数学分析习题课讲义上册解析

第一版 (不定期更新)

作者：Xu Shun

组织：公众号：顺数人

时间：July 30, 2020

目录

第一版序言

本答案是由公众号【顺数人】的创建者徐大顺及其他的几位学弟学妹，还有两位热心网友的帮助下共同编写而成的。其中这几位学弟学妹贡献本答案的绝大部分手写版答案，编辑工作由徐大顺完成。部分答案来源于网上公开的资料，在此对这些公开资料的作者表示感谢，是他们的贡献让本答案制作时间缩短。即便如此还有十几道题目没有做出来。这时候热心网友的力量体现出来了，他们帮助我解决这些题目。在此也表达对他们的感谢。

总体来说，本答案从六月初开始编写，到八月一号正式发布第一版，用时大概两个月的时间。由于时间紧任务重，所以答案中肯定会有不少的笔误甚至是错误，也请大家谅解。由于本答案是免费发布，所以不存在专门的人员去做勘误，只能做到不定期更新版本，我们的反馈 qq 群为：630057150，此为付费群，筛去一些无关人员。

另外我们也接受捐助，仅支持微信支付和支付宝支付：

最后请大家关注我们的公众号【顺数人】，也希望每一位数学人都能学有所成，我们再会！

二零二零年八月一号

——大顺致上

第 1 章 引论

1.1 关于习题课教案的组织

1.2 书中常用记号

1.3 几个常用的初等不等式

1.3.1 练习题

1. (1) 当 $h=-1$ 时显知成立. 当 $-2\le h<-1$ 时, 令 $f(h)=(1+h)^n-nh-1$ 则 $f'(h)=n\left[(1+h)^n-1\right]\le 0$, 故 $f(h)$ 在 [-2,1) 上递减, $f(h)>f(-1)=n-1\ge 0$
(2) 同 (1). 推广形式为 $(1+h)^{\mathrm{n}}\ge C_n^k h^k(h\ge 0,1\le k\le n)$
(3) 当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设当 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时, 因为 a_i 同号, 若 a_i 均正, 那么
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)&=\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)+a_{k+1}\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)\\&\ge 1+\sum_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)\\&\ge 1+\sum_{i=1}^{k+1}a_i\end{aligned}$$
同理可证其他情形。

2. (1) 设 $a_n=\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, 则
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>n$$
故
$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}>n!$$
(2) (法一) 同 (1)
(法二) 由 $(n!)^2=(n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\cdots(1\cdot n)\le\left(\dfrac{(n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\cdots(1\cdot n)}{n}\right)^n$ 又
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)\\=&n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\=&\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\=&\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

故 $(n!)^2 \leq \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$

(3) 第二个更优, 因为 n 较大时, $\left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$ 更靠近 $n!$

(4) 由均值不等式知, $\frac{\sum_{k=1}^n k^r}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^r}$ 整理即得.

3. 由平均值不等式知

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_n}}$$

整理即得.

4. 证明由均值不等式

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

即

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

对于

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

两边平方并化简, 得

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

此即排序不等式, 即证. n 个非负数的情况证明完全类似.

5. (1) 由

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

得

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$$

即

$$|a-b| \geq |a|-|b|$$

同理可证另一个式子。

(2) 由三点不等式

$$|a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \leq |a_1| - \left|\sum_{k=2}^n a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^n a_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

左边不可为

$$\left||a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|\right|$$

例如取 $a_1=0, a_2=1, a_3=-2, n=3$

(3) 当 $|a+b|=0$ 时, 显然成立. 当 $|a+b| \neq 0$ 时 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

(4) $|(a+b)^n - a^n| = \left|C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n\right| \leq \left|C_n^1 a^{n-1} b\right| + \cdots + \left|C_n^{n-1} a b^{n-1}\right| + |b^n| = (|a|+|b|)^n - |a|$

6. (1) $n=1$ 时, 显然成立. 假设当 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时

$\left(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_{k+1}^2\right) \geq \left(a_1^2+\cdots+a_k^2\right)\left(b_1^2+\ \ldots+b_k^2\right)+a_{k+1}^2\left(b_1^2+\cdots+b_k^2\right)$
$+b_{k+1}^2\left(a_1^2+\cdots+a_k^2\right)+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \geq \left(a_1 b_1+\cdots+a_k b_k\right)^2+a_{k+1}^2\left(b_1^2+\right.$
$\left.\cdots+b_k^2\right)+b_{k+1}^2\left(a_1^2+\cdots+a_k^2\right)+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$

欲证

$$\begin{aligned}&\left(a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_{k+1}^2\right)\\ &\geq \left(a_1 b_1+\cdots+a_{k+1} b_{k+1}\right)^2\end{aligned}$$

另需证

$$\left(a_1 b_1+\cdots+a_k b_k\right)^2+a_{k+1}^2\left(b_1^2+\cdots+b_k^2\right)+b_{k+1}^2\left(a_1^2+\cdots+a_k^2\right)+a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \geq \left(a_1 b_1+\cdots+a_{k+1} b_{k+1}\right)^2$$

即

$$\left(a_1 b_{k+1}-a_{k+1} b_1\right)^2+\cdots+\left(a_k b_{k+1}-a_{k+1} b_k\right)^2 \geq 0$$

显然成立.

(2) 利用完全平方式非负性即得。

(3) $\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots b_n^2\right)=0$ 时, 显然成立.

$\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots b_n^2\right) \neq 0$ 时. 由提示知

$$\frac{|a_k|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}} \frac{|b_k|}{\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}} \leq \frac{\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\right)^2+\left(\frac{b_k}{\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}}\right)^2}{2}$$

令 $k=1,2,\cdots,n$, 将所有的式子加起来奏虎两边平方并化简即得.

(4) 按照提示, 化简即得, 注意平方差公式的运用.

7. 证明原不等式等价于

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n\left(1-x_i\right)} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n}{\left[\sum_{i=1}^n\left(1-x_i\right)\right]^n}$$

$n=2$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{\left(1-x_1+1-x_2\right)^2}-\frac{x_1 x_2}{\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)}\\ =&\frac{\left(x_1-x_2\right)^2\left(1-x_1-x_2\right)}{\left(1-x_1+1-x_2\right)^2\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)}\\ \geq&\ 0\end{aligned}$$

$n=2^2$ 时

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_1x_2x_3x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)}\\
\leq &\left(\frac{x_1+x_2}{2-x_1-x_2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2-x_3-x_4}\right)^2\\
= &\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2\left(\frac{\frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_3+x_4}{2}}\right)^2\\
\leq &\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}+1-\frac{x_3+x_4}{2}}\right)^4\\
= &\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{1-x_1+1-x_2+1-x_3+1-x_4}\right)^4
\end{aligned}
$$

类似地, $n=2^k\ (\forall k\in\mathbb{N}_+)$ 时, 不等式成立. 此即向前部分. 由原书上平均值不等式“向后”证明部分, 我们可以知道

$$
\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n-1}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)
$$

记 $M=\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{n-1}$. 当不等式对于某个 $n>2$ 成立时, 下证对于 $n-1$ 成立

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{(1-x_1)+\cdots+(1-x_n)}\right)^n\\
= &\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+M}{(1-x_1)+\cdots+(1-x_n)+(1-M)}\right)^n\\
\geq &\frac{x_1\cdots x_n \quad M}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)\ 1-M}
\end{aligned}
$$

注意到,

$$
\frac{M}{1-M}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{(1-x_1)+\cdots+(1-x_n)}
$$

即证, 对于 $n-1$ 的情况不等式成立. 合并以上向前向后两部分的证明, 可见不等式对于每个正整数 n 成立。

8. 由柯西不等式

$$
\left(a^2+c^2+g^2+t^2\right)(1+1+1+1)\geq(a+c+g+t)^2
$$

即

$$
a^2+c^2+g^2+t^2\geq\frac{1}{4}
$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a=c=g=t=\dfrac{1}{4}$

1.4 逻辑符号与对偶法则

1.4.1 练习题

(1)$\forall M\in\mathbb{R},\exists a_0\in A, s.t. a_0>M$

(2)$\exists a_0\in A, s.t. a_0<b$

(3) $\exists a<c<d<b$, s.t. $f(c)>f(d)$

(4)$\exists a < c < d < e < b$, s.t. $f(c) < f(d), f(e) < f(d)$ 或 $f(c) > f(d), f(e) > f(d)$

(5)$\exists a \in A$ 但 $a \notin B$

(6) $A - B = \varnothing$

(7)$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$, s.t. $|x_n| \geq \varepsilon_0$

(8)$\exists M_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$, s.t. $x_n \leq M_0$

第 2 章 数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 练习题

1. (1) 由 $\left|\dfrac{3n^2}{n^2-4}-3\right|=\dfrac{12}{|n^2-4|}$ 可得

   (2) 由 $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}$ 可得

   (3) 由 $1\le(1+n)^{\frac{1}{n}}\le 2^{\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}$ 可得

   (4)$\exists k>a$，则 $\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a^k}{k!}\left(\dfrac{a}{k}\right)^{n-k}$，可得。

2. 若 $a=0,\forall\varepsilon>0,\exists N,n>N,s.t.a_n<\varepsilon^2$，可得 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$；若 $a\neq0$，由 $\sqrt{a_n}-\sqrt{a}=\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}$ 可得。

3. $||a_n|-|a||\le|a_n-a|$, 故由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之不成立，考虑 $a_n=(-1)^n$.

4. (1) 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^m=a^m$ 即可。

   (2) 由 $b^{a_n}-b^a=b^a\left(b^{a_n-a}-1\right)$ 可得只需证 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 的情况即证 $\lim\limits_{n\to+\infty}b^{a_n}=1$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 时

   当 $b>1$ 时 $\forall\varepsilon>0,\exists n>N$ 时 $\log_b(1-\varepsilon)<a_n<\log_b(1+\varepsilon)$,

$$\Rightarrow\quad 1-\varepsilon<b^{a_n}<1+\varepsilon\Rightarrow|b^{a_n}-1|<\varepsilon$$

   $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}b^{a_n}=1$

   当 $b=1$ 时显然

   当 $b<1$ 时由 $b^{a_n}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{a_n}}$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}b^{a_n}=1$

   (3) 由 $\log_b a_n-\log_b a=\log_b\dfrac{a_n}{a}$ 得, 只需证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\log_b a_n=0$ 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ 时, 当 $b>1$ 时，$\forall\varepsilon>0\quad\exists N,n>N$ 时, 有 $b^{-\varepsilon}<a_n<b^{\varepsilon}\Rightarrow-\varepsilon<\log_b a_n<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\log_b a_n=0$ 当 $0<b<1$ 时 $\log_b a_n=-\log_{\frac{1}{b}}a_n$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\log_b a_n=0$

   (4)$a_n^b=e^{b\log a_n}$，由 (2)(3) 问可得。

   (5) 作和差化积

$$\sin a_n-\sin a=2\sin\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\cos\left(\frac{a_n+a}{2}\right)$$

   便有

$$\begin{aligned}|\sin a_n-\sin a|&\leqslant2\left|\sin\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|\\&\leqslant2\left|\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|=|a_n-a|\end{aligned}$$

   即得结论。

5. $a^\varepsilon>1$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 所以当 n 充分大时 $\sqrt[n]{n}<a^\varepsilon$, 取对数得 $\dfrac{\log_a n}{n}<\varepsilon$

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 练习题

1. 必要性显然，下证充分性.

   设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = A$. 则对 $\forall\varepsilon > 0, \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}_+, \forall k > K_1, \forall k > K_2$ 成立

   $$|a_{2k} - A| < \varepsilon, |a_{2k-1} - A| < \varepsilon$$

   令 $N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$, 则对于 $\forall n > N$ 和上述 ε, 成立

   $$|a_n - A| < \varepsilon$$

   即 $\lim\limits_{n\to\infty} = A$

2. (1) 设 $M = \max\{a_1, \cdots a_n\}$ 则 $\sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_p^n} \leq \sqrt[n]{pM^n}$ 只需注意 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

   (2) $\dfrac{2n}{\sqrt{(n+1)^2}} < x_n < \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$

   (3) $1 < \left(1 + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < n^{\frac{1}{n}}$

   (4) 由正数列 $\{a_n\}$ 收敛于正值知, 存在正数 m, M, 使得 $m < a_n < M$. 故 $\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}$

3. (1)

   $$\begin{aligned}
   &\lim_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)\\
   =&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\\
   =&\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\\
   =&\frac{1}{1-x}
   \end{aligned}$$

   (2)

   $$\begin{aligned}
   &\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
   =&\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 1}{2^2}\frac{4\cdot 2}{3^2}\cdots\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\\
   =&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{2}(n-1)!}{(n!)^2}\\
   =&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\\
   =&\frac{1}{2}
   \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{1+\cdots+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{6}(n-1)!}{n!\frac{(n+1)!}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

(4) 见（5）

(5) 只需注意 $\dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}=\dfrac{1}{\nu}\left[\dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)}\right]$

4.

$$S_n-aS_n=a+3a^2+\cdots(2n-1)a^n-\left(a^2+3a^3+\cdots\cdot(2n-3)a^n+\right.$$
$$\left.(2n-1)a^{n+1}\right)=a+2\left(a^2+\cdots a^n\right)-(n-1)a^{n+1}$$
$$=2\left(a+a^2+\cdots a^n\right)-a-(2n-1)a^{n+1}$$
$$=\frac{2a\left(1-a^n\right)}{1-a}-a-(2n-1)a^{n+1}$$
$$\Rightarrow\quad(1-a)\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{2a}{1-a}-a=\frac{a(1+a)}{1-a}$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}$$

5. 依题意, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$ 取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$, 则 $\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$ 成立 $|x_n-A|<\dfrac{A}{2}$, 即 $x_n>\dfrac{A}{2}$. 令 $m=\min\left\{x_1,\cdots,x_N,\dfrac{A}{2}\right\}>0$, 则 m 即为数列的正下界

不一定有最小数的一个例子: $x_n=1+\dfrac{1}{n}$

6. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 知, 对 $M=a_1+1,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$, 成立 $a_n>M>a_1$, 则 $a_1,\cdots,a_N$ 中最小者即为 $\{a_n\}$ 的最小数.

7. 不妨设无界数列 $\{a_n\}$ 无上界, 即 $\forall M\in\mathbb{R},\exists n_k\in\mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_k}>M$ 取 $M=1$, 则 $\exists n_1\in\mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_1}>1$ 取 $M=\max\{a_{n_1},2\}$, 则 $\exists n_2\in\mathbb{N}_+$ 且 $n_2>n_1$, 使得 $a_{n_2}>a_{n_1}$ 且 $a_{n_2}>2$ 以此类推, 可以构造数列 $\{a_{n_k}\}$ 使 $a_{n_k}>k$, 即 a_{n_k} 为无穷大量.

8. 由于 $\{\sin 2n\}$ 极限不存在, 又 $\sin 2n=\dfrac{2\sin n\cos n}{\sin^2 n+\cos^2 n}$

$$\Rightarrow\sin 2n=\frac{2\tan n}{1+\tan^2 n}$$

若在 $\{\tan n\}$ 极限存在 $\Rightarrow\{\sin 2n\}$ 极限存在, 矛盾故 $\{\tan n\}$ 极限不存在

9. $p<1$ 时, $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}$, 故

$$S_n>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

我们知道调和数列是发散的, 所以 S_n 也是发散的。

2.3 单调数列

2.3.1 练习题

1. 不妨设 $x_1\geq 0$ (1) 若 $\{x_n\}$ 单调递增或 $\{x_n\}$ 单调递减且 x_n 非负, 则 $\{x_n\}$ 从第一项开始单调.
   (2) 若 $\{x_n\}$ 单调递减且存在某一项 $x_N<0$, 则 $\{|x_n|\}$ 从 $|x_N|$ 开始单调反之不成立.
   反例:
$$x_n=\begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ -n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$
2. 假设 $\{a_n\}$ 无上界. 则
$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$
   又
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$
   故
$$\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$$
   这与 $\{b_n\}$ 单调减少矛盾. 同理可证 $\{b_n\}$ 收敛又
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$
   故
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$$
3. 只证前半句, 后半句同理。设数列为 $\{x_n\}$, 其极限为 A. 反设存在某一项 $x_{n_0}>A$, 因为 $\{x_n\}$ 单调增加, 所以对 $\forall n\geq n_0$ 有 $x_n\geq A$, 令 $\varepsilon_0=x_{n_0}-A$, 则对任意给定的正整数 N, 存在 $n>\max\{N,n_0\}$, 使得
$$|x_n-A|\geq\varepsilon_0$$
   这与 $\lim_{n\to\infty} x_n=A$ 矛盾.
4. 依题意得
$$x_n=\frac{n+1}{2n+1}x_{n-1}$$
   故 n 充分大时 $x_n<x_{n-1}$, 即 $\{x_n\}$ 递减. 又 $x_n>0$, 故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设为 A 对 $x_n=\frac{n+1}{2n+1}x_{n-1}$ 两边取极限, 得 $A=0$, 即 $\{x_n\}$ 极限为 0.
5. 同 4

6. 显然 $\{S_n\}$ 单调递增. 记 $\dfrac{1}{2^{p-1}}=r$, 则 $0<r<1$
由
$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}=r$$
$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=r^2$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{2^{kp}}+\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1}-1)^p}<\frac{2^k}{2^{kp}}=r^k$$
可知
$$S_n\le S_{2^n-1}<1+r+\cdots+r^{n-1}<\frac{1}{1-r}$$
故由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 收敛.

7. 由
$$x_n=\sin x_{n-1},0<x_n<\frac{\pi}{2}$$
知
$$0<x_n<\frac{\pi}{2}$$
故
$$x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}$$
即 $\{x_n\}$ 单调递减, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设为 $A(0\le A\le 1)$ 对 $x_n=\sin x_{n-1}$ 两边取极限, 有
$$A=\sin A$$
因为 $A=0$ 时上式成立, 故由数列极限唯一性知 $\{x_n\}$ 极限为 0.

8. 由提示可知
$$0<a_n<\frac{2n-1}{(2n)^2}$$
取极限夹逼即得。

9. 证明依题意
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}>1$$
故 $\{a_n\}$ 单调递增. 又
$$a_n=2\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right)\frac{2n}{2n+1}<2$$
故由单调有界准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

10. (1) 单调递减
(2) 不单调因为若 $\{\sin n\}$ 单调且 $\{\sin n\}$ 有界故 $\{\sin n\}$ 极限存在，矛盾

(3) 考虑后项与前项的比值:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{n-1} &= \frac{(n!)^{(n-1)/n}}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!}(n!)^{-1/n} \\ &= \frac{n}{(n!)^{1/n}} \geqslant \frac{n}{n(n+1)/(2n)} = \frac{2n}{n+1} > 1\end{aligned}$$

其中的不等号使用了 n 元的均值不等式，故可知 $\{a_n\}$ 单调递增.

11. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增, 且有一子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛, 则 $\{a_{k_n}\}$ 有界, 设为 A, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 总有 $n \leqslant k_n$, 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 则有

$$a_n < a_{k_n} \leqslant A$$

这说明 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

12. 先证 $x_n > x_{n+1}$ 若 $x_n \leq x_{n+1}$ 可得

$$1 = x_n + \cdots x_n^n \leqslant x_{n+1} + \cdots x_{n+1}^n < x_{n+1} + \cdots x_{n+1}^{n+1} = 1$$

$\Rightarrow 1 < 1$ 矛盾

故 $x_n > x_{n+1}$ 且 $\{x_n\}$ 有界故 $\{x_n\}$ 极限存在又 $x_n < 1$ 且 $\dfrac{x_n\left(1-x_n^n\right)}{1-x_n} = 1 \Rightarrow x_n = \dfrac{1-x_n}{1-x_n^n}$

令 $n \to +\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.4.1 练习题

1. $\forall M > 0, \exists N, n > N$ 时 $a_n > M$ 则

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \frac{n-N}{n}M + \frac{a_1 + \cdots + a_N}{n}$$

令 $n \to +\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$

2. 令 $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 由 $\{a_n\}$ 的单调增性质知 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 故

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \frac{na_n}{n} = a_n$$

另一方面，令 n 固定, $m > n$, 有

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m}{m} \\ &= \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_m}{m} \\ &\geqslant \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{1}{m}\left(a_n + \cdots + a_n\right) = \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{m-n}{m}a_n\end{aligned}$$

令 $m \to +\infty$, 得 $a \geqslant 0 + a_n = a_n$. 于是

$$\sigma_n \leqslant a_n \leqslant a$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$

3. 我们有
$$\frac{a_1+\cdots+a_{2n}}{2n}=\frac{1}{2}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}+\frac{1}{2}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}$$
利用 Stolz 公式可得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=b$$
所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_{2n}}{2n}=\frac{a+b}{2}$, 同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_{2n-1}}{2n-1}=\frac{a+b}{2}$, 综上可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{a+b}{2}$
4. Stolz 定理可得
5. 若 $A=0$, 则有
$$0\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
已知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=A$$
所以由夹逼定理, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=0=A$ 若 $A\neq 0$, 则对任意 $0<\varepsilon<A$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使凡是 $n>N$, 都有
$$A-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<A+\frac{\varepsilon}{2}$$
则对 $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$ 进行放缩, 有
$$(a_1a_2\cdots a_N)^{1/n}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(n-N)/n}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
可知左侧极限为 $A-\varepsilon/2$, 右侧极限为 A, 故存在 $N_0\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N_0$ 时
$$(a_1a_2\cdots a_N)^{1/n}\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(n-N)/n}>A-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=A-\varepsilon$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<A+\varepsilon$$
故取 $N'=\max(N,N_0)$, 则当 $n>N'$ 时, 有
$$A-\varepsilon<(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}<A+\varepsilon$$
这就说明了 $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\to A(n\to\infty)$
6. 令 $a_0=1$, 记 $b_n=a_n/a_{n-1}(n=1,2,3,\ldots)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(b_1b_2\cdots b_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}b_n=l$$
7. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$ 知
$$\lim_{n\to+\infty}(x_{2n}-x_{2n-2})=0,\quad\lim_{n\to+\infty}(x_{2n+1}-x_{2n-1})=0$$
有
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_2+(x_4-x_2)+\cdots+(x_{2n}-x_{2n-2})}{n}=\lim_{n\to+\infty}(x_{2n}-x_{2n-2})=0$$
即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{2n}}{n}=0$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{2n}}{2n}=0$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{2n+1}}{2n+1}=0$, 合起来就是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0$

8. 由上题可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=0-0=0$$

9. 有如下结论：设 $0<x_1<1/q$, 其中 $0<q\leqslant 1$ 并且 $x_{n+1}=x_n\left(1-qx_n\right),n\in\mathbb{N}^*$, 则

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1/q$$

取 $q=1$，即为本题所要证明的。下面我们证明上述结论。

用数学归纳法说明 $0<x_n<1/q.n=1$ 时, 有 $0<x_1<1/q$, 假设 $0<x_{n-1}<1/q$, 则 $x_n=x_{n-1}\left(1-qx_{n-1}\right)<x_{n-1}<q$, 同时可以知道 $x_n>0$, 则 $0<x_n<1/q$ 成立, 则同时有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=1-qx_{n-1}<1\qquad(*)$$

即 $\{x_n\}$ 严格递减, 而 $\{x_n\}$ 又有下界 0, 故设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 对递推式两侧同时令 $n\to\infty$, 可以得到

$$x=x(1-qx)\Rightarrow x=0$$

则 $\{x_n\}$ 严格递减趋于 0, 那么对式 $(*)$ 两侧同时令 $n\to\infty$ 就可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=1$$

又因为 $\{1/x_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 则要求 nx_n 极限即求 $n/\left(1/x_n\right)$ 的极限, 可以使用 Stolz 定理, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{qx_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{qx_{n-1}}=\frac{1}{q}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1/q$

10. 令 $\alpha=a,\beta=b$, 先对要求的式子做一下处理:

$$\begin{aligned}0&\leqslant\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-ab\right|\\&\leqslant\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-a\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right|+\left|a\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-ab\right|(*)\end{aligned}$$

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-b)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|a\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-ab\right|=0$$

再考虑不等式 (*) 最后一部分加号前的一项, 记为 c_n, 因为数列 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 即存在 $M\geqslant 0$, 使得 $|b_n|\leqslant M$, 则

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{\left|b_1\left(a_n-a\right)+b_2\left(a_{n-1}-a\right)+\cdots+b_n\left(a_1-a\right)\right|}{n}\\&\leqslant M\frac{|a_n-a|+|a_{n-1}-a|+\cdots+|a_1-a|}{n}\end{aligned}$$

因为 $\{a_n-a\}$ 为无穷小, 则可知 $\{|a_n-a|\}$ 为无穷小, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n-a|+|a_{n-1}-a|+\cdots+|a_1-a|}{n}=0$$

故有 $c_n \to 0(n \to \infty)$, 则对不等式 (*) 使用夹逼定理可知 $\left|\frac{a_1b_n + a_2b_n - 1 + \cdots + a_nb_1}{n} - ab\right|$ 是无穷小, 得证。

2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

2.5.1 练习题

1. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\cdot\frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{e}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

(3) $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2} = e^2$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = +\infty$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = 1$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}} = e$

2. 令 $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\right\}, \{b_n\} = \left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}\right\}$

因为

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\cdot(1+k/n)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格递增. 因为

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k} < \left(\frac{1+(n+k)\cdot\frac{n}{n+k}}{n+k+1}\right)^{n+k+1} = \left(\frac{n+1}{n+k+1}\right)^{n+k+1}$$

所以 $\{b_n\}$ 严格递减. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^k$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k = \mathrm{e}^k$$

所以有 $\{a_n\}$ 严格递增趋于 e^k, $\{b_n\}$ 严格递减趋于 e^k, 则有

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \mathrm{e}^k < \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}$$

对不等式取对数有

$$n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < k < (n+k)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

再同时取倒数及移项可以得到

$$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$$

即题中不等式得证.

3. 设

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

则

$$\ln a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

又

$$\begin{gathered}\frac{1}{n^2+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}\\ \frac{2}{n^2+1}<\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)<\frac{2}{n^2}\\ \cdots\\ \frac{n}{n^2+1}<\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{n}{n^2}\end{gathered}$$

将所有不等式相加，可以得到

$$\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+1\right)}<\ln a_n<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

由夹逼定理可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=1/2$, 也即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\mathrm{e}}$

4.

$$\left(1+\frac{1}{[P_n]+1}\right)^{[P_n]}\leq\left(1+\frac{1}{P_n}\right)^{P_n}\leq\left(1+\frac{1}{[P_n]}\right)^{[P_n]+1}$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{P_n}\right)^{P_n}=e$

5. 由第 7 题

$$\begin{gathered}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{e^n}\\ \Rightarrow\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{e^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(1+n)\\ \Rightarrow\frac{n!}{n^n}\cdot 2^n<\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\end{gathered}$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}=0$

6. 记

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\quad b_n=\ln n$$

显然 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{\ln(1+1/n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln(1+1/n)^{n+1}\right)^{-1}=1$$

所以由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$

7. 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时

$$\frac{2}{\mathrm{e}}<1<\frac{4}{e}$$

成立，设不等式对 $n-1$ 成立, 即

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}<(n-1)!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}$$

然后考虑左侧不等式:

$$\begin{aligned}(n-1)!\cdot n &> \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\cdot n=\frac{n^{n}}{\mathrm{e}^{n-1}}=\frac{n^{n}}{\mathrm{e}^{n}}\cdot \mathrm{e}\\ &> \frac{n^{n}}{\mathrm{e}^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n}\end{aligned}$$

再考虑右侧不等式:

$$\begin{aligned}(n-1)!\cdot n &< \mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\cdot n=\frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}}=\frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}}\cdot \mathrm{e}\\ &< \frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}}\cdot\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

则不等式对 n 也成立，归纳结束.

8. 证明先证明后一部分. 先考虑 $\{v_n\}=\{(1-1/n)^n\}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n$, 易得 $\{v_n\}$ 单调递增, 又因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

所以有

$$\frac{1}{4}<v_2<v_3<\cdots<v_n<\cdots\frac{1}{\mathrm{e}}$$

则要证右侧不等式就是证

$$s_{n-1}=1^1+2^2+\cdots+(n-1)^{n-1}<\frac{2n^n}{n-1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{n^n}{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=2(n-1)^{n-1}$$

又因为

$$\begin{aligned}s_{n-1}&=1^1+2^2+\cdots+(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}\\ &<(n-2)(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}<2(n-1)^{n-1}\end{aligned}$$

则右侧不等式成立。再证明前一部分，用同样的处理方法, 只需证明

$$\begin{aligned}\frac{n^n}{4(n-1)}<\frac{n^n}{n-1}\cdot v_n<\frac{n^n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}&=(n-1)^{n-1}\\ &<1^1+2^2+\cdots+(n-1)^{n-1}=s_{n-1}\end{aligned}$$

而 $(n-1)^{n-1}<s_{n-1}$ 是显然的. 故不等式得证.

9. $$\begin{aligned}P_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{a_k}\\ &=\frac{a_1+1}{a_1}\frac{a_2+1}{a_2}\cdots\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{a_1+1}{a_2}\frac{a_2+1}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}+1}{a_n}\frac{a_n+1}{a_1}\end{aligned}$$

由题中条件 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+1$

$$P_n=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\frac{a_n+1}{1}=\frac{a_n+1}{n!}$$

再由

$$P_n-P_{n-1}=\frac{a_n+1}{n!}-\frac{a_{n-1}+1}{(n-1)!}=\frac{a_n+1-n\left(a_{n-1}+1\right)}{n!}=\frac{1}{n!}$$

得递推式

$$\begin{aligned}P_n &= P_{n-1} + \frac{1}{n!} = P_n + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\\ &= P_1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

所以得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

2.6 由迭代生成的数列

2.6.1 练习题

1. (1)$x_2 > x_1$ 假设 $x_n > x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} > \sqrt{a+x_{n-1}} = x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递减

   $x_1 < \frac{1}{2} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}$ 假设 $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}$

   $$\begin{aligned}x_{n+1} &= \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 设为 x 则 $x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{a+\frac{1}{4}}\text{ 舍去}\right)$

   故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}$

   (2)

   $$x_{n+1} = a^{\frac{1}{2}} x_n^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}} \cdot x_{n-1}^{\frac{1}{2^2}} \cdots = a^{\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2^n}} \cdot x_1^{\frac{1}{2^n}}$$

   $\Rightarrow x_{n+1} = a^{1-\frac{1}{2^n}} \cdot x_1^{\frac{1}{2^n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

2. 归纳可知 $0 < b_n < \frac{1}{A}$ 又 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 - Ab_n$ 故 $\{b_n\}$ 单调递增且有界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在

   设为 b 则 $1 = 2 - Ab \Rightarrow b = \frac{1}{A}$

3. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{b}{4} > 1 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow x_4 < 0$ 归纳可知 $x_n < 0 (n \geq 3) \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = b\left(1-x_n\right) > b \quad (n \geq 3)$

   $$\begin{aligned}&\Rightarrow x_{n+1} < bx_n \Rightarrow x_{n+1} < \cdots < b^{n-2}x_3\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\end{aligned}$$

4. 当 $|b| \leq 1$ 时 $\{x_n\}$ 收敛 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^2+1\right) \geqslant x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单增 $|b| \leq 1$ 归纳可知 $x_n \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

   若 $|b| > 1$ 时 $x_2 = \frac{1+b^2}{2} > 1$ 若 $\{x_n\}$ 收敛,$\{x_n\}$ 单增且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ 又 $x_2 \leq x_n \Rightarrow x_2 \leq 1$ 矛盾

5. (i) 若 $b = 1$, 则 $x_n = x_n + 1 = \cdots = x_0 + n$. 这说明 $\{x_n\}$ 是发散列 ; 若 $b =-1$, 则

$x_{2n+1}-x_{2n-1}=0=x_{2n}-x_{2n-2}(n\in\mathbf{N})$. 这说明当 $x_0=x_1$ 即 $x_1=-x_0+1$ 或 $x_0=1/2$ 时 , $\{x_n\}$ 收敛

(ii) 若 $b\neq\pm1$, 则由题设知 $x_{n+1}-x_n=b^{n-1}(x_2-x_1)$. 这说明 $x_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)+x_1=(x_2-x_1)\sum\limits_{k=1}^{n}b^{k-1}+a_1$. 注意到 $(a_2-a_1)=(b-1)a_1+1$. 故有

$$x_{n+1}=(x_2-x_1)(1-b^n)/(1-b)+x_1=b^n\left(x_1+\frac{1}{b-1}\right)-\frac{1}{b-1}$$

由此知, 若 $|b|>1$，则 $\{x_n\}$ 发散; 若 $|b|<1$, 则 $\{x_n\}$ 收敛

6. (1) 存在例如 $a=b=1$

(2) 存在例如 $a=0,b=1$

(3) 存在例如 $a=1,b=0$

(4) 存在例如 $a=2,b=0$ 时,$x_n=2^{n-1}x_1$ 则 x_n 收敛 $\Leftrightarrow x_1=0$

7. 由题设知 $x_{n+1}+1/x_n<2\leqslant x_n+1/x_n$, 这说明 $\{x_n\}$ 是有界递减列 , $\{x_n\}$ 收敛. 进一步, 若令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $2\leqslant a+1/a\leqslant 2$, 即 $a=1$

8. 由

$$\begin{aligned}x_1-\sqrt{a}&=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_0}\left(x_0^2+a-2x_0\sqrt{a}\right)\\&=\frac{1}{2x_0}\left(x_0-\sqrt{a}\right)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

得

$$0\leqslant x_2-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{a}\right)\frac{\left(x_1-\sqrt{a}\right)}{x_1}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{a}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}&0\leqslant x_n-\sqrt{A}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_{n-1}-\sqrt{A}\right)\leqslant\frac{1}{2^2}\left(x_{n-2}-\sqrt{A}\right)\leqslant\cdots\\&\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\left(x_1-\sqrt{A}\right)\end{aligned}$$

可见 $\lim x_n=\sqrt{A}$.

9.

$$\begin{aligned}x_{n+1}-\sqrt{A}&=\frac{x_n^3+3Ax_n-3x_n^2\sqrt{A}-A^{\frac{3}{2}}}{3x_n^2+A}\\&=\frac{\left(x_n-\sqrt{A}\right)^3}{3x_n^2+A}\end{aligned}$$

若 $x_1\geqslant\sqrt{A}\Rightarrow x_n\geqslant\sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+3A}{3x_n^2+A}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8A}{3x^2+A}\right)\leqslant 1$$

$\Rightarrow\{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{A}$

若 $x_1<\sqrt{A}\Rightarrow 0<x_n<\sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+3A}{3x_n^2+A}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8A}{3x_n^2+A}\right)>1$$

$\Rightarrow\{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{A}$

2.7 对于教学的建议

2.7.1 第一组参考题

1. 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k-1}=a, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=b$，则只需证 $a=b$ 考虑 $\{a_{3k}\}$ 的两个子列 $\{a_{3^k}\}$ 和 $\{a_{6k}\}$，则
$$a=\lim_{k\to+\infty} a_{3^k}=\lim_{k\to+\infty} a_{6k}=b$$
得证
2. $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都单调递增且有界故 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛，由上题可知 $\{a_n\}$ 收敛
3. $a_{n+2}+a_{n+1}-(a_n+a_{n+1})=a_{n+2}-a_{n+1}$ 收敛，可得 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 收敛，$a_n+a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)=2a_n$ 收敛，故 $\{a_n\}$ 收敛
4. 若 $a>1,\exists N$ 当 $n>N$ 时有
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>\frac{1+a}{2}>1$$
可得
$$|a_n|>|a_N|\cdot\left(\frac{1+a}{2}\right)^{n-N}$$
令 $n\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=+\infty$ 矛盾
5. 因为
$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{1+k/n^2-1}{\sqrt{1+k/n^2}+1}=\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+k/n^2}+1}$$
则对 x_n 进行放缩, 有
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)\frac{1}{1+\sqrt{1+k/n^2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}}$$
由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$
6. 设 $p(n)=s$, 对 n 进行质因数分解, 有
$$n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_m^{s_m},\quad s_1+s_2+\cdots+s_m=s$$
因为 2 是最小的素数, 则有 $n\geqslant 2^s$, 同时取对数, 有 $\ln n\geqslant s\ln 2$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s}{n}\leqslant\frac{\ln n}{n\ln 2}=0$$
下面说明 $\{\ln n/n\}$ 是无穷小: 已知 $n/\mathrm{e}^n\to 0(n\to\infty)$, 取 $n=\ln k$, 则有
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=\lim_{\ln k\to\infty}\frac{\ln k}{e^{\ln k}}=0$$
命题得证。
7. 将 $a_0=-(a_1+a_2+\cdots+a_p)$ 代入要求的式子, 可以得到
$$\begin{aligned}&a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\\=&a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})+\cdots+a_p(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})\\=&\frac{a_1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2a_2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{pa_p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

而我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ka_k}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=0$$

且 p 是有限数, 则所求极限为有限个无穷小的和, 也为无穷小, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

8. $\exists\xi\in(n,n+1)$ 使得

$$(1+n)^k-n^k=\frac{k}{\xi^{1-k}}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+n)^k-n^k\right]=0$$

9. (1) 不一定，考虑 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ 可得

$$y_n=n\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=(-1)^n\sqrt{n}$$

故极限不存在

(2)$y_n=nx_n-(n-1)x_{n-1}-x_{n-1}$ 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{nx_n-(x_{n-1}+\cdots+x_0)}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}+\cdots+x_0}{n}\\&=0\end{aligned}$$

10. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=+\infty,\exists N,n>N$ 使得

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\geqslant 2$$

可得

$$|a_n|\geqslant 2^{n-N}\cdot|a_N|$$

令 $n\to+\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=+\infty$ 矛盾

(2) 用反证法, 如果 $\{a_n\}$ 有界, 设 $0<a_n<M$, 其中 $n=1,2,\ldots.$ 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得凡是 $n>N$, 都有

$$a_n<(a_{n+1}+a_{n+2})\,\varepsilon$$

则可以得到下面的关系

$$\begin{aligned}a_{N+1}&<(a_{N+2}+a_{N+3})\,\varepsilon\\&<((a_{N+3}+a_{N+4})+(a_{N+4}+a_{N+5}))\,\varepsilon^2\\&=(a_{N+3}+2a_{N+4}+a_{N+5})\,\varepsilon^2\\&\ \ \vdots\\&<M\varepsilon^p\left(\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\cdots+\binom{p}{p}\right)=M(2\varepsilon)^p\end{aligned}$$

其中 p 为任意整数. 因为 ε 为任意正数, 则取 $\varepsilon=1/2$, 所以有

$$0 \leqslant a_{N+1} < M\left(\frac{1}{2}\right)^p$$

当 $p \to \infty$ 时, 有 $a_{N+1}=0$, 与 $a_{N+1}>0$ 矛盾. 则 $\{a_n\}$ 无界.

11. 由下题可知左端不等式成立. 只需证右端不等式。当 $n=6,7,8,9,10,11,12$ 时直接验证右端不等式成立，由

$$n!=2\cdot 3\cdot\cdot n<\left(\frac{2+\cdots+n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{2+n}{2}\right)^{n-1}$$

可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2+n}{2}\right)^{n-1}<\left(\frac{n}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow\quad &(n-1)\ln\left(\frac{2+n}{2}\right)<n\ln\left(\frac{n}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\quad &n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)<\ln\frac{2+n}{2} \\ \Leftrightarrow\quad &\left(1+\frac{2}{n}\right)^n<\frac{2+n}{2} \end{aligned}$$

当 $n \geq 13$ 时得

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}<e^2<\frac{2+n}{2}$$

故当 $n \geq 6$ 有

$$n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

12. $n=1$ 时不等式显然成立。假定 $n=k$ 时有 $(k/\mathrm{e})^k<k!$ 则我们有

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1)k! > (k+1)(k/\mathrm{e})^k \\ &= \left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\frac{(k+1)(k/\mathrm{e})^k}{[(k+1)/\mathrm{e}]^{k+1}} > \left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

由此知 (根据归纳法) $n!>(n/\mathrm{e})^n (n\in\mathbf{N})$, 左端不等式成立.

为证右端不等式，只需看不等式

$$\begin{aligned} n! &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n[(n+1)/2]^n/\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n \\ &= \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n/\mathrm{e}<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n \end{aligned}$$

13. (1)

$$\begin{aligned} &3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots-\frac{1}{n!(n-1)n} \\ =&3-\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\cdots-\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ =&1+1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{(n-1)!(n-1)}-\frac{1}{n!}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n!n} \\ =&1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}\right)\\
&= 3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2!1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n!(n-1)n}\right)\\
&= 3-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}
\end{aligned}
$$

(3) 不懂题目在说什么

14. 由 $a_{n+1}-a_n=-1/\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2<0$, 知 $\{a_n\}$ 递减. 由归纳法得

$$
2(\sqrt{n+1}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}
$$

故知 $a_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1)>-2$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有下界列 , 即 $\{a_n\}$ 是收敛列.

