beta_k=N-P$$

辐角变化 $\theta = arg\beta - arg\alpha$, 记作$\Delta_l argz$

考虑积分 $\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$, $\oint_C \frac{2}{z}dz = 4\pi i$

若设$w = z^2$, $\oint_C \frac{2z}{z^2}dz = \oint_C \frac{1}{w}dw = 2\pi i, ?$

设$w = \rho(\theta)e^{i\theta}$, $dw = d\rho e^{i\theta} + \rho i e^{i\theta}d\theta$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{1}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}(\oint_l \frac{d\rho}{\rho} + i\oint_l d\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_l d\theta = \frac{1}{2\pi}\Delta_l argw = \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dLnf(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\{ln|f(z)| + iArgf(z)\} = \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$$

定理 3(辐角原理) $N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$

定理 4(Rouché 定理) 设$f(z), \varphi(z)$在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有
不等式 $|f(z)| > |\varphi(z)|$
则在 C 内部$f(z)$和$f(z) + \varphi(z)$有相同的零点数

证 $\frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C arg[f(z) + \varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z) + \frac{1}{2\pi}\Delta_C arg(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)})$$

$$|1 - (1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)})| = |\frac{\varphi(z)}{f(z)}| < 1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C arg(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}) = 0$$

例　证明$z^7 - z^3 + 12 = 0$的零点都在$1 \leq |z| \leq 2$

例　方程$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$有 n 个复根

例　设$\varphi(z)$在$C : |z| = 1$上及其内部解析，且在 C 上有$|\varphi(z)| < 1$,
证明在 C 内只有一个点z_0使得$\varphi(z_0) = z_0$