15. 由

$$
\frac{a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots\cdot a_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots\cdot a_{n-1}}{n-1}
$$

可得

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots\cdot a_n}{n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots\cdot a_{n-1}}{n-1}=0
$$

16. 由

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\ln(n!)^{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 2+\cdots\ln n}{n^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{2n-1}=0
\end{aligned}
$$

可得

$$
\lim_{n\to+\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1
$$

17. 因为有不等式 $x(1-x)\leqslant 1/4$, 故对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 都有

$$
(1-x_n)\,x_{n+1}>\frac{1}{4}\geqslant(1-x_n)\,x_n
$$

因为 $1-x_n>0$, 所以有 $x_{n+1}>x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调递增, 又有上界 1, 则 $\{x_n\}$ 极限存在, 设为 x, 则对

$$
(1-x_n)\,x_{n+1}>\frac{1}{4}
$$

左侧取极限, 有

$$
(1-x)x\geqslant\frac{1}{4}
$$

则只能有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1/2$

18. 由 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 可得

$$
\begin{aligned}
a_n-a_{n-1} &= \frac{a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-1}}{2}=-\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{2}\\
&= (-1)^2\frac{a_{n-2}-a_{n-3}}{2^2}=\cdots\\
&= (-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

而

$$\begin{aligned}a_n-a_0&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)\\&=(-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{2^{n-1}}+(-1)^{n-2}\frac{a_1-a_0}{2^{n-2}}+\cdots+(-1)\frac{a_1-a_0}{2}+(a_1-a_0)\\&=(a_1-a_0)\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\\&=(a_1-a_0)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\to\frac{2}{3}(a_1-a_0)\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a_0+\frac{2}{3}(a_1-a_0)=\frac{a_0+2a_1}{3}$

19. 由题设得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a_0+b_0+c_0=a+b+c$$

令 $L=a+b+c$. 再由

$$\begin{aligned}a_n-b_n&=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}-\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}=-\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}\\&=(-1)^2\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{2^2}=\cdots=(-1)^n\frac{a_0-b_0}{2^n}\end{aligned}$$

得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(a_0-b_0)}{2^n}=0$. 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-a_n)=0$. 于是

$$\begin{aligned}&a_n=\frac{1}{3}[(a_n+b_n+c_n)-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{3}[L-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)]\\&\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{3}[L-0+0]=\frac{L}{3}=\frac{a+b+c}{3}\\&\lim_{n\to+\infty}c_n=\lim_{n\to+\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\frac{L}{3}+0=\frac{L}{3}\\&\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}[a_n-(a_n-b_n)]=\frac{L}{3}-0=\frac{L}{3}\end{aligned}$$

这就证得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$

20. (1) 数学归纳法证明 $b_n\leq b_{n+1}\leqslant a_{n+1}\leq a_n$ 当 $n=1$ 时有

$$b_1\leqslant a_2=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}}\leqslant\sqrt{a_1b_1}\leqslant a_1$$

$$b_1\leq b_2=\sqrt{a_2b_1}\leq a_2$$

可得 $b_1\leq b_2\leq a_2\leq a_1$

假设为 n 时结论成立即 $b_n\leq b_{n+1}\leqslant a_{n+1}\leq a_n$，下证 $b_{n+1}\leq b_{n+2}\leqslant a_{n+2}\leq a_{n+1}$

由

$$b_{n+1}\leq a_{n+2}=\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{b_{n+1}}}\leqslant\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}\leqslant a_{n+1}$$

$$b_{n+1}\leq b_{n+2}=\sqrt{a_{n+2}b_{n+1}}\leqslant a_{n+2}$$

可得 $b_{n+1}\leq b_{n+2}\leqslant a_{n+2}\leq a_{n+1}$ 得证，故 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，$\{b_n\}$ 单调上升有上界，故设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$，则

$$b=\sqrt{ab}\Rightarrow b=a$$

(2) 首先证明 $a_n = 3\cdot 2^n \cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}, b_n = 3\cdot 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$ 首先我们有

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = 2\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}}$$

又因为

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1$$

所以

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{\sin a\cdot\tan a}{\sin a + \tan a}$$

当 $n=1$ 时 ,$a_1 = 3\cdot 2^1\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^1} = 2\sqrt{3}, b_1 = 3\cdot 2^1\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^1} = 3$
假设 $n=k$ 时成立. 即

$$a_k = 3\cdot 2^k\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}, b_k = 3\cdot 2^k\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

$n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} =& \frac{2a_kb_k}{a_k+b_k}\\
=& \frac{2\cdot 3\cdot 2^k\cdot 3\cdot 2^k\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}}{3\cdot 2^k\left(\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}+\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}\right)}\\
=& 3\cdot 2^{k+1}\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}\\
b_{k+1} =& \sqrt{3\cdot 2^{k+1}\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}3\cdot 2^k\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}}\\
=& 3\cdot 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

由于 $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$, 得

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sin a\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}\sin a\tan\frac{a}{2}$$

即 $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sin a\cdot\tan\frac{a}{2}}$, 所以 $b_{k+1} = 3\cdot 2^{k+1}\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}$. 即 $n=k+1$ 时成立.
所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} 3\cdot 2^n\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\\
&= \pi\\
&= \lim_{n\to\infty} 3\cdot 2^n\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\\
&= \lim_{n\to\infty} b_n
\end{aligned}$$

2.7.2 第二组参考题

1. 因为

$$1 \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2 = 1$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

2. 由 1.3.1 练习题的 (3) 可知

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geqslant 1-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{k-1}{n}\right)=1-\frac{k(k-1)}{2n}$$

则有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&\geqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k!}>\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{\mathrm{e}}{2n}\end{aligned}$$

3. 我们先证

$$\mathrm{e}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $\dfrac{n}{n+1}<\theta_n<1$

我们有

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n!n}$$

所以 $\theta_n<1$. 而由 e 的定义可知

$$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n/(n+1)}{n!n}<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

所以也有 $\theta_n>\dfrac{n}{n+1}$, 综上可得 $\dfrac{n}{n+1}<\theta_n<1$

$n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=n\sin(2\pi\dfrac{\theta_n}{n})$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=2\pi$

4. 因为

$$\frac{k_{n+1}}{k_n}=\frac{\frac{1}{k_n}}{\frac{1}{k_{n+1}}}=\frac{\frac{1}{k_n}\mathrm{e}^{H_{k_n}}}{\frac{1}{k_{n+1}}\mathrm{e}^{H_{k_{n+1}}}}\cdot\mathrm{e}^{H_{k_{n+1}}-H_{k_n}}\qquad(*)$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}\mathrm{e}^{H_{k_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_{n+1}}\mathrm{e}^{H_{k_{n+1}}}=\mathrm{e}^{\gamma}$$

所以只需求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(H_{k_{n+1}}-H_{k_n}\right)$ 即可. 由 H_{k_n} 的定义可以知道

$$H_{k_n-1}<n\leqslant H_{k_n}\Rightarrow H_{k_n}-\frac{1}{k_n}<n\leqslant H_{k_n}$$

$$H_{k_{n+1}-1}<n+1\leqslant H_{k_{n+1}}\Rightarrow H_{k_{n+1}}-\frac{1}{k_{n+1}}<n\leqslant H_{k_{n+1}}$$

两个不等式做差可得

$$H_{k_{n+1}}-H_{k_n}-\frac{1}{k_{n+1}}\leqslant 1\leqslant H_{k_{n+1}}-H_{k_n}+\frac{1}{k_n}$$

移项可以得到

$$1-\frac{1}{k_n}\leqslant H_{k_{n+1}}-H_{k_n}\leqslant 1+\frac{1}{k_{n+1}}$$

由夹逼定理可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty} H_{k_{n+1}} - H_{k_n} = 1$. 代入等式 $(*)$ 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{k_n}\mathrm{e}^{H_{k_n}}}{\frac{1}{k_{n+1}}\mathrm{e}^{H_{k_{n+1}}}}\cdot \mathrm{e}^{H_{k_{n+1}}-H_{k_n}}=\mathrm{e}$$

5. 记

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\ln\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix},\quad b_n=n^2$$

因为 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 故可以使用 Stolz 定理: 而因为

$$\frac{\begin{pmatrix} n\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n\\ n-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1\\ 2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n-1\\ n-2\end{pmatrix}}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

所以只要求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\ln\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

即可, 再令 $c_n=2n-1, d_n=\ln\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, 因为 $\{c_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 故可使用 Stolz 定理:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n-d_{n-1}}{c_n-c_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n-d_{n-1}}{c_n-c_{n-1}}=\frac{1}{2}$$

6. (1)$A_n=\dfrac{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}{n}=\dfrac{2^n}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt[n]{n}}$

(2)$G_n=\sqrt[n]{C_n^0\cdot C_n^1\cdots C_n^n}$, 所以 $\sqrt[n]{G_n}=\left(\prod\limits_{k=0}^{n}C_n^k\right)^{\frac{1}{n^2}}=\mathrm{e}^{\ln\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)^{\frac{1}{n^2}}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

7. 由

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=\sum_{k=2}^{n}p_k\left(a_k-a_{k-1}\right)+p_1a_1=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(p_k-p_{k+1}\right)+p_na_n$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left(p_k-p_{k+1}\right)}{p_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\left(p_k-p_{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left(p_k-p_{k+1}\right)}{p_{n+1}-p_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(-a_n\right)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left(p_k-p_{k-1}\right)+p_na_n}{p_n}$$

8. 证明首先我们说明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=1$. 当 n 足够大的时候 $x_n>0$,

这时我们有

$$0 \leqslant |\sqrt[3]{x_n} - 1| \leqslant |(\sqrt[3]{x_n} - 1)(\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n} + 1)| = |x_n - 1|$$

则由夹逼定理可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = 1$ 所以要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$ 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} 3na_n^3 = 1$ 即可, 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, 继续变形

$$\lim_{n\to\infty} 3na_n^3 = \lim_{n\to\infty} 3n \cdot \frac{(a_nS_n)^3}{S_n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{S_n^3}$$

也就是说只要求出 $\{S_n^3/n\}$ 的极限就行了, 下面求极限.

(Step 1) 先证明 $a_n \to 0(n \to \infty)$, 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. 如果 $\{|a_n|\}$ 无界, 那么当 n 充分大时，会有 $|a_n| > 1$, 此时 $a_nS_n > a_n$, 即 $|a_nS_n|$ 无界, 与题目矛盾, 所以 $\{|a_n|\}$ 有界, 则由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{|a_n|\}$ 存在一个收敛子列 $\{|a_{k_n}|\}$, 设 $|a_{k_n}| \to a > 0(n \to \infty)$, 对任意的 $0 < m < a$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时有 $|a_{k_n}| > m$, 此时

$$|a_{k_n}S_{k_n}| \geqslant |a_{k_n}S_{k_n}| - |a_{k_N}S_{k_N}| \geqslant (n-N) \cdot m^3 \to +\infty, \quad n \to \infty$$

这说明 $\{|a_n|\}$ 的任意一个收敛子列都收敛于 0, 也就是说明 $a_n \to 0(n \to \infty)$

(Step 2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^3 - S_{n-1}^3$. 因为

$$a_nS_{n-1} = a_nS_n - a_n^2 \to 1, \quad n \to \infty$$

所以有

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= \left(a_n^2 + S_{n-1}\right)^3 - S_{n-1}^3 \\ &= 3a_n^4S_{n-1} + 3a_n^2S_{n-1}^2 + a_n^6 \to 3, \quad n \to \infty \end{aligned}$$

(Step 3) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{S_n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{S_n^3 - S_{n-1}^3} = 1$$

所以有 $\lim \sqrt[3]{3n}a_n = 1$

9. 因为 $u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \geqslant 0$, 所以 $\{u_n\}$ 为单调减数列. 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛即 $\{S_n\}$ 收敛. 由 Cauchy 收敛原理 ,$\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geqslant N$ 时

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots < 1$$

于是, 当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leqslant u_n &= u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{n+k}^2 + \cdots \\ &\leqslant u_{n+1}\left(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots\right) \\ &\leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

这就证明了, $u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \cdots = c$. 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 故 $c = 0$. 由此又根据 $u_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ 依次可推出

$$u_{N-1} = 0, \quad u_{N-2} = 0, \quad \cdots, \quad u_1 = 0$$

即对 $\forall k \in \mathrm{N}, u_k = 0$

10. 先设 $a=0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < \varepsilon/2$ 此时

$$
\begin{aligned}
|x_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} t_{nk}|a_k| = \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} t_{nk}|a_k| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = \sum_{k=1}^{N} t_{nk}|a_k| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty$ 时, 上式中的第一项是有限个无穷小的和, 因此存在 $N_1 > N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 当 $a \neq 0$ 时, 有 $b_n = a_n - a \to 0(n\to\infty)$. 若令 $x_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}b_k$, 则 $x_n' \to 0(n\to\infty)$. 于是

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}b_k + a\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = x_n' + a$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

11. (Toeplitz 定理) 设 $n, k \in \mathbb{N}, t_{nk} \geq 0$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 令 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ 型$Stolz$ 定理$\left.\right)$ 设 $\{b_n\}$ 是严格递增趋向于 $+\infty$ 的数列 , 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

取 $t_{nk} = \frac{b_{k+1} - b_k}{b_{n+1} - b_1}(k = 1, 2, \cdots, n)$ 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, 且由 $\{b_n\}$ 是严格递增知 $t_{nk} > 0$

由 $\lim b_n = +\infty$ 知对每个固定的 k, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$ 再设 $c_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k}(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}c_k = \frac{a_{n+1} - a_1}{b_{n+1} - b_1}$ 由 Toeplitz 定理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_1}{b_n - b_1} = A$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_1}{b_n}}{1 - \frac{b_1}{b_n}} = A$ 再由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 易证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

12. 变形可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + \lambda^n a_0) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \cdot \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot a_n + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda a_{n-1} + \cdots + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda^n a_0 \right) \\
&= \frac{1}{1-\lambda} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot a_n + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda a_{n-1} + \cdots + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda^n a_0 \right)
\end{aligned}
$$

又

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot 1 + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda + \cdots + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \lambda^n = 1$$

由 Toeplitz 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}}\cdot a_n+\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}}\cdot\lambda a_{n-1}+\cdots+\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}}\lambda^n a_0\right)=\lim_{n\to+\infty}a_n=a$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0\right)=\frac{a}{(1-\lambda)}$$

13. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, 所以 $\{x_n\}$ 有界, , 即 $\exists M>0$, s. t. $|x_n|<M,\forall n\in\mathrm{N}$; 且对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ N_1, 当 $n>N_1$ 时 , $|x_n|<\varepsilon$

设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|$, 则 $\{S_n\}$ 单调增且有上界 K, 故 $\{S_n\}$ 收敛，由 Cauchy 准则知 , $\exists N_2\in\mathrm{N}$, 当 $n>N_2$ 时

$$|y_{n+1}|+\cdots+|y_{n+p}|=|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,\quad\forall p\in\mathbb{N}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>2N(n-N>N)$ 时

$$\begin{aligned}|z_n|&=|x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1|\\&\leqslant|x_1y_n|+\cdots+|x_Ny_{n-N+1}|+|x_{N+1}y_{n-N}|+\cdots+|x_ny_1|\\&<M\left(|y_n|+\cdots+|y_{n-N+1}|\right)+\varepsilon\left(|y_{n-N}|+\cdots+|y_1|\right)\\&<M\varepsilon+K\varepsilon=(M+K)\varepsilon\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$ 得证.

14. 由 $x_{n+1}=\dfrac{y_n-x_n}{2}$ 可得

$$|x_{n+1}|\le\frac{|y_n|}{2}+\frac{|x_n|}{2}\le\cdots\le\frac{|y_n|}{2}+\cdots+\frac{|y_1|}{2^n}+\frac{|x_1|}{2^n}$$

由于 $\{y_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 有界, 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$, 令 $w_n=y_n-a$, $z_n=x_n-\dfrac{a}{3}$, 则 $w_n=z_n+2z_{n+1}$, 设 $\{z_n\}$ 的收敛子列为 $\{z_{n_k}\}$, 设为 $\lim\limits_{n_k\to+\infty}z_{n_k}=b$ 则 $\lim\limits_{n_k\to+\infty}z_{n_k-1}=(-2)b$, 可得

$$\lim_{n_k\to+\infty}z_{n_n-m}=(-2)^m b\quad\forall m\in N$$

由于 $\{z_{n_k}\}$ 有界, 故 $b=0$,　$\{z_n\}$ 任一收敛子列的极限均是 0,　故

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{a}{3}$$

15. 将 $a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}$ 改写为 $\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$. 令 $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$, 于是 $b_0=a_0,b_n=$

$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-b_{n-1}, n=1,2,\cdots$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-b_{n}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+b_{n-1}=\cdots \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{3}+(-1)^{n}\right]-(-1)^{n}b_{0} \\
&= \frac{1}{3}(-1)^{n}\left[1-\frac{2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+(-1)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]-(-1)^{n}b_{0} \\
&= (-1)^{n}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{3}}-b_{0}\right]=(-1)^{n}\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{5}-(-1)^{n}b_{0}
\end{aligned}$$

$a_n=3^nb_n$ 是严格增的 ,$3^{n+1}b_{n+1}>3^nb_n$, 即 $3b_{n+1}>b_n$

当 $n=2m$ 为偶数时, 有

$$\frac{3}{5}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1}\right)-3b_0>-\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2m}\right)+b_0$$

令 $m\to+\infty$, 得 $\frac{3}{5}-3b_0\geqslant-\frac{1}{5}+b_0$, 推得 $a_0=b_0\leqslant\frac{1}{5}$

当 $n=2m+1$ 为奇数时有

$$-\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+2}\right]+3b_0>\frac{1}{5}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1}\right]-b_0$$

令 $m\to+\infty$, 得 $-\frac{3}{5}+3b_0\geqslant\frac{1}{5}-b_0$. 推得 $a_0=b_0\geqslant\frac{1}{5}$

综合得 $a_0=\frac{1}{5}$

16. $x_0=\sqrt{7}, x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}, x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}_n, n=0,1,2,\cdots$

令 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$, 则 $f(x)=x\Leftrightarrow x=2$

$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$$

则

$$\left|x_{n+2}-2\right|=\left|f\left(x_n\right)-f(2)\right|=\left|f'(\xi)\right|\cdot\left|x_n-2\right|\quad 0\leq\xi\leq\sqrt{7}$$

由于

$$\left|f'(\xi)\right|\leq\frac{1}{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}<1$$

故 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 2 可得 $\{x_n\}$ 收敛于 2

17. 若 $y_0=2$, 则 $y_1=2=y_2=\cdots=y_n, \forall n\in\mathrm{N}$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=1=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

若 $y_0>2$. 取 $a=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$, 则 $0<a<1$, 且 $a+\dfrac{1}{a}=y_0$, 于是

$$\begin{aligned}
y_1&=y_0^2-2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}\\
y_2&=y_1^2-2=a^2+\frac{1}{a^{2^2}},\cdots\\
y_n&=a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}},\quad n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

因此就有

$$\begin{aligned}
y_0y_1\cdots y_n&=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cdots\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)\\
&=\frac{\left(a^{2^n}\right)^2-\left(a^{-2^n}\right)^2}{a-\frac{1}{a}}=\frac{a}{a^2-1}\frac{a^{2^{n+2}}-1}{a^{2^{n+1}}}\\
\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}&=\frac{1-a^2}{a}\frac{a^{2^{n+1}}+1-1}{1-\left(a^{2^{n+1}}\right)^2}=\frac{1-a^2}{a}\left(\frac{1}{1-a^{2^{n+1}}}-\frac{1}{1-a^{2^{n+2}}}\right)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1-a^2}{a}\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^4}-\frac{1}{1-a^8}+\cdots+\frac{1}{1-a^{2^{n+1}}}-\frac{1}{1-a^{2^{n+2}}}\right)\\
&=\frac{1-a^2}{a}\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-a^{2^{n+2}}}\right)\\
\lim_{n\to+\infty}S_n&=\frac{1-a^2}{a}\left(\frac{1}{1-a^2}-1\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+a=a=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}
\end{aligned}$$

18. (1)(i) 此时有 $f(x)>x$, 据 $x_{n+1}=f(x_n)$ 知 $x_{n+1}>x_n$, 所以数列单调递增. 根据单调性，该数列不是正无穷大量等价于该数列有有限极限 η , 在 $x_{n+1}=f(x_n)$ 中两边取极限就有 $\eta=f(\eta)$, 矛盾.

(ii) 此时有 $f(x)\geq x$ ，且函数有唯一不动点 e. 因而数列仍然单调递增，且: 当 $c>e$ 时，假设数列收敛，则有极限 $\eta(\eta>e)$. 类似地有 $\eta=f(\eta)$ ，但 f 仅有 e 一个不动点，矛盾，所以数列发散. 而数列递增，所以是无穷大量. 当 $c\leq e$ 时，据 $f(x)$ 的单调性，$x_n\leq e$ 蕴含 $x_{n+1}\leq e$, 由数学归纳法知数列的每一项都不超过 e，而数列收敛，所以一定有极限. 设极限为 η, 则 η 是函数的不动点，所以 $\eta=e$.

(iii) 设函数的两个不动点是 $u,v(u<v)$ ，则

$$\begin{aligned}
&f(x)>x(x<u\text{ 或}x>v)\\
&f(x)<x(u<x<v)\\
&f(x)=x(x=u,v)
\end{aligned}$$

当 $c>v$ 时，和上一问类似，数列单调递增并发散;

当 $c\leq u$ 时，和上一问类似，数列单调递增并收敛于 u; 当 $c=v$ 时，该数列是常数列，显然收敛于 v;

当 $u<c<v$ 时，据 $f(x)$ 的单调性，$x_n\geq u$ 蕴含 $x_{n+1}\geq u$. 又因为 $f(x)<x(u<x<v)$, 所以数列单调递减且有下界，设极限为 η, 则 $\eta\leq c<v$, 且 η 是函数的不动点，所以 $\eta=u$

综上，当 $c\leq v$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛； 当 $c>v$ 时，数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2)(i) 此时函数恰有一个不动点 u, 且 u 是二次迭代后的唯一不动点. 由于 $f(x)$ 递

减，所以有 $f(f(x))$ 递增，且有

$$f(x) > u(x < u)$$
$$f(x) < u(x > u)$$
$$f(f(x)) > x(x < u)$$
$$f(f(x)) < x(x > u)$$

根据命题 2. 6. 2，数列 $\{x_n\}$ 的奇数项和偶数项具有相反的单调性. 再由上面结论，两个子列均有界，所以必然都收敛到函数的唯一不动点，进而得到数列收敛

(ii) 类似地，数列的奇数项和偶数项具有相反的单调性并且收敛至函数的某个不动点. 设 $f(x)$ 的不动点为 u, 而 $f(f(x))$ 的不动点为 $u, v, w(v < w)$, 则

$$f(u) = u$$
$$f(v) = w$$
$$f(w) = v$$

所以根据函数单调递减，有 $v < u < w$. 又由于

$$f(f(x)) > x(x < v \text{ 或} u < x < w)$$
$$f(f(x)) < x(v < x < u \text{ 或} x > w)$$

故如果奇数项或偶数项子列的第一项小于 u ，则必收敛于 v; 如果大于 u ，则必收敛于 w. 但我们有

$$f(x) > u(x < u)$$
$$f(x) < u(x > u)$$

所以除非第一项等于 u （此时是常数列），否则两个子列一定收敛到不同极限，数列 $\{x_n\}$ 发散.

19. (1) 用数学归纳法证明 $x_n > x_{n+1} > 0$ 当 $n = 1$ 时，由 $x_2 = \dfrac{b}{4} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 知结论成立. 假设 $x_k > x_{k+1} > 0$, 则

$$x_{k+2} = bx_{k+1}\left(1 - x_{k+1}\right) \geq \frac{bx_{k+1}}{2} > 0$$
$$x_{k+2} = bx_{k+1}\left(1 - x_{k+1}\right) < bx_{k+1} \leq x_{k+1}$$

故由归纳法知结论成立. 从而数列 $\{x_n\}$ 单调有下界，设其极限为 η,　则 $\eta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. 在递推式两边同时取极限就有

$$\eta = b\eta(1 - \eta)$$

由于 $1 - \dfrac{1}{b} \leq 0$, 故 $\eta = 0$

(2) 设 $y_n = \dfrac{b}{2 - b}\left(x_n - 1 + \dfrac{1}{b}\right)$, 则有 $y_1 = \dfrac{1}{2}$, 且

$$y_{n+1} = (2 - b)y_n\left(1 - y_n\right)$$

故直接运用 (1) 的结论即证.

(3) 归纳可证 $x_n \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{b}{4}\right]$. 由于 $f(x) = bx(1 - x)$ 在该区间上递减，故两个子列具

有相反的单调性. 显然它们是有界的，由于

$$\begin{aligned}
&f(f(x))-x=b\cdot bx(1-x)(1-bx(1-x))-x\\
&=x\left(b\cdot b(1-x)\left(1-bx+bx^2\right)-1\right)\\
&=-b^2x\left(bx^3-2bx^2+(1+b)x+\frac{1}{b^2}-1\right)\\
&=-b^2x(bx-b+1)\left(x^2-\left(1+\frac{1}{b}\right)x+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}\right)\\
&=-b^2x(bx-b+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)^2+\frac{(b+1)(3-b)}{4b^2}\right)
\end{aligned}$$

故当 $b<3$ 时，函数在区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]$ 内存在唯一不动点 $1-\frac{1}{b}$, 所以数列一定收敛于 $1-\frac{1}{b}$. 当 $b=3$ 时，将 b 代入，得到

$$f(f(x))-x=-x(3x-2)^3$$

故函数在区间内仍然只有唯一的不动点 $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{b}$, 所以此时也有结论成立.

(4) 归纳可证 $x_n\in\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]$.（注: 这里利用了 $b\le 1+\sqrt{5}$）而函数 $f(x)=bx(1-x)$ 在此区间递减，故两个子列具有相反的单调性. 根据 (3) 的计算，有

$$f(f(x))-x=-b^2x(bx-b+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)^2-\frac{(b+1)(b-3)}{4b^2}\right)$$

又因为 $3<b\le 1+\sqrt{5}$, 故 $(b+1)(b-3)=(b-1)^2-4\in(0,1]$. 从而得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}=\frac{1}{2}\\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}<\frac{b}{4}
\end{aligned}$$

而 $f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)},\quad f\left(\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]$. 故

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}\in\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]$$

从而 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},\frac{b}{4}\right]$ 上有一个一阶不动点 $t_0=1-\frac{1}{b}$ 和两个二阶不动点

$$\begin{aligned}
t_1&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}\\
t_2&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}\sqrt{(b+1)(b-3)}
\end{aligned}$$

故由 $f(x)$ 单调递减及 $t_1<t_2$, 必有 $t_1<t_0<t_2$, 观察 $f(f(x))-x$ 的表达式，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&f(f(x))>x,\left(x<t_1\text{ 或}t_0<x<t_2\right)\\
&f(f(x))<x.\left(t_1<x<t_0\text{ 或}x>t_2\right)
\end{aligned}$$

再由 $f(x)$ 的单调性及 $f\left(t_1\right)=t_2,\quad f\left(t_2\right)=t_1$, 我们有

$$f(x)>t_2\left(x<t_1\right)$$

$$t_0 < f(x) < t_2\,(t_1 < x < t_0)$$
$$t_1 < f(x) < t_0\,(t_0 < x < t_2)$$
$$f(x) < t_1\,(x > t_2)$$

最后利用 $x_1 = \dfrac{1}{2} < t_1$, 结合上面的结论，就能得到

$$x_{2k-1} \in \left[\frac{1}{2}, t_1\right], \quad x_{2k} \in \left[t_2, \frac{b}{4}\right]$$

所以只有一种可能性，即两个子列的极限分别是 t_1, t_2, 数列发散.

20. 显然，有

$$x_1^{(1)} = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad x_2^{(1)} = \frac{x_2+x_3}{2}, \cdots$$
$$x_1^{(2)} = \frac{x_1+2x_2+x_3}{2^2}, \quad x_2^{(2)} = \frac{x_2+2x_3+x_4}{2^2}, \cdots$$
$$x_1^{(3)} = \frac{x_1+3x_2+3x_3+x_4}{2^3}, \quad x_2^{(3)} = \frac{x_2+3x_3+3x_4+x_5}{2^3}, \cdots$$
$$\cdots$$
$$x_1^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x_{i+1}, \quad x_2^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x_{i+2}, \cdots$$

先设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 并且 $|x_i| \leqslant M, i = 1, 2, \cdots, n$, 此时 , 由

$$x_1^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^i x_{i+1} - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathrm{C}_{n-1}^i - 1\right) x_{i+1}$$

可得

$$\left|x_1^{(n-1)}\right| \leqslant \frac{M}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^i - 1\right) = \frac{M}{2^{n-1}}\left(2^{n-1} - n\right) = M\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)$$

因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的下标有轮换的性质, 我们有

$$\left|x_i^{(n-1)}\right| \leqslant M\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

利用已得的结果，同理有

$$\left|x_i^{(2n-2)}\right| = \left|\left(x_i^{(n-1)}\right)^{(n-1)}\right| \leqslant M\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)\cdot\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) = M\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^2$$

一般地，对 $l = 1, 2, 3, \cdots$, 有

$$\left|x_i^{(ln-l)}\right| \leqslant M\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^l$$

由于 $0 \leqslant 1 - \dfrac{n}{2^{n-1}} < 1$, 故

$$\lim_{t\to+\infty} x^{(ln-l)} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

由 $x_i^{(k+1)}$ 的定义可知

$$\left|x_i^{(k+1)}\right| \leqslant \max\left\{\left|x_i^{(k)}\right|, \cdots, \left|x_n^{(k)}\right|\right\}$$

可见

$$\lim_{t\to+\infty} x_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

对一般情形，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

依上面已证的结果，有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{(k)}-\bar{x}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\lim_{k\to+\infty}x_i^{(k)}=\lim_{k\to+\infty}\left[\left(x_i^{(k)}-\bar{x}\right)+\bar{x}\right]=\lim_{k\to+\infty}\left(x_i^{(k)}-\bar{x}\right)+\bar{x}=0+\bar{x}$$

$$=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

第 3 章 实数系的基础定理

3.1 确界的概念和确界的存在定理

3.1.1 练习题

1. 设集合 E 的上确界为 a 和 b，不妨设 $a<b$，由于 b 是 E 的最小上界，故存在 $x\in E$ 使得
$$a<x<b$$
这与 a 是 E 的上界矛盾

2. $\sup A\le a$ 对，考虑集合 $A=\left\{1-\dfrac{1}{n}\mid n=1,2,\cdots\right\}$ 则有 $\forall x\in A\quad x<1$，但是 $\sup A=1$

3. $\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$ 故 $\exists N,n>N$ 时有
$$x_n>\beta-\varepsilon$$
故 $\beta-\varepsilon$ 不是 A 的上界，所以 β 是 A 的最小上界 $\Rightarrow\sup A=\beta$

4. (1)$\sup A=+\infty\quad,\inf A=0$

   (2)$\sup A=0\quad,\inf A=1$

   (3)$\inf A=2,\quad\sup A=e$

   (4)$\inf A=0,\quad\sup A=\dfrac{1}{e}$

   (5)$\inf A=0,\sup A=\dfrac{\pi}{2}$

   (6)$\inf A=-1,\sup A=\dfrac{\pi}{2}$

   (7)$\inf A=-\infty,\sup A=+\infty$

5. (1)
$$x_n\le\sup\{x_n\},\quad y_n\le\sup\{y_n\}$$
$$x_n+y_n\le\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$$
$$\sup\{x_n+y_n\}\le\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$$
(2) 与 (1) 类似

6. 设 $a=\sup A,b=\inf B,a>b$ 则 $\exists x\in A$ 使得 $\dfrac{a+b}{2}<x$，$\exists y\in B\quad y<\dfrac{a+b}{2}$，则
$$y<\frac{a+b}{2}<x$$
矛盾，故 $a\le b$

7. 只证明 $\sup B=\sup A+c$，另一个类似可得
$$\forall x+c\in B\quad x+c\le\sup A+c$$
可得 $\sup A+c$ 是 B 的一个上界。

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A$ 使得 $\sup A - \varepsilon < x \Rightarrow \exists x + c \in B$ 使得

$$\sup A + c - \varepsilon < x + c$$

故 $\sup A + c$ 是 B 的最小上界 $\Rightarrow \sup B = \sup A + c$

8. $\forall x + y \in C$，其中 $x \in A, \quad y \in B$ 则

$$x \leq \sup A, \quad y \leq \sup B \Rightarrow x + y \leq \sup A + \sup B$$

故 $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$

取

$$A = \{0\}, B = \{-1, 1\}, C = \{-1\}$$

则有

$$\sup A = 0, \sup B = 1, \sup C = -1 \Rightarrow \sup C < \sup A + \sup B$$

9. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad x \in A, \quad y \in B$ 使得

$$\sup A - \varepsilon < x$$
$$\sup B - \varepsilon < y$$

故

$$\sup A + \sup B - 2\varepsilon < x + y$$

由 ε 的任意性可得

$$\sup C \geqslant \sup A + \sup B$$

3.2 闭区间套定理

3.2.1 练习题

1. 收敛子列为 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$，则 $\forall x_0 \in (-1, 1)$ 有

$$|x_n - x_0| \geq \min\{|x_0 + 1|, |1 - x_0|\} > 0$$

故 x_0 不是 $\{x_n\}$ 子列的极限

2. 考虑

$$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, \cdots\right\}$$

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \varnothing$

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ 则 $\frac{a+b}{2} \in (a_n, b_n) \quad \forall n \in N_+$ 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n) \neq \phi$

4. 不妨设集合 S 有上界 b_1, 并在 S 中取一点 a_1 若 $a_1 = b_1, \forall \epsilon > 0$, 总有 $b_1 - \varepsilon < a_1 \in S$, 因此 b_1 为上确界. 若 $a_1 < b_1$, 构造闭区间 $I_1 = [a_1, b_1]$ 由于有公共元素 $a_1, \quad I_1 \cap S \neq \phi \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right] \cap S \neq \phi$, 则令 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, b_2 = b_1$, 即 $I_2 = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$ 反之, 则令 $I_2 = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right]$ 同样地，再将 I_2 等分为两个子区间, 按此方法得到

$I_3, I_4, \cdots$ 显然地, b_n 为 S 上界并且 $I_n \supset I_{n+1}, n=1,2,\cdots$ 对于 $I_n=[a_n,b_n]$ $|b_n-a_n|=\dfrac{|b_1-a_1|}{2^{n-1}} \to 0(n\to\infty)$ 故存在唯一的实数 ξ, 满足 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ 若 $\exists x_0 \in S$, 有 $x_0 > \xi$, 则 $\exists N \in N_+, b_n < x_0$, 这与 b_n 为上界矛盾, 故 ξ 为 S 上界. 又因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\xi - \varepsilon < a_n \in S$ 故 ξ 为上确界.

5. 设 $\{x_n\}$ 是单调上升有上界的实数列 b 是它的一个上界，令 $a_1 = x_1 - 1$ 二等分 $[a_1, b_1]$, 其中必有一区间含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记其为 $[a_2, b_2]$, = 等分 $[a_2, b_2]$, $\cdots\cdots$ 如此继续下去，便得区间套 $[a_n, b_n]$, 满足 $\forall n, [a_n, b_n]$ 含 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 由区间套定理可得，存在唯一的 $r \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, r-\varepsilon < a_n < b_n < r+\varepsilon$ 取 $n_0 > N, [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 含 $\{x_n\}$ 的无穷多项 , 则存在 M, 使 $x_M \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 当 $m > M$ 时, 有 $x_m \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. 如果不然 , $\exists m_1 > M$, 有 $b_{n_0} < x_{m_1}$, 则在 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 中最多只有 $\{x_n\}$ 的前 m_1 项，与 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 的构造矛盾. 从而当 $m > M$ 时, 有 $r-\varepsilon < a_{n_0} \leq x_m < b_{n_0} < r+\varepsilon$, 即 $|x_m - r| < \varepsilon$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = r$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$

3.3 凝聚定理

3.3.1 练习题

1. $\Rightarrow$：$\exists x_{n_1}$ 使得 $|x_{n_1} - a| < 1$，$\exists x_{n_2}$ 使得 $n_2 > n_1$ 且 $|x_{n_2} - a| < \dfrac{1}{2}$，$\cdots$ 以此类推可得存在 x_{n_k} 使得 $n_k > n_{k-1}$，且
$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$$
故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a
$\Leftarrow$:$\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$n_k > N$ 时，有
$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$
故 a 的任意邻域内均有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项。

2. $\Leftarrow$: 显然的
$\Rightarrow$：因为 $\{a_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可以知道 $\{a_n\}$ 有一收敛子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛到 a', 而因为 $\{a_n\}$ 发散, 则存在 ε_0, 对任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 总存在 $n > N$ 使得
$$|a_n - a'| \geqslant \varepsilon_0 \quad (1)$$
则令 $N_1 = 1$, 取满足 (1) 的 n, 记为 m_1, 再取 $N_2 = \max(m_1, 2)$, 则可以再取出一个 m_2 满足 (1), 如此下去可以取出一列 $\{a_{m_n}\}$, 使得 $|a_{m_n} - a'| \geqslant \varepsilon_0$, $\{a_{m_n}\}$ 也是有界数列, 则也可以取出一列收敛子列, 不妨直接记为 $\{a_{m_n}\}$ 本身, 记其极限为 a'', 显然有 $a'' \neq a'$. 则说明 $\{a_n\}$ 必有两个收敛于不同数的子列。

3. $\{x_n\}$ 无界，故存在子列 $\left\{x_{n_{k_1}}\right\}$ 是无穷大量，又 $\{x_n\}$ 不是无穷大量，故存在子列 $\left\{x_{n_{k_2}}\right\}$ 是有界数列，则存在 $\left\{x_{n_{k_2}}\right\}$ 的子列收敛，同时也是 $\{x_n\}$ 的子列。

4. 设 $\{x_n\}$ 是单调上升有上界的实数列.$\{x_n\}$ 有界，由紧致性定理可得 $\exists\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 且收敛于 r. 即 $\forall\varepsilon>0,\exists K$, 当 $k>K$ 时，有 $|x_{n_k}-r|<\varepsilon$, 即 $r-\varepsilon<x_{n_k}<r+\varepsilon,\exists N=n_{K+1},\forall n>N$, 有$x_n\geq x_{n_{K+1}}>r-\varepsilon$ 所以 $n_k\to\infty,\forall n>N,\exists n_{k'}<n$, 从而$x_n<x_{n_{k'}}<r+\varepsilon$, 即 $|x_n-r|<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0,\exists N=n_{K+1}$, 当 $n>n_{K+1}$ 时 ,$|x_n-r|<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r$. 定理证完.

3.4 Cauchy 收敛准则

3.4.1 练习题

1. (1) 是，因为

$$|x_n-x_{n+p}|\leq|x_n-x_N|+|x_{n+p}-x_N|<2\varepsilon$$

可得

(2) 不一定，考虑 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

(3) 是，由

$$\begin{aligned}|x_n-x_{n+p}|&\leqslant|x_{n+1}-x_n|+|x_{n+1}-x_{n+2}|+\cdots+|x_{n+p-1}-x_{n+p}|\\&\leq\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)^2}\end{aligned}$$

可得

(4) 不一定，考虑 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

2. $\exists\varepsilon_0>0,\quad\forall N>0,\quad\exists n,m>N$ 使得 $|x_n-x_m|\geq\varepsilon_0$

3. (1) 由

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n+p}|&=\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\frac{1}{(n+p)!}\leqslant\frac{1}{2^n}+\cdots\frac{1}{2^{n+n-1}}\\&\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

可得

(2) 由

$$|b_n-b_{n+p}|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}$$

可得

$$|b_n-b_{n+p}|\leq\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & p\text{为奇数}\\ \dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+p}\leqslant\dfrac{1}{n+1} & p\text{为偶数}\end{cases}$$

故

$$|b_n-b_{n+p}|\leq\frac{1}{n+1}$$

(3)

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1))}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)}\right|\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)n}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}<\frac{p}{n^2}\end{aligned}$$

再由第一问的 (3) 可得

4. (1)$\sin n$ 是变号的，故 $\{a_n\}$ 不单调，又

$$|a_n| \leq 1+\frac{1}{2!}+\ldots\frac{1}{n!}<e$$

可得 $\{a_n\}$ 有界

(2)

$$|a_{n+p}-a_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\frac{1}{(n+p)!}$$

由上一题的 (1) 可知 $\{a_n\}$ 是基本列

5. $|x_{n+p}-x_n| \leq |y_n-y_{n+p}|$，而 $\{y_n\}$ 是基本列，故 $\{a_n\}$ 是基本列

6. $S_n \geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，故 $\{S_n\}$ 发散

7.

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|=q\,|\sin x_{n+1}-\sin x_n| \leq q\,|x_{n+1}-x_n|$$

由压缩映像可得 $\{x_n\}$ 收敛

3.5 覆盖定理

3.5.1 练习题

1. $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \mid n=2,3, \cdots\right\}$ 覆盖了 $(0,1)$，但是它的任意有限子集都不能覆盖 $(0,1)$

2. 用反证法. 设 E 是闭区间 $[a, b]$ 的一个覆盖. 设 $[a, b]$ 没有 E 的有限子覆盖，记 $[a, b]=[a_1, b_1]$，二等分 $[a_1, b_1]$，其中必有一区间没有 E 的有限子覆盖，记其为 $[a_2, b_2]$，二等分 $[a_2, b_2]$，$\cdots\cdots$ 如此继续下去，便得区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足 $\forall n,[a_n, b_n]$ 没有 E 的有限子覆盖. 由区间套定理可存在唯一的 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，使 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=r$ 由 E 是 $[a, b]$ 的覆盖，知存在 $(\alpha, \beta) \in$ E, 使 $\alpha<r<\beta$ 根据极限不等式，存在 N_1 当 $n>N_1$, 有 $\alpha<a_n$ $\exists N_2$, 当 $n>N_2$, 有 $\beta>b_n$ 取 $\mathrm{N}=\max(N_1, N_2)$，当 $\mathrm{n}>\mathrm{N}$, 有 $\alpha<a_n, \beta>b_n$ 又 $a_n \leq r \leq b_n(\forall \mathrm{n})$ 所以当 $\mathrm{n}>\mathrm{N}$, 有 $[a_n, b_n] \subset(\alpha, \beta)$, 与 $[a_n, b_n]$ 没有 E 的有限子覆盖矛盾. 故 $[a, b]$ 在 E 中存在有限子覆盖.

3. 用反证法. 如果不然，设存在 $\{[a_n, b_n]\}$，有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]=\varnothing$. 记开区间 $(\alpha_n, \beta_n)=(a_1-1, a_n),(\alpha_n^{\prime}, \beta_n^{\prime})=(b_n, b_1+1)$，即 $(\alpha_n, \beta_n) \cup(\alpha_n^{\prime}, \beta_n^{\prime})=(a_1-1, b_1+1)-[a_n, b_n] \quad(n=1,2,3 \cdots \cdots,)$. 这时

$$E=\left\{(\alpha_n, \beta_n)\ (\alpha_n^{\prime}, \beta_n^{\prime}), n=1,2, \cdots \cdots\right\}$$

构成 $[a_1, b_1]$ 的覆盖. 由有限覆盖定理存在 N 使得 $\bigcup_{n=1}^{N}(\alpha_n, \beta_n) \cup(\alpha_n^{\prime}, \beta_n^{\prime}) \supset[a_1, b_1]$，这就推出，当 $n>N$ 时，$[a_n, b_n]$ 是空集，这是不可能的. 矛盾，故有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$，即存在 r 使 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

下证 r 是唯一的. 即存在唯一的 r，使 $\forall n,\quad a_n \le r \le b_n$. 如果不然，若有 r, r' 满足 $r \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，$\quad r' \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，$\quad$ 则 $|r - r'| \le b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 故 $r = r'$. 即这样的 r 是唯一的.

4. 设 $\forall n$, 有 $a \le x_n \le b$ 先证 $\exists x_0 \in [a,\quad b],\quad \forall \delta > 0,\quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中必含有 $\{x_n\}$ 的无限项. 如果不然. $\forall x \in [a,b], \exists \delta_x > 0$, 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 只含 $\{x_n\}$ 的有限项记 $E = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) | \forall x \in [a,b]$, 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 只含 $\{x_n\}$ 的有限项$\}$，则 E 是 $[a,b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理，知存在 E 中有限个开区间

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\,(x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \cdots (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$$

所以 $\{x_i - \delta_i, x_i + \delta_i\}$ 均只含 $\{x_n\}$ 的有限项. 与 $\forall n$, 有 $a \le x_n \le b$ 矛盾. 所以结论成立。

特别地，取 $\delta_k = \dfrac{1}{k}$, 则 $\exists x_{n_k} \in \left(x_0 - \dfrac{1}{k}, x_0 + \dfrac{1}{k}\right)$，而且 $n_k > n_{k-1}$, 则 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子数列且收敛于 x_0. 定理证完

5. (1) 取 $[a,b]$ 的开覆盖为 $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

(2) 取开覆盖为 $\{(a-1, b+1)\}$，则 $\sup A = b + 1 > b$，但是 $b + 1 \notin A$

3.6 数列的上极限和下极限

3.6.1 练习题

1. (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$

(4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$

2. 设 $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, 存在子列 $\{y_{n_k}\}$，$\lim\limits_{n_k\to+\infty} y_{n_k} = a$，则 $x_{n_k} \ge y_{n_k}$，则 $\{x_{n_k}\}$ 存在收敛子列 $\left\{x_{n_{k_2}}\right\}$ 收敛于 b, 可得 $b \geqslant a$，故

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

类似可得

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

3. $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N$, 当 $n > N$ 时有

$$x_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \varepsilon$$

则

$$S_n = \frac{x_1 + \cdots + x_N + \cdots + x_n}{n} \le \frac{x_1 + \cdots x_N}{n} + \frac{n - N}{n}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n + \varepsilon\right)$$

可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \varepsilon$，由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

类似可得 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, S_n$

4. 必要性：当 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$ 时, 取定 $l > 1$, 则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} < \frac{1+l}{2}$$

即

$$0 \leqslant a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

则有

$$0 \leqslant \frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{(l+1)/2}{l}\right)^n \to 0(n \to \infty)$$

所以由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/l^n = 0$

充分性：用反证法. 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = a$, 则有一子列 $\{a_{k_n}\}$ 趋于 a, 取 $l \in (1, a)$, 下面说明矛盾.

令 $\varepsilon < a - l$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对 $k_n > n > N$ 都有

$$\left|a_{k_n}^{1/k_n} - a\right| < \varepsilon$$

即 $a_{k_n} > (a-\varepsilon)^{k_n} > l^{k_n}$. 所以 $a_{k_n}/l^{k_n} > 1$, 即有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} > 1$$

这与 $a_n/l^n \to 0(n \to \infty)$ 矛盾.

5. 先证左端不等式：设

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

如果 $q = +\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. 当 $q = 0$ 时显然成立不妨设 $0 < q < +\infty$. 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 当 $n \geqslant N$ 时, $a_{n+1}/a_n > q - \varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > q - \varepsilon, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > q - \varepsilon, \quad \cdots, \quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > q - \varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来, 得 $a_{N+k} > (q-\varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n > a_N(q-\varepsilon)^{-N}(q-\varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n]{a_N(q-\varepsilon)^{-N}}(q-\varepsilon)$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$, 即得所要证的不等式

右端不等式类似可得。

6. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列 , E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记

$$a^* = \sup E, \quad a_* = \inf E$$

则 $a^* \in E$

证明 若 $a^*=+\infty$, 则此时 E 无上界, 从而 $\{a_n\}$ 也没有上界. 因此, 从 $\{a_n\}$ 中可选出一个子列 $a_{k_n}\to+\infty(n\to\infty)$, 于是得 $a^*\in E$

如果 $a^*=-\infty$, 那么 E 中只含唯一的元素 , 即 $E=\{-\infty\}$, 这时 , $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$

如果 a^* 是一个有限数, 为了证明 $a^*\in E$, 必须且只需证明可以从数列 $\{a_n\}$ 中选出一个子列收敛于 a^*。因为 $a^*=\sup E$, 故必存在一个 $l_1\in E$, 使得

$$a^*-1<l_1<a^*+1$$

l_1 作为 $\{a_n\}$ 的某一子列的极限, 一定存在正整数 k_1, 使得

$$a^*-1<a_{k_1}<a^*+1$$

同理，存在 $l_2\in E$, 使得

$$a^*-\frac{1}{2}<l_2<a^*+\frac{1}{2}$$

l_2 作为 $\{a_n\}$ 的某一子列的极限, 一定有正整数 $k_2>k_1$, 使得

$$a^*-\frac{1}{2}<a_{k_2}<a^*+\frac{1}{2}$$

归纳可得: 对任何 $n\in\mathbf{N}^*$, 存在 k_n, 满足 $k_n>k_{n-1}>\cdots>k_1$, 使得

$$a^*-\frac{1}{n}<a_{k_n}<a^*+\frac{1}{n}$$

由此可知 , $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}=a^*\in E$

类似可得 $a_*\in E$

7. 设 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$， $n>N$ 时有

$$x_n<a+\varepsilon\Rightarrow -x_n>-a-\varepsilon$$

可得

$$\varliminf_{n\to+\infty}-x_n\geq -a-\varepsilon$$

由 ε 的任意性可得 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}-x_n\geq -a$

又存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a，可得 $\lim\limits_{n_k\to+\infty}-x_{n_k}=-a$，故 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}-x_n=-a$

8.

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=-\varliminf_{n\to+\infty}-x_n=-\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n}\{-x_k\}=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k\}$$

9. (1) 有限数 b 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，$(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 中均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，同时 $\exists N,n>N$ 时有 $x_n<b+\varepsilon$；(2) $+\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限等价于 $\{x_n\}$ 无上界；(3)$-\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限等价于 $\{x_n\}$ 趋于负无穷。

只证 (1)，其余类似。利用 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}x_n=-\varliminf\limits_{n\to\infty}-x_n$ 可得，b 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限 $\Leftrightarrow -b$ 是数列 $\{-x_n\}$ 的下极限 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，$(-b-\varepsilon,-b+\varepsilon)$ 中均含有 $\{-x_n\}$ 中的无穷多项，同时 $\exists N,n>N$ 时有 $-x_n>-b-\varepsilon\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，$(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 中均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，同时 $\exists N,n>N$ 时有 $x_n<b+\varepsilon$

于是 (1) 得证。

10.

$$\sup_{k\geq n}\{x_k\}+\sup_{k=n}\{y_k\}\geqslant x_k+y_k\quad(k\geq n)$$

可得

$$\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}+\sup_{k\geq n}\{y_k\}\geq\sup_{k\geq n}\{x_k+y_k\}$$

令 $n\to+\infty$ 可得

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\geqslant\varlimsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)$$

11.

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}x_n=\varliminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n-y_n)&\geqslant\varliminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n)+\varliminf_{n\to+\infty}(-y_n)\\&=\varliminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{n\to+\infty}y_n\end{aligned}$$

故

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\geqslant\varliminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n)$$

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to+\infty}y_n=\varlimsup_{n\to+\infty}(y_n+x_n-x_n)&\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)+\varlimsup_{n\to+\infty}(-x_n)\\&=\varlimsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)-\varliminf_{n\to+\infty}x_n\end{aligned}$$

故

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)$$

3.7 对于教学的建议

3.7.1 第一组参考题

1. $\Rightarrow$: 有界列的子列仍然是有界列，所以会有收敛子列。
   $\Leftarrow$: 如果数列无界，则存在子列趋于正无穷或者负无穷，此时这个子列就没有收敛子列矛盾，故数列有界。
2. 反证法. 若结论不对，则存在 $\varepsilon_0>0$, 以及 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0(k=1,2,\cdots)$. 由于 $\{a_{n_k}\}$ 是有界列, 故存在收敛子列 $\left\{a_{n_{k_i}}\right\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}a_{n_{k_i}}=a$. 这与 $\left|a_{n_{k_i}}-a\right|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾. 证毕。
3. 如果每个邻域内有界，根据有限覆盖定理可知存在有限个领域覆盖，取这有限个邻域上函数的界的最大值即可。在开区间上不一定，考虑 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上无界但是在区间内任意一个点的邻域内均有界。
4. $\forall\varepsilon>0$，令

$$E=\{x_0<b|f(x)在[a-\varepsilon,x_0]上单调增加\}$$

则 $E\neq\varnothing$，只需证 $\sup E=b$，若 $\sup E<b$，考虑 $\sup E$ 充分小的邻域 $(\sup E-$

$\delta, \sup E + \delta)$ 则存在 $x_0 \in E$ 使得

$$x_0 \in (\sup E - \delta, \sup E)$$

故 $f(x)\left[a - \varepsilon, \sup E + \dfrac{\delta}{2}\right]$ 上严格单调递增，这与 $\sup E$ 是 E 的上确界矛盾。

5. (Stolz, $\dfrac{*}{\infty}$ 型) 设 $\{b_n\}$ 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \qquad (1)$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \qquad (2)$$

其中 A 可以是 $+\infty - \infty$.

（a）先设 A 为有限数. 由式 (1) 知，对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon$$

由此得

$$\begin{aligned}
&A - \varepsilon < \frac{a_{n_0} - a_{n_0-1}}{b_{n_0} - b_{n_0-1}} < A + \varepsilon \\
&A - \varepsilon < \frac{a_{n_0+1} - a_{n_0}}{b_{n_0+1} - b_{n_0}} < A + \varepsilon \\
&\cdots \\
&A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon
\end{aligned}$$

因而有

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n - b_{n_0-1}} < A + \varepsilon$$

即

$$A - \varepsilon < \frac{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n_0-1}}{b_n}}{1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}} < A + \varepsilon$$

于是得

$$(A - \varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (A + \varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n}$$

从而得

$$A - \varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_n}{b_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{b_n} \leqslant A + \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$, 即得

$$A \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_n}{b_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{b_n} \leqslant A$$

由此即知式 (2) 成立。

(b) 设 $A = +\infty$, 由式 (1) 知, 当 n 充分大时, 有 $a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1} > 0$, 因而 $\{a_n\}$ 也是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 现在把式 (1) 写成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0$$

由 (a) , 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$, 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$

(c) 设 $A=-\infty$, 记 $c_n=-a_n$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty$$

由 (b) , 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{b_n}=+\infty$, 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-\infty$

6. 首先当 $\{b_n\}$ 有无穷多项为 0 时, $\{a_nb_n\}$ 也有无穷多项为 0, 因为 $\{a_nb_n\}$, $\{b_n\}$ 非负, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}b_n=\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$$

而

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n\geqslant 0$$

可以知道不等式

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$

成立, 下面证明 $\{b_n\}$ 只有有限多项为 0 时的情况, 这等价于当 $b_n>0$ 时的情况。只需说明

$$\inf_{k\geqslant n}a_k\cdot\inf_{k\geqslant n}b_k\leqslant\inf_{k\geqslant n}(a_kb_k)\leqslant\inf_{k\geqslant n}a_k\cdot\sup_{k\geqslant n}b_k$$

因为 $\{b_n\}$ 非负, 可以得到

$$\inf_{k\geqslant n}a_k\cdot\inf_{k\geqslant n}b_k\leqslant a_kb_k$$

固定 n, 可以知道 $\inf\limits_{k\geqslant n}a_k\cdot\inf\limits_{k\geqslant n}b_k$ 是 $\{a_kb_k:k\geqslant n\}$ 的一个下界, 由下确界的定义可以知道

$$\inf_{k\geqslant n}a_k\cdot\inf_{k\geqslant n}b_k\leqslant\inf_{k\geqslant n}(a_kb_k)$$

再令 $n\to\infty$, 有

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)$$

再令 $n\to\infty$, 有

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)$$

再证明后一部分, 令 $c_n=a_nb_n$, 则 $a_n=c_n/b_n$. 则有

$$\begin{aligned}\inf_{k\geqslant n}a_k&=\inf_{k\geqslant n}\frac{c_k}{b_k}\geqslant\inf_{k\geqslant n}c_k\cdot\inf_{k\geqslant n}\frac{1}{b_k}\\&=\inf_{k\geqslant n}(a_kb_k)\cdot\frac{1}{\sup_{k\geqslant n}b_k}\end{aligned}$$

移项后再令 $n\to\infty$, 就可以得到

$$\liminf_{n\to\infty}(a_nb_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$

7. 下证如下不等式

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

设

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

如果 $q=+\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$. 当 $q=0$ 时显然成立

不妨设 $0<q<+\infty$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 N 当 $n\geqslant N$ 时 , $a_{n+1}/a_n>q-\varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}>q-\varepsilon,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}>q-\varepsilon,\quad \cdots,\quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}>q-\varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来, 得 $a_{N+k}>(q-\varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n>a_N(q-\varepsilon)^{-N}(q-\varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n}>\sqrt[n]{a_N(q-\varepsilon)^{-N}}(q-\varepsilon)$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n}\geq q-\varepsilon$$

再令 $\varepsilon\to0$, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n}$$

设

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

如果 $q=+\infty$, 不等式当然成立. 故不妨设 $q<+\infty$. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 当 $n\geq N$ 时 , $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad \cdots,\quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q+\epsilon$$

把这些不等式乘起来得 $a_{N+k}<(q+\varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n<a_N(q+\varepsilon)^{-N}(q+\varepsilon)^n$$
$$\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\epsilon)^{-N}}(q+\epsilon)$$

由此即得

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant q+\varepsilon$$

再让 $\varepsilon\to0$, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

综上可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$$

8. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$，则存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得
$$\lim_{n_k\to+\infty} a_{n_k} = b \neq a$$
则
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{n_1}+\cdots+a_{n_k}}{k} = b \neq a$$
矛盾

9. 用反证法. 如果
$$\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) < 1$$
则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时
$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) < 1$$
经过变形后可以得到
$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}$$
由此可以看出 $\{a_n/n\}$ 是一个严格递减的数列, 因为
$$S_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \to +\infty, \quad k \to \infty$$
故一定存在一个 k_0, 使得 $S_{k_0} > a_n/n$, 此时
$$\frac{a_{n+k_0}}{n+k_0} < \frac{a_n}{n} - S_{k_0} < 0$$
这与 $a_n > 0$ 矛盾.

10. 用反证法。如果
$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n < \mathrm{e}$$
则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时
$$\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
即为
$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n} < 1 + \frac{1}{n-1}$$
整理之后可以得到
$$\frac{x_n}{n-1} - \frac{x_{n+1}}{n} > \frac{x_1}{n}$$
与上题同理，可以导出矛盾。

3.7.2 第二组参考题

1. $\lim_{n\to+\infty} na = +\infty$，故存在 n 使得 $na > b$
2. 若 A 无最大值则 $\sup A \in B$，则 $\sup A$ 就是 B 中最小值，若 $\exists b \in B$，使得 $b < \sup A$
   由于 $\forall x \in A, \quad x < b \Rightarrow \quad \sup A \leqslant b$ 矛盾
   若 A 有最大值类似可得 B 无最小值。
3. 由于 A, B 是非空的, 可设存在 $a \in A, b \in B$. 不妨设 $a < b$, 于是 $[a, b] \subset E$. 用区间的

中点 $(a+b)/2$ 将此区间平分. 如果此中点属于 A, 那么取 $a_1=(a+b)/2, b_1=b$; 否则, 令 $a_1=a, b_1=(a+b)/2$. 按照作对分区间套的办法, 可作出闭区间套 $[a_k, b_k]$, 其中 $a_k\in A, b_k\in B\,(k\in\mathbf{N}^*)$. 设这些区间的公共点为 c, 则有 $a_k\to c, b_k\to c(k\to\infty)$. 很明显, 如果 $c\in A$, 是 $b_n\in B$ 的极限，若 $c\in B$ 则是 $a_n\in A$ 的极限

4. $x_0=\sqrt{7}, x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}, x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x}_n}, n=0,1,2,\cdots$

令 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$, 则 $f(x)=x\Leftrightarrow x=2$

$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$$

则

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-f(2)|=\left|f'(\xi)\right|\cdot|x_n-2|\quad 0\le\xi\le\sqrt{7}$$

由于

$$\left|f'(\xi)\right|\le\frac{1}{4\sqrt{7}\cdot\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}<1$$

故 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 2 可得 $\{x_n\}$ 收敛于 2

5. 在等式中取 $y_n=-x_n(n\in\mathbf{N})$, 则得

$$0=\varlimsup_{n\to\infty}x_n-\varliminf_{n\to\infty}x_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty}x_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n$$

故 $\{x_n\}$ 收敛

6. (1) 对任意正整数 N, 由 $\{x_n\}$ 是正数列及 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 必存在 n 使得

$$x_n<\min\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$$

现设 n 是满足该条件的最小正整数，则

$$x_k\ge\min\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}, k=N+1,N+2,\ldots,n-1$$

而显然亦有

$$x_k\ge\min\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}, k=1,2,\ldots,N$$

故

$$x_n<x_k, k=1,2,\ldots,n-1$$

注意这里的正整数 N 是任意的，因而存在无穷多个满足条件的 n .

(2) 设 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n=c>0$，存在 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 c，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N, n_k\geqslant N$ 时

$$\frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}}>\frac{c-\varepsilon}{x_{n_k}}$$

可得

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}}\ge 1-\frac{\varepsilon}{c}$$

由 ε 的任意性可得

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}}\geqslant 1$$

即得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$$

7. $|x_{n+1}|\le\frac{1}{|q|}|y_n|+\frac{|p|}{|q|}|x_n|\Rightarrow\{x_n\}$ 有界。
设 $\{x_n\}$ 的上极限为 A，下极限为 B。对

$$y_n-px_n=qx_{n+1}$$

两边分别取上极限和下极限可得

$$qA+pB=qB+pA$$
$$(q-p)(A-B)=0$$
$$A=B$$

8. 不妨设 $A=0$，不然考虑 $\left\{x_n-\frac{A}{3}\right\}$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}-\frac{A}{3}+2\left(x_n-\frac{A}{3}\right)\right)=0$$

所以不妨设 $A=0$，只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则存在一个子列 $\{x_{k_n}\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=a$, 因为 $\{x_n\}$ 有界, 则 a 为有限数。则有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2k_n}+2x_{k_n})=\lim_{n\to\infty}x_{2k_n}+2\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=0$$

故可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2k_n}=-2a$, 由上极限的定义可知 $-2a\leqslant a$, 即 $a\geqslant 0$. 又因为

$$\lim_{n\to\infty}(x_{4k_n}+2x_{2k_n})=\lim_{n\to\infty}x_{4k_n}+2\lim_{n\to\infty}x_{2k_n}=0$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{4k_n}=4a$, 再由上极限的定义可知 $4a\leqslant a$, 即 $a\leqslant 0$. 这迫使 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=a=0$, 同理可以证明 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

9. 对任意的 $a\in[-1,1]$, 设 $\varphi=\arcsin a$
引理：我们先证明，对任意的 $\delta>0$，存在无穷多组正整数对 (m,n) 使得

$$|n-2m\pi|<\delta$$

取一个正整数 N 使得 $N>\frac{1}{\delta}$, 令 $x_k=2k\pi-[2k\pi],\quad k=1,2,\ldots,N+1$ 则我们有 $x_k\in[0,1)$, 从而在这 $N+1$ 个数中，存在两个数 $x_i,x_j(i<j)$ 使得

$$|x_i-x_j|<\frac{1}{N}<\delta$$

代入 x_i,x_j 的表达式，就得到

$$|([2j\pi]-[2i\pi])-2(j-i)\pi|<\frac{1}{N}<\delta$$

由于

$$\begin{aligned}&[2j\pi]-[2i\pi]\\&\ge 2(j-i)\pi-|([2j\pi]-[2i\pi])-2(j-i)\pi|\\&>2\pi-\frac{1}{N}\ge 2\pi-1>0\end{aligned}$$

故 $[2j\pi]-[2i\pi]$ 是正整数，显然 $j-i$ 也是正整数，所以我们证明了，存在这样的

两个正整数 $n=[2j\pi]-[2i\pi],\quad m=j-i$, 使得

$$|n-2m\pi|<\delta$$

假设这样的正整数对只有有限个,那么根据 2π 的无理性，这有限个正整数对 (m,n) 对应的 $|n-2m\pi|$ 都是正数，而其它的正整数对 (m,n) 对应的 $|n-2m\pi|$ 都不小于正数 δ, 这表明全体 $|n-2m\pi|$ 具有最小值（并且这个最小值是正的）. 但根据 $\delta>0$ 的任意性和刚刚证明的 (m,n) 的存在性，这是不可能的. 综上，这样的 (m,n) 有无穷多个，引理证毕.

回到原题，对于任意的 $\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<1$，然后考虑: 首先在引理中取 $\delta=\varepsilon$, 然后设正整数对 (m_0,n_0) 满足

$$|n_0-2m_0\pi|<\varepsilon$$

如果 $n_0-2m_0\pi<0$, 令 $f(k)=3+n_0k-2m_0k\pi-\varphi$, 则

$$f(0)=3-\varphi\geq 3-\frac{\pi}{2}>1>\varepsilon, f(k)-f(k-1)\in(-\varepsilon,0)$$

所以一定存在正整数 k 使得 $f(k)\in(0,\varepsilon)$ 类似地，如果 $n_0-2m_0\pi>0$, 令 $f(k)=n_0k-2\left(1+m_0k\right)\pi-\varphi$, 同理可证存在正整数 k 使得 $f(k)\in(0,\varepsilon)$ 总之，两种情况下，都能构造出正整数对 (m,n)，使得

$$0<n-2m\pi-\varphi<\varepsilon$$

如果这样的正整数对只有有限组，取其中使得 $|n-2m\pi-\varphi|$ 最小的一组 (m_1,n_1), 则不存在正整数对 (m,n), 使得

$$0<n-2m\pi-\varphi<n_1-2m_1\pi-\varphi$$

这和已证的结论矛盾. 从而我们证明了对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在无穷多组正整数对 (m,n), 使得

$$0<n-2m\pi-\varphi<\varepsilon$$

注意到此时我们有

$$|\sin n-\sin\varphi|=|\sin n-\sin(2m\pi+\varphi)|\leq|n-2m\pi-\varphi|<\varepsilon$$

显然，如果存在两个正整数对 $(m_1,n_1),(m_2,n_2)$, 使得 $0<n_i-2m_i\pi-\varphi<\varepsilon(i=1,2)$, 且 $\varepsilon<1$, 则 $n_1=n_2$ 蕴含 $m_1=m_2$ 故对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在无穷多个正整数 n, 使得 $|\sin n-\sin\varphi|<\varepsilon$ 又由于 $a=\sin\varphi$, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 数列 $\{\sin n\}$ 有无穷多项属于 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 原命题得证.

10. 若记 S 为 $\{x_n\}$ 的全体极限点的集合, 求证 $S=[l,L]$

如果 $l=L$, 命题显然成立. 下面考虑 $l<L$, 因为 L 和 l 分别为 $\{x_n\}$ 的上下极限, 则 $S\subset[l,L]$. 则只需证明 $[l,L]\subset S$

用反证法, 任取 $x\in[l,L]$, 如果 $x\notin S$, 即说明对任意小的 $\varepsilon>0$, 存在 N_0, 使得 $n>N_0$ 时, $x_n\in[l,L]-(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, 同时 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset[l,L]$, 下面说明矛盾.

记 $S_1=[l,x-\varepsilon],S_2=[x+\varepsilon,L]$, 如果 S_1,S_2 中只有一个区间包含了 $\{x_n\}$ 中无穷多个点, 不妨设为 S_1, 那么存在 $N>N_0$, 当 $n>N$ 时, $x_n<x-\varepsilon<L$, 这与 L 是 $\{x_n\}$

的上极限矛盾. 如果两个区间内都含有 $\{x_n\}$ 中无穷多个点, 那么对任意的 $N > N_0$, 必存在 $n_0 > N$, 使得 x_{n_0+1} 与 x_{n_0} 分居在 S_1 与 S_2, 否则就化为第一种情况, 而此时正是

$$|x_{n_0+1} - x_{n_0}| \geqslant 2\varepsilon$$

与 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ 矛盾. 故$[l, L] \subset S$.

第 4 章 函数极限

4.1 函数极限的定义

4.1.1 练习题

1. 不妨在 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 的范围内考虑已知 $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上有界，且恒大于 0，设存在 $M>0$，使得

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|<M \quad \left(x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$ 则 $0<|x|<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1\right| &= \left|\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}-1\right| \\
=\left|\frac{\sqrt{1+x}-1+\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| &< M|\sqrt{1+x}-1+\sqrt{1-x}-1| \\
&< M|\sqrt{1+x}-1|+M|\sqrt{1-x}-1| \\
&= M\frac{|x|}{|\sqrt{1+x}+1|}+M\frac{|-x|}{|\sqrt{1-x}+1|} \\
&< 2M|x|<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$

2. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{5},\frac{2}{5}\varepsilon\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x^2+x-2}{x\left(x^2-3x+2\right)}+3\right| \\
&=\left|\frac{3x^2-5x+2}{x(x-2)}\right|=\left|\frac{(x-1)(3x-2)}{x(x-2)}\right| \\
&=|x-1|\cdot\frac{|3x-2|}{|x||x-2|}<|x-1|\frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}} \\
&<\frac{5}{2}|x-1|<\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}$$

故极限为-3

3. $\forall\varepsilon>0$，取 $M=\max\left\{5,\frac{1}{\varepsilon}+2\right\}$， $x>M$ 时有

$$|x^2-x|>|x^2-x-2|$$

则

$$\left|\frac{x+1}{x^2-x}\right|<\frac{|x+1|}{|x^2-x-2|}=\frac{1}{|x-2|}$$

又 $x-2>\frac{1}{\varepsilon}>0$，故 $\frac{1}{|x-2|}<\varepsilon$，所以

$$\left|\frac{x+1}{x^2-x}\right|<\varepsilon$$

则极限为 0

4.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}\\=&\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-(a+1)x^2-(a+1)x+ax+a+4-a}{x+1}\\=&\lim_{x\to-1}x^2-(a+1)x+a+\frac{4-a}{x+1}\end{aligned}$$

可得当 $a=4$ 时，极限存在，极限为 $\lim\limits_{x\to-1}x^2-5x+4=10$

5. 由

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$$

知 $x^2+ax+b=0$ 在 $x=2$ 时，故 $b=-4-2a$，而

$$\left|\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}-2\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2+a)}{(x+1)(x-2)}-2\right|=\left|\frac{a-x}{x+1}\right|$$

若 $x\to2$，应有 $\left|\frac{a-x}{x+1}\right|\left|\frac{a-x}{x+1}\right|\to0$，故 $a=2$，此时 $b=-4-2a=-8$

6. (1)$a<-1$ 时有

$$\left|\frac{a+\sin\frac{1}{x}}{x}\right|=\frac{\left|a+\sin\frac{1}{x}\right|}{|x|}>\frac{|a+1|}{|x|}$$

由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|a+1|}{|x|}=+\infty$$

，知 $a<-1$ 时可以

(2)$a>1$ 时

$$\left|\frac{a+\sin\frac{1}{x}}{x}\right|>\frac{|a-1|}{x}$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|a-1|}{x}=+\infty$ 知 $a>1$ 也可以

(3)$a\in[-1,1]$ 时，$\exists\theta_0\in(0,2\pi)$ 使得

$$a+\sin\theta_0=0$$

取

$$x_1=\frac{1}{\theta_0}\quad x_2=\frac{1}{\theta_0+2\pi}\quad\cdots\cdots x_n=\frac{1}{\theta_0+2n\pi}$$

则

$$\left|\frac{a+\sin\frac{1}{x^k}}{x_k}\right|=0<1$$

故

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a+\sin\frac{1}{x}}{x}\neq\pm\infty$$

7. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right\}$， $\forall x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 有

(i)$x\in(\alpha,\alpha+\delta)$ 时有

$$
\begin{aligned}
&|\ln x-\ln\alpha|=\ln\frac{x}{\alpha}=\ln\left(\frac{x}{\alpha}-1+1\right)<\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\\
&<\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}
$$

(ii) 当 $x\in(\alpha-\delta,\alpha)$ 时，有

$$\frac{\alpha}{2}<x<\frac{3}{2}\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&|\ln x-\ln\alpha|=\ln\frac{\alpha}{x}=\ln\left(\frac{\alpha}{x}-1+1\right)\\
&<\frac{(\alpha-x)}{x}<\frac{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}{\frac{\alpha}{2}}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

故

$$x\in O_\delta(a)-\{a\}$$

时 $|\ln x-\ln\alpha|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\alpha}\ln x=\ln\alpha$

8. 取 $\delta=1$，考虑 $x\in(a-1,a)$ 与 $(a,a+1)$ 上的情况，首先证 $f(x)=e^{a+1}(x-a)+e^a-e^x$ 在 $(a,a+1)$ 恒大于 0

$$
\begin{aligned}
&f(a)=0\\
&f'(x)=e^{a+1}-e^x>0\quad(x<a+1)
\end{aligned}
$$

故 $f(x)>0$，即

$$e^x-e^a<e^{a+1}(x-a)$$

同理可证当 $a-1<x<a$ 时

$$e^a-e^x<e^{a+1}(a-x)$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{e^{a+1}}\right\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|e^x-e^a|<e^{a+1}|x-a|<e^{a+1}\cdot\frac{\varepsilon}{e^{a+1}}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to a}e^x=e^a$

9. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\quad\forall0<|x|<\delta$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta'=\sqrt[3]{\delta}$，$\forall0<|x|<\delta'$，有

$$|f(x^3)-A|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f\left(x^3\right)=A$

若 $\lim\limits_{x\to0}f\left(x^3\right)=A$，则 $\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0,\quad\forall\quad0<|x|<\delta$ 有

$$|f\left(x^3\right)-A|<\varepsilon$$

其中 x^3 可以是 $\left(0,\delta^3\right)$ 与 $\left(-\delta^3,0\right)$ 上的任意数

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta'=\delta^3$，$\forall0<|x|<\delta^3$ 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0} f\left(x^3\right)$ 同时存在或不存在, 而当它们存在时必相等

10. 不一定，取

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ 为正数} \quad (x\geq 0)\\ -1 & x \text{ 为负数} \quad (x<0)\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在，但是 $\lim\limits_{x\to0} f\left(x^2\right)=1$

11. 任取一点 x_0，$\forall\delta>0$ 则 $(x_0-\delta,x_0),(x_0,x_0+\delta)$ 上必有无理数 x_1 和有理数 x_2，不妨设极限存在，为 A，$\lim\limits_{x\to0} D(x)=A$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\quad x\in O_\delta(x_0)-\{x_0\}$ 时，有

$$|D(x)-A|<\varepsilon$$

不妨取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$，将代入知

$$|D(x_1)-A|<\frac{1}{3}\quad |D(x_2)-A|<\frac{1}{3}$$

即 $|A|<\dfrac{1}{3}\quad |1-A|<\dfrac{1}{3}$ 有 $|A|+|1-A|<\dfrac{2}{3}$，但是

$$|A|+|1-A|>|(A)+(1-A)|=1$$

矛盾，故 $D(x)$ 在 x_0 无极限，由 x_0 的任意性，则 $D(x)$ 在每一点都是无极限。

12. 考虑

$$f(x)=\begin{cases}x & ,x \text{ 为有理数}\\ 1 & ,x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

则 $f(x)$ 只在 $x=1$ 极限存在。

13. 设 $f(x)$ 的周期为 T，则任取 x_0，有 $f(x_0)=f(x_0+nT)$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，令 $n\to+\infty$，有 $f(x_0)=0$，由 x_0 的任意性可得 $f(x)\equiv0$

14. 若 f 为周期函数，且 $f(x)$ 为有理分式函数，且 $f(x)$ 非常值函数。

由于 $f(x)$ 为有理分式函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad A(A\neq0),\pm\infty$ 这三种情况。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则由上题知 $f(x)\equiv0$ 矛盾

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则令 $h(x)=f(x)-A$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=A-A=0$，$h(x)$ 也是周期函数，从而有 $h(x)\equiv0,\quad f(x)\equiv A$ 矛盾

(3) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$，这与 $f(x)$ 是周期函数矛盾。

综上，可得任何非常值的周期函数不可能是有理分式函数。

4.2 函数极限的基本性质

4.2.1 练习题

1. (1)$\dfrac{x^k}{a^x}=\left(\dfrac{x}{(a^k)^x}\right)^k$ 令 $b=a^{\frac{1}{k}}$ 知 $b>1$，则考虑 $\dfrac{x}{b^x}$ 在 $x\to+\infty$ 时的情况。

令 $f(x)=\dfrac{x}{b^x}$，则

$$f'(x)=\frac{b^x-b^x\ln b\cdot x}{b^{2x}}=\frac{1-x\ln b}{b^x}$$

则在 $\left(\frac{1}{\ln b},+\infty\right)$ 上，$f(x)$ 单调递减，由命题 4.2.2 知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}$ 的极限必然存在，由 Heine 归结原理知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0\quad(b>1)$$

可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{b^x}\right)^k=0$$

(2)$\frac{\ln x}{x^k}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\ln x^k}{x^k}$ 做代换 $t=x^k$ 知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$ 再做代换 $y=\ln t$ 知

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}$$

由（1）知

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^k}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{\ln x^k}{x^k}=\frac{1}{k}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln a}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln a}=1$$

(4)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=1$$

2.

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{1+y^3}}{\sqrt{y^2+y^3+\sqrt{y}}}\\&=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\sqrt{\frac{1}{y}+1+\frac{1}{\sqrt{y}}}}\\&=\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{y}+1+\frac{1}{\sqrt{y}}}\right)}=\frac{\lim_{y\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\lim_{y\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{y}+1}+\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}}\\&=\frac{1}{1+0}=1\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x-1}{x+2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}}\\&=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}}\\&=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}\\&=e^{1\cdot0}=1\end{aligned}$$

4. 令 $\sqrt[n]{1+x}-1=t$，则 $x=(t+1)^n-1$ 则

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{t\to0}\frac{t}{(t+1)^n-1}=\lim_{t\to0}\frac{t}{t^2+nt^{n-1}\cdots+nt}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^{n-1}+nt^{n-2}\cdots+n}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(bx)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{f(bx)}{bx}\cdot b=\lim_{bx\to0}\frac{f(bx)}{bx}\cdot b\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot b=bl\end{aligned}$$

6. 由第四题

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$$

知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-1}{-\sin x}$$

令 $\sin x=t$ 知

$$原式=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1-t}-1}{-t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

7. f 的值域 $S=\{y|存在x\in(a,+\infty),使得f(x)=y\}$

不妨设 f 单调增，设 $\beta=\sup S$，由上确界的定义知 $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in(a,+\infty)$ 使得 $f(x_0)>\beta-\varepsilon$ 则 $\forall\varepsilon>0$，取 $M=x_0$，$\forall x>M$ 有

$$\beta-\varepsilon<f(x_0)<f(x)<\beta$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta$

8. $f(x)$ 为 (a,b) 上的单调增加函数，则 $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ 存在，由 Heine 归结原理知

$$\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

则（2）得证

令 $S=\{y\mid y=f(x),x\in(a,b)\}$，则 $B=\sup S$，由上确界定义得 $\forall\varepsilon>0$，有 x_0，使得 $B-\varepsilon+f(x_0)<B$ 取 $\delta=b-x_0$，则 $\forall x\in(b-\delta,b)$ 有

$$B-\varepsilon<f(x_0)<f(x)<B$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{x\to b}f(x)=B$$

由极限的唯一性得 $B=A$，故 A 是区间 $(a.b)$ 上函数 f 得上界。

9. 取 $\varepsilon=A-C>0$，由极限得定义知，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

即

$$f(x)>A-(A-C)=C$$

故命题得证。

10.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A<\lim_{x\to a^+} f(x)=B$$

取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0,\quad \exists\delta_1>0,\quad \forall x\in(a-\delta_1,a)$ 有

$$|f(x)-A|<\frac{B-A}{2}$$

由此可知 $f(x)<\dfrac{A+B}{2}$

取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0,\quad \exists\delta_2>0,\quad \forall y\in(a,a+\delta)$ 有

$$|f(y)-B|<\frac{B-A}{2}$$

由此可知 $f(y)>\dfrac{A+B}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $\forall x\in(a-\delta,a)$ 时

$$f(x)<\frac{A+B}{2}$$

$\forall y\in(a,a+\delta)$ 有

$$f(y)>\frac{A+B}{2}$$

即 $f(y)>f(x)$

11. $f(x)$ 在 x_0 左侧极限存在 $\Leftrightarrow$ 存在 A, 对 $\forall\{x_n\}$ 单增趋于 x_0，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

$\Rightarrow$：显然

$\Leftarrow$：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 不存在，则 $\exists\varepsilon_0>0$，使得 $\forall\delta>0,\quad \exists x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有

$$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

取 $\delta_1=1$，则 $\exists x_1$，使得

$$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

取 $\delta_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},|x_1-x_0|\right\}$，则 $\exists x_2\in(x_0-\delta_2,x_0)$，使得

$$|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$$

依次下去。取 $\delta_n=\min\left\{\dfrac{1}{n},|x_{n-1}-x_0|\right\}$，则 $\exists x_n\in(x_0-\delta_n,x_0)$ 使得

$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

则 $\{x_n\}$ 单增趋于 x_0，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq A$，矛盾。

类似可得。$f(x)$ 在 x_0 右侧极限存在 $\Leftrightarrow$ 存在 A，对 $\forall\{x_n\}$ 单减趋于 x_0，均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

回到本题，不妨设 $f(x)$ 单增，$\forall x_0,\quad \{x_n\}$ 单增趋于 x_0，则 $\{f(x_n)\}$ 单增且 $f(x_n)\leqslant f(x_0)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。

设 $\{y_n\}$ 是另一单增趋于于 x_0 的数列，则 $\forall y_n$，存在 x_{n_k}，使得 $y_n\leq x_{n_k}$，则 $f(y_n)\leqslant f(x_{n_k})$，故

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n)\leq\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

同理

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_n\right)$，故 $f(x)$ 在 x_0 的左侧极限存在，类似可得右侧极限也存在。

4.3 两个重要极限

4.3.1 练习题

1. (1) 取 $t = \dfrac{1}{x}$ 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to0^+} \left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{t\to0^+} \left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right)\right)^{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{t\to0^+} \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan t\right)^{-\frac{\pi}{2\arctan t}\cdot\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{2\arctan t}}} \\
&= \lim_{t\to0^+} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan t\right)^{-\frac{2}{2\arctan t}}\right]^{-\frac{2\arctan t}{\pi\cdot t}} \\
&= \lim_{t\to0^+} e^{-\frac{2}{\pi}\frac{\arctan t}{t}} = e^{-\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

(2) 令 $t = \dfrac{\pi}{2} - x \quad t \to 0^+$ 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t\to0^+} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]^{\tan\left(\frac{x}{2}-t\right)} = \lim_{t\to0^+} [\cos t]^{\frac{1}{\tan t}} \\
&= \lim_{t\to0^+} \left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\tan t}}{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}} \\
&= \lim_{t\to0^+} \left[\left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{\tan t}} \\
&= \lim_{t\to0^+} e^{\frac{-2\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2}{t}} = 1
\end{aligned}$$

(3)

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-x^2\cdot(-1)}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} = e^{-2}$$

(4) 令 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ 则

$$\begin{aligned}
&\text{原式} = \lim_{t\to0^+} \left[\cos\left(\frac{x}{2} - t\right)\right]^t = \lim_{t\to0^+} (\sin t)^t \\
&= \lim_{t\to0^+} e^{t\ln(\sin t)} = \lim_{t\to0^+} e^{\frac{t}{\sin t}\cdot\sin t\ln\sin t}
\end{aligned} = 1$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot 2\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}1\cdot 2\cdot\frac{-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-1
\end{aligned}
$$

(6) 令 $y=1-x,\quad y\to 0$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{y\to 0}y\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right)\\
&=\lim_{y\to 0}y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\\
&=\frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

2. (1) 由

$$0<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}$$

则令 $x\to+\infty$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

(2)

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}}=1$$

3. 由下一题立刻得到

4.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x\ldots+a_n^x}{n}-1+1\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x\ldots+a_n^x}{n}-1+1\right)^{\frac{1}{\frac{a_1^x+\ldots+a_n^x}{n}-1}\cdot\frac{\frac{a_1^x+\cdots+a_n^n}{n}-1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{a_1^x\ldots+a_n^x}{n}-1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^x-1}{x}}=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i}\\
&=e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}
\end{aligned}
$$

5.

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

由 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 知上式变形为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

再由 $\cos 2\theta=-1+2\cos^2\theta$ 可得 $\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta}$，取 $x=\frac{\pi}{2}$ 知 $\cos\frac{x}{2}=$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\frac{x}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$ 故

$$\frac{\sin x}{x}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较

4.4.1 练习题

1. (1)

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}=\frac{2\tan x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}\sim\tan x\sim 2x(x\to 0)$$

故为 1 阶

(2)

$$\ln x-\ln a=\ln\frac{x}{a}=\ln\left(\frac{x}{a}-1+1\right)\sim\frac{1}{a}(x-a)(x\to a)\quad a>0$$

故为 1 阶

(3)

$$a^x-1a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim\ln a\cdot x(x\to a)\quad a>0$$

故为 1 阶

(4)

$$a^{x^2}-b^{x^2}=b^{x^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\right]\sim\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\sim x^2\ln\frac{a}{b}(x\to 0,\quad a,b>0)$$

故为 2 阶

(5) 令 $t=x-1$ 则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\ln\left(t+1+\cos\frac{\pi}{2}(t+1)\right)=\ln\left(1+t-\sin\frac{\pi}{2}t\right)\\&\sim t-\sin\frac{\pi}{2}t\end{aligned}$$

而

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}t}{t}=1-\frac{x}{2}$$

故

$$t-\sin\frac{\pi}{2}t\sim\left(1-\frac{\pi}{2}\right)t$$

故为 1 阶

(6) 令 $t=x-1$ 则 $t\to 0^+$ 故

$$\text{原式}=\ln(t+1)\ln t\sim\tan t$$

由 $\ln x=o\left(x^{-\alpha}\right)\quad\left(x\to 0^+\right)\quad(\alpha>0)$ 知阶数为 $1-\varepsilon$ 任意 $\varepsilon>0$

2. $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=o(x)$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$ 又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 极限存在可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot 2=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，所以 $f(x)=o(x)\quad(x\to 0)$

3. 等价于证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=0\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\varepsilon}}{a^{x}}=0$$

以及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}}{x^{x}}=0$$

其中前两个在第四章第二节第一题中已证。故只需证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^{x}}{x^{x}}=0(a>1)$ 当 x 充分大时，$\frac{a}{x}<1$ 且 $x>1$ 有

$$0<\left|\left(\frac{a}{x}\right)^{x}\right|<\frac{a}{x}$$

令 $x\to+\infty$ 有 $\frac{a}{x}\to 0$ 由夹逼准则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^{x}=0$$

4. (1)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin^2 x+e^{x}\right)-x}{\ln\left(x^2+e^{2x}\right)-2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin^2 x}{e^{x}}+1\right)}{\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot e^{x}\\&=\lim_{x\to 0}e^{x}=1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(x+1)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-1\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\frac{1}{3}x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{3}x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x}-1}{\frac{1}{3}x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x}{\frac{1}{3}x}=1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2}{3}\sin x\right)^x-1\right]}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\sin x\right)}-1}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\sin x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{2}{3}\sin x}{x^2}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsint}}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}\\
&=e^{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\arcsin t}{t}\right)}\\
&=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\arcsin t}{t}-1+1\right)}{t^2}}=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\arcsin t}{t}-1}{t^2}}\\
&=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t-t}{t^3}}=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t-t}{\arcsin^3 t}}\quad(\arcsin t\sim t)
\end{aligned}$$

令 $x=\arcsin t$，故 $t\to 0\quad x\to 0$

$$\text{原式}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$$

4.5 对于教学的建议

4.5.1 参考题

1. 不妨设 $f(x)$ 单调递增，由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 可知 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$ 令 $\delta=x_n-a$，则 $\forall x\in(a,x_n)$，存在 c 满足 $a<x<c$，取 $\varepsilon=c-a$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 知 $\exists K$，当 $k>K$ 时

$$|x_k-a|<c-a$$

又由于 $x_k>a$ 恒成立，故 $x_k<c$ 取 x_{n+k} 知 $n+k>N$ 时有

$$|f(x_{n+k})-A|<\varepsilon$$

又由 $n+k>K$ 知 $x_{n+k}<c<x$，即无论 x 取 (a,x_n) 中任意数，有 n,k 使得

$$a<x_{n+k}<x<x_n$$

又由于 $f(x)$ 单调递增则

$$f(x_{n+k})<f(x)<f(x_n)$$

又 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，$|f(x_{n+k})-A|<\varepsilon$，则

$$A-\varepsilon<f(x_{n+k})<f(x)<f(x_n)<A+\varepsilon$$

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$

2. (反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$，$\exists\varepsilon_0>0,\quad\forall N\quad,\exists n>N$，使得

$$|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$$

又由 $x_n \in [a,b]$ 知 $x_n \geq a+\varepsilon_0$，取 $\varepsilon = f\left(a+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)-f(a), \quad \forall N, \quad \exists n>N$ 有

$$\begin{aligned} x_n \geq a+\varepsilon_0, \quad & |f(x_n)-f(a)| = f(x_n)-a \\ & \geq f(a+\varepsilon_0)-f(a) > f\left(a+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)-f(a)=\varepsilon \end{aligned}$$

知

$$|f(x_n)-f(a)|>\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ 矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

3. (1) 成立，$\Rightarrow$：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 知 $\forall\varepsilon>0, \quad \exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$\forall\delta>0, \exists N$ 当 $n>N$ 时，$0<|x_n-a|<\delta$，则有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

$\Leftarrow$：(反证法)，设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$，则不妨设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq A$

$\exists\varepsilon_0>0, \quad \forall\delta>0, \quad 0<x-a<\delta$ 中存在 x，使得

$$|f(x)-A| \geqslant \varepsilon_0$$

取 $\delta_1=1$，$\exists x_1\in\{x \mid 0<x-a<1\}$ 使得

$$|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$$

取 $\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2}, x_1-a\right\}$，知 $\exists x_2\in\{x \mid 0<x-a<\delta_2\}$ 有

$$|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$$

...... 依次下去

取 $\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n}, x_{n-1}-a\right\}$, 知 $\exists x_n\in\{x \mid 0<x-a<\delta_n\}$

$$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$$

故 x_n 单调递减趋于 a，但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$ 矛盾，故 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

(2) 成立，$\Rightarrow$：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 知 $\forall\varepsilon>0, \quad \exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$\forall\delta>0, \exists N$ 当 $n>N$ 时，$0<|x_n-a|<\delta$，则有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

$\Leftarrow$：(反证法)，设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$，则 $\exists\varepsilon_0, \forall\delta>0, \quad \exists x\in O_\delta(a)-\{a\}$ 使得

$$|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$$

取 $\delta_1=1$，$\exists x_1\in O_{\delta_1}(a)-\{a\}$，使得

$$|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$$

取 $\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},|x_1-a|\right\},\exists x_2\in O_{\delta_2}(a)-\{a\}$，使得

$$|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$$

...... 依次下去

取 $\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},|x_{n-1}-a|\right\},\exists x_n\in O_{\delta_n}(a)-\{a\}$ 有

$$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$$

则可知 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\quad x_n\neq a,\quad |x_{n+1}-a|<|x_n-a|$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$ 矛盾，故 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

4.

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}&=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$，则

$$\text{原极限}=\lim_{t\to0}2\sin t\cos\frac{1}{4t}=0$$

当 $\alpha\geq1$ 时，$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\sin t\cos\frac{1}{4t}}{t^\alpha}$ 不存在；当 $\alpha<1$ 时，极限为 0

5. (i) 若 $a>1$ 则

$$\begin{aligned}&\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(a^x-1)-\ln x(a-1)}{x}}\\&=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)-\ln x(a-1)}{x}}\\&=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a-1)x}{(a-1)x}\cdot(a-1)}\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\ln a$$

故原极限 $=a$

(ii) 若 $0<a<1$ 则

$$\begin{aligned}&\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1-a^x)-\ln x(1-a)}{x}}\\&=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-a^x)}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}}\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1-a^x)}{x}=0$，故原极限 $=1$

6. (1) $\forall x$ 有

$$|f(x)|\leqslant|\sin x|\leqslant|x|$$

当 $x\neq0$ 时，有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq1$，由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a_1+2a_2\cdots+na_n$$

故

$$\left|\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\right|=|a_1+2a_2\cdots+na_n|\leqslant1$$

(2)$x>0$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant 1$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to0} a_1\frac{\ln(1+x)}{x}\ldots+a_n\frac{\ln(1+nx)}{x}\\ &= a_1+2a_2\cdots+na_n\end{aligned}$$

故

$$\left|\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\right| = |a_1+2a_2\cdots+na_n| \leqslant 1$$

7. 由于

$$\sin nx = n\sin x\left(1-\frac{n^2-1}{3}\sin^2 x+o\left(\sin^2 x\right)\right)$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-n\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{n(n^2-1)}{3}\sin^3 x+o\left(\sin^3 x\right)}{x^3}\\ &= -\frac{n\left(n^2-1\right)}{3}+\lim_{x\to0}\frac{o\left(\sin^3 x\right)}{\sin^3 x}\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}\\ &= -\frac{n\left(n^2-1\right)}{3}+\lim_{x\to0}\frac{o\left(\sin^3 x\right)}{\sin^3 x} = -\frac{n\left(n^2-1\right)}{3}\end{aligned}$$

8. (1) 若 x 为有理数 $x=\dfrac{p}{q}$，取 $m>q$ 知 $m!x$ 为整数，故 $\cos(\pi m!x)^{2n}=1$

(2) 若 x 为无理数，则无论 m 取何值，$\cos(\pi m!x)$ 中 $xm!x\neq kx(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

故 $|\cos(xm!x)|<1$ 则

$$\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi m!x)]^{2n}=0$$

故 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(\pi m!x)]^{2n}=0$

9. (1) 在 $(0,+\infty)$ 上任取一个数 x_0，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A(a$ 为有限数$)\ \forall\varepsilon>0,\quad\exists N$，当 $x>N$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

任意 $\varepsilon>0$ 有

$$f\left(x_0\right)=f\left(2x_0\right)\ldots=f\left(2^m x_0\right)\ldots\ldots$$

则存在 m 使得 $2^m x_0>N$，则

$$\left|f\left(2^m x_0\right)-A\right|<\varepsilon$$

故 $|f(x_0)-A|<\varepsilon$，由 ε 的任意性可得 $f(x_0)=A$ 再由 x_0 的任意性可得 $f(x)=A$

(2) 若 $0<a<1$ 则

$$f(x)=f(ax)=\cdots\quad=f\left(a^n x\right)$$

可得

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f\left(a^n x\right)=f\left(0^+\right)$$

若 $a>1$ 则

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f\left(a^n x\right)=f(+\infty)$$

10. f 在 $x=0$ 附近有界，故 $\exists\delta$ 使得 $x\in O_\delta(0)-\{0\}$ 时有 $|f(x)|<M$，由 $f(ax)=bf(x)$ 知 $x\in O_{\frac{\delta}{a}}(0)-\{0\}$ 时 $|f(x)|<\dfrac{M}{b}$ 以此类推可得 $x\in O_{\frac{\delta}{a^n}}(0)-\{0\}$ 时有 $|f(x)|<\dfrac{M}{b^n}$ $\forall\varepsilon>0,\exists m$ 使得 $\dfrac{M}{b^m}<\varepsilon$，令 $\delta'=\dfrac{\delta}{a^m}$ 则 $\forall x\in O_{\delta'}(0)-\{0\}$ 有

$$|f(x)|<\frac{M}{b^m}<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

11. 对于 $1\leq a\leq2$, 因为 f 单调递增, 可知

$$\frac{f(x)}{f(x)}\leq\frac{f(ax)}{f(x)}\leq\frac{f(2x)}{f(x)}$$

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$;

对于 $0<a<1$, 存在 n 使得 $\dfrac{1}{2^n}\leq a<\dfrac{1}{2^{n-1}}$, 此时有

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{f(x)}\leq\frac{f(ax)}{f(x)}\leq\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{f(x)}$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(2x)}=1$, 所以

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{f(x)}=\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{f\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)}\cdots\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)}=\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{f\left(2\frac{x}{2^n}\right)}\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{f\left(2\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\cdots\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{f\left(2\frac{x}{2}\right)}\to1,(x\to+\infty)$$

再次由夹逼逼准则可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$;

对于 $a>2$, 经过和 $0<a<1$ 类似的讨论后，可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$, 综上，对于 $a>0$, 均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$

12. 利用下面第 14 题，取 $T=1$，　$g(x)=x$ 即可

13. 利用下面第 14 题, 取 $T=1$，　$g(x)=x^{n+1}$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}\cdot\frac{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)x^n}$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)x^n+C_{n+1}^2x^{n-1}\cdots\cdots+(n+1)x+1}{(n+1)x^n}=1$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

14. (i) 当 l 为有限数时, 由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$$

$\forall \varepsilon>0, \exists M>0(M \geq a), \forall x>M$, 有

$$\left|\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}-l\right|<\varepsilon$$

由题意, 进而有

$$\begin{aligned}(l-\varepsilon)[g(x+T)-g(x)] &< f(x+T)-f(x) \\ &< (l+\varepsilon)[g(x+T)-g(x)] \qquad (1)\end{aligned}$$

对 $\forall x \in(M, M+T], \forall n \in N_{+}$, 有 $x+n T>M$, 由 (1) 式, 依次有

$$\begin{gathered}(l-\varepsilon)[g(x+2 T)-g(x+T)]<f(x+2 T)-f(x+T) \\ <(l+\varepsilon)[g(x+2 T)-g(x+T)] \\ (l-\varepsilon)[g(x+3 T)-g(x+2 T)]<f(x+3 T)-f(x+2 T) \\ <(l+\varepsilon)[g(x+3 T)-g(x+2 T)] \\ \cdots\cdots \\ (l-\varepsilon)[g(x+n T)-g(x+(n-1) T)] \\ <f(x+n T)-f(x+(n-1) T) \\ <(l+\varepsilon)[g(x+n T)-g(x+(n-1) T)]\end{gathered}$$

将上面的式子相加，得到

$$\begin{gathered}(l-\varepsilon)[g(x+n T)-g(x)]<f(x+n T)-f(x) \\ <(l+\varepsilon)[g(x+n T)-g(x)]\end{gathered}$$

注意到 $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} g(x)=+\infty$, 故 $g(x+n T)>0$, 有

$$\begin{gathered}(l-\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(x+n T)}\right]+\frac{f(x)}{g(x+n T)}<\frac{f(x+n T)}{g(x+n T)} \\ <(l+\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(x+n T)}\right]+\frac{f(x)}{g(x+n T)}\end{gathered}$$

由于 $f(x), g(x)$ 在$[a,+\infty)$ 内闭有界 , $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} g(x)=+\infty$ 故

$$\lim _{n \rightarrow \infty}\left(1-\frac{g(x)}{g(x+n T)}\right)=1, \lim _{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x+n T)}=0$$

故对上述 $\varepsilon>0, \exists N \in N_{+}, \forall n>N, \forall x \in(M, M+T]$, 有

$$\left|\frac{f(x+n T)}{g(x+n T)}-l\right|<(l+1) \varepsilon+\varepsilon^{2}$$

于是, $\forall y>M+N T, \exists x_{0} \in(M, M+T], \exists n>N$ 使得

$$\begin{gathered}y=x_{0}+n T \\ \left|\frac{f(y)}{g(y)}-l\right|=\left|\frac{f\left(x_{0}+n T\right)}{g\left(x_{0}+n T\right)}-l\right|<(l+1) \varepsilon+\varepsilon^{2}\end{gathered}$$

故

$$\lim _{x \rightarrow+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=l$$

(ii) 当 $l=+\infty$, 由

$$\lim _{x \rightarrow+\infty} \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=+\infty$$

$\forall G>0,\exists M>0,\forall x>M$, 有

$$\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}>G$$

对 $\forall x\in(M,M+T],\forall n>N_{+}$, 有 $x+nT>M$, 所以

$$\begin{gathered}f(x+T)-f(x)>G[g(x+T)-g(x)]>0\\ f(x+2T)-f(x+T)>G[g(x+2T)-g(x+T)]>0\\ \cdots\\ f(x+nT)-f(x+(n-1)T)>G[g(x+nT)-g(x+(n-1)T)>0\end{gathered}$$

将上面的式子相加，得到

$$\begin{gathered}f(x+nT)-f(x)>G[g(x+nT)-g(x)]\\ \frac{f(x+nT)}{g(x+nT)}>G\left[1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right]+\frac{f(x)}{g(x+nT)}\end{gathered}$$

由于 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{g(x)}{g(x+nT)}\right)=1,\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x+nT)}=0$$

故对上述 $G>0,\exists N\in N_{+},\forall n>N,\forall x\in(M,M+T]$, 有

$$\frac{f(x+nT)}{g(x+nT)}>G$$

于是, $\forall y>M+NT,\exists x_0\in(M,M+T],\exists n>N$, 使

$$\begin{gathered}y=x_0+nT\\ \frac{f(y)}{g(y)}=\frac{f\left(x_0+nT\right)}{g\left(x_0+nT\right)}>G\end{gathered}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

(iii) 当 $l=-\infty$, 只需令 $h(x)=-f(x)$, 利用 (ii) 的结果即可证明。

15. 由

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$$

知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta,0<|x|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\varepsilon$$

在 $0<|x|<\delta$ 任取一点 x_0 则

$$\begin{gathered}\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|<\varepsilon\left|x_0\right|\cdots\cdots(1)\\ \left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^2}\right)\right|<\varepsilon\left|\frac{x_0}{2}\right|\cdots\cdots(1)\\ \cdots\\ \left|f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|<\varepsilon\cdot\frac{\left|x_0\right|}{2^{m-1}}\cdots\cdots(m)\end{gathered}$$

由于 $\varepsilon, |x_0|$ 已知 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ 故对于 $\varepsilon\cdot|x_0|$， $\exists M>0,\quad m>M$ 时，有

$$\left|f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|<\varepsilon\left|x_0\right|$$

$(1)+(2)\cdots+(m)$ 可得

$$\begin{aligned}&\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|<\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|+\ldots+\left|f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|\\&<\varepsilon x_0\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}\right)<2\varepsilon\left|x_0\right|\end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned}\left|f\left(x_0\right)\right|&<\left|f\left(x_0\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right|\\&<\varepsilon\left|x_0\right|+2\varepsilon\left|x_0\right|=3\varepsilon\left|x_0\right|\end{aligned}$$

知

$$\left|\frac{f\left(x_0\right)}{x_0}\right|<3\varepsilon$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\quad\forall x_0\in\{x|0<|x|<\delta\}$ 时，有

$$\left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right|<3\varepsilon$$

即 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，故 $f(x)=o(x)\quad(x\to 0)$

第 5 章 连续函数

5.1 连续性概念

5.1.1 思考题

1. 有定义知 f^2 和 $|f|$ 在 a 处连续，但是反之不成立，例如：
$$f=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ -1 & x\text{为无理数}\end{cases}$$
它在定义域上任意一点 a 都不连续，但是 f^2 和 $|f|$ 再 a 处连续。
2. 不一定
$f+g$ 连续：$f=\operatorname{sgn}x,\quad g=-\operatorname{sgn}x$，考虑在 $x=0$ 处的情形；
$f+g$ 不连续：$f=\operatorname{sgn}x,\quad g=\operatorname{sgn}x$ 考虑在 $x=0$ 处的情形；
$f\cdot g$ 连续：
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$$
考虑在 $x=0$ 处的情形；
$f\cdot g$ 不连续：$f=g=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处。
3. 任取 (a,b) 内一点 x_0，则存在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 包含 x_0
$\because f$ 在 a,b 内每个闭区间连续
$\therefore f$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上连续
$\therefore f$ 在 x_0 连续
$\therefore$ 由 x_0 任意性，知 f 在 a,b 上连续
4. (1)f 在 R 上连续
(2)f 在除 $x=0$ 外连续，$x=0$ 为第二类间断点
(3) f 在 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 连续，$x=0$ 为第一类间断点
5. (1)$x=0$ 为第一类间断点（跳跃间断点）
(2)x 为整数时为第一类间断点（跳跃间断点）
(3)x 为整数时为可去间断点
(4)$g(f(x))$ 在定义域上无间断点
(5)$x=-1$ 为第二类间断点（无穷间断点）；$x=0$ 为可去间断点；$x=1$ 为可去间断点
(6)$y(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$,$x=\dfrac{1}{p}$,(p 是不为 0 的整数) 为跳跃间断点；$x=0$ 为可去间断点

5.1.2 练习题

1. 两个叙述：

(a). $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
(b). 存在 x_n，虽 x_n 收敛于 a，但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$

要证：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$, 任何以 x_0 为极限的数列 $x_n(x_n \neq x_0)$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$

必要性：

$\because \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

但 $x_n \to x_0$，故对此 $\delta > 0$, 有正整数 N，当 $n > N$ 时，$|x_n - x_0| < \delta$

又因 $x_n \neq x_0$，故 $|x_n - x_0| < \delta$ 可改为 $0 < |x_n - x_0| < \delta$

而对适合这个不等式的 n, 显然有 $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$，当 $n > N$ 时成立，这就证明了 $\{f(x_n)\}$ 以 $f(x_0)$ 为极限

充分性：

（反证法）假设 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则对某个 $\varepsilon > 0$, 不能找到极限定义中的 δ, 即对任意 $\delta > 0$, 都可以找到 x',$0 < |x' - x_0| < \delta$, 使 $|f(x') - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$。若取 δ 为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$，得到 $x_1, x_2, x_3, \ldots$, 适合

$$0 < |x_1 - x_0| < 1, \quad |f(x_1) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$
$$0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}, \quad |f(x_2) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

可看出 $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty), x_n \neq x_0$，而 $f(x_n)$ 不以 $f(x_0)$ 为极限，与假设矛盾，证毕。

2. (1)x 为整数时为第一类间断点 (跳跃间断点)

(2)$f(x)$ 无间断点

(3)x 为整数时为第一类间断点（可去间断点）

(4)$x = -1$ 时为第二类间断点（无穷间断点）；$x = 0$ 及 $x = 1$：第一类间断点（跳跃间断点）

3. (反证法) 假设不存在这么一个 $\varepsilon \in [a, b]$, 使得 $f(\varepsilon) = A$。记 f 在 x_0 处取到最大值 $f(x_0)$, 在 x_1 处取最小值 $f(x_1)$。因 f 连续，故 f 可取遍 $[f(x_1), f(x_0)]$ 中所有值。故由假设，知 $A > f(x_0)$ 或 $A < f(x_1)$. 考虑 $A > f(x_0)(A < f(x_1)$ 同理)，记 $m = A - f(x_0)$，则对 $[a, b]$ 中任一 x_n，无论 n 多大，都有 $|f(x_n) - A| \geqslant |f(x_0) - A| > \frac{m}{2}$，与 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 矛盾！结论证完。

4. (a). $x = 0$ 时，$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(b). $x < 0$ 时，$f(x) = f\left(x^2\right) = f(1)$

(c). $x > 0$ 时，由题意，

$$f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = -\cdots + f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

故

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

综上

$$f(x) \equiv f(1)$$

5.

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\min\{f,g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

可得 $\max\{f,9\},\min\{f,g\} \in C(I)$

6.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - \max\{f(x), f_2(x), f_3(x)\} - \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

由第五题结论及连续性质，知 $f(x)$ 连续

7. $f_n(x) = \max\{-n, \min\{f(x), n\}\}$，则 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow f_n(x)$ 连续
$f_n(x)$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-n,n]$ 连续，对 $\forall n$ 成立，故 $f_n(x)$ 连续。

8. 任取定义域上有理点 x_0，则 $D(x_0) = 1$，任取一收敛于 x_0 的无理点列 x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 0 \neq 1$，再取一收敛于 x_0 的有理点列 $\{t_n\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} D(t_n) = 1$，$\therefore D(x)$ 在 x_0 处极限不存在 $\therefore D(x)$ 在 x_0 不连续，且为第二类间断点。由 x_0 任意性，知 $D(x)$ 在所有有理点均不连续，且所有有理点均为第二类间断点。当所考虑的点为无理点，也可做类似讨论，并得出同样的结果。综上可知 $D(x)$ 处处不连续。

9. 例：

$$f = \begin{cases} x, & x \text{ 是有理数} \\ -x, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

$f(x)$ 只在 $x=0$ 处连续

10. 若 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0) = 0$，则 $\forall x$，有

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x_0) f(x - x_0) = 0$$

则设 $f(x)$ 不变号，则

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

故 $f(x)$ 恒正，令 $g(x) = \ln f(x)$，则

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

可得 $g(x) = g(1)x \Rightarrow \quad \ln f(x) = x \ln f(1) \Rightarrow f(x) = (f(1))^x$

11.

$$\because f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

$\therefore f(x)$ 即是凸函数也是凹函数，又因 $f(x)$ 连续，故 f 为 R 上的线性函数
$\therefore f$ 在 R 上每一点斜率相同，任意 f 上两点连线斜率相同

$$\therefore \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

即

$$f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

12. $\Leftarrow$:

$$\lim_{\partial\rightarrow0^{+}} w_f(a,\delta)=0$$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $x\in O_\delta(a)$ 时，有

$$|f(x)-f(a)|<w_f(a)=\varepsilon$$

$\therefore f$ 在 a 连续

$\Rightarrow$:

$\because f$ 在 a 处连续

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $x\in O_\delta(a)$ 时，有

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore w_f\leqslant2|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{\partial\rightarrow0^{+}} w_f(a,\delta)=0$$

5.2 零点存在定理与介值定理

5.2.1 练习题

1. 考虑 $[x_1,x_n]$ 上的

$$F(x)=f(x)-\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$$

显然 F 在 $[x_1,x_n]$ 上连续

若 $x_1,x_2\cdots x_n$ 同为 $[x_1,x_n]$ 上的最大值（最小值同理），则取 $\varepsilon=x_1$ 即满足题意

以下考虑 $x_1,x_2\cdots x_n$ 不全为 $[x_1,x_n]$ 上的最大（小）值的情况：

由闭区间连续函数性质，$f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 必有最值。设 f 在 x_0 处取得最大值，在 x_1 取最小值，则有

$$nf\left(x_1\right)<f\left(x_1\right)+\cdots+f\left(x_n\right)<nf\left(x_0\right)$$

$$\therefore F\left(x_0\right)=\frac{nf\left(x_0\right)-\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\right]}{n}>0\quad,F\left(x_1\right)<0$$

由零点存在定理，存在 $\varepsilon\in[x_1,x_n]$, 使得 $F(\varepsilon)=0$，即

$$f(s)=\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$$

2. 设圆周

$$\begin{aligned}S&=\left\{(x,y);\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2\right\}\\&=\left\{\left(x_0+R\cos\theta,y_0+R\sin\theta\right),\quad\theta\in R\right\}\end{aligned}$$

定义 $g:R\to R$ 为

$$g(\theta)=f\left(x_0+R\cos\theta,y_0+R\sin\theta\right)$$

则 g 为周期为 2π 的函数

再定义

$$h(\theta)=g(\theta)-g(\theta+\pi),\theta\in[0,2\pi]$$

则

$$h(0)\cdot h(\pi)=[g(0)-g(\pi)]\cdot[g(x)-g(2\pi)]<0$$

$\therefore$ 由介值定理，$\exists 0\le\varepsilon\leqslant\pi$, s.t. $h(\varepsilon)=0$，即 $g(\varepsilon)=g(\varepsilon+\pi)$, 即 $f(\varepsilon)=f(\varepsilon+\pi)$, 原结论得证。

3. 设 $x_j=\dfrac{j\pi}{n}\quad(0\leqslant j\leqslant 2\pi)$，则 $C_n\left(x_j\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx_j$，因 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k\right|<a_n$，故当 k 为奇数时（偶数同理）：

$$C_n\left(x_{k+1}\right)=a_0+a_1\cos x_{k+1}+\cdots+a_{n-1}\cos(n-1)x_{k+1}+a_n>0$$

$$C_n\left(x_k\right)=a_0+a_1\cos x_{k+1}+\cdots+\left(-a_n\right)<0$$

$\therefore$ 由介值定理，$C_n(x)$ 在 $\left(x_k,x_{k+1}\right)\quad(0\leqslant k\leqslant 2n-1)$ 内均有一零点，即 $C_n(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 内至少有 $2n$ 个零点。

4. 设 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-b_1}+\dfrac{a_2}{x-b_2}+\dfrac{a_3}{x-b_3}$，则

$$\lim_{x\to b_1^+}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to b_2^-}f(x)=-\infty\quad\lim_{x\to b_2^+}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to b_3^-}f(x)=-\infty$$

$\therefore$ 存在足够小的 δ, 使得 $f\left(b_1+\delta\right)>0,f\left(b_2-\delta\right)<0,f\left(b_2+\delta\right)>0,f\left(b_3-\delta\right)<0$，再由介值定理知结论成立。

5. (1) 由 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，再由连续函数介值定理可证。

(2) 可以无实根的例子：x^2+1，由 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，以及 $f(0)=a_{2n}<0$ 知 $f(x)$ 至少有 2 实根

6. 设 $f(x)=x^{17}+\dfrac{215}{1+\cos^2 3x}-18$，则 $x^{17}+\dfrac{215}{2}-18\leqslant f(x)\leqslant x^{17}+215-18$

故 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-a,\ \lim_{x\to+9}f(x)=+\infty$，由介值定理知结论成立

7. 结论：f 必为常数，结论如下：

假设 f 不是常数，设 f 最大值为 M, 最小值为 m, 则由介值定理，对 $[m,M]$ 的某一无理数 y_0, 必存在 x_0, 使得 $f\left(x_0\right)=y_0$，故 f 可取无理数，这与 f 只取有理数矛盾。

8. (反证法) 假设存在 $a\le x_1<x_2<b$，使得 $f\left(x_1\right)\geqslant f\left(x_2\right)$，则有以下情况：

(a). $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$

(b). $f(a)\geqslant f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$

(c). $f\left(x_1\right)>f(a)\geqslant f\left(x_2\right)$

(d). $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\geqslant f(a)$

无论何种情形与 f 是一一映照矛盾，结论得证。第二问可类似证明。

9. 由 $f(-\infty)=A<C=B=f(+\infty)$，故存在 $X>0$，使得 $x\le -X\Rightarrow f(x)<C$，

$x \geq x \Rightarrow f(x) > C$，故在 $[-X, X]$ 上用介值定理，即得结论。

10. 假设 $A < B$（$A > B$ 同理）

$$\because \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A < \eta < B = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$
$$\therefore \exists N,\ \text{s.t. } n \geqslant N \Rightarrow f(x_n) < \eta < f(y_n)$$

$\therefore$ 由介值定理，存在

$$\frac{x_n + y_n - |x_n - y_n|}{2} = \min\{x_n, y_n\} \leqslant Z_n$$

由夹逼原理及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，知

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b$$

5.3 有界性定理与最值定理

5.3.1 练习题

1. 由第三章第一组参考题的第三题可得，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一个点的邻域均有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，$f(x)$ 在第一类间断点和连续点的邻域内均有界，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。
2. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\exists X > a$, s.t. $x \geqslant X \Rightarrow |f(x) - A| < | \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + 1$，又因 f 在 $[a, X]$ 上连续，故 f 有界，不妨设为 B, 则
$$x \in [a, +a\rangle \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant X \Rightarrow |f(x)| \leqslant B \\ x \geqslant X \Rightarrow |f(x)| \leqslant |A| + 1 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| \leqslant |A| + B + 1$$
3. (a). 存在。例：$f(x) = \tan\left[\pi\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right]$
   (b). 不存在，因闭区间上函数必有界
   (c). 存在。例：$f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$
4. 不一定。反例：$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$，在 $[-1, 1]$ 上不连续点为 $x = 1$
   例：$f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$，则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续
5. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\exists X > a$, s.t. $x \geqslant X \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |A| + 1$，又由 f 在 $[a, X]$ 上连续，知 $\exists \varepsilon, \eta \in [a, X]$, s.t. $f(\varepsilon) = \max\limits_{[a,X]} f, f(\eta) = \min\limits_{[a,X]} f$
   若 $A \geqslant f(\varepsilon)$，则 $f(\eta) = \min\limits_{[a,+\infty)} f$
   若 $A < f(\varepsilon)$，则 $f(\varepsilon) = \max\limits_{[a,+\infty)} f$
6. 由 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$，知
$$\exists 0 < \delta < \frac{b-a}{2},\ \text{s.t. } a < x < a + \delta \text{ 或} b - \delta < x < b \Rightarrow f(x) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
   因 f 在 $[a + b, b - b]$ 上连续，故能取最小值，即
$$\exists \varepsilon \in [a + \delta, b - \delta],\ \text{s.t. } f(\varepsilon) = \min_{[a+b, b-\delta]} f$$

又由

$$a < x < a+b \text{ 或} b-\delta < x < b \Rightarrow f(x) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant f(\varepsilon)$$

故 f 在 $\varepsilon \in (a,b)$ 处取得最小值。

7. 补充定义 $f(a)=f\left(a^{+}\right), f(b)=f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上连续
假设 f 在 $[a,b]$ 中的 ε 处取最大值，η 处取最小值，不妨记为 M,m
   (a). 若 $M=m$，则 $f(x)$ 为常值函数，结论已证
   (b). 若 $m<m$，则 $M \neq f(a)$ 或 $m \neq f(a)$。不妨设 $M>f(a)$，则由 $M \neq f(a)$ 知存在 $\varepsilon \in (a,b)$, 使得 $f(\varepsilon)=M$。这表明 f 可在 (a,b) 取最大值，最小值同理可证。

综上可知，原结论成立。

8. 由 $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=+\infty$，知 $\exists x_1>a$, s.t. $f\left(x_1\right)>a$，再由 $f(a)<a<f\left(x_1\right)$ 及介值定理，知 $\exists \varepsilon_1 \in\left(a, x_1\right)$, s.t. $f\left(\varepsilon_1\right)=a$，由 $\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} f(x)=+\infty$ 知 $\exists x_2<a$, s.t. $f\left(x_2\right)>a$，再由 $f(a)<a<f\left(x_2\right)$ 及介值定理，知 $\exists \varepsilon_2 \in\left(X_2, a\right)$, s.t. $f\left(\varepsilon_2\right)=a$，又因为 f 在 $x=a$ 取最小值，故对任意 $x \in R$, 有 $f(f(x)) \geqslant f(a)$，综上，有：

$$\exists \varepsilon_2<a<\varepsilon_1, \quad \text{s.t. } f\left(\varepsilon_1\right)=f\left(\varepsilon_2\right)=a \Rightarrow f\left(f\left(\varepsilon_1\right)\right)=f\left(f\left(\varepsilon_2\right)\right)=f(a)$$

即 $f(f(x))$ 至少在两个点上取最小值

9.
$$D(x)=\begin{cases}1, & x \in Q \\ 0, & x \in R \backslash Q\end{cases} \qquad R(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & x=\frac{p}{q} \in[0,1],(q, 9 \epsilon z_t,(p, q)=1) \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然有理点为 $D(x)$ 极大值点和最大值点；无理点为 $D(x)$ 极小值点和最小值点
显然无理点为 $R(x)$ 极小值点，最小值点；1 为 $R(x)$ 最大值点
又因 $[0,1]$ 上任一点 x_0，$\lim\limits_{x \rightarrow x_0} R(x)=0$，故对任一有理点 x_0，存在 x_0 的邻域 $O_\delta\left(x_0\right)$，使得 $x \in O_\delta\left(x_0\right)-\left\{x_0\right\}$ 时，$R(x)<R\left(x_0\right)$，故 x_0 为 $R(x)$ 极大值点，故有理点为 $R(x)$ 极大值点

5.4 一致连续性与 Cantor 定理

5.4.1 练习题

1. $\varepsilon>0, \quad \exists \delta>0, \quad$ s.t. $x_1, x_2 \in I, \quad\left|x_1-x_2\right|<\delta \Rightarrow\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leqslant L\left|x_1-x_2\right|<L \delta=\varepsilon$
2. 由 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，故取 $\varepsilon=1$, 则存在 $\delta>0$,s.t. $x_1, x_2 \in(a,b)$,$\left|x_1-x_2\right|<\delta \Rightarrow\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<1$, 取 $n \in Z_{+}$, s.t. $\frac{b-a}{n}<\delta$ 将 (a,b) n 等分，记分点 $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)(k=0,1, \cdots, n)$，则有

$$x \in(a, b) \Rightarrow \exists 0 \leq k \leq n-1, \text{ s.t. } x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1} \Rightarrow\left|x-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right| \leq x_{k+1}-x_k<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leqslant \left|f(x)-f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant 1+\max_{0\leq k\leq n-1}\left|f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|$$

3. (a). 是。由之前的结论，知 f,g 均有界, 故 $\exists M>0$, s.t. $x\in I \Rightarrow |f(x)|\leqslant M,|$ $g(x)\leq M$，再由 f,g 在 I 上一致连续，故 $\forall\{>0,\exists\delta>0$, s.t.$x_1,x_2\in I$

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \\ |g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |(af+bg)(x_1)-(af+bg)(x_2)|\leqslant |a||f(x_1)-f(x_2)|+|b||g(x_1)-g(x_2)|<(|a|+|b|)\varepsilon \\ |(fg)(x_1)-(fg)(x_2)|\leqslant |f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|+|f(x_1)\mathrm{g}(x_2)-f(x_2)\mathrm{g}(x_2)|\leqslant 2M \end{cases}$$

(b). 是。因为 g 在 I_2 上一致连续，故 $\forall\delta>0,\exists\delta>0$, s.t. $y_1,y_2\in I_2,|y_1-y_2|<\delta\Rightarrow|f(y_1)-f(x_2)|<\varepsilon$；又因为 f 在 x_1 一致连续，故

$\exists\delta>0$, s.t. $x_1,x_2\in I_1,|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\delta'\Rightarrow|g\cdot f(x_1)-g\cdot f(x_2)|<\varepsilon$

4. 设 f 周期为 $T>0$, 则由 f 连续知其在 $[-T,2T]$ 一致连续

对 $x,y\in R,|x-y|<\delta$，可设 $x\in[kT,(k+1)T]$ 而 $y\in[(k-1)T,(k+2)T]$，故

$$|f(x)-f(y)|=|f(x-kT)-f(y-kT)|<\varepsilon$$

5. 先做第三问

(a). $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，故结论成立

(b). $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续，故结论不成立

(c). 结论：当 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续时，1 结论成立，证明如下：

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0$,当 $x>\Delta$,有 $|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$,
又因 f 一致连续,故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $|x'-x''|<\delta_1,|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$，故对 $\forall x',x''>\Delta,|x'-x''|<\delta_1$ 时有

$$|g(x')-g(x'')|\leqslant|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

又由 Cantor 定理，知 $g(x)$ 在 $[0,\Delta+1]$ 一致连续，故对此 $\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$, 当 $x',x''\in[0,\Delta+1]$，$|x'-x''|<\delta_2$ 时，$|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$, 则 $x',x''\in[0,+\infty),|x'-x''|<\delta$, 有 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$，证毕。

6.

$$\left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^n-n^n\right|=\sum_{k=1}^{n}C_n^k n^{n-k}\frac{1}{n^k}\geqslant C_n^1 n^{n-1}\frac{1}{n}=n^{n-1}\geqslant 1$$

7. (a). $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上满足利普希兹条件，这是比一致连续更严格的条件，故一致连续

(b). $\ln\frac{2}{n}-\ln\frac{1}{n}=\ln 2$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 不一致连续

8. (a). 设 $F(x)=\begin{cases} -\sin 1 & x=-1 \\ f(x) & -1<x<0 \\ -1 & x=0 \end{cases}$，则 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 连续且一致连续，故

在 $(-1,0)$ 上也一致连续。考虑 $G(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ f(x), & 0<x<1\\ \sin 1, & x=1\end{cases}$，同上过程，知其在 $(0,1)$ 一致连续。又因 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right|=2\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\rightarrow 2(n\rightarrow\infty)$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 不一致连续

(b). 不一定，这里只考虑反例

$$H(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x}{x} & ,-1<x<0\\ 1 & ,x=0\\ \dfrac{\sin x}{x} & ,0<x<1\end{cases}$$

它在 $(-1,1)$ 不连续，所以不一致连续

9. (a). $\lim\limits_{x\rightarrow 0^+}f(x)=0 \quad ,\lim\limits_{x\rightarrow\infty}f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$, 故由例 5.4.5 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 一致连续

(b). $\lim\limits_{x\rightarrow 0^+}f(x)=1,\lim\limits_{x\rightarrow\infty}f(x)=0$ 及例 5.4.6，知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续

(c).

$$\left|f\left(2k\pi+\frac{1}{k}\right)-f(2k\pi)\right|=\left|(2k\pi+k)\sin\frac{1}{k}-0\right|\geqslant 2k\pi\sin\frac{1}{k}=2\pi\frac{\sin\dot{k}}{\frac{1}{k}}\rightarrow 2\pi\quad(k>0)$$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续

5.5 单调函数

5.5.1 练习题

1. 对 $\forall a<c<d<b$，考虑 $x\in[c,d]$，由题，$\exists\delta_x>0$，s.t.f 在 $O_{\delta_x}(x)$ 上单增，由 $[c,d]\subset\bigcup\limits_{x\in[\varepsilon,d]}O_{\delta x}(x)$ 以及加强形式的覆盖定理，知 $[c,d]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}O_{\delta_x}(X_i)$, 且对

$$\forall x,x'\in[c,d],\exists\delta>0,\left|x-x'\right|<\delta\Rightarrow\exists i,\text{ s.t. }x,x'\in O_{\delta x_2}(x_i)\Rightarrow f\left(x'\right)\leqslant f(x)$$

取 $n\in Z_+$, 使 $\frac{d-c}{n}<\delta$, 将 $[c,d]n$ 等分，记分点 $x_k=c+\frac{k}{n}(d-c)\quad(k=1,2,\cdots,n)$, 则 $x_k-x_{k-1}=\frac{d-c}{n}<\delta\Rightarrow f\left(x_{k-1}\right)\leqslant f\left(x_k\right),k=1,\cdots,n$, 故 $f(c)=f\left(x_0\right)\leqslant f\left(x_1\right)\leqslant\left(x_n\right)=f(d)$，即 f 在 $[a,b]$ 单增

2. 由有理数的稠密性，知 $\forall a\leqslant x<y\leqslant b,\exists Q\cap\left(x,\frac{x+y}{2}\right)\ni r_n\rightarrow x$，$Q\cap\left(\frac{x+y}{2},y\right)\ni S_n\rightarrow y$ 故

$$r_n<s_n\Rightarrow f\left(r_n\right)\leqslant f\left(s_n\right)\Rightarrow f(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(r_n\right)\leqslant\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(s_n\right)\leqslant f(y)$$

3. 不妨设 f 递增，则 $f\left(x^+\right)=\inf\limits_{y>x}f(y)$，事实上，由下确界定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists y_1>x$s.t. $f\left(y_1\right)<\inf\limits_{y>x}f(y)+\varepsilon$. 故 $x<x'<y_1\Rightarrow\inf\limits_{y>x}f(y)\leqslant f(y)\leqslant f\left(y_1\right)<\inf\limits_{y>x}f(y)+\varepsilon$

下证 $g(x)=f\left(x^{+}\right)$ 右连续，对 $\forall x\in R,\varepsilon>0$，由下确界定义

$$\forall\varepsilon>0,\exists y_1>x,\text{ s.t. } f\left(y_1\right)<\inf_{y>x}f(y)+\varepsilon=f\left(x^{+}\right)+\varepsilon=g(x)+\varepsilon$$

而

$$\forall x<x'<y_1,g(x)\leqslant g\left(x'\right)=\inf_{y\geq x'}f(y)\leqslant f\left(y_1\right)<g(x)+\varepsilon\Rightarrow\left|g\left(x'\right)-g(x)\right|<\varepsilon$$

4. 因 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，故 $x=y=0$ 时，$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，故 $f(0)=0$，又 $f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$，故 $f(x)=-f(-x),\forall x\in R$，又因 $f(2)=f(1+1)=2f(1)$，由归纳法易证 $f(n)=nf(1)$，对有理数 $\dfrac{m}{n},m,n\in N$，因 $f(1)=f\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\right)=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$，故 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(1)$，故 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\dfrac{1}{n}\right)=mf\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{m}{n}f(1)$
此时考虑 f,不妨设 f 单增，则对 $\forall x\in R$ 取有理数列 $\left\{x_n'\right\},\left\{x_n''\right\}$，使 $x_n'<x<x_n''$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n'=x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n''$ 故由 f 单增，知 $x_n'f(1)=f\left(x_n'\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(x_n''\right)=x_n''f(1)$, 令 $n\to+\infty$, 则 $xf(1)\leqslant f(x)\leqslant xf(1)$，即 $f(x)=xf(1)$，f 单减同理可证。
5. $\Longleftarrow$：显然
$\Longrightarrow$：若 f 在 $[a,b]$ 上不严格单调，则存在 $x_1<x_2<x_3$，使得

$$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right),\quad f\left(x_3\right)>f\left(x_2\right)$$

或者

$$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right),f\left(x_3\right)<f\left(x_2\right)$$

故 f 在 (a,b) 内有极值点，矛盾。

5.6 周期 3 蕴涵混沌

5.7 对于教学的建议

5.7.1 第一组参考题

1. 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，则 $F(0)=f(a)\geqslant0$，$F(1-a)=-f(1-a)\leq0$，故 $\exists x_0\in[0,1-a]$ 使得

$$f\left(x_0\right)=f(x_0+a)$$

则 $x_0+a\in[a,1]\subset[0,1]$
不可去掉 f 非负的条件，例如 $f(x)=\sin2\pi x,a=\dfrac{2}{3}$ 则若 $f\left(x_0\right)\geqslant0$，则 $f\left(x_0+a\right)<0$ 故两者不可能相等。
2. 令 $F(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$，则

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$$

故 $\exists\xi\in\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$

3. 令 $F(x)=f(x)-x$ 则

$$F(0)=f(0)\geqslant 0, F(1)=f(1)-1\leqslant 0$$

故 $\exists\xi$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$

令 $g(x)=1-f(x)$，则 $g([0,1])\subset[0,1]$，则 $g(x)$ 与 $y=x$ 有交点，即 $f(x)$ 与 $y=1-x$ 有交点。

4. 条件为有界。

必要性显然;下面证明充分性,不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在,则 $M=\lim\limits_{n\to\infty}\sup f(x)>m=\liminf\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则 $f(x)=\dfrac{M+m}{2}$ 有无穷多解，矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，类似可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在

5. (1) 记 $g(x)=kx-f(x)$, 任取 $x,y\in\mathbb{R},x>y$, 由 f 的性质可得

$$\begin{aligned}g(x)-g(y)=k(x-y)-(f(x)-f(y))&\geqslant k(x-y)-|f(x)-f(y)|\\&\geqslant k(x-y)-k|x-y|=0\end{aligned}$$

故说明 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

(2) 归纳地构造数列 $\{x_n\}$: 任取 $x_1\in\mathbb{R}$, 令 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$, 往证 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列。因为

$$\begin{aligned}\left|x_{n+1}-x_n\right|&=\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|\leqslant k\left|x_n-x_{n-1}\right|\\&=k\left|f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_{n-2}\right)\right|\leqslant k^2\left|x_{n-1},x_{n-2}\right|\\&\leqslant k^{n-1}\left|x_2-x_1\right|\end{aligned}$$

于是对任意的 $p\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p-1}\left|x_{i+1}-x_i\right|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p-1}k^{i-1}\left|x_2-x_1\right|\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}\left|x_2-x_1\right|\to0,\quad n\to\infty$$

这说明 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列, 故存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 于是有

$$f(\xi)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\xi$$

这就说明了 f 存在不动点.

$$|\xi-\zeta|=|f(\xi)-f(\zeta)|\leqslant k|\xi-\zeta|$$

可知 $|\xi-\zeta|=0$, 即 $\xi=\zeta$, 故 f 的不动点唯一

6. (1) 令 $g_n(x)=f_n(x)-1$，则 $g_n'(x)=nx^{n-1}>0$，可得 $g_n(x)$ 严格递增且

$$g_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}<0,\quad g_n(1)=1>0$$

故 $g_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上只有一个零点。

(2) 可证 $\{c_n\}$ 单增，若 $c_{n-1}>c_n$，则

$$1=c_n^n+c_n<c_n^{n-1}+c_n<c_{n-1}^{n-1}+c_{n-1}=1$$

矛盾，故 $c_n>c_{n-1}$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$，若 $c<1$ 则

$$c_n^n=1-c_n$$

令 $n \to +\infty$，可得 $c=1$，矛盾，故 $c=1$。

7. 令 $a=x_0$，用处理 Riemann 函数的方式. 对任意的 $\varepsilon>0$, 取充分大的 N, 使得 $1/N<\varepsilon$, 容易知道对任意的 δ_0, 与区间 $(x_0-\delta_0,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_0)$ 有交集且满足 $0<n_0<N$ 的集合 A_{n_0} 有有限个, 而 A_{n_0} 都是有限集, 那么可以知道满足 $f(x)=1/n_0>1/N$ 的 x 也只有有限个, 那么一定可以取到 $0<\delta<\delta_0$, 使得任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 都有

$$f(x)=\begin{cases}1/n & ,x\in A_n, n\geqslant N\\ 0 & ,x\in[0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\end{cases}$$

无论哪一种都有

$$|f(x)-0|=f(x)<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

这就说明了 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

8. 设 f 的定义域为 I, 任取 $x_0\in I$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|t-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(t)-g(x_0)|<\varepsilon/2$, 由极限的保号性可知, 对于任意的 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 都有

$$\lim_{t\to x}|f(t)-g(x_0)|=\left|\lim_{t\to x}f(t)-g(x_0)\right|=|g(x)-g(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

这就说明了 g 在 x_0 点处连续, 又由 x_0 的任意性可知 g 在 I 上连续.

9. 用反证法. 如果存在对所有趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}$ 都不成立的 λ, 那说明存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $N\in\mathbb{N}^*$, 当 $x\geqslant N$ 时, 都有 $|f(x+\lambda)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$ 成立. 且由于零值定理的约束, $f(x+\lambda)-f(x)\geqslant\varepsilon_0$ 与 $f(x+\lambda)-f(x)\leqslant-\varepsilon_0$ 只能有一个成立, 不妨令前者成立. 于是可以得到一列不等式:

$$\begin{aligned}f(N+\lambda)-f(N)&\geqslant\varepsilon_0\\ f(N+2\lambda)-f(N+\lambda)&\geqslant\varepsilon_0\\ &\cdots\\ f(N+n\lambda)-f(N+(n-1)\lambda)&\geqslant\varepsilon_0\end{aligned}$$

累加可以得到 $f(N+n\lambda)-f(N)\geqslant n\varepsilon_0$, 当 $n\to\infty$ 时, 右侧为趋于 $+\infty$ 的无穷大量, 又因为 $f(N)$ 有限, 那么可知 $f(N+n\lambda)\to+\infty(n\to\infty)$, 这与 f 有界矛盾.

10. $\forall x_0\in I$，则

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{\alpha-1}$$

令 $x\to x_0$，则 $f'(x_0)=0$，故 $f(x)$ 在 I 上为常数

11. 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=0\\ 1 & x=\dfrac{1}{2}\\ x & x\text{为}[0,1]\text{中的无理数}\\ 1-x & \left\{Q-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}\right\}\cap[0,1]\end{cases}$$

则 $f([0,1])=[0,1]$ 且任意一点均不连续

12. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_1, x_2 \in [a,b]$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$\exists m$ 使得 $\dfrac{b-a}{m} < \delta$，令 $x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{m}(i = 0, 1, \cdots, m)$，考虑

$$L(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad x \in [x_{i-1}, x_i)$$

其中 $i = 1, 2, \cdots \quad m$，$L(x_m) = f(b)$，则 $\forall x \in [a,b], x \in [x_{i-1}, x_i)$ 对某个 i 成立，则

$$|L(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x) < \varepsilon$$

13. 用反证法, 如果 $f(x)$ 不趋向于 ∞, 那么存在 $A_0 > 0$, 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}^*$, 都存在一个 $|x_n| > n$ 满足 $|f(x_n)| \leqslant A_0$, 于是可以得到一个趋于无穷的数列 $\{x_n\}$, 这个数列满足 $f(x_n) \in [-A_0, A_0]\ (n \in \mathbb{N}^*)$, 则由有限闭区间上连续函数的性质可知对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$f(f(x_n)) \in f([-A_0, A_0]) = [m, M]$$

其中 m 和 M 分别为 f 在区间 $[-A_0, A_0]$ 上的最小值和最大值, 那么令 $n \to \infty$, 可以得到

$$\limsup_{n \to \infty} |f(f(x_n))| \leqslant \max(|m|, |M|)$$

为有限数, 这与 $\lim\limits_{x \to \infty} f(f(x)) = \infty$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

14. 由 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant k|x_1 - x_2|$，可得 f 为单射，不妨设存在 $x_1 < x_2 < x_3$ 使得

$$f(x_1) > f(x_2), f(x_3) > f(x_2)$$

则 $\exists y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$ 使得 $f(y_1) = f(y_2)$，矛盾，故不妨设 f 严格单增，固定 x_0，有 $|f(x) - f(x_0)| \geqslant k|x - x_0|$，令 $x \to +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$，令 $x \to -\infty$，可得 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 故值域为 $(-\infty, +\infty)$

15.

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x\text{为无理数} \\ 1 & x\text{为有理数} \end{cases}$$

则 $D(x)$ 无最小正周期。

16. 设 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$，则对任意的 $x, y \geqslant a$, 都有

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leqslant \frac{|yf(x) - xf(x)|}{xy} + \frac{|xf(x) - xf(y)|}{xy} \\ &\leqslant |y - x| \frac{|f(x)|}{xy} + \frac{|f(x) - f(y)|}{y} \leqslant |y - x| \frac{|f(x)|}{ax} + \frac{|f(x) - f(y)|}{a} \quad (1) \end{aligned}$$

因为 f 在 $[a, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 所以有 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, 再考虑 $|f(x)/x|$, 同样由 Lipschitz 条件可知

$$|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$$

不等式两侧同时除以 $|x|$ 可以得到

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|-\left|\frac{f(a)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(a)}{x}\right|\leqslant k\left|1-\frac{a}{x}\right|$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant k\left|1-\frac{a}{x}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|$$

这说明 $f(x)/x$ 在 x 充分大的时候有界, 设 $|f(x)/x|\leqslant M$, 于是不等式 (1) 可以继续化简

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|\leqslant\frac{M}{a}|x-y|+\frac{k}{a}|x-y|=\frac{M+k}{a}|x-y|$$

这说明 $f(x)/x$ 满足 Lipschitz 条件, 当然一致连续.

17. 必要性用定义直接验证即可。我们来证明充分性。若 f 不一致连续，则存在 $\epsilon>0$, 使得对于每个正整数 n, 可以找到 $x_n,y_n,|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$, 而 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon,\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$, 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$, 矛盾

18. 必要性用定义验证即可，下证充分性，若 f 在 I 上不一致连续，则 $\exists\{x_n\},\{y_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon>0$

由于 I 是有限区间，故 $\{x_n\}$ 有收敛子列，不妨设 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{y_n\}$ 也收敛，则考虑 $\{z_n\}$ 为 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots$，则 $\{z_n\}$ 为基本列但是

$$\lim_{n\to+\infty}|f(z_{2n+1})-f(z_{2n+2})|=\lim_{n\to+\infty}|f(x_{n+1})-f(y_{n+1})|\geqslant\varepsilon>0$$

矛盾，故 f 在 I 上一致连续

19. 由题知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\geqslant 0$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2$. 又由对任意的 $x\in[0,1]$, 都有 $f(x+n)\to 0(n\to\infty)$ 可知, 存在 $N_x\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_x$ 时, 有 $|f(x+n)|<\varepsilon/2$. 那么对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$, 当 $n>N_{x_1}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x_2+n)|&=|f(x_2+n)-f(x_1+n)+f(x_1+n)|\\&\leqslant|f(x_2+n)-f(x_1+n)|+|f(x_1+n)|<\varepsilon\end{aligned}$$

也就是说对任意 $x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$, 当 $n>N_{x_1}$ 时, 总有

$$|f(x+n)|<\varepsilon$$

于是取正整数 $m>1/\delta$, 可以将 $[0,1]$ 这个区间 m 等分, 记第 k 个区间为 I_k, 它的中点为 x_k, 则对任意的 I_k, 存在 N_{x_k}, 使得当 $x\in I_k,n>N_{x_k}$ 时, 都有 $|f(x+n)|<\varepsilon$. 那么取 $N=\max\limits_{k=1,2,\ldots,m}N_{x_k}$ 就有对任意的 $x\in[0,1]$, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $|f(x+n)|<\varepsilon$. 于是对任意的 $x>N$, 有 $[x]=x-\{x\}\geqslant N$ 其中 $\{x\}\in[0,1)$ 为 x 的小数部分, 那么可以得到

$$|f(x)|=|f(\{x\}+[x])|<\varepsilon$$

这说明了 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$

20. 只证 $x \geq 0$ 时，存在 a, b 使得

$$|f(x)| \leq a|x| + b$$

对于 $x < 0$，考虑 $f(-x)$ 即可

$\exists 0 < \delta < 1$ 使得当 $|x - y| \leq \delta$ 时

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

$\forall x \in [0, +\infty)$，则 $\dfrac{x}{\delta} = \left[\dfrac{x}{\delta}\right] + \left\{\dfrac{x}{\delta}\right\}$，令 $n = \left[\dfrac{x}{\delta}\right]$，则

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant |f(x) - f(n\delta)| + \sum_{k=1}^{n} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(0)| \\ &\leq n + 1 + |f(0)| \end{aligned}$$

又 $n \leq \dfrac{x}{\delta}$，故

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1 + |f(0)|$$

得证

5.7.2 第二组参考题

1. （1）作过点 $(0, t)$ 的水平直线, 记直线上方区域的煎饼面积与下方区域煎饼面积之差为 $f(t)$ 由于 $f(+\infty) = -S < 0, f(-\infty) = S > 0$, 结合 $f(t)$ 的连续性，存在 t_0 使得 $f\left(t_0\right) = 0$, 因此过 $(0, t_0)$ 的水平直线即为所求.

（2）据（1）的证明过程易知，对一个确定的煎饼和每个确定的方向，存在唯一的直线平分煎饼的面积。设二维向量 $(\cos t, \sin t)$, 考虑两个煎饼各自与该向量垂直的面积等分线 l_1, l_2 设 l_1 上的一点需要沿向量 $(\cos t, \sin t)$ 的方向移动 $f(t)$ 个单位长度才可移动到 l_2 上，则 $f(t) = -f(t+\pi)$. 易证 $|f(t+\Delta t) - f(t)| \leq 2\Delta t \cdot \operatorname{diam}\left(I_1 \cup I_2\right)$, 其中 I_1, I_2 分别代表两个煎饼，从而 $f(t)$ 连续. 由零点存在定理，$f(t)$ 一定有零点 t_0. 这表明，存在这样一条与向量 $(\cos t_0, \sin t_0)$ 垂直的直线同时平分两个煎饼的面积.

（3）不一定能。如圆心不共线的三个圆，由于一条直线是圆的面积等分线的充要条件是该直线过圆心，故如果有一条直线同时平分三个圆的面积，则必然同时过这三个圆的圆心，这在圆心不共线的情况下是做不到的.

（4）能。首先由（2）可知，当一条直线平分煎饼的面积后，将平分后的两块视为两块煎饼，则必然还存在另一条直线同时平分这两块的面积，此时这两条直线四等分煎饼的面积。设 l_1 是一条与向量 $(\cos t, \sin t)$ 共线的面积等分线，根据刚刚的结论，存在另一条直线 l_2 使得 l_1, l_2 四等分煎饼的面积。设 l_1 逆时针转 $f(t) \in (0, \pi)$ 弧度后与 l_2 平行，则 $f(t) + f(t + f(t)) = \pi$ 从而有 $\left(f(t) - \dfrac{\pi}{2}\right)\left(f(t + f(t)) - \dfrac{\pi}{2}\right) \leq 0$, 再根据零点存在定理，必然存在 t_0 使得 $f\left(t_0\right) = \dfrac{\pi}{2}$, 即作与 $(\cos t_0, \sin t_0)$ 共线的面积等分线后，必然存在另一条与该直线垂直的直. 线，使得两直线四等分煎饼的面积.

（5）设 $f(t)(0 \le t \le 9)$ 为该运动员从第 t 秒到第 $t+1$ 秒经过的路程。由于 $f(0)+f(1)+\ldots+f(9)=100$, 所以必然存在 $k \in \{0,1,\ldots,8\}$ 使得

$$(f(k)-10)(f(k+1)-10) \le 0$$

根据零点存在定理，存在 $t \in [k,k+1]$ 使得 $f(t)=10$, 从而从第 t 秒到第 $t+1$ 秒，该运动员刚好跑了 10 米.

（6）设该方台为正方形 $ABCD$，然后任意作一个平面，并在其中建立直角坐标系 xOy，保持方台的中心在原点的正上方，并设 AC 在平面上的投影的倾斜角为 φ. 由于地面是连续的，因此对任意的 φ，总存在符合以上条件的方台使得方台至少有三只脚着地。记 A,B 到地面的距离之和为 $f(\varphi), C,D$ 到地面的距离之和为 $g(\varphi)$. 则 $f(\varphi)g(\varphi)=0$ 且 $f(\varphi), g(\varphi)$ 至少有一个为 0. 下面证明: $f(\varphi), g(\varphi)$ 有公共的零点不妨设 $f(0)=0$, 则 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 如果 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 或 $g(0)=0$ 则结论成立. 否则有 $f(0)<g(0),\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 根据零点存在定理，存在 φ_0 使得 $f(\varphi_0)=g(\varphi_0)$. 由于 $f(\varphi_0)g(\varphi_0)=0$, 所以一定有 $f(\varphi_0)=g(\varphi_0)=0$. 这表明倾斜角为 φ_0 时，方台可以四脚着地，从而不会摇晃.

（7）能。我们设与该曲线有交点的两条倾斜角为 φ 的直线的最大距离为 $f(\varphi)$，则 $f(\varphi)=f(\varphi+\pi)$. 由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=-\left(f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, 所以一定存在 φ_0 使得

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_0\right)=f(\varphi_0)$$

故作出取到最大距离的两条倾斜角为 φ_0 的直线和两条倾斜角为 $\frac{\pi}{2}+\varphi_0$ 的直线，由于各自的最大距离相等，且两个方向垂直，故它们交出的正方形即是所求的正方形.

2. （归纳法）当 $n=1$ 时, 因 $f(0)=f(1)$, 故 f 在 $[0,1]$ 上至少有一个解 $(x,y)=(0,1)$ 假设命题当 $n-1$ 时成立. 则当 $n \in N$ 时，命题也成立. 事实上, 因 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续, 则 $d(x)=f(x+1)-f(x), x \in [0,n-1]$ 也连续. 若存在非负整数 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ s. t. $d(k)=0$, 则有 $f(k)=f(k+1)$. 若对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 都有 $d(k) \neq 0$, 因为 $f(0)=f(n)$, 故 $\sum_{k=0}^{n-1} d(k)=\sum_{k=0}^{n-1}[f(k+1)-f(k)]=f(n)-f(0)=0$. 由此可知存在非负整数 $j(0 \leqslant j \leqslant n-1)$, s. t. $d(j)d(j+1)<0$. 根据连续函数的介值定理, $\exists \alpha \in (j,j+1)$, s.t. $d(\alpha)=0$. 综上所述，总 $\exists \beta, \beta+1 \in [0,n]$, s. t.

$$f(\beta)=f(\beta+1)$$

我们定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x \in [0,\beta] \\ f(x+1), & x \in [\beta, n-1] \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上连续, 且 $g(0)=g(n-1)$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 个不同的 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n-1$, 使得存在 $n-1$ 个不同的 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n-1$, 满

足 : $g(x_i) = g(y_i)$, 其中 $y_i - x_i$ 为非负整数. 又

$$0 = g(y_i) - g(x_i) = \begin{cases} f(y_i) - f(x_i), & y_i < \beta \\ f(y_i + 1) - f(x_i), & x_i \leqslant \beta \leqslant y_i \\ f(y_i + 1) - f(x_i + 1), & \beta < x_i \end{cases}$$

由此即得 $f(x) = f(y)$ 的 $n-1$ 个不同的解，且 $y - x$ 为非负整数, 再加上 $(\beta, \beta+1)$ 得到 n 个不同的解。

3. (1) 若这样的 x 无限，设为 E，则 E 有一个聚点，设为 x_0,$\{x_n\} \subset E$, $x_n \to x_0$, 有

$$\left| \lim_{t \to x_n} f(x_n) - f(x_n) \right| > \varepsilon$$

则存在 $\{y_n\}$ 使得 $|y_n - x_n| < \dfrac{1}{n}$ 且

$$|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon$$

又 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$，令 $n \to +\infty$，得

$$0 > \varepsilon$$

矛盾

(2) 令 $E_n = \left\{ x : \left| \lim\limits_{t \to x} f(t) - f(x) \right| > \dfrac{1}{n} \right\}$，间断点集合为 E，则

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

由 (1) 得 E 为可数集

4. 是上一题的直接推论。

5. (1) 不存在，用反证法. 如果存在这种函数 f, 那么任取 $a > b$ 满足 $f(a) = f(b)$, 因为 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，那么可以在 $x_0 \in [a, b]$ 上取到最大值 M, 由 f 的性质可知还有一点 $x_1 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_1) = M$, 如果 $x_1 \in [a, b]$, 那么 $[x_0, x_1]$ 中的任何一点的函数值都小于 M, 如图 5.1 可知这时 f 在 4 个不同的点处取到相同的函数值; 如果 $x_1 \notin [a, b]$, 如图 5.2 这时 f 在 3 个不同的点处取到相同的函数值.

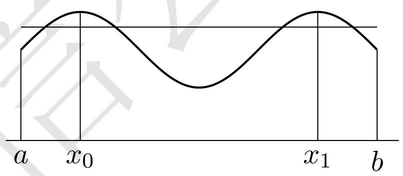

图 5.1: 当 $x_1 \in [a, b]$ 时

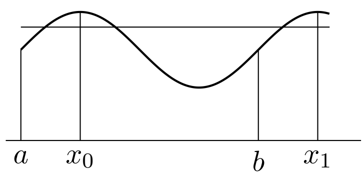

图 5.2: 当 $x_1 \notin [a, b]$ 时

(2) 存在这样的函数, 如图 5.3

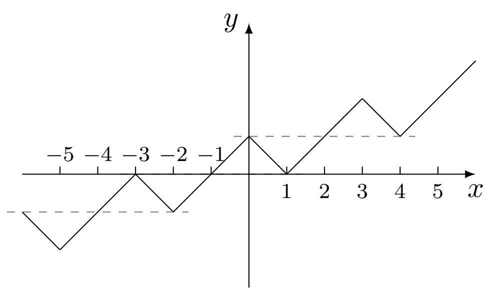

图 5.3: 每个函数值恰好被取到 3 次的函数

6. 显然 $f\equiv 0$ 满足条件, 下面考虑 $f\not\equiv 0$ 时. 首先令 $x=y=0$, 容易得到 $f(0)=0$, 令 $x=0, y\in\mathbb{R}$, 有

$$f\left(y^{n}\right)=(f(y))^{n}$$

可得

$$f\left(x+y^{n}\right)=f(x)+f\left(y^{n}\right)$$

再令 $z=y^{n}$, 当 n 为奇数时, 有 $x\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}$, 则由

$$f(x+z)=f(x)+f(z)$$

可知 $f(x)=f(1)x$. 当 n 为偶数时, 可以得到

$$f(x)=f(1)x \quad x\geqslant 0$$

又因为 $x<0$ 时, $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=0$, 所以有 $f(x)=-f(-x)=f(1)x$. 故 $f(x)=f(1)x$ 对所有 n 都成立. 同时因为

$$f\left(y^{n}\right)=(f(y))^{n}\Rightarrow f(1)y^{n}=f^{n}(1)y^{n}\Longrightarrow f(1)=f^{n}(1)\quad n\in\mathbb{N}^{*}$$

因为 $f\not\equiv 0$, 所以 $f(1)=1$. 因此满足上述函数方程的函数为 $f_1(x)=0$ 及 $f_2(x)=x$

7. $f(x)$ 是严格单调的，不然存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f\left(x_2\right)$，则

$$x_1=f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)=x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

矛盾，又 $f(1)>f(0)$，故 $f(x)$ 严格单增，若 $f(x)>x$，则

$$x=f(f(x))>f(x)>x$$

矛盾，类似得不存在 $f(x)<x$，故 $f(x)\equiv x$

8. 充分必要条件为 $k\geq 0$

充分性：当 $k\geq 0$ 时，取 $f(x)=k^{\frac{2}{11}}\cdot x^{\frac{9}{2}}$，则满足 $f(f(x))=kx^{9}$

必要性：若 $k<0$，由 $f(f(x))=kx^{9}$ 可得 $f(x)$ 严格单调，若 $f(x)$ 严格单调递增，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，可得

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}kx^{9}=-\infty$$

矛盾

若 $f(x)$ 严格单减，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 可得

$$-\infty=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{x\to-\infty}kx^{9}=+\infty$$

矛盾

9. 由于 f 是连续的双射，故一定严格单调.

假设 f 严格单调递减，则 $2x-f(x)$ 严格递增，从而 $f(2x-f(x))$ 严格单调递减，不可能恒等于 x，这导致矛盾。

所以 f 严格单调递增. 假设存在实数 x_0 使得 $f\left(x_0\right)>x_0$, 作双向无穷数列 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, 使得 $x_{n+1}=f\left(x_n\right), x_{n-1}=f^{-1}\left(x_n\right)$. 由已知条件有 $f(x)+f^{-1}(x)=2x$, 故 $x_{n+1}+x_{n-1}=2x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是等差数列.

由于 f 有不动点，故在大于 x_0 和小于 x_0 的范围内至少有一个有不动点。不妨设存在一个大于 x_0 的不动点. 设 $A=\{c>x_0 \mid f(c)=c\}$, 并记 $\eta=\inf A$, 则根据连续性有 $\eta>x_0$ $f(\eta)=\eta$. 再根据 η 的定义，对任意 $t\in[x_0,\eta)$, 都有 $f(t)>t$. 由于 f 严格单调递增，所以对任意 $t\in[x_0,\eta)$, 都有 $\eta>f(t)>t$, 故由数学归纳法可证明 $\eta>x_{n+1}>x_n$. 但 $\{x_n\}$ 是等差数列，因而无上界，矛盾.

同理，也不可能存在实数 x_0 使得 $f(x_0)<x_0$, 所以一定有 $f(x)\equiv x$, 证毕.

10. 只就 $M(x)$ 进行证明，根据连续函数在闭区间上必达上、下确界的性质, $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有定义. 又因上确界随取值区间扩大而增大, 知 $M(x)\nearrow$，故每点处的单侧极限存在，$\forall x_0\in[a,b]$ 我们只要证明下面等式成立即可：

$$M(x_0-0)=M(x_0)=M(x_0+0)\quad(1)$$

由 $M(x)$ 单调性，我们有 $M(x_0-0)\leqslant M(x_0)$. 又因 $\forall x\in[a,x_0]$ 有 $f(x)\leqslant \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)=M(x)\leqslant M(x_0-0)$, 所以

$$M(x_0)=\sup_{a\leqslant t\leqslant x_0} f(t)\leqslant M(x_0-0)$$

故 (1) 式左边等式成立. 下面用反证法证 (1) 中右边之等式. 因 $M(x)$ 单调 , $M(x_0)\leqslant M(x_0+0)$. 假若 $M(x_0+0)>M(x_0)$, 则可取充分小的 $\varepsilon_0>0$, 使得 $M(x_0+0)>M(x_0)+\varepsilon_0$. 于是 $\forall x>x_0$ 有

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)=M(x)\geqslant M(x_0+0)>M(x_0)+\varepsilon_0$$

由确界定义 $\exists t\in[a,x]$, 使得

$$f(t)>M(x_0)+\varepsilon_0\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0\quad(2)$$

但在 $[a,x_0]$ 上 $f(x)\leqslant M(x_0)$, 所以 (2) 式中的 $t\in(x_0,x]$. 这便与 $f(x)$ 的连续性矛盾. 证毕

11. $f(a)>a$, 此时 $\sup\{x\in[a,b]\mid f(x)>x\}$ 非空, 令 $x_0=\sup\{x\in[a,b]\mid f(x)>x\}$, 下证 $f(x_0)=x_0$. 若 $f(x_0)<x_0, \forall a\in(f(x_0),x_0)$, 由 $f(x)$ 单增可知, , $f(a)<f(x_0)<a$, 这与 x_0 是 $\{x\in[a,b]\mid f(x)>x\}$ 的上确界矛盾

若 $f(x_0)>x_0,\quad \forall b\in(x_0,f(x_0))$, 还是由 $f(x)$ 的单增可得，$b<f(x_0)<f(b)$, 也是与 x_0 是 $\{x\in[a,b]\mid f(x)>x\}$ 的上确界矛盾

综上只能是 $f(x_0)=x_0$

12. 设 $A=\{x\in(0,1)\mid f(x)>0\},\quad c=\sup A$

假设 $f(c)>0$, 则 $c<1$, 由于 $c=\sup A$, 故当 $x>c$ 时有 $f(x)\leq 0$, 且 $f(x)+g(x)$ 递增。所以对任意 $x>c$, 有 $0\geq f(x)=f(x)+g(x)-g(x)\geq f(c)+g(c)-g(x)$, 即 $0\geq f(x)=f(x)+g(x)-g(x)\geq f(c)+g(c)-g(x)$ $0\geq f(c)+g(c)-g(x)$. 令 $x\to c^+$, 得 $0\geq f(c)$, 矛盾。所以假设不成立，即 $f(c)\leq 0$ 假设 $f(c)<0$, 则 $c>0, c\notin A$. 由于 c 是 A 的上确界，故存在严格递增的数列 $\{x_n\}\subset A$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$. 由于 $0<f(x_n)=f(x_n)+g(x_n)-g(x_n)\leq f(c)+g(c)-g(x_n)$, 故 $0<f(c)+g(c)-g(x_n)$. 令 $n\to+\infty$, 得 $0\leq f(c)$, 矛盾. 所以假设不成立, 即 $f(c)\geq 0$

综合以上两方面可知 $f(c)=0$, 所以 $f(x)$ 必有零点. 又因为 $f(0)>0,\quad f(1)<0$,

所以该不动点一定在 $(0,1)$ 中，证毕.

13. 证明如下定理：假设 $f_1(x), f_2(x)$ 都是定义在实数集上的周期函数且 $f_1(x)$ 连续, 则

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

为周期函数的充要条件是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的周期之比为有理数.

先证明两个引理:

引理 1　若 $f(x)$ 是定义在实数集上的连续周期函数且 $f(x)$ 不是常数函数, 则 $f(x)$ 必有最小正周期.

证明 反设 $f(x)$ 没有最小正周期, 下证 $f(x)$ 恒等于 $f(0)$

由于 $f(x)$ 连续, 所以任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $\left|x'\right|<\delta$, 就有 $\left|f\left(x'\right)-f(0)\right|<\varepsilon$. 由于 $f(x)$ 没有最小正周期, 可以找到 $f(x)$ 的一个周期 $T<\delta$. 对于任意的实数 x, 存在整数 n, 使得 $x=nT+\tau, 0 \leqslant \tau<T$. 既然 $|\tau|<\delta$, 所以有

$$|f(x)-f(0)|=|f(\tau)-f(0)|<\varepsilon$$

由 ε 和 x 的任意性知，$f(x)$ 恒等于 $f(0)$. 这与 $f(x)$ 不是常数函数矛盾, 故 $f(x)$ 必有最小正周期.

引理 2　若 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期函数且有最小正周期 T_0, 又 T 是 $f(x)$ 的任一周期, 则 T 必是 T_0 的整数倍.

证明 如若不然, 则存在整数 n, 使得 $T=nT_0+T', 0<T'<T_0$. 对于任意的实数 x

$$f(x)=f(x+T)=f\left(x+nT_0+T'\right)=f\left(x+T'\right)$$

上式说明 T' 也是 $f(x)$ 的一个周期. 但 $0<T'<T_0$, 这与 T_0 是 $f(x)$ 的最小正周期矛盾.

再证明上述定理，充分性是显然的，只需要证明必要性.

设 $f_1(x), f_2(x)$ 和 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 都是周期函数, 分别取它们的周期为 T_1, T_2, T_3. 则

$$0=F\left(x+T_3\right)-F(x)=f_1\left(x+T_3\right)+f_2\left(x+T_3\right)-f_1(x)-f_2(x)$$

于是

$$f_1\left(x+T_3\right)-f_1(x)=f_2(x)-f_2\left(x+T_3\right)$$

引人新函数 $G(x)=f_1\left(x+T_3\right)-f_1(x)$, 则 $G(x)$ 连续. 另一方面, 由

$$\begin{aligned}
&G\left(x+T_1\right)=f_1\left(x+T_3+T_1\right)-f_1\left(x+T_1\right)=f_1\left(x+T_3\right)-f_1(x)=G(x)\\
&G\left(x+T_2\right)=f_2\left(x+T_2\right)-f_2\left(x+T_3+T_2\right)=f_2(x)-f_2\left(x+T_3\right)=G(x)
\end{aligned}$$

知 T_1, T_2 都是 $G(x)$ 的周期.

情形 1: $G(x)$ 不是常数函数. 由引理 2,$G(x)$ 有最小正周期. 设 $G(x)$ 的最小正周期为 T_0. 又由引理 2, T_1 和 T_2 都是 T_0 的整数倍. 设 $T_1=mT_0, T_2=nT_0$, 于是 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}$ 为有理数, 定理的结论成立

情形 2: $G(x)$ 是常数函数. 设此常数为 c, 即 $f_1\left(x+T_3\right)-f_1(x)=c$. 对于任意正整

数 n, 在上式中令 $x=0,T_3,2T_3,\cdots,(n-1)T_3$, 相加得

$$f_1(nT_3)-f(0)=nc$$

另一方面，$f_1(x)$ 为连续周期函数, 从而 $f_1(x)$ 有界. 无妨设 $|f_1(x)|$ 的上界为 M. 于是，$nc\leqslant 2M$. 由 n 的任意性，c = 0. 所以

$$f_1(x+T_3)-f_1(x)=0,\quad f_2(x+T_3)-f_2(x)=0$$

即 T_3 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的公共周期. 在此情形, 取 $f_1(x)$ 的周期 T_3 和 $f_2(x)$ 的周期 T_3, 其周期的比等于 1 , 也是有理数，定理的结论依然成立.

14. 设 f 的周期为 T_f,g 的周期为 T_g, 对于任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有

$$0=\lim_{n\to\infty}(f(x+nT_f)-g(x+nT_f))=\lim_{n\to\infty}(f(x)-g(x+nT_f))$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x+nT_f)=f(x)$, 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+nT_g)=g(x)$, 于是有

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\lim_{n\to\infty}(g(x+nT_f)-f(x+nT_g))\\&=\lim_{n\to\infty}(g(x+nT_f+nT_g)-f(x+nT_g+nT_f))\\&=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-f(x))=0\end{aligned}$$

所以有 $f=g$

15. $(\Leftarrow)$ 设对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, s. $t.$ 只要 $x,y\in I,x\neq y$ 且

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$$

便有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{N}$, 则当 $x,y\in I,|x-y|<\delta$ 时 , 必有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

即 f 在 I 上是一致连续的.（反证) 假设当 $|x-y|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$, 则

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}>\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{N}}=N$$

此时, 必有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 这与上述 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$ 相矛盾.

$(\Rightarrow)$ 设 f 在 I 上一致连续, 即对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $x,y\in I,|x-y|\leqslant\delta$, 便有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 现在取 $N\in$ N, s. t. $N>\dfrac{2\varepsilon}{\delta}$. 若 $x,y\in I,x\neq y$(不妨设$x>y$), 且

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$$

则必有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. (反证) 反设 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$, 则由上述结论, 必有 $x-y>\delta$.
令 $k=\left[\dfrac{x-y}{\delta}\right]\left(\text{不超过}\dfrac{x-y}{\delta}\text{ 的最大整数}\right)$, 这时

$$\begin{aligned}&1\leqslant k=\left[\frac{x-y}{\delta}\right]\leqslant\frac{x-y}{\delta}\leqslant\frac{x-y}{\delta}+\left(\frac{x-y}{\delta}-1\right)\leqslant 2\frac{x-y}{\delta}-1\\&k+1\leqslant 2\frac{x-y}{\delta}\end{aligned}$$

于是

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(y)-f(y+\delta)|+|f(y+\delta)-f(y+2\delta)|$$

$$+\cdots+|f(y+k\delta)-f(x)|<(k+1)\varepsilon$$

$$\leqslant 2\frac{x-y}{\delta}\varepsilon<N(x-y)$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<N$$

16. 此题下一题的推论

17. （反证）假设 f 不是常值函数, 则 $\exists a_1,b_1 \in I, a_1<b_1$, s.t. $f(a_1) \neq f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1)<f(b_1)$. 由 f 连续及介值定理知 ,$\exists c \in (a_1,b_1)$ 使得

$$f(a_1)<f(c)=\frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}<f(b_1)$$

若 $b_1-c \leqslant \frac{b_1-a_1}{2}$, 则令 $a_2=c$, 取 b_2 满足 $a_2=c<b_2<b_1$, 且

$$f(a_1)<f(a_2)=f(c)<f(b_2)<f(b_1)$$

若 $c-a_1 \leqslant \frac{b_1-a_1}{2}$. 则令 $b_2=c$, 取 a_2 满足 $a_1<a_2<c=b_2$ 且

$$f(a_1)<f(a_2)<f(c)=f(b_2)$$

无论哪种情形都有 $[a_2,b_2] \subset (a_1,b_1)$, 且 $f(a_2)<f(b_2)$. 在 $[a_2,b_2]$ 上重复上述做法并依次类推下去, 得一闭区间套:

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$$

且 $0<b_n-a_n \leqslant \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \to 0$. 根据闭区间套定理 ,$\exists_1 x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 根据区间的选法知 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 且 $\lim_{n\to+\infty} a_n=x_0=\lim_{n\to+\infty} b_n$, 再由 f 连续 , $f(a_n)$ 严格增 , $f(b_n)$ 严格减. 因此 $f(a_n)<f(x_0)<f(b_n)$, 即 x_0 不是 f 的极值点, 这与题设 $\forall x$ 都是极值点相矛盾.

18. 对 $\delta>0$, 作点集

$$E_\delta=\{t \in R | f(t)>f(x), x \in [t-\delta,t+\delta]-\{t\}\}$$

下面指出 E_δ 是有限集. 反之, 假定 t_0 是 E_δ 的极限点, 并对 $\eta\delta/2$, 取 $E_\delta \cap [t_0-\eta,t_0+\eta]$ 中的点 $t',t'',t' \neq t''$, 则有

$$f(t')>f(t'') \quad (t'-\delta \leqslant t'' \leqslant t'+\delta)$$
$$f(t'')>f(t') \quad (t''-\delta \leqslant t' \leqslant t''+\delta)$$

但这是不成立的，这说明 E_δ 是有限集. 现在作递减正数列 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots$, $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}$ 是可数集. $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}$ 是 f 的严格极大值点。类似可得 f 的严格极小值点是可数的。

严格极大值点和严格极小值点均是可列的例子为：$f(x)=\sin\frac{1}{x}$

19. 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0>0$ 及 $x_n \to +\infty (n \to +\infty)$, 使 $|f(x_n)|>\varepsilon_0$ 由 f 的连续性知 $\exists \delta_n$ 使当 $x \in (x_n-\delta_n, x_n+\delta_n)$ 时 $|f(x)|>\varepsilon_0$. 令 $[a_1,b_1]=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]$

(不失一般性可设 $a_1>0$). 当 $k\geqslant k_1\geqslant\dfrac{a_1}{b_1-a_1}$ 时, $kb_1\geqslant(k+1)a_1$, 于是 $[ka_1,kb_1]\cap[(k+1)a_1,\ (k+1)b_1]\neq\varnothing$. 从而 $\forall x\geqslant k_1a_1$, 必 $\exists k\in\mathrm{N}$, 使 $x\in[ka_1,kb_1]$, 即 $\exists c\in[a_1,b_1]$, s. t. $kc=x\in[ka_1,kb_1]$. 由 $x_n\to+\infty(n\to+\infty)$ 知, $\exists N_1\in\mathrm{N}$, 当 $n>N_1$ 时, $x_n>k_1a_1$. 考虑 x_{N_1}, 由上可知 $\exists l_1$ 使 $x_{N_1}\in[l_1a_1,l_1b_1]$, 又可取到 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$ 使得 $[l_1a_2,l_1b_2]\subset[x_{N_1}-\delta_{N_1},\ x_{N_1}+\delta_{N_1}]\cap[l_1a_1,l_1b_1]$. 同样取 $k_2\geqslant\dfrac{a_2}{b_2-a_2}$, $\exists x_{N_2}\geqslant k_2a_2$ 及 l_2 使 $x_{N_2}\in[l_2a_2,l_2b_2]$. 再取 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$, 使 $x_{N_2}\in[l_2a_3,l_2b_3]\subset[x_{N_2}-\delta_{N_2},x_{N_2}+\delta_{N_2}]\cap[l_2a_2,l_2b_2]$, 且

$$l_2\geqslant\frac{x_{N_2}}{b_3}>\frac{x_{N_2}}{b_2}>\frac{x_{N_1}}{a_1}\geqslant l_1$$

及 $x_{N_2}>\max\left\{k_2a_2,\dfrac{b_2}{a_1}x_{N_1}\right\}$

不断重复上述过程, 得到 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_i,b_i]\supset\cdots$, $l_1<l_2<\cdots<l_{i-1}<l_i<\cdots$ 满足

$$[l_{i-1}a_i,l_{i-1}b_i]\subset\left[x_{N_{i-1}}-\delta_{N_{i-1}},x_{N_{i-1}}+\delta_{N_{i-1}}\right]\cap[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}]$$

由区间套原理知，存在 $\alpha\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$. 因为

$$\begin{aligned}l_{i-1}\alpha&\in[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}]\\&\subset\left[x_{N_{i-1}}-\delta_{N_{i-1}},x_{N_{i-1}}+\delta_{N_{i-1}}\right]\cap[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}]\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{i\to+\infty}l_i=+\infty$ 和 $|f(l_{i-1}\alpha)|>\varepsilon_0$, $\lim\limits_{i\to+\infty}f(l_i\alpha)\neq0$. 这与 $\lim\limits_{i\to+\infty}f(l_i\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(n\alpha)=0$ 矛盾. 从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

20. 必要性显然，只证充分性：由第三章第二组参考题的第 10 题可得 $t\in[L,S]$ 均是 $\{x_n\}$ 的聚点, 其中 $L=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$, $S=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$, 设 $\lim\limits_{n_k\to\infty}x_n=t$, 则 $\lim\limits_{n_k\to+\infty}x_{n_k+1}=t$, 若 $L<S$，则 $\forall t\in[L,S]$ 都有 $f(t)=t\Rightarrow\{x_n\}$ 是常值数列矛盾，故 $\{x_n\}$ 收敛。

第 6 章 导数与微分

6.1 导数及计算

6.1.1 练习题

1. (1) 若 $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x)=f(-x)$ 则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

故

$$\begin{aligned} f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x) \end{aligned}$$

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数 $f(x)=-f(-x)$ 则

$$\begin{aligned} f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x) \end{aligned}$$

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数，设最小周期为 $T\Rightarrow f(x)=f(x+T)$ 故

$$\begin{aligned} f'(x+T) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f'\left(0^-\right)=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x} &= -\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \\ &= -f'\left(0^+\right) \end{aligned}$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f'(0^-)=f'\left(0^+\right)\Rightarrow f'(0)=0$

3. 两条曲线的切线函数为：$y=2ax, y=\dfrac{1}{x}$

设他们在 (x_0,y_0) 处相切 $\Rightarrow 2ax_0=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow x_0=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$

又 (x_0,y_0) 是交点 $\Rightarrow ax_0^2=\ln x_0\Rightarrow a\cdot\dfrac{1}{2a}=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\Rightarrow a=e^{-(\ln 2+1)}$

4. $\Rightarrow$:$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处相切则 $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$，$f'\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)$ 故

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g\left(x_0\right)}{x-x_0} \\ &\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)-g(x)+g\left(x_0\right)}{x-x_0}=0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0 \\ &\Rightarrow f(x)-g(x)=o\left(x-x_0\right) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: 上述过程逆推导 ($f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$ 是已知的)

5. 求交点：$f(x)=f(x)\sin x \quad \overset{f(x)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

相切：$f'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$

当 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 时可得

$$f'(x)\sin x+f(x)\cos x=f'(x)$$

满足相切条件

6.

$$\begin{aligned}
p(x)&=(x-x_1)^{n_1}+\cdots\cdots(x-x_k)^{n_k}\\
p'(x)&=n_1(x-x_1)^{n_1-1}\cdots(x-x_k)^{n_k}+\cdots+n_k(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_k)^{n_k-1}\\
&=\frac{n_1}{x-x_1}p(x)+\cdots+\frac{n_k}{x-x_k}p(x)\\
&=p(x)\left(\frac{n_1}{x-x_1}+\frac{n_k}{x-x_k}\right)\\
&=p(x)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x-x_i}\right)
\end{aligned}$$

7. $x\neq0$ 时 $\Rightarrow f(x)$ 是初等函数的复合函数 $\Rightarrow f(x)$ 可导

$x=0$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

则 $f'\left(0^{+}\right)=0$，$f'(0^{-})=1\Rightarrow f'\left(0^{+}\right)\neq f'(0^{-})$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处导数不存在

8. (1)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ 即 $\lim\limits_{x\to0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow n\geqslant1$

(2)

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$$

要求 $f'(0)$ 存在 $\Rightarrow n-1\geqslant1\Rightarrow n\geqslant2$

(3)

$$f'(x)=\begin{cases}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}\\ 0\end{cases}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ 可得

$$\lim_{x\to0}\left(x^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)=f'(0)=0$$

$\Rightarrow n-2\geqslant1\Rightarrow n\geqslant3$

9. $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=1$ 或 $f(0)=0$

$f(0+x)=f(0)\cdot f(x)$ 由于 $f(x)\neq0\Rightarrow f(0)=1$ 可得

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=1$$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)
\end{aligned}$$

10. $x \neq 0$ 时 $f(x), g(x)$ 不连续 $\Rightarrow f(x), g(x)$ 不可导

$x = 0$ 时 $f(0) = 0, g(0) = 0$ 由于

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(x) \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$$

可得 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

又

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$$

当 x 以无理数列趋向于 0 时，$f'(0) = 0, g'(0) = 0$

当 x 以有理数列趋向于 0 时，$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1, g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导，$g(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

11. (1)$x_0 \neq 0$ 时且为有理数时，$f(x_0) = x_0$

x 取无理数趋向于 x_0 则

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = x_0^2 + x_0 - x_0 = x_0^2 \neq 0$$

$x_0 \neq 0$ 时且为无理数时 $f(x_0) = x_0^2 + x_0$

x 取有理数趋向于 x_0 则

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = x_0 - x_0^2 - x_0 = -x_0^2 \neq 0$$

(2)$f(0) = 0$，$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

x 以无理数趋向于 0 时 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x} = 1$

x 以有理数趋向于 0 时 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

故 $f'(0) = 1$

12. $g(0) = 0 \quad |f(0)| \leqslant |g(0)| \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

由于

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \to 0} \left| \frac{g(x)}{x} \right| = |g'(0)| = 0$$

故 $f'(0) = 0$

6.2 高阶导数及其他求导法则

6.2.1 练习题

1. $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} \Rightarrow (1 + x^2) f'(x) = 1$ 利用 Leibniz 法则求 $(n-1)$ 次导，得

$$(1 + x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1)x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0)$$

故

$$\begin{aligned} f'(0)=1 &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\cdot(2k)! \\ f^{(2)}(0)=0 &\Rightarrow f^{(2k)}(0)=0 \end{aligned}$$

2. $f'(x)=2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$ 可得

$$\Rightarrow\left(1+x^2\right)f'(x)=2\arctan x$$

$$\Rightarrow\left(1+x^2\right)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=2(\arctan x)^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n)}(0)+2(\arctan x)^{(n-1)}(0)$$

由上题可知

$$\begin{aligned} f'(0)=0,\quad n=2k+1 \quad &\Rightarrow \quad 2(\arctan x)^{(2k)}(0)=0 \\ &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0)=0 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} f^{(2)}(0)=2,\quad & n=2k\Rightarrow 2(\arctan x)^{2k-1}=2\cdot(-1)^k(2k-2)! \\ \Rightarrow f^{(2k)}(0) \quad & =(-1)^2(2k-1)!+2\cdot(-1)^2(2k-2)! \\ & =(-1)^k[3(2k-2)!+(2k-1)] \end{aligned}$$

3. $f'(x)=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 可知

$$\left(1-x^2\right)\left(f'(x)\right)^2=4(\arcsin x)^2=4f(x)$$

再次求导

$$-xf'(x)+\left(1-x^2\right)f''(x)=2$$

由 Leibniz 法则得

$$-xf^{(n-1)}(x)-(n-2)f^{(n-2)}(x)+\left(1-x^2\right)f^{(n)}(x)-2(n-2)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x)=0$$

故

$$f^{(n)}(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$$

从而有

$$\begin{aligned} f'(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad f^{(2k+1)}(0)=0 \\ f^{(2)}(0)=2 \quad &\Rightarrow \quad f^{(2k)}(0)=2[(2k-2)!!]^2 \end{aligned}$$

4. 归纳假设法 $n=0$ 显然成立

假设 $n=k$ 也成立，下证明 $n=k+1$ 也成立

记 $y_k=x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}$，则 $y_{k+1}=x^ke^{\frac{1}{x}}=xy_k$ 故

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(k+1)} &=xy_k^{(k+1)}+(k+1)y_k^{(k)} \\ &=x\left(\frac{(1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right)'+(k+1)\cdot\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\ &=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

所以假设成立，故 $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

5. (1)$y'=3\sin^2 x\cos x \Rightarrow y^{(2)}=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x=6\sin x-9yy^{(n)}=-9y^{(n-2)}+6\sin\left(x+\dfrac{n-2}{2}\pi\right)$ 故有

$$y^{(n)}=\begin{cases}(-1)^k 9^k\sin^3 x+6\sin(x+(k-1)\pi) & n=2k\\ 3(-1)^k 9^k\sin^2 x\cos x+6\sin\left(x+\dfrac{2k-1}{2}\pi\right) & n=2k+1\end{cases}$$

(2)$y=e^x\sin x$

$$\Rightarrow y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y''=\sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{\frac{1}{4}}e^x\sin\left(x+\frac{2}{4}x\right)$$

依次可得

$$\Rightarrow y^{(n)}=2^{\frac{1}{2n}}e^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$$

(3) 记 $y_n=x^{n-1}\ln x$ 则 $y_n=xy_{n-1}\Rightarrow y_n^{(n)}=xy_{n-1}^{(n)}+ny_{n-1}^{(n-1)}y_1'=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y_2^{(2)}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y_3^{(3)}=\dfrac{2}{x}$ 可假设 $y_n^{(n)}=\dfrac{a_n}{x}$ 则

$$\frac{a_n}{x}=x\cdot\frac{a_n}{x^2}+n\cdot\frac{a_{n-1}}{x}$$

$$a_n=(n-1)a_{n-1}=\cdots=(n-1)!a_1=(n-1)$$

故 $y_n^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$

(4)

$$y^{(n)}=x^3e^x+3x^2e^x+6xe^x+6e^x=\left(x^3+3x^2+6x+6\right)e^x$$

(5) 记 $y_n=\dfrac{x^n}{1-x}\Rightarrow y_n=xy_{n-1}\Rightarrow y_n^{(n)}=xy_{n-1}^{(n)}+ny_{n-1}^{(n-1)}$ 又 $y_1=\dfrac{x}{1-x}\Rightarrow y_1'=\dfrac{1}{1-x^2}\Rightarrow y_2^{(2)}=-\dfrac{2}{(1-x)^2}\Rightarrow y_3^{(3)}=-\dfrac{6}{(1-x)^4}$ 依次类推可得

$$y_n^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(6) 记 $y_n=\dfrac{x^n}{(x+1)^2}$ 则 $y_n=xy_{n-1}\Rightarrow y_n^{(n)}=xy_{n-1}^{(n)}+ny_{n-1}^{(n-1)}$ 又 $y_1'=\dfrac{1-x}{(1+x)^3}\Rightarrow y_2^{(2)}=\dfrac{2(1-2x)}{(1+x)^4}\Rightarrow y_3^{(3)}=\dfrac{6(1-3x)}{(1+x)^5}$ 依次可得

$$y_n^{(n)}=\frac{n!(1-nx)}{(1+x)^{n+2}}$$

(7) 由

$$y=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)x-\cos(a-b)x]$$

可得

$$y'=-\frac{1}{2}\left\{(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]-(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right\}$$

6. $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ 可得

$$y'=\lambda_1C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2x}$$
$$y''=\lambda_1^2C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2e^{\lambda_2x}$$

故

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)\,y'+\lambda_1\lambda_2y$$
$$=\lambda_1^2\left(C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2e^{\lambda_2x}-(\lambda_1+\lambda_2)\left(\lambda_1C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2x}\right)\right.$$
$$\left.+\lambda_1\lambda_2\left(C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\right)\right)=0$$

7. $y=C_1\sin(wt+\varphi)+C_2\cos(\omega t+\varphi)$ 可知

$$y'=\omega C_1\cos(\omega t+\varphi)-\omega C_2\sin(\omega t+\varphi)$$
$$y''=-\omega^2C_1\sin(\omega t+\varphi)-\omega^2C_2\cos(\omega t+\varphi)$$

故

$$y''+\omega^2y$$

$$=-\omega^2\left[C_1\sin(\omega t+\varphi)+C_2\cos(\omega t+\varphi)\right]+\omega^2\left(C_1\sin(wt+\varphi)+C_2\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right)=0$$

8.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

9. 计算两条曲线的交点：$a\theta=a\theta^{-1}\Rightarrow\theta=\pm1$ 可得交点为 $(1,a)$ 和 $(-1,-a)$

由上一题可计算出两条曲线在 $(1,a)$ 处得切线斜率分别为：$\dfrac{\cos1+\sin1}{\cos1-\sin1}$ 和 $\dfrac{\cos1-\sin1}{\cos1+\sin1}$

则

$$\frac{\cos1+\sin1}{\cos1-\sin1}\cdot\frac{\cos1-\sin1}{\cos1+\sin1}=1$$

两条曲线在 $(-1,-a)$ 处得切线斜率分别为：$\dfrac{\sin1+\cos1}{\sin1-\cos1}$ 和 $\dfrac{\cos1-\sin1}{\cos1+\sin1}$ 则

$$\frac{\sin1+\cos1}{\sin1-\cos1}\cdot\frac{\cos1-\sin1}{\cos1+\sin1}=-1$$

综上，两条曲线在相交处的切线正交。

10. $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}/\dfrac{dx}{dt}$，$y''(x)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)/\dfrac{dx}{dt}$ 直接计算有：

(1)

$$y'(x)=-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}},y''(x)=-\frac{2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

$$y'(x)=\frac{t\cos t+\sin t}{\cos t-t\sin t},y''(x)=\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$$

(3)

$$y'(x)=-t\tan t,y''(x)=\frac{1}{3a\sin t\cos^4t}$$

(4)

$$y'(x)=t,y''(x)=\frac{1}{f(t)}$$

11. 求切线：$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$
设切点为 (x_0,y_0)，则 $y'(x_0)=0$ 可得

$$3x_0^2-3y_0=0\Rightarrow y_0=x_0^2$$

代入原式得

$$x_0^3+x_0^6-3x_0^3=0\Rightarrow x_0^3\left(x_0^3-2\right)=0\Rightarrow x_0=0 \text{ or } x_0=2^{\frac{1}{3}}$$

故曲线上有水平切线的点为 $(0,0),\left(2^{\frac{1}{3}},2^{\frac{2}{3}}\right)$

12. 可验证 y 为奇函数 $\Rightarrow y'$ 为偶函数 $\Rightarrow y''$ 为奇函数 $\Rightarrow y''(0)=0$

13.

$$\begin{aligned}
&y^{(5)}(x)=(6+5x)(4+3x)^2\left[(2+x)^3\right]^{(5)}+5\left[(6+5x)(4+3x)^2\right]\left[(2+x)^3\right]^{(4)}\\
&+10\left[(6+5x)(4+3x)^2\right]^{(2)}\left[(2+x)^3\right]^{(3)}+10\left[(6+5x)(4+3x)^2\right]^{(3)}\left[(2+x)^3\right]^{(2)}+\cdots\\
&=10\left[(6+5x)(4+3x)^2\right]^{(2)}\left[(2+x)^3\right]^{(3)}+10\left[(6+5x)(4+3x)^2\right]^{(2)}\left[(2+x)^3\right]^{(2)}\\
&=10\times[60(4+3x)+18(6+5x)]\times 6+10\times 270\times 6(2+x)
\end{aligned}$$

则

$$y^{(5)}(0)=60\times(240+108)+10\times 270\times 12=5-3280$$

14.

$$f(x)+1=p(x)(x-1)^4\Rightarrow f'(x)=p'(x)(x-1)^4+4p(x)(x-1)^3\Rightarrow f'(1)=0$$
$$f(x)-1=q(x)(x+1)^4\Rightarrow f'(x)=q'(x)(x+1)^4+4q(x)(x+1)^3\Rightarrow f'(-1)=0$$

$f(x)$ 是 7 次多项式 $\Rightarrow f'(x)$ 是 6 次多项式 $\Rightarrow f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3$ 积分可得

$$f(x)=\frac{a}{7}x-\frac{3a}{5}x^5+ax^3-ax+b$$

又 $f(1)=-1,f(-1)=1\Rightarrow -\frac{16}{35}a+b=-1,\frac{16}{35}a+b=1\Rightarrow a=\frac{35}{16},b=0$ 可得

$$f(x)=\frac{1}{16}x\left(5x^6-21x^4+35x^2-35\right)$$

6.3 一阶微分及其形式不变性

6.3.1 练习题

1. 设 $f'(0)=A\neq 0$ 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(x)}{A\Delta x}=1+\frac{1}{A}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(x)}{\Delta x}=1$

2. (1)$dy=\left(u'vw+uv'w+uvw'\right)dx$

(2)$dy=\frac{u'v^2-2uvv'}{v^4}dx=\frac{u'v-2uv'}{v^3}dx$

(3)

$$\begin{aligned}
dy&=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{vw^2}\right)^2}\frac{u'vw-u\left(v'w+vw'\right)}{(vw)^2}dx\\
&=\frac{u'vw-uv'w-uvw'}{v^2w^2+u^2}dx
\end{aligned}$$

(4)

$$dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2u+2v+2w}{(w^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{u+v+w}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

3. 记 $f(x) = \sqrt[n]{a^n+x}, f(0) = a$ 则

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(a^n+x)^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}\sqrt[n]{\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{n-1}}} \approx \frac{1}{na^{n-1}}$$

在 0 处展开：

$$f(x) \approx f(0) + f'(x)x = a + \frac{x}{na^{n-1}}$$

则

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3+1} \approx 2 + \frac{1}{3\times 2^2} = \frac{25}{12}$$

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4-1} \approx 3 + \frac{-1}{4\times 3^3} = \frac{323}{108}$$

$$\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 + \frac{-28}{7\times 2^6}$$

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2 + \frac{-24}{10\times 2^9}$$

4. 略

5. 略

6.4 对于教学的建议

6.4.1 第一组参考题

1. 令 $f(t) = (1+t)^{10}$ 则

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+\tan x)^{10}-1^{10}}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{(1-\sin x)^{10}-1^{10}}{-\sin x}\right]$$
$$= f'(0)\cdot 1 + f'(0) = 10 + 10 = 20$$

2.

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$
$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$
$$\Rightarrow f^{(100)}(0) = 100! - \frac{100!}{2^{101}} = 100!\left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$
$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}}\right\}$$
$$= \exp[\ln f(x)]'_{x=a} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

4. 原式 $=\dfrac{2\sin\left(x+\frac{a}{2}\right)\cos\left(-\frac{a}{2}\right)}{-2\sin\left(x+\frac{a}{2}\right)\sin\left(-\frac{a}{2}\right)}=\cot\dfrac{a}{2}$ 可得 $f(x)$ 是常值函数故 $f'(x)=0$

5. 有限增量公式：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+o(x) \\ &= f'(0)x+o(x) \end{aligned}$$

又

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n} f(0)'\cdot\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= f'(0)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}+\lim_{n\to\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{+10}{2} \end{aligned}$$

6. (1) 记 $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$ 则

$$\text{原式}=\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\right\}$，记 $f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 故

原式 $=e^{\frac{f'(0)}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

7.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(1-x)+2}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+\frac{2}{\sqrt{1-x}} \\ \Rightarrow y^{(n)} &= \frac{(2n-3)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}+\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} \end{aligned}$$

8. 归纳假设法：当 $n=1$ 时，可验证成立

假设 $n=k$ 时结论成立，下验证 $n=k+1$ 的情况

$$\begin{aligned} \left[x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k+1)} &= \left\{\left[x\cdot x^{k-1}f(x)\right]'\right\}^{(k)} \\ &= \left\{x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)+x\left[x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right]'\right\}^{(k)} \\ &= \left[x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k)}+x\left[x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k+1)}+k\left[x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k)} \\ &= (k+1)\left[x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k)}+x\left\{\left[x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k)}\right\}' \\ &= (k+1)\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)+x\left\{\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}' \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

假设成立，故对任意自然数 n 成立

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n\left[x^{n-1}f(\frac{1}{x})\right]^{(n)}$$

9. 记 $S_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$

(1)$t_n(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=S_n'(x)$

(2) 记 $T_n(x)=1^2+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}$ 则

$$\begin{aligned}T_n(x)-t_n(x)&=2x+3\times 2x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-1}\\&=x\left[2+3\times 2x+\cdots+n(n-1)x^{n-2}\right]=xS_n''(x)\\T_n(x)&=S_n'(x)+xS_n''(x)=[xS_n'(x)]'\end{aligned}$$

10. (1)$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ 两边求导可得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^{k-1}$$

再令 $x=1$ 可得

$$n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$$

(2)$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ 两边求两次导可得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^kk(k+1)x^{k-2}$$

令 $x=1$ 得

$$n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left(k^2-k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n(n-1)2^{n-2}+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$$

由 (1) 知上式 $=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$

11. 设抛物线为 $x^2=2py$，焦点为 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，任意 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0,x_0=0$ 时结论成立)，过 (x_0,y_0) 切线斜率为 $\dfrac{x_0}{p}$，法线斜率为 $-\dfrac{p}{x_0}$，由两条直线关于一条直线对称的斜率关系 (对称轴斜率为 k，另外两条斜率为 a,b，则 $\dfrac{k-a}{1+ka}=\dfrac{b-k}{1+kb}$)，则 (x_0,y_0) 连接 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ 的斜率为

$$\frac{y_0-\frac{p}{2}}{x_0}$$

设反射线斜率为 b，则

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{p}{x_0}-\frac{y_0-\frac{p}{2}}{x_0}}{1+\left(-\frac{p}{x_0}\right)\cdot\frac{y_0-\frac{p}{2}}{x_0}}&=\frac{b+\frac{p}{x_0}}{1-\frac{p}{x_0}b}\\\Rightarrow\frac{b+\frac{p}{x_0}}{1-\frac{p}{x_0}b}&=-\frac{x_0}{p}\end{aligned}$$

故 $b=\infty$，故反射后平行于 y 轴。

12. 椭圆上任意一点 P 关于椭圆的切线是 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线, 其中 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点. 换言之, 即 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线与 P 点处境圆的切线垂直.(如图 6.1)

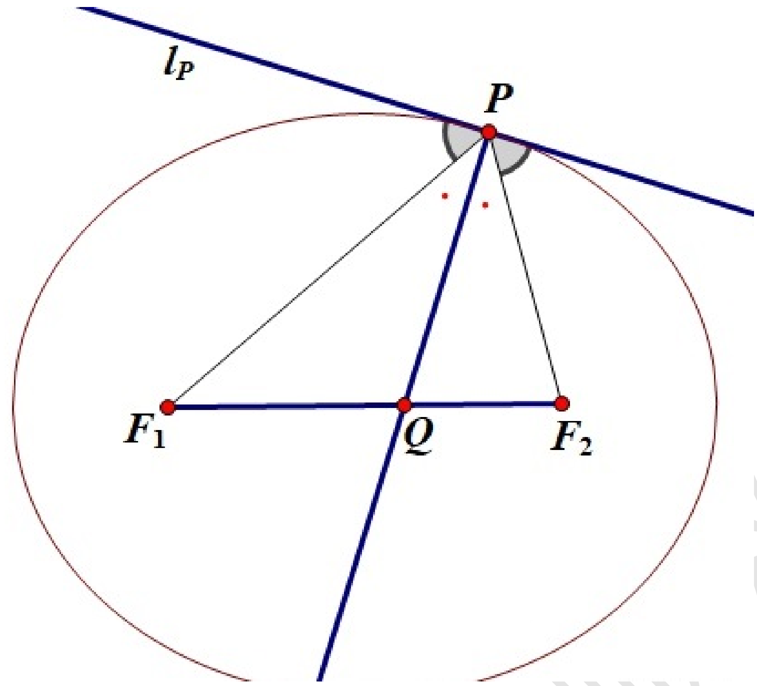

图 6.1

我们先设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 以及 P 点的坐标 (x_0,y_0)
第一步, 求出过 P 点的椭圆的切线 l_P 的斜率.
我们用椭圆的方程对 x 求导, 得到 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0$ 代入 P 点坐标可知 $k_{l_P}=y'=-\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{b^2}{a^2}$ 做 $PQ\perp l_P$ 交 F_1F_2 于 Q, 于是, 我们可以得到直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{a^2}{b^2}$
第二步, 求出 Q 点坐标.
根据 PQ 的斜率及 P 点坐标, 我们可以解出 $PQ:y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot x+\frac{\left(b^2-a^2\right)y_0}{b^2}$, 因此 Q 点坐标为 $\left(\frac{c^2x_0}{a^2},0\right)$
第三步, 根据角平分线定理验证 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$
平分线定理, PQ 平分 $\angle F_1PF_2\Leftrightarrow\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{QF_1}{QF_2}$. 由椭圆的第二定义可知: $PF_1=a+ex_0,PF_2=a-ex_0$. 因此即证: $\frac{a+ex_0}{a-ex_0}=\frac{c+\frac{c^2x_0}{a^2}}{c-\frac{c^2x_0}{a^2}}$, 化简即可.

13. $t=t_0$ 处的切向量为

$$\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right)\right)=a\left(\frac{1}{\sin t_0}-\sin t_0,\cos t_0\right)$$

切线方程为

$$\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right)\right)+at\left(\frac{1}{\sin t_0}-\sin t_0,\cos t_0\right)$$

当 $y=0$ 时，可得

$$a\sin t_0+a+\cos t_0=0\Rightarrow t=-\tan t_0$$

此时与 x 轴交点的 x 坐标为

$$a\left(\ln\tan\frac{t_0}{2}+\cos t_0-\tan t_0\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t_0\right)\right)=a\ln\tan\frac{t_0}{2}$$

则切点到 x 轴交点的长度为

$$|a|\cdot\sqrt{\left(\ln\tan\frac{t_0}{2}+\cos t_0-\ln\tan\frac{t_0}{2}\right)^2+\sin^2 t_0}=|a|$$

为常数

14. $\Rightarrow$：f 在 x_0 可微 $\Rightarrow f$ 在 x_0 可导，取

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ f'\left(x_0\right) & x=x_0\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right)=\phi\left(x_0\right)$$

故 $\phi(x)$ 在 x_0 连续

$\Leftarrow$：由 $\phi(x)$ 在 x_0 连续知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\phi\left(x_0\right)$$

故 $f(x)$ 在 x_0 可导，且导数为 $\phi\left(x_0\right)\Leftarrow f(x)$ 在 x_0 可微

15. 已知 $\phi(x)$ 是 $n-1$ 阶可微函数，则

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\phi(x)\left(x-x_0\right)$$

可求是 $n-1$ 阶导数可得

$$f^{(n-1)}(x)=\phi^{(n-1)}(x)\left(x-x_0\right)+(n-1)\phi^{(n-2)}(x)$$

$\phi(x)$ 是 $n-1$ 阶可微函数 $\Rightarrow\phi^{(n-2)}(x)$ 可微

由题 14 可知

$$\phi^{(n-2)}(x)=\phi^{(n-2)}\left(x_0\right)+\psi(x)\left(x-x_0\right)$$

其中 $\psi(x)$ 在 x_0 连续且 $\psi\left(x_0\right)=\phi^{(n-1)}\left(x_0\right)$

故

$$\begin{aligned}f^{(n-1)}(x)&=\phi^{(n-1)}(x)\left(x-x_0\right)+(n-1)\left[\phi^{(n-2)}\left(x_0\right)+\psi(x)\left(x-x_0\right)\right]\\&=(n-1)\phi^{(n-2)}\left(x_0\right)+\left[\phi^{(n-1)}(x)+(n-1)\psi(x)\right]\left(x-x_0\right)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\left[\phi^{(n-1)}(x)+(n-1)\psi(x)\right]\\&=\psi^{(n-1)}\left(x_0\right)+(n-1)\psi\left(x_0\right)\\&=\psi^{(n-1)}\left(x_0\right)+(n-1)\phi^{(n-1)}\left(x_0\right)=n\phi^{(n-1)}\left(x_0\right)\end{aligned}$$

根据题 14 及其证明可得 $f^{(n)}\left(x_p\right)$ 存在且等于 $n\phi^{(n-1)}\left(x_0\right)$

16. 数学归纳法

当 $n=1$ 时，$a_0f(x)+a_1f'(x)=0$，若 $a_1=0\Rightarrow a_0\neq 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

若 $a_1 \neq 0$ 则

$$\left[e^{\frac{a_0}{a_1}x}f(x)\right]' = 0 \Rightarrow e^{\frac{a_0}{a_1}x}f(x) = c \Rightarrow f(x) = ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

存在任意阶导数，结论成立

假设当 $n \leq k$ 时，结论成立，下证 $n = k+1$ 的情况

若 $a_{k+1} = 0$，则化为 $n = k$ 的情况，结论成立

若 $a_{k+1} \neq 0$ 则

$$f^{(k+1)}(x) = -\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{a_n} f^{(i)}(x)$$

由假设可知等式右端可导，则左侧可导，不断增大 k，由右端导数存在总是能推出左端导数存在，由此下去可知 $f(x)$ 存在任意阶导数

17. 因为多项式 p 只有实零点, 故可以设

$$p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

于是当 $x = a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 时, 命题中不等式显然成立, 当 $x \neq a_i$ 时, 对 p 求导, 有

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(x)}{x-a_i}$$

于是有

$$\frac{p'}{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-a_i}$$

对上式两侧同时求时可知

$$\frac{p''p-(p')^2}{p^2}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} \leqslant 0$$

于是有 $(p'(x))^2 \geqslant p(x)p''(x)$

18. 反证法

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中有无限个零点，选择其中可数个，设为 $\{x_n\}$ 且各不相等，由致密性定理知 $\exists n_k, x_0 \in [0,1]$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$，由连续性可知

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

又 f 可导则

$$f'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{0-0}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

则

$$x_0 \in \{x \in [0,1]; f(x) = 0 = f'(x)\}$$

这与题目条件矛盾，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中只有有限个零点

19. (1) 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \cos\arctan x \cdot \sin\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = 0!\cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

假设命题对 n 阶导数成立, 即

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

对上式两侧再求一次导, 可得

$$f^{(n+1)}(x)=(n-1)!\left(n\cos^{n-1}y\cdot(-\sin y)y'\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^n y\cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cdot ny'\right)$$

注意到 $y'=(\cos y)^2$, 于是有

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=n!\cos^{n+1}y\left(-\sin y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=n!\cos^{n+1}y\cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y\right)=n!\cos^{n+1}y\sin(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

(2) 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $y'=1/\left(1+x^2\right)$, 分子为系数是 $(-1)^0=1$ 的 0 次多项式. 假设命题在 $n-1$ 时成立, 那么

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\left(y^{(n-1)}\right)'=\left(\frac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}\right)'\\&=\frac{P'_{n-2}(x)\left(1+x^2\right)^{n-1}-P_{n-2}(x)2x(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-2}}{(1+x^2)^{2n-2}}\\&=\frac{P'_{n-2}(x)\left(1+x^2\right)-P_{n-2}(x)2x(n-1)}{(1+x^2)^{n}}\qquad(*)\end{aligned}$$

考虑等式 $(*)$ 的分子，从次数上来看容易看出它是一个 $n-1$ 次的多项式, 那只要考虑它的最高次的系数. 因为 $P'_{n-2}(x)$ 的 $n-3$ 次的系数是 $(-1)^{n-2}(n-1)!(n-2)$. 那么容易计算 $(*)$ 的最高次项的系数为

$$(-1)^{n-2}(n-1)!(n-2)-2(n-1)(-1)^{n-2}(n-1)!=-(-1)^{n-2}n!=(-1)^{n-1}n!$$

归纳结束, 原命题成立。

20. 数学归纳法

$n=1$ 时，$f_1(x)=xf_0(x)-f_0'(x)=x$ 是一次多项式，且只有一个实根 $x=0$ 自然关于原点对称。

假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $f_k(x)$ 是 k 次多项式，有 k 个不同的实根且关于原点对称

(1) 若 $k=2m$ 则可设 $f(x)=\left(x^2-a_1^2\right)\cdots\left(x^2-a_m^2\right)$ 其中 $a_1<a_2<\ldots<a_m$ 此时有

$$\begin{aligned}f_{k+1}=&\,x\left(x^2-a_1^2\right)\cdots\left(x^2-a_m^2\right)-2x\left(x^2-a_2^2\right)\ldots\left(x^2-a_m^2\right)\\&-2\left(x^2-a_1^2\right)x\left(x^2-a_3^2\right)\cdots\left(x^2-a_m^2\right)-\cdots-2\left(x^2-a_1^2\right)\cdots\left(x^2-a_{m-1}^2\right)x\end{aligned}$$

可得 $2m+1=k+1$ 次多项式，$f_{k+1}(0)=0$ 且

$$\begin{aligned}f_{k+1}\left(a_j\right)=&-2\left(x^2-a_1^2\right)\cdots\left(x^2-a_{j-1}^2\right)x\left(x^2-a_{j+1}^2\right)\cdots\left(x^2-a_m^2\right)\Big|_{x=a_j}\\=&-2\left(a_j^2-a_1^2\right)\cdots\left(a_j^2-a_{j-1}^2\right)a_j\left(a_j^2-a_{j+1}^2\right)\cdots\left(a_j^2-a_m^2\right)\end{aligned}$$

它的符号为 $-(-1)^{m-j}=(-1)^{m-j+1}$ 故

$$\lim_{x\to+\infty}f_{k+1}(x)=+\infty\quad,\quad f_{k+1}\left(a_m\right)<0,\quad f_{k+1}\left(a_{m-1}\right)>0$$

根据介值定理可得

$$\exists a_1 < \xi_1 < a_2, a_2 < \xi_2 < a_3, \ldots, a_m < \xi_m < +\infty$$

$s.t. f_{k+1}(\xi_j) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leqslant m$

注意到 $f_k(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f_{k+1}(x)$ 是奇函数可得

$$f_{k+1}(-\xi_j) = -f_{k+1}(\xi_j) = 0 \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant m$$

由此可得 $f_{k+1}(x)$ 是 $k+1 = 2m+1$ 次多项式，有且仅有 $0, \xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_1, \ldots, \xi_m$ 这 $k+1$ 个根且关于原点对称

(2) 若 $k = 2m+1$, 则可设

$$f_k(x) = x\left(x^2 - a_1^2\right) \ldots \left(x^2 - a_m^2\right)$$

则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) = & x^2\left(x^2 - a_1^2\right) \cdots \left(x^2 - a_m^2\right) - \left(x^2 - a_1^2\right) \cdots \left(x^2 - a_m^2\right) \\ & - 2x^2\left(x^2 - a_2^2\right) \cdots \left(x^2 - a_m^2\right) - 2x^2\left(x^2 - a_1^2\right)\left(x^2 - a_3^2\right) \cdots \left(x^2 - a_m^2\right) \\ & - \ldots . - 2x^2\left(x^2 - a_1^2\right) \cdots \left(x^2 - a_{m-1}^2\right) \end{aligned}$$

故 $f_{k+1}(x)$ 是 $2m+2 = k+1$ 次多项式

注意到

$$\begin{aligned} f_{k+1}(a_j) = & - 2x^2\left(x^2 - a_1^2\right) \ldots \left(x^2 - a_{j-1}^2\right)\left(x^2 - a_{j+1}^2\right) \cdots \left(x^2 - a_m^2\right)\Big|_{x=a_j} \\ = & -2a_j^2\left(a_j^2 - a_1^2\right) \cdots \left(a_j^2 - a_{j-1}^2\right)\left(a_j^2 - a_{j+1}^2\right) \cdots \left(a_j^2 - a_m^2\right) \end{aligned}$$

它的符号是 $-(-1)^{m-j} = (-1)^{m-j+1}$ 可得

$$\lim_{x \to +\infty} f_{k+1}(x) = +\infty, \quad f_{k+1}(a_m) < 0, \quad f_{k+1}(a_{m-1}) > 0$$

再次注意到 $f_{k+1}(a_1)$ 的符号为 $(-1)^m$ 与 $f_{k+1}(0) = -(-1)^m a_1^2 \cdots a_m^2$ 的符号相反，由介值定理可得

$$\exists 0 < \eta_1 < a_1, a_1 < \eta_2 < a_2, \ldots, a_{m-1} < \eta_{m-1} < a_m, a_m < \eta_m < +\infty$$

$s.t. f_{k+1}(\eta_j) = 0 \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant m+1$

又 $f_k(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f_{k+1}(x)$ 为偶函数，则

$$f_{k+1}(-\eta_j) = f_{k+1}(\eta_j) = 0 \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant m+1$$

因而 $f_{k+1}(x)$ 是 $k+2 = 2m+2$ 次多项式有且仅有 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}, -\eta_1, \ldots, -\eta_{m+1}$ 这 $k+2$ 个根且关于原点对称

6.4.2 第二组参考题

1. (1) 由

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right) \cdot \sin\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) \end{aligned}$$

可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$

由

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos kx\right)\sin\frac{x}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right]\end{aligned}$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\sin kx&=-\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)'=-\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'\\\sum_{k=1}^{n}k\cos kx&=\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'=\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'\end{aligned}$$

2. $R(x)$ 在有理点不连续 $\Rightarrow R(x)$ 不可导

对于 $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，$\forall q\in Z_+\quad\exists P_q\in Z\quad$ s.t $\dfrac{P_q}{q}<x<\dfrac{P_q+1}{q}$ 令 $r_q=\dfrac{P_q}{q}$，$s_q=\dfrac{Pq+1}{q}$ 则满足

$$0<x-r_q<\frac{1}{q},\quad 0<s_q-x<\frac{1}{q}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{R(r_q)-R(x_0)}{r_q-x_0}&=\frac{\frac{1}{q}}{r_q-x_0}<\frac{\frac{1}{q}}{r_q-s_q}=-1\\\frac{R(s_q)-R(x_0)}{s_q-x_0}&=\frac{\frac{1}{q}}{s_q-x_0}>\frac{\frac{1}{q}}{s_q-r_q}=1\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}+2}r_q=x_0=\lim\limits_{q\to+\infty}s_q$ 可得

$$\frac{R(s_q)-R(x_0)}{s_q-x_0}=\frac{R(r_q)-R(x_0)}{r_q-x_0}=\frac{\frac{1}{q}}{r_q-x_0}>1-(-1)=2$$

可知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，故 $R(x)$ 在 x_0 不可导，综上 $R(x)$ 处处不可导

3. 设切点为 (x,y)，则

$$\frac{ax^2+bx+c-y_0}{x-x_0}=2ax+b$$

可得

$$ax^2-2ax_0x-bx_0+y_0-c=0$$

则有两个解等价于

$$4ax_0^2-4a(y_0-bx_0-c)>0$$

$$x_0^2+bx_0+c>y_0$$

即 x_0 在抛物线外部；

类似可得，有一解等价于 x_0 在抛物线上；无解等价于 x_0 在抛物线内部。

4.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\left(x^2-1\right)^{n+1}\right)^{(n+2)} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\left(\left(x^2-1\right)^{n+1}\right)^{(2)}\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\left((n+1)\left(x^2-1\right)^n 2x\right)'\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(2(n+1)\left(x^2-1\right)^n + 2(n+1)x\cdot n\left(x^2-1\right)^{n+1}2x\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\left(x^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right)^{(n)} \\
&= P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\left(x^2-1\right)^{n-1} + \left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)} \\
&= P_n(x) + P_{n-1}'(x) + 2n\left(\frac{1}{2^n n!}\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)} \\
&= P_n(x) + P_{n-1}'(x) + 2nP_n(x)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)P_n(x) - 2xP_n'(x) = \left(\left(1-x^2\right)P_n(x)\right)' \\
&\xlongequal{u(x)=\left(x^2-1\right)^n} \frac{1}{2^n n!}\left(\left(1-x^2\right)u^{(n+1)}\right)' = \frac{1}{2^n n!}\left(\left(1-x^2\right)\left(u'\right)^{(n)}\right)' \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left(\left(\left(1-x^2\right)u'\right)^{(n)} - n(-2x)\left(u'\right)^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)\left(u'\right)^{(n-2)}\right)' \\
&\xlongequal{\left(1-x^2\right)u'=-2nxu} \frac{1}{2^n n!}\left(-(2nxu)^{(n)} + 2nxu^{(n)} + n(n-1)u^{(n-1)}\right)' \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left(-2nxn^{(n)} - 2n^2u^{(n-1)} + 2nxu^{(n)} + n(n-1)u^{(n-1)}\right)' \\
&= \frac{1}{2^n n!}\left(-n^2-n\right)\left(u^{(n-1)}\right)' = -n(n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

6. 由 $(u+u+w)^n = \sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!}u^iv^jw^k$ 猜测

$$(uvw)^{(n)} = \sum_{\substack{0\leq i,j,k\leq n\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!}u^{(i)}v^{(j)}w^{(k)}$$

可得

$$
\begin{aligned}
(uvw)^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)}(vw)^{(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} \sum_{j=0}^{n-j} C_{n-i}^j v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-j} C_n^i C_{n-i}^j u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j(n-i-j)!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n \\ i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
&= \sum_{\substack{0\leq i,j,k\leq n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(k)}
\end{aligned}
$$

7. 由 $|f(-1)| = |a-b+c| \leq 1, |f(0)| = |c| \leq 1, f(1) = |a+b+c| \leq 1$ 可得

$$
\begin{aligned}
|2a+b| &= |x(a-b+c) + yc + z(a+b+c)| \\
&= |(x+z)a + (z-x)b + (x+y+z)c| \\
&\xlongequal{x+z=2,z-x=1,x+y+z=0} \left|\frac{1}{2}(a-b+c) - 2c + \frac{3}{2}(a+b+c)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|a-b+c| + 2|c| + \frac{3}{2}|a+b+c| \leq 4
\end{aligned}
$$

同理可得 $|-2a+b| = \left|-\frac{3}{2}(a-b+c) + 2c - \frac{1}{2}(a+b+c)\right| \leqslant 4$

线性函数在端点处取最值，故

$$
|x| \leq 1 \Rightarrow |f'(x)| = |2ax+b| \leq \max\{|2a+b|, |-2a+b|\} \leq 4
$$

8. 设 $g(n,m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k^m \quad 0 \leqslant m \leqslant n$

对 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时有

$$
g(1,0) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C_1^k k^0 = 1-1 = 0, g(1,1) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C_1^k k^1 = -1
$$

假设 $n=N$ 时结论成立，则当 $n=N+1$ 时有

(1)$m=0$, 则 $g(N+1,0) = \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k C_{N+1}^k = (1-1)^{N+1} = 0$

(2)$1 \le m \le N+1$ 则

$$
\begin{aligned}
g(m+1,m) &= \sum_{k=0}^{N+1}(-1)^k C_{N+1}^k k^m \\
&= \sum_{k=0}^{N+1}(-1)^k \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!}k^m \\
&= -(N+1)\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}\frac{N!}{(k-1)!(N-(k-1))!}k^{m-1} \\
&\xlongequal{k-1=l} -(N+1)\sum_{l=0}^{N}(-1)^l\frac{N!}{l!(N-l)!}(l+1)^{m-1} \\
&= -(N+1)\sum_{l=0}^{N}(-1)^l\frac{N!}{l!(N-l)!}\sum_{j=0}^{m-1}C_{m-1}^j l^j \\
&= -(N+1)\sum_{j=0}^{m-1}C_{m-1}^j\left[\sum_{l=0}^{N}(-1)^l C_N^l l^j\right] \\
&= \begin{cases} 0 & 1 \leqslant m \leqslant N \\ -(N+1)(-1)^N N! & m = N+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
& f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = nf_{n-1}(x) + x^{n-1} \\
& \Rightarrow f_n^{(n)}(x) = nf_{n-1}^{(n-1)}(x) + (n-1)! \\
& \Rightarrow \frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

记 $g_n(x) = \dfrac{f_n^{(n)}(x)}{n!}$ 则

$$
g_n(x) = g_{n-1}(x) + \frac{1}{n} = \cdots = g_0(x) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}
$$

可得

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \lim_{n\to\infty} g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \ln n\right) = C
$$

其中 C 为欧拉常数

10. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = A$ 知，对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t. $|x| < \delta$ 时有

$$
\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| < \varepsilon
$$

于是 $|x| < 2\delta$ 可得 $\left|\dfrac{x}{2^k}\right| < \delta, \forall k \in Z$ 有

$$
\left|\frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}{\frac{x}{2^{k+1}}}\right| < \varepsilon, \forall k \in N
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}A\right| \\
&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}{\frac{x}{2^{k+1}}}-A\right]\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}
$$

令 $n\to+\infty$，由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$ 故

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-A\right|\leq\varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=A$

11. 考虑 $z=(1-\sqrt{x})^{2n+2}$, 容易验证在 $z^{(n)}$ 中每一个和式都含有因子 $(1-\sqrt{x})$, 也就是能知道 $z^{(n)}(1)=0$, 由二项式定理可知

$$y+z=2\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2k}x^k$$

等式两侧同时求 n 阶导数, 可得

$$(y+z)^{(n)}(x)=2\left(\binom{2n+2}{2n}n!+(n+1)!x\right)$$

令 $x=1$, 再将 $z^{(n)}(1)=0$ 代入, 就能得到

$$y^{(n)}(1)=4(n+1)(n+1)!$$

12. (1)

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f^{(2)}=\frac{-2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}\Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(cx+d)^2}S(f,x)&=\frac{6c^2(ad-bc)}{ad-bc}-\frac{3}{2}\left(\frac{-2c(ad-bc)}{ad-bc}\right)^2 \\
&=6c^2-\frac{3}{2}\cdot 4c^2=0
\end{aligned}
$$

(2) 设 $p'(x)=(x-a_1)\dots(x-a_n)$ 其中 a_i 互不相等则

$$\frac{p(x)}{p'(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i}$$

故

$$S(p,x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-a_k}\right)'-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-a_k}\right)^2=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-a_k)^2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-a_k}\right)^2<0$$

(3) 由链式法则可得

$$
\begin{aligned}
&(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=(f\circ g)^{(2)}(x)=f^{(2)}(g(x))\left(g'(x)\right)^2+f'(g(x))g^{(2)}(x) \\
&\Rightarrow (f\circ g)^{(3)}(x)=f^{(3)}(g(x))\left(g'(x)\right)^3+3f^{(2)}(g(x))g'(x)g^{(2)}(x)+f'(g(x))g^{(3)}(x)
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
S(f\circ g,x)=&\frac{f^{(3)}(g(x))\left(g'(x)\right)^2}{f'(g(x))}+3\frac{f^{(2)}(g(x))g^{(2)}(x)}{f'(g(x))}+\frac{g^{(3)}(x)}{g'(x)}\\
&-\frac{3}{2}\left[\frac{f^{(2)}(g(x))\,g'(x)}{f'(g(x))}+\frac{g^{(2)}(x)}{g'(x)}\right]^2\\
&=\frac{f^{(3)}(g(x))\left(g'(x)\right)^2}{f'\left(g(x)\right)}-\frac{3}{2}\left[\frac{f^{(2)}(g(x))g'(x)}{f'(g(x))}\right]^2+\frac{g^{(3)}(x)}{g'(x)}-\frac{3}{2}\left[\frac{g^{(2)}(x)}{g'(x)}\right]^2\\
&=S\left(f\circ g,x\right)\left(g'(x)\right)^2+S(g,x)
\end{aligned}
$$

(4) 由 (3) 得 $S\left(f\circ g,x\right)=S(f\circ g,x)\left(g'(x)\right)^2+S(g,x)<0$

(5) 不断利用 (4) 可得 $S(f,x)<0\Rightarrow S(f\circ f,x)<0$ 可得

$$S\left(f^n,x\right)<0$$

第 7 章 微积分基本定理

7.1 微分学中值定理

7.1.1 练习题

1. (1) (反证法) 令 $f(x)=e^x-ax^2-bx-c$，若 $f(x)=0$ 有 4 个零点, 不妨设为 $x_1<x_2<x_3<x_4$, 则 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}],i=1,2,3$ 上满足 Rolle 定理的条件，则存在 $y_i\in(x_i,x_{i+1}),i=1,2,3$ 使得 $f'(y_i)=0$，依次类推可得 $\exists\xi\in(x_1,x_4)$ 使得 $f^{(3)}(\xi)=e^{\xi}=0$ 矛盾。
   (2) 令 $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，则 $F(1)=F(0)=0$, 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$.
   (3) 与 (1) 类似可得 $f^{(n)}(x)=a_n n!$ 有一个零点，可得 $a_n=0$，再次可得 $a_{n-1}=0,\cdots,a_0=0$ 可得 $f(x)\equiv 0$
   (4) 若 $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 有 5 个零点，则 $f'''(x)=60x^2+24ax+6b$ 在 R 上有两个不同的零点，可得 $\Delta=(24a)^2-4\times 60\times 6b>0\Rightarrow 2a^2>5b$ 矛盾
   (5) 令 $f(x)=\left(x^2-1\right)^n$，只需证 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有 n 个不同的实数根。±1 为 $f(x)$ 的 n 重根，则对于 $k=0,1,\ldots n-1$ 均有 $f^{(k)}(\pm1)=0$，则 $\exists x_{11}\in(-1,1)$ 使得 $f'\left(x_{11}\right)=0$，又因为 $f'(-1)=f'(1)=0$ 则 $\exists x_{21}\in\left(-1,x_{11}\right),x_{22}\in\left(x_{11},1\right)$，使得 $f''\left(x_{21}\right)=f''\left(x_{22}\right)=0$，依此类推可得存在 $-1<x_{n1}<x_{n2}<\cdots<x_{nn}<1$ 使得
   $$f^{(n)}\left(x_{n1}\right)=0,f^{(n)}\left(x_{n2}\right)=0,\ldots,f^{(n)}\left(x_{nn}\right)=0$$
   (6) 令 $f(x)=x^ne^{-x}$，只需证 $f^{(n)}(x)$ 有 n 个正根，0 为 $f(x)$ 的 n 重根，且 $\forall n>0,\quad f^{(n)}(+\infty)=0$，可得 $\exists x_{11}>0$ 使得 $f'(0)=f'\left(x_{11}\right)=f'(+\infty)=0$，再次可得 $x_{21}\in\left(0,x_{11}\right),x_{22}\in\left(x_{11},+\infty\right)$ 使得
   $$f''(0)=f''\left(x_{21}\right)=f''\left(x_{22}\right)=f''(+\infty)=0$$
   以此类推可得存在 $0<x_{n1}<x_{n2}<\cdots<x_{nn}$ 使得
   $$f^{(n)}\left(x_{n1}\right)=f^{(n)}\left(x_{n2}\right)=\cdots=f^{(n)}\left(x_{nn}\right)=0$$
2. 令 $F(x)=f(x)-f(a)$，则 $F(a)=F(b)=0$，又 $F'_+(a)F'_-(b)>0$，不妨设 $F'_+(a)>0,F'_-(b)>0$，因为 $F'_+(a)>0$，则存在 $a_1>a$ 使得 $F\left(a_1\right)>F(a)=0$，同理存在 $b_1<b$ 使得 $F\left(b_1\right)<F(b)=0$，由介值定理，存在 $c\in\left(a_1,b_1\right)$ 使得 $F(c)=0$，则 $F(a)=F(c)=F(b)=0$ 分别在 $(a,c),(c,b)$ 上运用 Rolle 定理，可得 $\exists x_1\in(a,c),x_2\in(c,b)$，使得 $F'\left(x_1\right)=F'\left(x_2\right)=0$，即 $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0$
3. 取 $g(x)=\ln x$，由柯西中值定理可得 $\exists\xi\in(a,b)$，使得
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\cdot\xi f'(\xi)$$

4. 令

$$F(x)=\left(b^2-a^2\right)(f(x)-f(a))+(f(a)-f(b))\left(x^2-a^2\right)$$

则 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理可得存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]$$

5. 令 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(x)]$，则 $F(a)=F(b)=0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\cdot(g(b)-g(\xi))-g'(\xi)(f(\xi)-f(a))=0$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\ xi)}$$

6. 若存在 $x_0>a$,使得 $f(x_0)=f(a)$,则结论成立,因此不妨设 $\forall x\in(a,+\infty)$, $f(x)>f(a)$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$, $\forall x_0>a$，$\exists x_1>x_0$ 使得 $f(x_1)<f(x_0)$，由介值定理可得存在 $x_2\in(a,x_0)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，故 $\exists\xi\in(x_2,x_1)$ 使得 $f'(\xi)=0$

7. 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $F(0)=F(+\infty)=0$，故 $\exists\xi>0$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}$$

8. (1) 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 得 $\theta=\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 得 $\theta=-\dfrac{x\pm\sqrt{x^2+x\Delta x}}{\Delta x}$ 由 $f(x)$ 定义域 $x>0$，可得

$$\theta=-\frac{x+\sqrt{x^2+x\Delta x}}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

9. 由 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$ 可得

$$\theta(x)=\frac{1-2x+2\sqrt{x^2+x}}{4}$$

$$\theta'(x)=\frac{-2+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}}{4}>0$$

可得 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，又

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2},\lim_{x\to 0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}$$

可得 $\dfrac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\dfrac{1}{2}$

10. 由达布定理知，导函数无第一类间断点，而单调函数只可能有第一类间断点，故此导函数无间断点。

11. 由于 $f(a)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，所以 $\forall x\in[a,b]$，均有 $f(x)\leqslant f(a)$；故

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$

若 $f(b)$ 是 $[a,b]$ 上的最大值，则 $\forall x\in[a,b]$ 上，均有 $f(x)\leqslant f(b)$，故

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant 0$$

12. 令 $f(x)=2\arcsin x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$，则 $f'(x)=0$，又 $f(0)=0$ 故 $f(x)\equiv 0$，即 $2\arcsin x\equiv\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$
13. f 为线性函数，$f''(x)\equiv 0\Rightarrow f'(x)=c$($c$ 为常数)，则

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\\&=c(x-x_0)+f(x_0)\end{aligned}$$

14. 假设 $|f'(x)|\leq M$ 有界，则

$$\begin{aligned}&f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\\&|f(x)|\leq|f(x_0)|+M|b-a|\end{aligned}$$

可得 $f(x)$ 有界，矛盾。

15. 固定 x_0， $\forall x<x_0,\exists\delta>0$ 使得 $f(x)>f(x_0),\forall x\in(0,\delta)$ 则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$$

进一步可得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 右侧无下界。

16. 若 $\exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)\neq f(a)$，若 $f(c)>f(a)$ 则

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$$

若 $f(c)<f(a)$ 则

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{f(a)-f(c)}{b-c}>0$$

17. 令 $F(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$ 则 $F(0)=F(1)=F(c)=0$，故 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=0$
18. $\exists\eta$ 使得

$$e^\eta=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

则取 $\xi=\eta$ 有

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}e^\eta=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

19. (1) 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},F(1)=-1$，故 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\eta)=\eta$
(2) 令 $G(x)=(f(x)-x)e^{-\lambda x}$，则 $G(0)=G(\eta)=0$，可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$ 使得 $G'(\xi)=0$，即

$$\left[(f'(\xi)-1)-\lambda(f(\xi)-\xi)\right]e^{-\lambda\xi}=0$$

即

$$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$$

20. ⇒：$f'(x)=c$ 为常数，则固定 x_0，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x_0\right)+f'(\xi)\left(x-x_0\right) \\ &= c\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right) \end{aligned}$$

为线性函数

⇐：$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$ 为常数

7.2 Taylor 定理

7.2.1 练习题

1.

$$\begin{aligned} x\csc x &= \frac{2ix}{e^{ix}-e^{-ix}}=2ix+\frac{2ix}{e^{2ix}-1}=Re\left\{2ix\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k(2ix)^k}{k!}\right\} \\ &= B_0-\frac{B_2}{2!}(2x)^2+\cdots+(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2x)^{2k}+o(x^{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\cos x &= \int_0^x(-\tan t)dt \\ &= -\int_0^x \tan t dt \\ &= -\int_0^x\left(\frac{B_2(2^2-1)2^2}{2!}t-\frac{B_4(2^4-1)}{4!}t^3+\cdots\right. \\ &\left.+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!}t^{2n-1}+o(t^{2n})\right)dt \\ &= -\frac{B_2(2^2-1)2^2}{2!\cdot 2}x^2+\frac{B_4(2^4-1)2^4}{4!\cdot 4}x^4+\cdots \\ &+(-1)^n\frac{B_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!\cdot 2n}x^{2n}+o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\frac{\sin x}{x} &= \int_0^x\left(\cot t-\frac{1}{t}\right)dt \\ &= \int_0^x\left(-\frac{B_2 2^2}{2!}t+\frac{B_4 2^4}{4!}t^3+\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}t^{2n-1}+o(t^{2n})\right)dt \\ &- \frac{B_2 2^2}{2\cdot 2!}x^2+\frac{B_4 2^4}{4\cdot 4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n}2^{2n}}{2n\cdot(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

2. 可以这样做

3. $f(x)=(x+a)^n$，则

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+a)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{n-k}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的拉格朗日余项的泰勒公式为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= a^n+\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}x+\cdots+\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ax^{n-1}+x^n
\end{aligned}
$$

4. 对 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开可得

$$
f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+o((x-x)^{n-1})
$$

又 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 可得

$$
f'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^{n-1}\right),(x\to x_0)
$$

5.

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3} &= \left(x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}+o\left(x^{15}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= x\left(1-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{12}}{120}+o\left(x^{12}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= x\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{12}}{120}+o\left(x^{12}\right)\right)-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{12}}{120}+o\left(x^{12}\right)^2\right)}{2!}\right. \\
&\left.+o\left(x^{12}\right)\right] \\
&= x\left[1-\frac{x^6}{18}+\frac{x^{12}}{360}+o\left(x^{12}\right)-\frac{1}{324}x^{12}+o\left(x^{12}\right)\right] \\
&= x-\frac{x^7}{18}-\frac{1}{3240}x^{13}+o\left(x^{13}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&f'(0)=1, f^{(k)}(0)=0, k=2,3,4,5,6,8,9,10,11,12 \\
&f^{(7)}(0)=-\frac{1}{18}, f^{(13)}(0)=-\frac{1}{3240}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \int_0^x\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!t^{2k}}{(2k)!!}\right)dt \\
&= x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)\cdot(2k)!}x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

所以 $\arcsin x$ 带有 Peano 预想的泰勒展开为

$$
\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)\cdot(2k)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)
$$

7. 令 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \sqrt{1-x^2}y=\arcsin x$，两边对 x 求导可得

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-x^2}y'-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\&\left(1-x^2\right)y'=1+xy\end{aligned}$$

显然 y 为奇函数，不妨设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n-1}$ 代入上式可得

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)a_{2n+1}-(2n-1)a_{2n-1}\right)x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}x^{2n}$$

对比系数可得

$$\begin{cases}a_1=1\\(2n+1)a_{2n+1}=2na_{2n}\end{cases}$$

可得

$$a_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}n=0,1,2,\cdots$$

从而 $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 带有 Peano 余项的麦克劳林公式为

$$f(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{4!!}{5!!}x^5+\cdots+\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

8. 由带有拉格朗日余项的麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

可得绝对误差为

$$\Delta e=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

(1)$\Delta e\leq\dfrac{e}{n+1}$

(2)$\Delta e\leqslant\dfrac{1}{3840}$

(3)$\Delta e\leqslant\dfrac{2^6\left(2^6-1\right)}{42\cdot 6!}\cdot 0.1^5\approx 1.3\times 10^{-6}$

(4)$\Delta e\leq\dfrac{15\sqrt{2}}{52044}$

9. 否，反例为 $f(x)=e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}, f^{(n)}\left(x_0\right)=0$

10. 若 $C<1$，则 $\forall x\in[-1,1]$ 有

$$|f(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right|\leqslant C^n\quad(\forall n\in N_+)$$

故 $f(x)=0$

若 $C\geq 1$，则 $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}\right)$，有

$$|f(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right|\leq(Cx)^n\,(\forall n\in N_+)$$

则 $f(x)\equiv 0\quad\left(\forall x\in\left(-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}\right)\right)$，由连续性可得 $f\left(\pm\dfrac{1}{C}\right)=0$，故在 $-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}$ 处

和上述类似操作可得 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [-1,1]$

11. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 定理可知

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''\left(\xi_1\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''\left(\xi_2\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\quad \xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

两式相减可得

$$\begin{aligned}\frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)| &= \left|\frac{f''\left(\xi_1\right)-f''\left(\xi_2\right)}{2}\right| \\ &\leqslant \frac{\left|f''\left(\xi_1\right)+f''\left(\xi_2\right)\right|}{2} \leqslant \max\left(\left|f''\left(\xi_1\right),f''\left(\xi_2\right)\right|\right)\end{aligned}$$

故取 ξ 为 ξ_i, 其中 $\xi_i=\xi_{\{1,2\}\{i\}}$ 即可.

12. (1) 不一定，例如：$f(x)=\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^3,\quad f'(x)=3\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，但 $\forall x_1,x_2\in(a,b),\quad \dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>0$

(2) 令 $f(x+\xi)=g(x)$ 则 $g''(0)>0, g'(0)=f'(\xi)$，只需证 $\exists x_1,x_2$ 使得

$$\frac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=g'(0)$$

由 $g''(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}&g'(x)>g'(0)\quad x\in(0,\delta)\\&g'(x)<g'(0)\quad x\in(-\delta,0)\end{aligned}$$

固定 $s_0\in(0,\delta)$ 则

$$\frac{g\left(s_0\right)-g(0)}{s_0}>g'(0)$$

则 $\exists t_0\in(-\delta,0)$ 使得

$$\frac{g\left(s_0\right)-g\left(t_0\right)}{s_0-t_0}>g'(0)$$

又

$$\frac{g\left(t_0\right)-g(0)}{t_0}<g'(0)$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{g(t_0)-g(x)}{t_0-x}$，则 $\varphi(0)<g'(0),\varphi\left(s_0\right)>g'(0)$，故 $\exists t_1\in\left(0,s_0\right)$ 使得 $\varphi\left(t_1\right)=g'(0)$，即

$$\frac{g\left(t_0\right)-g\left(t_1\right)}{t_0-t_1}=g'(0)$$

13. 假设 $\exists x_0$ 使得 $f'\left(x_0\right)<0$，由 $f''(x)\leq 0$ 则

$$f'(x)\leqslant f'\left(x_0\right)<0$$

则 $\forall x>x_0$ 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(x_0\right)+f'(\xi)\left(x-x_0\right)\\&\leq f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 与 $f(x)\geq 0$ 矛盾。

14. 要求 θ_n 的极限, 首先要找出 θ_n, 由导数的定义可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}\left(x_0+\theta_n h\right)-f^{(n)}\left(x_0\right)}{h}=f^{(n+1)}\left(x_0\right)\lim_{h\to o}\theta_n$$

这样我们找到了 $\lim\limits_{h\to 0}\theta_n$, 下面再来求值. 又

$$\frac{f^{(n)}\left(x_0+\theta_n h\right)-f^{(n)}\left(x_0\right)}{h}=\frac{n!}{h^{n+1}}\left(f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}\left(x_0\right)\right)\qquad(**)$$

由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}\left(x_0\right)}{(n+1)!}h^{n+1}+o\left(h^{n+1}\right)$$

代入 (**) 可得

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n)}\left(x_0+\theta_n h\right)-f^{(n)}\left(x_0\right)}{h}&=\frac{n!}{h^{n+1}}\left(\frac{f^{(n+1)}\left(x_0\right)}{(n+1)!}h^{n+1}+o\left(h^{n+1}\right)\right)\\&=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}\left(x_0\right)+o(1)\end{aligned}$$

两侧同时令 $h\to 0$ 再由 $f^{(n+1)}\left(x_0\right)\neq 0$ 可得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta_n=1/(n+1)$

15. 由下题可得。

16. 证明由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知

$$f'\left(x_0+\theta h\right)=f'\left(x_0\right)+\frac{f^{(n)(x_0)}}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o\left(h^{n-1}\right)$$

可得

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+hf'\left(x_0\right)+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n+o\left(h^n\right)\qquad(*)$$

再用带 Peano 余项的 Taylor 定理展开 $f\left(x_0+h\right)$ 可得

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+hf'\left(x_0\right)+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}h^n+o\left(h^n\right)\qquad(**)$$

对比等式 (*) 与 (**) 可知

$$\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}h^n\left(\theta^{n-1}-\frac{1}{n}\right)=o\left(h^n\right)$$

这说明

$$\theta^{n-1}-\frac{1}{n}=o(1)$$

令 $h\to 0$ 可得

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n^{1/(n-1)}}$$

7.3 对于教学的建议

7.3.1 第一组参考题

1. 设 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{1}{3}a_2\sin 3x+\ldots+\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$, 则

$$f(0)=0=a_1-\frac{1}{3}a_2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

因此根据罗尔中值定理，$f'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \ldots + a_n \cos(2n-1)x$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上至少有一个零点.

2. 假设结论不成立，由虚根的成对定理，知原方程的所有根都是实根，因此 a, b, c 都是实数. 设 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + c$, 由罗尔中值定理知 $f'(x) = x^2\left(5x^2 + 4ax + 3b\right)$ 有四个根，并且 $f'(x)$ 的重根一定是 $f(x)$ 的重根. 注意到 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的重根，但由 $c \neq 0$ 知 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的重根，矛盾. 从而假设不成立，原命题成立.
注: 这里使用了一个结论: 如果 n 次多项式 $f(x)$ 有 n 个实数根，那么 $f'(x)$ 有 $n-1$ 个实数根，并且 $f'(x)$ 的重根一定是 $f(x)$ 的根.

3. 不妨设 $a = 1$, 当 $x > 0$ 时，我们有
$$(x+1)^{2n} = x(x+1)^{2n-1} + (x+1)^{2n-1} > x \cdot x^{2n-1} + 1^{2n-1} = x^{2n} + 1$$
而当 $x < 0$ 时，我们有
$$(x+1)^{2n} = x(x+1)^{2n-1} + (x+1)^{2n-1} < x \cdot x^{2n-1} + 1^{2n-1} = x^{2n} + 1$$
而 $x = 0$ 时原方程两边相等，因此方程只有一个实根 $x = 0$

4. 设 $g(x) = e^{-kx} f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可微，且有 $g(a)g(b) > 0$ $g(a)g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ 根据零点存在定理，存在 $\eta_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right), \eta_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$, 使得 $g(\eta_1) = g(\eta_2) = 0$. 再由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$ 又由于 $g'(x) = e^{-kx}\left(f'(x) - kf(x)\right)$, 故 $e^{-k\xi}\left(f'(\xi) - kf(\xi)\right) = 0$, 即 $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$

5. 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时，结论显然成立. 假设结论已对 $n-1$ 成立，考虑 n 的情形，设
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}$$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 两两不相等，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ 不同时为零. 再设 $g(x) = e^{-\lambda_n x} f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k e^{(\lambda_k - \lambda_n)x} + c_n$, 则 $g(x)$ 的零点集和 $f(x)$ 的零点集相等. 假设 $f(x)$ 有 n 个不同的零点，则 $g(x)$ 有 n 个不同的零点，分别对 $n-1$ 对相邻零点使用罗尔中值定理，可知 $g'(x)$ 有 $n-1$ 个不同的零点. 但 $g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k\left(\lambda_k - \lambda_n\right) e^{(\lambda_k - \lambda_n)x}$, 而且 $\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n$ 是 $n-1$ 个两两不相等的非零实数，由此又得 $c_1\left(\lambda_1 - \lambda_n\right), c_2\left(\lambda_2 - \lambda_n\right), \ldots, c_{n-1}\left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)$ 不同时为零，故根据归纳假设，$g'(x)$ 的零点个数小于 $n-1$, 这导致矛盾. 所以假设不成立，从而 $f(x)$ 的零点个数小于 n, 即结论对 n 成立. 由数学归纳法知，原结论成立.

6. (1) 由（2）立得.
(2) 设 $g(x) = (f(x))^{|\alpha|} f(1-x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$, 而
$$g'(x) = |\alpha| f'(x)(f(x))^{|\alpha|-1} f(1-x) - f'(1-x)(f(x))^{|\alpha|} = (f(x))^{|\alpha|} f(1-x)\left(|\alpha|\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1-x)}{f(1-x)}\right)$$
根据罗尔中值定理，存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 结合 $f(\xi), f(1-\xi) \neq 0$ 就有
$$|\alpha| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

7. 不妨设 $f(a)=f(b)=0$, 由于 $f(x)$ 不是线性函数，故 $f(x)$ 不恒为零. 设 $c\in(a,b)$ 满足 $f(c)\neq 0$ 不妨设 $f(c)>0$, 根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,c),\quad \eta\in(c,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

得证.

8. 由上题的证明过程可直接得到存在 $\zeta\in(a,c),\quad \eta\in(c,b)$, 使得

$$f'(\zeta)>0,\quad f'(\eta)<0$$

故根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\zeta,\eta)\subset(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\eta)-f'(\zeta)}{\eta-\zeta}<0$$

9. (1) 固定 $x\in(a,b)$, 记 $\lambda=\dfrac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 并构造函数

$$g(t)=f(t)-\frac{\lambda}{3!}(t-a)^2(t-b)$$

则 $g(a)=g(x)=g(b)=g'(a)=0$, 反复使用中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g'''(\xi)=0$$

又由于 $g'''(t)=f'''(t)-\lambda$, 故 $f'''(\xi)=\lambda=\dfrac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 所以

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$$

(2) 与上一问类似,固定 $x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},1\right)$, 记 $\lambda=\dfrac{120f(x)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3}$

并构造函数

$$g(t)=f(t)-\frac{\lambda}{5!}\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)(t-1)^3$$

则 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=g(1)=g'(1)=g''(1)=g(x)=0, g'(a)=0$, 反复使用中值定理可知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g^{(5)}(\xi)=0$$

又由于 $g^{(5)}(\xi)=f^{(5)}(\xi)-\lambda$, 故 $f^{(5)}(\xi)=\lambda=\dfrac{120f(x)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3}$, 所以

$$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3$$

(3) 记 $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)\right)}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$, 并构造函数

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\left(f'(a)+f'(x)\right)+\frac{\lambda}{12}(x-a)^3$$

则

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)-f'(a)\right)-\frac{1}{2}f''(x)(x-a)+\frac{\lambda}{4}(x-a)^2$$
$$g''(x)=-\frac{x-a}{2}\left(f'''(x)-\lambda\right)$$

易知 $g(a)=g(b)=g'(a)=0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g''(\xi)=0$$

即 $-\dfrac{\xi-a}{2}\left(f'''(\xi)-\lambda\right)=0,\quad$ 又因为 $\xi\neq a,\quad$ 所以我们有

$$f'''(\xi)=\lambda=\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)\right)}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

从而 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)\right)-\dfrac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$, 命题得证.

(4) 记 $\lambda=\dfrac{2(f(a)(c-b)+f(b)(a-c)+f(c)(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, 并构造函数

$$g(x)=f(a)(x-b)+f(b)(a-x)+f(x)(b-a)-\frac{1}{2}\lambda(a-b)(b-x)(x-a)$$

则有 $g(a)=g(b)=g(c)=0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g''(\xi)=0$ 又由于

$$g'(x)=f(a)-f(b)+f'(x)(b-a)+\frac{1}{2}\lambda(a-b)(2x-a-b)$$
$$g''(x)=\left(f''(x)-\lambda\right)(b-a)$$

故 $f''(\xi)=\lambda=\dfrac{2(f(a)(c-b)+f(b)(a-c)+f(c)(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, 即

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

得证.

10. 由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

故结论成立.

11. 记 $\lambda=\dfrac{n!}{\prod_{i>j}\left(x_i-x_j\right)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ f\left(x_0\right) & f\left(x_1\right) & \ldots & f\left(x_{n-1}\right) & f\left(x_n\right)\end{vmatrix}$, 并构造函数

$$g(t)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} & t \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1} \\ f\left(x_0\right) & f\left(x_1\right) & \ldots & f\left(x_{n-1}\right) & f(t)\end{vmatrix}-\frac{\lambda}{n!}\prod_{n>i>j}\left(x_i-x_j\right)\left(t-x_0\right)\left(t-x_1\right)\ldots\left(t-x_{n-1}\right)$$

则 $g\left(x_0\right)=g\left(x_1\right)=\ldots=g\left(x_{n-1}\right)=g\left(x_n\right)=0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g^{(n)}(\xi)=0$$

又由于

$$g^{(n)}(t)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&\cdots&x_{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_0^{n-1}&x_1^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}f^{(n)}(t)-\lambda\prod_{n>i>j}(x_i-x_j)=\left(f^{(n)}(t)-\lambda\right)\prod_{n>i>j}(x_i-x_j)$$

故 $f^{(n)}(\xi)=\lambda=\dfrac{n!}{\prod_{i>j}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_0&x_1&\cdots&x_{n-1}&x_n\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\x_0^{n-1}&x_1^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}&x_n^{n-1}\\f(x_0)&f(x_1)&\cdots&f(x_{n-1})&f(x_n)\end{vmatrix}$ 即

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_0&x_1&\cdots&x_{n-1}&x_n\\\cdots&\cdots&&\cdots&\cdots\\x_0^{n-1}&x_1^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}&x_n^{n-1}\\f(x_0)&f(x_1)&\cdots&f(x_{n-1})&f(x_n)\end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

得证

12. 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 则对任意正数 N, 存在 $X>a$ 使得当 $x>X$ 时有

$$f'(x)>\max\{N,1\}$$

故 $\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f'(\xi)>N$, 且 $f(a+1)-f(a)=f'(\xi)>1$, 根据第五章第二组参考题第 15 题的结论，$f(x)$ 不一致连续.

13. 根据条件可设 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)=l$, 由柯西中值定理知

$$\lim_{x,y\to0^+,x\neq y}\frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{x,y\to0^+,x\neq y}\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}=\lim_{x,y\to0^+,x\neq y}2\sqrt{\xi}f'(\xi)=2l$$

这表明 $\lim\limits_{x,y\to0^+}|f(x)-f(y)|=0$, 由柯西准则知 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在. 根据例题 5.4 .5 的结论可知 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续

14. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 故根据洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

15. (1) 条件等价于 $(xf(x))'=0$, 故 $xf(x)=C$. 由于 $C=f(1)=1$, 故 $f(2)=\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2) 条件等价于 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$, 故 $\dfrac{f(x)}{x}=C$. 由于 $C=f(1)=1$, 故 $f(2)=2C=2$

注: 根据勘误表，(1) 中函数 $f(x)$ 的定义域应改为 $(0,+\infty)$

16. 对 $x\in[0,2]$, 有

$$f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)$$
$$f(2)=f(x)+(2-x)f'(x)+\frac{(2-x)^2}{2}f''(\xi_2)$$

故将两式相减，得

$$|f'(x)|=\left|\frac{f(2)-f(0)}{2}+\frac{x^2}{4}f''(\xi_1)-\frac{(2-x)^2}{4}f''(\xi_2)\right|$$

$$\leq \left|\frac{f(2)-f(0)}{2}\right|+\frac{x^2}{4}+\frac{(2-x)^2}{4}\leq 1+\frac{2(1-x)^2+2}{4}\leq 2$$

17. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二次可导, 令 $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty(k=0,1,2)$, 求证:

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$$

考虑任意 $x\in\mathbb{R}$ 与 $h>0$, 由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,\xi\in(x,x+h)$$
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{f''(\zeta)}{2}h^2,\zeta\in(x-h,x)$$

两式相减可得

$$2hf'(x)=f(x+h)-f(x-h)+\frac{f''(\xi)}{2}h^2-\frac{f''(\zeta)}{2}h^2$$

两侧同取上确界可得

$$2hM_1\leqslant 2M_0+M_2h^2,\forall h>0\quad(1)$$

用同样的方法可以得到不等式 (1) 对 $h\leqslant 0$ 也成立, 也就是以 h 为自变量的二次函数

$$g(h)=M_2h^2-2hM_1+2M_0$$

恒成立, 即它的判别式 $\Delta=4h^2M_1-8M_2M_0\leqslant 0$ 恒成立, 这正说明

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$$

18. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0\in(0,a)$ 处取到最大值，则 $f'(x_0)=0$. 根据拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,a)$ 使得

$$f''(\xi_1)=\frac{-f'(0)}{x_0},\quad f''(\xi_2)=\frac{f'(a)}{a-x_0}$$

故

$$|f'(0)|+|f'(a)|=x_0|f''(\xi_1)|+(a-x_0)|f''(\xi_2)|\leq x_0M+(a-x_0)M=Ma$$

得证.

7.3.2 第二组参考题

1. 设 $g(x)=f(x)-\frac{(x-a)^2}{2}\cdot\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, 则有 g 在 $[a,b]$ 上可微， 在 (a,b) 上二阶可微，且

$$g'(x)=f'(x)-(x-a)\cdot\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$
$$g''(x)=f''(x)-\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$

特别地，我们有 $g'(a)=g'(b)$. 假设 $g''(x)\neq 0,\quad x\in(a,b)$, 则根据 $g''(x)$ 的介值性，必有 $g''(x)>0$ 或 $g''(x)<0$, 不妨设 $g''(x)>0$, 从而 $g'(x)$ 在 (a,b) 上严格单调递增. 根据导函数的性质，有 $\lim\limits_{x\to a^+}g'(x)=g'(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}g'(x)=g'(b)$, 但 $g'(a)=g'(b)$, 这与 $g'(x)$ 在 (a,b) 上严格单调递增矛盾. 所以存在 $x\in(a,b)$ 使得 $g''(x)=0$ 再由

$g''(x)=f''(x)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, 知存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f''(x)=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, 结论得证.

2. 设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 g 在 $(-1,+\infty)$ 上无限次可微, 且 $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ 假设 $g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(k-1)}(0)=0,\quad g^{(k)}(0)=c\neq 0$. 根据泰勒中值定理，有

$$g(x)=\frac{c}{n!}x^k+o\left(x^k\right)\ (x\to 0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^k}=\dfrac{c}{k!},\quad$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^kg\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{c}{k!}\neq 0$, 但 $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$, 矛盾. 所以 $g^{(k)}(0)=0,\quad k=0,1,\ldots$ 又因为 $\left.\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(k)}\right|_{x=0}=n!\cos\dfrac{n\pi}{2}$, 所以 $f^{(k)}(0)=n!\cos\dfrac{n\pi}{2}$

3. 由于

$$\begin{aligned}
&2x^{2n-1}+4x^{2n-3}+\ldots+2nx\\
&\leq\sum_{k=1}^{n}2(n+1-k)x^{2k-1}\\
&\leq\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(x^{2k-2}+x^{2k}\right)\\
&=n+\sum_{k=1}^{n}((n+1-k)+(n-k))x^{2k}\\
&=n+\sum_{k=1}^{n}(2n+1-2k)x^{2k}\\
&<2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2n+1-2k)x^{2k}\\
&=2n+1+(2n-1)x^2+\ldots+x^{2n}
\end{aligned}$$

所以原方程没有实数根。

4. 反证法，假设结论不成立，则 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$, 不妨设 $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$ 严格递增. 若 $f'(0)\geq 0$, 则 $f'(1)>0$, 从而当 $x>1$ 时，有

$$f(x)-f(1)=f'(1+\theta(x-1))(x-1)>f'(1)(x-1)$$

但 f 有界，矛盾. 同理 $f'(0)<0$ 也不成立，从而假设不成立，命题得证.

5. 设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\leq b\\ f'(a),\quad x=a\end{cases}$, 则$g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 上可导. 假设 $g'(x)$ 在(a,b) 上没有零点，则其恒正或恒负，不妨设其恒正，则$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增。据假设，我们有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 其中 $x\in(a,b)$. 此式可化简为

$$f(x)-(x-a)\frac{f(b)-f(x)}{b-x}<f(a)$$

令 $x\to b^-$, 有 $f(b)-(b-a)f'(b)\leq f(a)$, 所以有

$$g(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'(b)=f'(a)=g(a)$$

矛盾. 故 $g'(x)$ 在 (a,b) 上有零点. 设 $g'(\xi)=0$, 其中 $\xi\in(a,b)$ 由于 $g'(x)=$

$\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}$, 故 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$

6. 设 $g(x)=e^{-\frac{x}{b-a}}(f(x)-f(a))$, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 且 $g(a)=0$ $g(c)g'(c)<0$ 由拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_0\in(a,c)$, 使得 $g'(\xi_0)=\dfrac{g(c)-g(a)}{c-a}=\dfrac{g(c)}{c-a}$, 此时有 $g'(\xi_0)g'(c)<0$. 根据导函数的介值性，存在 $\xi\in(\xi_0,c)\subset(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$ 由于 $g'(x)=e^{-\frac{x}{b-a}}\left(f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{b-a}\right)$, 故 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$
7. 设 $g(x)=\ln f(x)$, 则 $g(x)$ 在 (a,b) 上连续，在 (a,b) 上可导，$\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=-\infty$ 不妨设 $\alpha>1$. 任取 $x_2\in(a,b)$, 使得 $g'(x_2)>0$. (如果不存在这样的 x_2, 则 $g(x)$ 在 (a,b) 上递减，这在 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=-\infty$ 的条件下是不可能的) 然后取 $c\in(a,x_2)$ 使得 $\dfrac{g(x_2)-g(c)}{x_2-a}>\alpha g'(x_2)$, 则存在 $d\in(c,x_2)$ 使得

$$g'(d)=\frac{g(x_2)-g(c)}{x_2-c}>\frac{g(x_2)-g(c)}{x_2-a}>\alpha g'(x_2)$$

故存在 $x_1\in(d,x_2)$ 使得 $g'(x_1)=\alpha g'(x_2)$, 即 $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}=\alpha\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}$
8. 由拉格朗日中值定理,知存在 $\xi_1\in(-2,0),\quad \xi_2\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}$ $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$, 从而 $|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\le 1$
设 $g(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$, 则 $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)+f''(x)\right)$ 由于 $|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\le 1$, 故 $g(\xi_1),g(\xi_2)\le 2$. 而 $g(0)=4$, 故 $g(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上有最大值. 设在 $x=\xi$ 处取到, 则 $g'(\xi)=0$. 又由于 $g(\xi)\ge 4$, 故 $|g'(\xi)|\ge\sqrt{3}>0$, 所以 $f(\xi)+f''(\xi)=0$
9. 原条件作换元,得 $f\left(x+\dfrac{h}{2}\right)-f\left(x-\dfrac{h}{2}\right)=hf'(x)$ 对 h 求二阶导, 得 $f''\left(x+\dfrac{h}{2}\right)=f''\left(x-\dfrac{h}{2}\right)$, 即 $f''(x)$ 恒为常数, 所以 $f(x)=ax^2+bx+c$
10. 设 $f\in C[a,b]$, 定义函数

$$D^2f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

假设当 $x\in(a,b)$ 时上述极限总存在. 若 $D^2f=0(x\in(a,b))$, 求证 $f(x)=c_1x+c_2$, 其中 c_1,c_2 为常数.
对任意 $x\in[a,b]$, 定义

$$f_\varepsilon(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

那么 $f_\varepsilon(a)=f_\varepsilon(b)=0$, 则

$$\begin{aligned}D^2f_\varepsilon(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f_\varepsilon(x+h)+f_\varepsilon(x-h)-2f_\varepsilon(x)}{h^2}\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}\left(f(x+h)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x+h-a)+\varepsilon(x+h-a)(x+h-b)\right.\\&\quad+f(x-h)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-h-a)+\varepsilon(x-h-a)(x-h-b)\\&\quad\left.-2\left(f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\varepsilon(x-a)(x-b)\right)\right.\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}\left(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)+\varepsilon\cdot2h^2\right)\\&=D^2f(x)+2\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

可以证明当 $\varepsilon>0$ 时, $f_\varepsilon\leqslant0$. 事实上, 若存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f_\varepsilon(x_0)>0$, 因为 $f_\varepsilon(a)=f_\varepsilon(b)=0$ 且 f_ε 连续. 故 f_ε 在 (a,b) 中必有最大值, , 令 $x^*=\min\{x\in(a,b):f_\varepsilon(x)=\max(f_\varepsilon)\}$. 所以有

$$f(x^*+h)+f(x^*-h)<2f(x^*)$$

又由 $D^2f_\varepsilon(x^*)=2\varepsilon>0$, 存在 $h>0$, 使得

$$\begin{aligned}&f_\varepsilon(x^*+h)+f_\varepsilon(x^*-h)-2f_\varepsilon(x^*)>0\\&f_\varepsilon(x^*)<\frac{1}{2}(f_\varepsilon(x^*+h)+f_\varepsilon(x^*-h))<f_\varepsilon(x^*)\end{aligned}$$

矛盾, 故当 $\varepsilon>0$ 时 $f_\varepsilon(x)\leqslant0$, 同理当 $\varepsilon<0$ 时, $f_\varepsilon\geqslant0$, 由 f_ε 关于 ε 的连续性知

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=f_0(x)=0$$

即

$$f(x)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

是线性函数，令

$$c_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad c_2=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

即得 $f(x)=c_1x+c_2$

11. 假设存在 $x_0\in\left[0,\frac{1}{2c}\right]$, 使得 $f(x_0)\neq0$. 定义数列 $\{x_n\}$ 如下： $f'(x_{n+1})=\frac{f(x_n)}{x_n}$,$x_{n+1}\in(0,x_n)$ 则 $\{x_n\}$ 严格递减且恒大于零，且有

$$\begin{aligned}|f(x_n)|&\geq\frac{1}{c}\left|f'(x_n)\right|=\frac{1}{c}\frac{|f(x_{n-1})|}{x_{n-1}}\geq\frac{1}{c^2}\frac{|f(x_{n-2})|}{x_{n-2}x_{n-1}}\geq\cdots\\&\geq\frac{1}{c^n}\frac{|f(x_0)|}{x_0x_1\dots x_{n-2}x_{n-1}}>\frac{|f(x_0)|}{(cx_0)^n}>2^n|f(x_0)|\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2c}\right]$ 上无界，这不可能，所以假设不成立，即 $f(x)=0,x\in\left[0,\frac{1}{2c}\right]$ 然后考虑 $f\left(x-\frac{1}{2c}\right)=0$, 采用相同的方法可以证明 $f(x)=0,\quad x\in\left[0,\frac{2}{2c}\right]$ 依此类推，对任意正整数 n, 都有 $f(x)=0,\quad x\in\left[0,\frac{n}{2c}\right]$, 所以 $f(x)\equiv0$

12. 令 $x=0$ 有 $f^{(n)}(0)=0$ 而对 $x\in(-1,1)\backslash\{0\}$ 有 $f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n(0<\theta<1)$, 从

而 $|f(x)| \le |x|^{n+1}$, 令 $n \to +\infty$ 就有 $f(x)=0$

13. 采用与本章第二组参考题第 2 题类似的方法，可以证明 $f^{(n)}(0)=0$ 而当 $x \ne 0$ 时，有 $f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n(0<\theta<1)$, 从而 $|f(x)| \le \dfrac{C}{n!}|x|^n$. 令 $n \to +\infty$, 就有 $f(x)=0$

14.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k f\left(x_0+kh\right)}{h^n}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}k^m h^m+o\left(h^n\right)\right)}{h^{n-k}}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}k^m h^m}{h^n}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}k^m h^m}{h^n}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}k^m h^m}{h^n}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^m}{h^n}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{n!}{h^n}=f^{(n)}\left(x_0\right)
\end{aligned}
$$

最后一步利用了第六章第二组参考题第 8 题的结论.

15. 对 $p\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, 取 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 使得

$$
\sum_{k=1}^{n}t_k\cdot k^m=\begin{cases}0, & m\ne p\\ 1, & m=p\end{cases}
$$

其中 $m=0,1,2,\ldots,n-1$ 对 $x\in\mathbb{R}$, 由于 $f(x+k)=f(x)+f'(x)k+\dfrac{f''(x)}{2!}k^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}\left(\xi_k\right)}{n!}k^n$, 故

$$
\sum_{k=1}^{n}t_k f(x+k)=f(x)\sum_{k=1}^{n}t_k+f'(x)\sum_{k=1}^{n}t_k\cdot k+\frac{f''(x)}{2!}\sum_{k=1}^{n}t_k\cdot k^2+\ldots+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}f^{(n)}\left(\xi_k\right)t_k\cdot k^n
$$

所以 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t_k f(x+k)=\frac{f^{(p)}(x)}{p!}+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}f^{(n)}\left(\xi_k\right)t_k\cdot k^n$, 得

$$
\left|f^{(p)}(x)\right|=p!\left|\sum_{k=1}^{n}t_k f(x+k)-\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}f^{(n)}\left(\xi_k\right)t_k\cdot k^n\right|\le p!\left(M_0\sum_{k=1}^{n}|t_k|+\frac{M_n}{n!}\sum_{k=1}^{n}|t_k|\cdot k^n\right)
$$

故 $M_p\le p!\left(M_0\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|t_k|+\frac{M_n}{n!}\sum_{k=1}^{n}|t_k|\cdot k^n\right)<+\infty$, 即 M_p 是有限数.

16. 应用 Taylor 公式，有

$$
f(x+m)=f(x)+mf'(x)+\frac{m^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{m^n}{n!}f^{(n)}\left(\xi_m(x)\right)
$$

其中 $\xi_m(x)\in(x,x+m), m=1,2,\cdots,n$

由于 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 均可用 $f(x+m)-f(x)$ 及 $f^{(n)}\left(\xi_m(x)\right)$ 表达, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+m)-f(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}\left(\xi_m(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$ 均存在有限, 故

$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$ 均存在有限, 分别记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=A_k, k=0,1,\cdots,n$
在上面的 Taylor 公式中, 令 $x\to+\infty$, 则 $\xi_m(x)\to+\infty$, 于是有

$$
\begin{aligned}
0=&\lim_{x\to+\infty}[f(x+m)-f(x)]=m\lim_{x\to+\infty}f'(x)+\frac{m^2}{2}\lim_{x\to+\infty}f''(x)+\cdots\\
&+\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}\lim_{x\to+\infty}f^{(n-1)}(x)+\frac{m^n}{n!}\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}\left(\xi_m(x)\right)
\end{aligned}
$$

即

$$
0=A_0-A_0=mA_1+\frac{m^2}{2!}A_2+\cdots+\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1}+\frac{m^n}{n!}A_n,\quad m=1,2,\cdots,n
$$

列举出来为

$$
\begin{cases}
A_1+\dfrac{1}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{1}{n!}A_n=0\\
2A_1+\dfrac{2^2}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{2^n}{n!}A_n=0\\
\qquad\vdots\\
nA_1+\dfrac{n^2}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{n^n}{n!}A_n=0
\end{cases}
$$

化简得

$$
\begin{cases}
A_1+\dfrac{1}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{1}{n!}A_n=0\\
A_1+\dfrac{2}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{2^{n-2}}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{2^{n-1}}{n!}A_n=0\\
\qquad\vdots\\
A_1+\dfrac{n}{2!}A_2+\cdots+\dfrac{n^{n-2}}{(n-1)!}A_{n-1}+\dfrac{n^{n-1}}{n!}A_n=0
\end{cases}
$$

方程组的系数行列式为

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & \dfrac{1}{2!} & \cdots & \dfrac{1}{(n-1)!} & \dfrac{1}{n!}\\
1 & \dfrac{2}{2!} & \cdots & \dfrac{2^{n-2}}{(n-1)!} & \dfrac{2^{n-1}}{n!}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & \dfrac{n}{2!} & \cdots & \dfrac{n^{n-2}}{(n-1)!} & \dfrac{n^{n-1}}{n!}
\end{vmatrix}
=\frac{1}{1!2!\cdots n!}
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & n & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1}
\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{Vandermonde}\frac{1}{1!2!\cdots n!}(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\\
&\qquad\cdots(n-2)\cdots(n-(n-1))\\
&\qquad=\frac{1}{1!2!\cdots n!}(n-1)!(n-2)!\cdots1!=\frac{1}{n!}\neq0
\end{aligned}
$$

所以，齐次方程组只有零解，即

$$
A_1=A_2=\cdots=A_n=0
$$

也就是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0,k=1,2,\cdots,n$

17. (1) 设 $\left|f''(x)\right|\le M$. 假设结论不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的 $X>0$, 都存在 $x_0>X$, 使得 $\left|f'\left(x_0\right)\right|>\varepsilon_0$ 从而对任意的 $x\in\left[x_0,x_0+\dfrac{\varepsilon_0}{2M}\right]$, 都有 $\left|f'(x)\right|>\dfrac{\varepsilon_0}{2}$,

进而 $\left|f\left(x_0+\dfrac{\varepsilon_0}{2M}\right)-f\left(x_0\right)\right|>\dfrac{\varepsilon_0^2}{4M}$ 由柯西准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，这导致矛盾，所以假设不成立，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2)(i) 当 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$ 时，结论不成立.

(ii) 假设结论不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的 $X>a$, 都存在 $x_0>X$，使得 $\left|f'\left(x_0\right)\right|>\varepsilon_0$ 由于 $f'(x)$ 一致连续, 故存在 $\delta>0$, 使得 $\left|x_1-x_2\right|\leq\delta$ 蕴含 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 从而对任意的 $x\in\left[x_0,x_0+\delta\right]$, 都有 $\left|f'(x)\right|>\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, 进而 $\left|f\left(x_0+\delta\right)-f\left(x_0\right)\right|>\dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$ 由柯西准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，这导致矛盾，所以假设不成立，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

18. 由泰勒中值定理，有

$$f(x+r)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}r^k+\frac{f^{(n+1)}(x+\theta r)}{(n+1)!}r^{n+1}\geq f(x)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}r^n$$

故 $f^{(n)}(x)\leq\dfrac{(f(x+r)-f(x))n!}{r^n}\leq\dfrac{2Mn!}{r^n}$

19. 取充分小的正实数 r, 使得 $\left[x_0-3r,x_0+3r\right]\subset(a,b)$. 设 $M=\sup\limits_{x\in\left[x_0-2r,x_0+2r\right]}|f(x)|$

根据上题结论，对任意 $x\in\left[x_0-2r,x_0+2r\right]$, 有 $f^{(n)}(x)\leq\dfrac{2Mn!}{(2r)^n}$ 故当 $x\in\left[x_0-r,x_0+r\right]$ 时， 有

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k\right|&=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right)}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\\&\leq\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right)}{(n+1)!}r^{n+1}\leq\frac{M}{2^n}\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k$

第 8 章 微分学的应用

8.1 函数极限的计算

8.1.1 练习题

1. (1) 不满足“未定型”，故不可使用 L'Hospital 法则

   (2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 不存在，故不可使用 L'Hospital 法则

   (3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 求不出极限，故不可使用 L'Hospital 法则

   (4) 求不出极限，故不可使用 L'Hospital 法则

2. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a/b)^{x^2}-1}{((a/b)^x-1)^2}\cdot\dfrac{b^{x^2}}{b^{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2\ln\frac{b}{a}}-1}{\left(e^{x\ln\frac{a}{b}}-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\ln\frac{a}{b}}{\left(x\ln\frac{a}{b}\right)^2}=\dfrac{1}{\ln a-1nb}$

   (2)$(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o\left(t^2\right)$，由

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

而

$$\sqrt{1+x^6}=x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^6}}=x^3\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)=x^3+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+o(1)\right)-x^3+o(1)\right]\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to0^+}x\ln\ln\frac{1}{x}}$

令 $\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow t\to+\infty$，则

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\ln t=0$$

故原式 $=1$

(4) 令 $\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow t\to0^+$ 则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}(\arctan t)^{-\frac{1}{\ln t}}=e^{-\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(\arctan t)}{\ln t}}$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\text{原式}=e^{-\lim_{t\to0^+}\frac{t}{\arctan t}\frac{1}{1+t^2}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

3. (1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - \left[a + b\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\right]\left[x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right] \\
&= x - \left[a + b - \frac{b}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right]\left[x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right] \\
&= x - \left[(a+b)x - \left(\frac{b}{2} - \frac{a+b}{6}\right)x^3 + o\left(x^3\right)\right] \\
&= (1 - a - b)x + \frac{2b - a}{6}x^3 + o\left(x^3\right)
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}
$$

(2)$f(x) = e^x - 1 + \dfrac{(b-a)}{1+bx}x$ 而

$$
e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) \qquad \frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2x^2 + o\left(x^2\right)
$$

则

$$
f(x) = (1 + b - a)x + \left(\frac{1}{2} - b(b-a)\right)x^2 + o\left(x^3\right)
$$

解得

$$
\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \cot x - \frac{1 + ax^2}{x + bx^3} = \frac{1}{\sin x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sin x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o\left(x^4\right) - \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\right. \\
& \quad \left.\left(1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + o\left(x^4\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sin x} \cdot \left(\left(b - a - \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \left(b + \frac{1}{6}\right)(a-b)\right)x^4 + o\left(x^4\right)\right)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} + o(x) = \frac{1}{6}x + o(x) \\
& \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + o(x) \\
& \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + o(x)\right)\left(\left(b - a - \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(\frac{4}{5!} + \left(b + \frac{1}{6}\right)(a-b)\right)\right)x^4 + o(x^4) \\
& = \left(b - a - \frac{1}{3}\right)x + \left[\frac{1}{6}\left(b - a - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{5!} + \left(b + \frac{1}{6}\right)(a-b)\right]x^3 + o\left(x^3\right)
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{cases} b - a - \dfrac{1}{3} = 0 \\ \dfrac{4}{5!} + \left(b + \dfrac{1}{6}\right)(a-b) = 0 \end{cases}
$$

解得

$$\begin{cases} a = -\dfrac{3}{5} \\ b = -\dfrac{1}{15} \end{cases}$$

(4)

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right) - \left[1 + (a-b)x^2 - \right.$$
$$\left. b(a-b)x^4 + o\left(x^4\right)\right]$$
$$= \left(a - b - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} - b(a-b)\right)x^4 + o\left(x^4\right)$$

解得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4. (1)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 0$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^6}{(2x)^6} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

(3) 令 $\dfrac{1}{n} = t$ 则 $t \to 0^+$，原式 $= \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)$，又

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\ln\left(1 + \frac{\sin t - t}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\ln\left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o\left(t^2\right)\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{6}t^2 + o\left(t^2\right)\right) = -\frac{1}{6}$$

(4) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\sqrt{n^2+2}\pi - n\pi)\cdot(-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}\pi\right) =$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\pi}{n+\sqrt{n^2+2}} = \pi$

(5) 令 $\sin x = t \Rightarrow \tan x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ 则

$$原式 = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) - \tan t}{t^7}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^7 - \tan t}{t^7}$$

(6) 由于

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o\left(x^5\right)$$

则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+\frac{1}{5!}\sin^5 x+o\left(x^5\right)\right)-\sin^2 x}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{5!}x^5+o\left(x^5\right)-\sin^2 x\right.}{x^6}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+\left(\frac{2}{5!}+\frac{1}{12}\right)x^6-\sin^2 x}{x^6}\\
&= \frac{12+32}{6!}=\frac{48}{6!}=\frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

5. 由存在 $f''(a)\Rightarrow f(x)$ 在 a 的邻域可导得

$$
\begin{aligned}
& f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)\\
&= 0+h\left(2f'(a)-2f'(a)\right)+\frac{1}{2}h^2\left(4f''(a)-2f''(a)\right)+o\left(h^3\right)\\
&\quad = h^2 f''(a)+o\left(h^3\right)
\end{aligned}
$$

故原式 $=f''(a)$

6. 由 f 在 $O\left(x_0\right)$ 中二阶连续可微, 可得

$$
f(x)-f(x)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+o\left(\left(x-x_0\right)^2\right)
$$

故

$$
\text{原式}=\lim_{x\to x_0}\frac{-f(x)+f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{\left[f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{1}{2}f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2}{f'\left(x_0\right)^2\left(x-x_0\right)^2}=-\frac{f''\left(x_0\right)}{2f'\left(x_0\right)^2}
$$

7. 切线为

$$
y-f(x)=f'(x)(u-x)\Rightarrow u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x-f(x)/f'(x))}{(x-f(x)/f'(x))f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\frac{1}{2}\left(x-f(x)/f'(x)\right)^2 f'(0)}{(x-f(x)/f'(x))f(x)}\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(0)}{2}\frac{x(xf'(x)-f(x))}{f(x)f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(0)}{2}\frac{x\left(x\cdot xf''(0)-\frac{1}{2}x^2f''(0)\right)}{\frac{1}{2}x^2f''(0)xf''(0)}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

8. 设 $g(t)=\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$，则 $g(n+1)-g(n)=g'(\alpha),\quad n<\alpha<n+1$，则

$$
g'(t)=\left(e^{t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right)'=\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t
$$

$$
=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}+o\left(\frac{1}{t^4}\right)-\frac{1}{t+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\left(\frac{1}{t(t+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^t
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t(t+1)}-\frac{1}{t^2(t+1)}\right]\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\sim\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\sim\frac{e}{2}\frac{1}{t^2}
$$

则

$$
f(x)=\lim_{n\to\infty}n^x\frac{e}{2n^2}=\frac{e}{2}\lim_{n\to\infty}n^{x-2}\quad(1)
$$

故 $x<2$ 时，$(1)=0;x=2$ 时，$(1)=\dfrac{e}{2}$；$x>2$ 时，$(1)=+\infty$. 故定义域为 $(-\infty,0]$，值域为 $\{0,\dfrac{e}{2}\}$

9. 显然有

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots > 0$$

故 $\{x_n\}$ 收敛，设收敛于 $A \in [0, x_1)$，则

$$A = \ln(1+A) \Rightarrow A = 0$$

可得 $\{x_n]$ 收敛于 0，由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\ln(1+t)}{t - \ln(1+t)} = 2\end{aligned}$$

10. 易知 $x_n = x_{n-1} + \ln(a - x_{n-1})$

(i)$0 < a < 1$ 时

$$x_0 = \ln a < a - 1 \Rightarrow x_1 = \ln a + \ln(a - \ln a) < a - 1$$

数学归纳法可得 $x_n < a - 1$，故

$$x_{n-1} < x_n < a - 1$$

可得 $\{x_n\}$ 收敛

(ii)$a = 1 \Rightarrow x_n = a - 1 = 0, n = 1, 2, \cdots$

(iii)$a > 1$ 同理可证 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 1$

8.2 函数的单调性

8.2.1 练习题

1. $f(x) = x + \sin x, f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$，则 $f(x)$ 单增，但是 $f'(x)$ 不单调

$f(x) = x^2$，则 $f'(x) = 2x$ 单调，但是 $f(x)$ 不单调。

2. 令 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (x \neq 0)$ 则

$$f(x) = e^{x\ln(1+x) - x\ln x}$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$x > 0$ 时有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

可得 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加

当 $x < -1$ 时有

$$f(x) = e^{x\ln(-1-x) - x\ln(-x)}$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 0$$

故 $f'(x)>0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调增加

3. 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 则

$$g(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}=\frac{xf(x)-xf'(\theta x)}{x^2}$$

其中 $0<\theta<1$，又 f' 严格单调增加可得 $g'(x)>0$ 故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加

4. 取 $0<x_1<x_2<a$ 则

$$\frac{f(x_2)}{g(x_2)}-\frac{f(x_1)}{g(x_1)}=\frac{f(x_2)g(x_1)-g(x_2)f(x_1)}{g(x_2)g(x_1)}$$

考虑函数 $\varphi(t)=f(t)g(x_1)-g(t)f(x_1)$ 则

$$\varphi'(t)=f'(t)g(x_1)-g'(t)f(x_1)=g(x_1)g(t)\left(f'(t)/g'(t)-f(x_1)/g(x_1)\right) \quad (1)$$

又由

$$f(0)=g(0)=0\Rightarrow\frac{f(x_1)-f(0)}{g(x_1)-g(0)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

其中 $\alpha\in(0,x_1)$ 可得 (1) 式 $=g(x_1)g(t)\left(f'(t)/g'(t)-f'(\alpha)/g'(\alpha)\right)>0$ 可得 f/g 严格单调递增

5. 任取 $b>a$ 则有

$$f'(b)=f(a)+(b-a)f''(\xi)$$

其中 $\xi\in(a,b)$，又 $f'(a)<0,f''(\xi)\leqslant 0\Rightarrow f'(b)\leqslant f'(a)<0$。由 b 的任意性可得 $f'(x)<0,\forall x>a$ 可得 $f(x)$ 在 $(a+\infty)$ 上至多 1 个实根

又

$$f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)=f(a)+\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}-a\right)f'(\xi_0)\leqslant f(a)+\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}-a\right)f'(a)=0$$

$f(a)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right)$ 上有实根，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有唯一的实根

6. 唯一性显然成立，只需证存在性

$$f(a-f(a)/k)=f(a)+\left(-\frac{f(a)}{k}\right)f'(\alpha)$$

其中 $\alpha\in\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$，又由

$$f'(\alpha)>k>0\Rightarrow f(a)-f(a)/k\cdot f'(\alpha)>0$$

而 $f(a)<0$ 可得 $f(x)$ 在 $(a,a-f(a)/k)$ 存在唯一的实根

7. 令 $\varphi(x)=ae^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow\varphi''(x)=ae^x>0$，令 $\varphi''(x)=ae^x-1>0\Rightarrow x>x_0$ 可得 $x=x_0$ 为 $\varphi'(x)$ 的极小值点 $\varphi'(x_0)=ae^{x_0}-1-x_0=-x_0$

(i)$a\in(0,1)$ 时 $x_0>0\Rightarrow\varphi'(x_0)<0\quad\Rightarrow$ 有零点 $x_1,x_2\quad(x_1<x_0<x_2)$ 可得 x_1,x_2 分别为 $\varphi(x)$ 极大值，极小值点

$$\varphi(x_1)=ae^{x_1}-1-x_1-\frac{1}{2}x_1^2=-\frac{1}{2}x_1^2<0$$

$$\varphi\left(x_2\right)=-\frac{1}{2}x_2^2<0$$

可得 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,x_2)$ 上总小于 0，而 $\varphi(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上是单调增的，且 $\varphi(+\infty)>0\Rightarrow$ 有唯一实根

(ii)$a\in[1,+\infty),x_0\leq 0\Rightarrow\varphi\left(x_0\right)\geqslant 0\varphi(x)$ 单调增加，由 $\varphi(-\infty)<0,\varphi(+\infty)>0$ 可得有唯一的实根

8.

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\frac{1}{x}+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2-\pi}{\pi x}+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(2-\pi)(1+x^2)+2\pi x^2}{\pi x\left(1+x^2\right)}=\frac{2-\pi+(2+\pi)x^2}{\pi x\left(1+x^2\right)}$$

令 $f(x)>0\Rightarrow x^2>\dfrac{\pi-2}{\pi+2}\Rightarrow x\in(\sqrt{\dfrac{\pi-2}{\pi+2}},1)$ 又

$$f(1)=0\Rightarrow f(\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi+2}})<f(1)=0\quad\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

可得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的实根。

8.3 函数的极值与最值

8.3.1 练习题

1. 首先有结论：在区间内部，若 f 有极值，则一定也是极值
   设 x_0 不是最值点，$\Rightarrow$ 最值在端点处取得 (只可能是闭区间)，不妨设 x_0 为极小值点，I 为 $[a,b],f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b),x\in[a,b]$ 则在 x_0 的左邻域内有一点 ξ 满足 $f(\xi)>f\left(x_0\right)>f(a)$，于是 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 最大值在内部取得，$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,x_0) 内有极值点，矛盾！
2. 令 $f(x)=x^3+px+q\Rightarrow f(x)=3x^2+p$，若 $p\geqslant 0\Rightarrow f'(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ 有唯一的实根，若 $p<0\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\sqrt{-\frac{p}{3}},\sqrt{-\frac{p}{3}})$ 单调减，则

$$\begin{cases}f(-\sqrt{-\frac{p}{3}})>0\\f(\sqrt{-\frac{p}{3}})<0\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0\\-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p}+q>0\\-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p}-q>0\end{cases}$$

3. 与上一题类似

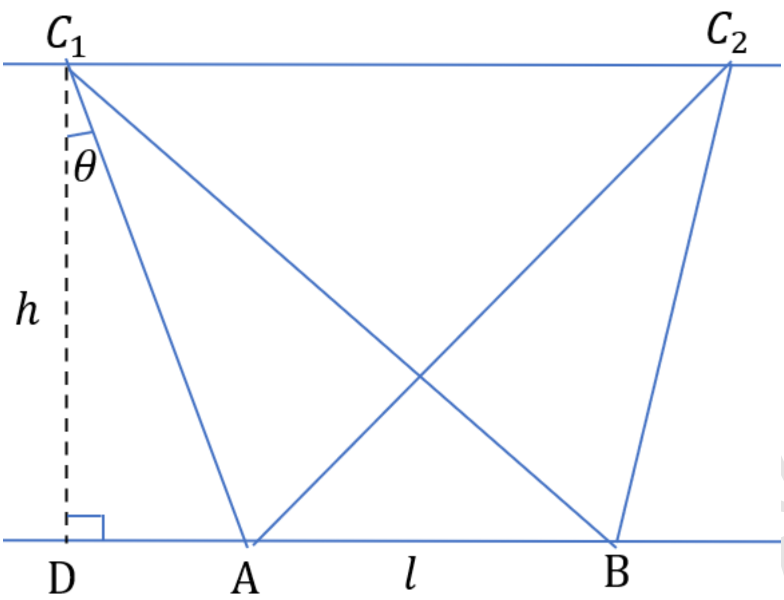

图 8.1

4.

$$f(\tilde{x})=\lambda a^2e^{\lambda x}-\lambda b^2e^{-\lambda x}=\lambda\left(a^2e^{\lambda x}-b^2e^{-\lambda x}\right)$$

$$f''(x)=\lambda^2\left(a^2e^{\lambda x}+b^2e^{\lambda x}\right)>0$$

令 $f'(x)=0\Rightarrow e^{2\lambda x}=\left(\frac{b}{a}\right)^2e^{\lambda x}=\frac{b}{a}$ 设对应的 x 为 x_0, 则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$f\left(x_0\right)=2ab$

5. 由题意知

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$$

若 $c=0$ 则 $a,d\neq 0,\quad y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 无极值。

若 $c\neq 0\Rightarrow y=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{cx+d}\cdot\frac{1}{c}\Rightarrow y'=\frac{bc-ad}{c}\frac{1}{(cx+d)^2}\cdot(-c)=(ad-bc)\frac{1}{(cx+d)^2}\neq 0$ 可得在 $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ 上无极值点

6. 即比较 $\frac{\sqrt{n+1}}{2}\ln n$ 和 $\frac{\sqrt{n}}{2}\ln(n+1)$ 大小，即 $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 和 $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$ 大小。

令 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}\ln x\quad(x>0)$ 则

$$f(x)=x^{-\frac{3}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\ln x=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(2-\ln x)$$

令 $f'(x)>0\Rightarrow 2-\ln x>0\Rightarrow x<e^2$ 可得 $n\leq 6$ 时，$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}>(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$；$n\geq 8$ 时，$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$；当 $n=7$ 时，$f(7)=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln 7, f(8)=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln 8$，$f(7)>f(8)$

7. (1) 参考图 8.1 首先证明：固定底边不变时，等腰三角形周长最小。

$$|AC_1| = \frac{h}{\cos\theta}, \quad |AD| = h\tan\theta \Rightarrow |BC_1| = \sqrt{h^2 + (1 + h\tan\theta)^2}$$

可得

$$f(\theta) = h\sec\theta + \sqrt{h^2 + (l + h\tan\theta)^2}\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$f'(\theta) = h\sec\theta\tan\theta + h\sec^2\theta\frac{l + k\tan\theta}{(h^2 + (l + h\tan\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

令 $f'(\theta) > 0$ 可得

$$\tan\theta\left(h^2 + (l + h\tan\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sec\theta(l + h\tan\theta) > 0$$

$$\sin\theta\left(h^2 + \left(l + h\tan\theta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} > -(l + h\tan\theta) \quad (1)$$

当 $\theta \geqslant 0$ 时，式 (1) 总是对的

当 $\theta < 0$ 时

$$(1) \Rightarrow \sin^2\theta\left(h^2 + (l + h\tan\theta)^2\right) < (l + h\tan\theta)^2$$

$$\sin^2\theta h^2 < (l + h\tan\theta)^2\cos^2\theta \Rightarrow h|\sin\theta| < \cos\theta|l + h\tan\theta\,|$$

$$|h\tan\theta| < |l + h\tan\theta| \Rightarrow -h\tan\theta < l + h\tan\theta \Rightarrow \tan\theta < \frac{l}{2h}$$

即为等腰三角形，任意两边相等，即为等边三角形。

(2) 等边三角形，和 (1) 类似

(3)(4) 略

8. 设微分方程有 2 个解 y_1, y_2, 记 $y = y_1 - y_2$, 于是 y 满足

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由于 y 在 $[a, b]$ 上连续, 如果 y 不是常值函数, 那么必存在非 0 的最值, 不妨设 y 有最大值, 且最大值点为 x_0, 那么自然 $y(x_0) > 0$, 又因为 x_0 为极大值点, 那么就有 $y'(x_0) = 0, y''(x_0) \leqslant 0$, 将 x_0 代入微分方程 (1) 可以得到

$$y''(x_0) + q(x_0)\,y(x_0) = 0$$

但是 $y''(x_0) \leqslant 0$ 与 $q(x_0)\,y(x_0) < 0$ 使得 $y''(x_0) + q(x_0)\,y(x_0) = 0$ 出现矛盾. 于是 $y \equiv y(a) = 0$ 为零函数, 这说明 $y_1 = y_2$

8.4 函数的凸性

8.4.1 练习题

1. 用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 这正是凸函数和严格凸函数的定义. 设 $n = k \geqslant 2$ 时命题成立，我们来证 $n = k + 1$ 时命题也成立. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in I, \lambda_1\, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1} > 0$, 并且

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1$$

令

$$\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

易见 $\mu_i>0(i=1,2,\cdots,k)$ 且 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=1$. 这时还有

$$\mu_1x_1+\mu_2x_2+\cdots+\mu_kx_k\in I$$

于是

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i\right)&=f\left(\left(1-\lambda_{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}\mu_ix_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\geqslant\left(1-\lambda_{k+1}\right)f\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_ix_i\right)+\lambda_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)\\
&\geqslant\left(1-\lambda_{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}\mu_if\left(x_i\right)+\lambda_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if\left(x_i\right)
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明: 当 f 为 I 上的凸函数时，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式 (8.11) 成立. 再设 f 是 I 上的严格凸函数, 并且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等. 我们重新审查归纳证明. 当 $n=2$ 时 ,x_1,x_2 不全相等就是 $x_1\neq x_2$. 按定义，严格的不等号成立. 假设 $n=k$ 时, 严格的不等号成立. 再设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 不全相等. 如果其中的 $x_1,x_2\cdots,x_k$ 不全相等, 那么上述归纳法中最后的那个不等号应当是严格的; 如果 $x_1=\cdots=x_k\neq x_{k+1}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_ix_i=x_1\sum_{i=1}^{k}\mu_i=x_1\neq x_{k+1}$$

这时归纳过程的第一个不等号就应当是严格的. 总之，不等式 (8.11) 对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立。

2. 任取 x_1,x_2,x_3 满足 $a<x_1<x_2<x_3<b$，由 f 是凸的，可得

$$\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}\leqslant\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_1\right)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{1/f\left(x_3\right)-1/f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}-\frac{1/f\left(x_2\right)-1/f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\\
&=\frac{1}{f(x_2)f(x_3)}\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_3\right)}{x_3-x_2}-\frac{1}{f(x_2)f(x_1)}\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_2-x_1}\\
&\geqslant\left[\frac{1}{f(x_2)f(x_3)}-\frac{1}{f(x_2)f(x_1)}\right]\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_3\right)}{x_3-x_1}=\frac{f(x_1)-f\left(x_3\right)}{f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)f(x_3)}\cdot\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_3\right)}{x_3-x_1}\geqslant 0
\end{aligned}$$

可得 $\dfrac{1}{f}$ 是下凸的，类似的有 f 下凸 $\Rightarrow\dfrac{1}{f}$ 上凸。

3. 任取 3 个点 x_1,x_2,x_3 满足 $x_1<x_2<x_3\Rightarrow$ 至少有两个点的值同取于 f 或 g，不妨设 $f\left(x_1\right)\geqslant g\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\geqslant g\left(x_2\right)$，令 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 则

$$\frac{h\left(x_3\right)-h\left(x_2\right)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{h\left(x_2\right)-h\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

$\Rightarrow h(x)$ 是下凸的

4. 任取 3 个点 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$

$$\frac{f(x_3)g(x_3)-f(x_2)g(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)g(x_2)-f(x_1)g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\geqslant g(x_3)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}+f(x_2)\frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2}-\left(f(x_2)\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}+g(x_1)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\right)$$

$$\geqslant (g(x_3)-g(x_1))\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}+f(x_2)\left(\frac{g(x_3)-g(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\right)\geqslant 0$$

$\Rightarrow f\cdot g$ 为 I 上的下凸函数

5. 由于 e^x 单增可得

$$e^{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}\leq e^{\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)}\leq \lambda_1e^{f(x_1)}+\lambda_2e^{f(x_2)}$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$，故 $F(x)=e^{f(x)}$ 是下凸函数

6. 考虑 $f(x)=e^{-x},\quad g(x)=x^2$ 均是下凸函数，但是

$$(f(g(x)))''=\left(e^{-x^2}\right)''=2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$$

可得在 $x=0$ 时 $(f(g(0)))''<0$ 故 $f(g(x))$ 不是下凸函数

7. 若不是结论提到的两种情况则存在 $x_1<x_2<x_3\in(-\infty,+\infty)$ 使得

$$f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$$

则

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0>\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

与 $f(x)$ 是下凸函数矛盾。

8. f 为下凸函数，若 f 有两个不同的值，设为 $x_1<x_2, f(x_1)\neq f(x_2)$

(i) 若 $f(x_1)>f(x_2)$ 则 $\forall x<x_1$ 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow\quad f(x)-f(x_1)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

令 $x\to-\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 这与 f 有界矛盾

(ii) 若 $f(x_1)<f(x_2)$ 则 $\forall x>x_2$ 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

$$\Rightarrow\quad f(x)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+f(x_2)$$

令 $x\to+\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 这与 f 有界矛盾

9. (1)$\forall x\neq x_0$,$f'(x)$ 在 x_0 处泰勒展开可得

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

由于 n 为奇数，则

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}>0$$

又 $f'(x_0)>0$，故 $f(x)$ 严格单调递增

(2)$\forall x_0 \neq x \in (a,b)$，$f''(x)$ 在 x_0 处泰勒展开可得

$$f''(x)=\frac{f''(\xi)}{(n-2)!}\left(x-x_0\right)^{n-2}>0$$

又 $f''\left(x_0\right)>0$，故 f 在 (a,b) 上严格下凸

10. 任取 $[a,b]\subset(c,d)$，则 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有

$$m_1=\frac{f(a)-f\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\frac{1}{2}(c-a)}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f\left(\frac{d+b}{2}\right)-f(b)}{\frac{1}{2}(d-b)}=m_2$$

则

$$\left|\frac{f(x)-f(x)}{x_2-x_1}\right|\leqslant\max\left\{\left|m_1\right|,\left|m_2\right|\right\}:=M>0$$

则

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leqslant M\left|x_1-x_2\right|$$

11. 充分性：因为对任意 $(x,y)\in I$, 任取 $c\in(x,y)$, 都有

$$\frac{f(y)-f(c)}{y-c}\geqslant a\geqslant\frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

这说明 f 在 I 上是下凸函数.

必要性：任意一点 $x_0\in I$, 取 $x_1<x_0<x_2$，可得

$$\frac{f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)}{x_0-x_1}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_0\right)}{x_2-x_0}$$

令 $x_1\to x_0-, x_2\to x_0+$ 自然可以得到 $f_-'\left(x_0\right)\leqslant f_+'\left(x_0\right)$

任意一点 $c\in I$, 都有 $f_-'(c)\leqslant f_+'(c)$，于是取 $a\in\left[f_-'(c),f_+'(c)\right]$, 那么对 $x\in I$ 就有

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant f_+'(c)\geqslant a & ,x>c\\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant f_-'(c)\leqslant a & ,x<c\end{cases}$$

故 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 有意义 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-a}$ 有意义，而 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 关于 x 递增，所以有意义

13. 设 f 不是常值函数，不妨设 $\exists a<b, f(a)=A<B=f(b)$，可得

$$\forall x>b,\frac{f(x)-b}{x-b}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

$$f(x)>b+(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

取 $x>0$，则

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{b}{x}+\frac{x-b}{x}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

矛盾

14. 对任意的 $d\in(a,b), d\neq c$, 它一定落在区间 (a,c) 或 (c,b) 内, 不妨设 $d\in(a,c)$. 那么

f 在 $[a,c]$ 上自然是下凸函数, 也就是满足

$$\frac{f(d)-f(a)}{d-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=0$$

于是可以得到

$$f(d)\leqslant f(a)$$

又因为 f 在 $[d,b]$ 上也是下凸函数, 那么又会有

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d}\leqslant\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=0$$

那么又有

$$f(d)\geqslant f(c)$$

因为 $f(a)=f(c)$, 这迫使 $f(d)=f(a)$, 由 d 的任意性可知 $f\equiv f(a)$ 为常函数.

15. 任取区间 $(x_1,x_2)\subset[a,d]$, 如果 $x_1\geqslant b$ 或者 $x_2\leqslant c$, 那么由 f 在 $[a,c]$ 及 $[b,d]$ 上为下凸函数可知对任意的 $x\in(x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x} \quad (1)$$

那么我们只要考虑当 $x_1<b$ 且 $x_2>c$ 时, 即 $(b,c)\subset(x_1,x_2)$ 时, 是否有不等式 (1) 成立. 而

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x} \quad (2)$$

就已经蕴含了 (1), 所以我们只要说明不等式 (2) 成立即可.

(Case 1) 对任意的 $x\in(b,c)$, 首先由于 f 在 $[x_1,c]$ 上为下凸函数, 就有

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

又由于 f 在 $[b,d]$ 上为下凸函数, 那么又有

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}$$

可得

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}$$

那么自然有不等式 (2) 成立.

(Case 2) 因为 f 在 $[x,c]$ 上为下凸函数, 那么

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

然后再因为 f 在 $[b,x_2]$ 上为下凸函数, 又有不等式

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\leqslant\frac{f\left(x_2\right)-f(c)}{x_2-c}$$

成立, 于是可以得到

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f\left(x_2-f(c)\right)}{x_2-c}$$

可知

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f(c)-f(x)+f\left(x_2\right)-f(x)}{c-x+x_2-c}=\frac{f\left(x_2-f(x)\right)}{x_2-x}$$

(Case 3) 当 $x\in(c,x_2)$ 时, 与 (Case 2) 类似, 先对 $[b,x_2]$ 使用性质, 再对 $[b,x]$ 使用性

质, 最后对 $[x_1, c]$ 使用性质, 将得到的不等式连起来, 也可以得到不等式 (2) 成立.

综上所述, 对任意的 $(x_1, x_2) \subset [a, d]$ 与任意的 $x \in (x_1, x_2)$, 都有不等式 (2) 成立, 也就是说 f 在 $[a, d]$ 上为下凸函数.

16. 因为其二次导数还是奇数次多项式，在 x 趋于负无穷时，函数值趋于负无穷，在 x 趋于正无穷时，函数值趋于正无穷，故它的二次导数有正值有负值，所以不是凸函数。

17. (反证法) 不妨设 $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$，若有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi_1)(x_1 - x_2) = f'(\xi_2)(x_1 - x_2), \xi_1 < \xi_2$$

则 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$，故

$$\frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = f''(\eta) = 0$$

矛盾

18. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$，在 $[x_0, b]$ 下凸，则在 $[x_0, b]$ 上考虑，$\forall h > 0$ 有

$$\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) - (f(x_0 + h) - f(x_0))}{h^2} \geqslant 0$$

令 $h \to 0^+$ 可得 $f'(x_0) \geq 0$，类似的在 $[a, x_0]$ 可得 $f''(x_0) \leq 0$，故 $f''(x_0) = 0$

19. 参考下面一题

20. $\forall x \neq x_0$ 考虑 $f''(x)$ 在 x_0 处的展开则

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + o((x - x_0))^{n-2} \\ &= (x - x_0)^{n-2}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o(1)\right) \end{aligned}$$

不妨设 $f^{(n)}(x_0) > 0$，若 n 为奇数，则在 x_0 的左邻域，$f''(x) < 0$，在 x_0 的右邻域，$f''(x) > 0$，故 x_0 是拐点；若 n 为偶数，则在 x_0 的邻域内有 $f''(x) > 0$，故 x_0 不是拐点。

8.5 不等式

8.5.1 练习题

1. 令 $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1} \quad (x > 1)$ 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0 \end{aligned}$$

2. 令

$$f(t) = a \ln a + t \ln t - (a+t) \ln(a+t) + (a+t) \ln 2$$

则 $f(a)=0$，且

$$f(t)=1+\ln t+\ln 2-1-\ln(a+t)=\ln t-\ln(a+t)+\ln 2=\ln\left(\frac{2t}{t+a}\right)$$

可得当 $t>a$ 时，$f'(t)$ 总大于 0，故 $f(b)>f(a)=0$

3. 事实上，若有 $\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{x_1}$，则有 $\frac{x_1-x_2}{x_1}<\ln\frac{x_1}{x_2}$，令

$$f(t)=\ln t-t+1, f(1)=0 \quad f'(t)=\frac{1}{t}-1$$

则 $t\in(0,1)$ 时，$f(t)$ 单调递增；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，，$f(t)$ 单调递减。可得 $t=1$ 为 $f(t)$ 的极大值点，可得 $t\neq 1$ 时 $f(t)<0$，故

$$\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{x_1}, \ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{x_1-x_2}{x_1}$$

故

$$\frac{x_2-x_1}{x_2}<\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{x_1}$$

4. (1) 均值不等式可得

$$a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots+a^{x_n}\geqslant n\sqrt[n]{a^{x_1}\cdots a^{x_n}}=na^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}$$

(2) 令 $f(t)=t^p, f''(t)=p(p-1)t^{p-2}\Rightarrow 0\Rightarrow f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数故

$$\frac{1}{n}\left(x_1^p+\cdots+x_n^p\right)\geqslant\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p$$

(3) 先根据对数函数的单调性将要证明的不等式进行变形:

$$\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{\sum_{k=1}^n x_k}\sum_{k=1}^n x_k\ln x_k$$

再进行移项:

$$\sum_{k=1}^n x_k\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^n x_k\ln x_k$$

由于我们想使用 Jensen 不等式进行证明, 那么就要求一侧展现出完整的函数形式, 于是两侧同时除以 n, 可以得到

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\ln x_k$$

这样观察等式左侧就可以知道我们只要证明出 $f(x)=x\ln x$ 为下凸函数即可.$f''(x)=1/x>0\quad(x>0)$，故 $f(x)=x\ln x$ 为下凸函数

5. 令 $f(t)=t^\alpha-\alpha t+\alpha-1$，当 $\alpha\in(0,1)$ 时，$f(1)=0, f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}-\alpha$，令 $f(t)>0\Rightarrow t\in(0,1)$ 即 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，可得 $t=1$ 是极大值点，可得 $f(t)\leqslant f(1)=0$；当 $\alpha\in(1,+\infty)$ 时，$f(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，可得 $f(t)\geqslant f(1)=0$

6. 取对数可得

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1\leq(n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha\leq\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\leq\beta$$

考虑函数 $f(t)=\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t},t\in(0,+\infty)$，可得

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}\left(-\frac{1}{\ln^2(1+t)}\right)+\frac{1}{t^2}=\frac{(1+t)\ln^2(1+t)-t^2}{t^2\ln^2(1+t)(1+t)}$$

则

$$f'(t)>0\Leftrightarrow(1+t)\ln^2(1+t)-t^2>0$$

$$\Leftrightarrow\ln^2(1+t)>\frac{t^2}{1+t}\Leftrightarrow\ln(1+t)>\frac{t}{\sqrt{1+t}}$$

再令 $h(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ 则 $h(0)=0$ 且 $h'(t)==\dfrac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{1+t}-(1+t)+\dfrac{t}{2}\right)$，则 $h'(t)>0$ 等价于 $\sqrt{1+t}>1+\dfrac{1}{2}t\Leftrightarrow 1+t>1+t+\dfrac{1}{4}t^2\Leftrightarrow t^2<0$ 不存在，故 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，可得 $h(t)<h(0)=0\Leftrightarrow f'(t)<0$，又

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right]=0$$

故 $\alpha=0,\quad\beta=\dfrac{1}{2}$

7. 只证

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$$

其余不等式用均值不等式或者根据 a 和 b 大小关系即得。

(i) 令 $f(t)=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\ln t$ 则

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}-\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{4t^2}}-\frac{1}{t}=0$$

且 $f(0)=0$，可得 $\dfrac{f(x)}{\ln x}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$，可得 $\dfrac{f(x)}{\ln x}>0\Rightarrow\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}$

(ii) 令 $f(t)=2\dfrac{t-1}{t+1}-\ln t$ 可得

$$f'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=-\frac{(t-1)^2}{(t+1)^2}\leqslant0\quad(t>0)$$

且 $f(1)=0$ 故

$$\frac{f(x)}{\ln x}<0(x>0\text{且}x\neq1)\Rightarrow\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$$

8. 令 $g(t)=\ln M_t(x,\lambda)$ 则

$$g'(t)=\frac{t\cdot\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\ln x_i}{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t}-\ln\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\right)}{t^2}$$

令 $f(t)=t\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\ln x_i}{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t}-\ln\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\right)$，则

$$f'(t)=t\frac{\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\ln^2x_i\right)-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\ln x_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\right)^2}$$

由柯西不等式可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln^2 x_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln x_i\right)^2\geqslant 0$$

故 $f'(t)$ 的符号由 t 确定，故

$$f(t)\geqslant f(0)=0$$

可得 $g'(t)\geq 0$，故 $g(t)$ 关于 t 单调递增。

9. 令 $f(u)=\left(1-u^{\frac{1}{p}}\right)^p$ 则

$$f''(u)=\left(1-\frac{1}{p}\right)u^{\frac{1}{p}-2}\left(1-u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}<0\quad(u\in(0,1))$$

可得 f 在 $(0,1)$ 上严格上凸

令 $\lambda_k=\dfrac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^p},u_k=\left(\dfrac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p$ 则

$$\left(1-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^p}{\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^p}\left(1-\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p=\frac{\sum_{k=1}^n y_k^p}{\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^p}$$

故

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

10. $x=y=0$ 是结论成立，若 x,y 不同时为0，考虑函数 $f(x)=\ln x$ 则 $f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$，可得 $f(x)$ 为上凸函数，故

$$\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\geqslant\frac{1}{p}\ln x+\frac{1}{q}\ln y=\ln x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}$$
$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\geqslant x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}$$

11. (1) 广义的算术平均值-几何平均值不等式：$p_1+p_2+\cdots p_n=1$ ， $p_i>0$， $x_1,\cdots,x_n\geqslant 0$ 则

$$p_1x_1+\cdots+p_nx_n\geqslant x_1^{\frac{1}{p_1}}\cdots x_n^{\frac{1}{p_n}}$$

归纳法当 $n=2$ 时恰好是 Young 不等式，假设为 $n-1$ 时，广义的算术平均值-几何平均值不等式成立。当为 n 时

$$p_1x_1+\cdots+p_nx_n=p_1x_1+(p_2+\cdots+p_n)\frac{p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_2+\cdots+p_n}$$
$$\geqslant x_1^{\frac{1}{p_1}}\cdot\left(\frac{p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_2+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{p_2+\cdots+p_n}}$$

归纳可得

$$\geqslant x_1^{\frac{1}{p_1}}\cdot\left(\frac{p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_2+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{p_2+\cdots+p_n}}$$

故

$$p_1x_1+\cdots+p_nx_n\geqslant x_1^{\frac{1}{p_1}}\cdots x_n^{\frac{1}{p_n}}$$

(2) Hölder 不等式：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组不全为零的非负实数，

则有不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \quad (1)$$

其中 $p,q>1$, 且 $1/p+1/q=1$. 式 (1) 中等号成立的充分必要条件是，存在常数 λ, 使得

$$a_i^p=\lambda b_i^q \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

令

$$A_i=\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p},\quad B_i=\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}(i=1,2,\cdots,n)$$

用 Young 不等式得到

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}(i=1,2,\cdots,n) \quad (2)$$

两边对 i 从 1 到 n 求和, 移项后得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

式 (1) 得证. 式 (1) 中等号成立的充分必要条件是, 式 (2) 中每一个不等式的等号成立，即

$$\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}=\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}(i=1,2,\cdots,n)$$

或者

$$\frac{a_i^p}{b_i^q}=\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}(i=1,2,\cdots,n)$$

上式的右边是一个与 i 无关的常数, 记为 λ，从而得

$$a_i^p=\lambda b_i^q \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

12. 将题中条件写为 $-\phi'(x)\leqslant f'(x)\leqslant \phi'(x)$, 分别考虑 $F=f-\phi$ 与 $G=f+\phi$. 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a)$$

$$f(x)-f(a)-(\phi(x)-\phi(a))\leqslant 0 \Longrightarrow f(x)-f(a)\leqslant \phi(x)-\phi(a) \quad (1)$$

再考虑 $G=f+\phi$. 同理由 Lagrange 中值定理可知存在 $\eta\in(a,x)$, 使得

$$G(x)-G(a)=f(x)-f(a)+(\phi(x)-\phi(a))=G'(\eta)(x-a)=\left(f'(\eta)+\phi'(\eta)\right)(x-a)\geqslant 0$$

也就是

$$-(\phi(x)-\phi(a))\leqslant f(x)-f(a) \quad (2)$$

综合不等式 (1) 和 (2) 可得 $|f(x)-f(a)|\leqslant \phi(x)-\phi(a)$

13. 由 $0 < f'(x) < \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 单调递增又

$$\begin{aligned} f(x) = \int_1^x f'(t)dt + f(1) = 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2 + f^2(t)}dt \\ \leqslant 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2+1}dt \\ = 1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \arctan x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

14. 由矩阵乘法可知对 $i = 1, 2, \ldots, n$, 都有

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

由于 $-\ln x$ 在 $x > 0$ 时为下凸函数, 且因为 $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} = 1$, 那么由 Jensen 不等式可得

$$\ln y_i = \ln\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^n a_{ij}\ln x_j$$

再令 j 从 1 跑到 n, 求和后有

$$\sum_{i=1}^n \ln y_i \geqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\ln x_j = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)\ln x_j = \sum_{j=1}^n \ln x_i$$

于是

$$\ln(y_1y_2\cdots y_n) \geqslant \ln(x_1x_2\cdots x_n) \Rightarrow y_1y_2\cdots y_n \geqslant x_1x_2\cdots x_n$$

15. 令 $f(x) = \sin x - \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ 则

$$f^{(2x+1)}(x) = (-1)^n\cos x - (-1)^n = (-1)^n(\cos x - 1) \quad (1)$$

(i) 当 n 为奇数时，式 (1)$\geqslant 0$, 又 $f^{(i)}(0) = 0 (0 \leqslant i \leq 2n+1) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

(ii) 当 n 为偶数时，式 (1)$\leqslant 0$, 又 $f^{(i)}(0) = 0 (0 \leqslant i \leq 2n+1) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

16. 令 $f(x) = e^{-x} - \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)^a - \dfrac{x^2}{a}e^{-x}$，则 $f(0) = 1 - 1 - 0 = 0, f(a) = (1-a)e^{-a} \leqslant 0$ 且

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + \frac{1}{a}\cdot a\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{a-1} + \frac{x^2}{a}e^{-x} - \frac{2}{a}xe^{-x} \\ &= -e^{x} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{a-1} + \frac{1}{a}\left(x^2 - 2x\right)e^{-x} \end{aligned}$$

设有极值点为 ξ，则 $f'(\xi) = 0$，此时有

$$\begin{aligned} f(s) &= \left(1 - \frac{\xi^2}{a}\right)e^{-\xi} + \left(1 - \frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{a}\left(\xi^2 - 2\xi - a\right)e^{-\xi} \\ &= \frac{1}{a^2}\left(\xi^3 - 2\xi^2 + a\xi\right)e^{-\xi} < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \end{aligned}$$

8.6 函数作图

本节略

8.7 方程求根与近似计算

先来讲一个命题：形如 $x_{n+1}=\varphi\left(x_n\right)$ 的迭代公式，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x^*$ 且

$$\varphi'\left(x^*\right)=0,\cdots,\varphi^{(p-1)}\left(x^*\right)=0,\varphi^{(p)}\left(x^*\right)\neq 0$$

则 $\{x_n\}\,p$ 阶收敛

证明

$$x_{n+1}-x^*=\varphi\left(x_n\right)-x^*=\varphi\left(x_n\right)-\varphi\left(x^*\right)=\frac{\varphi^{(p)}\left(\xi_n\right)}{p!}\left(x_n-x^*\right)^p$$

则

$$\frac{\left|x_{n+1}-x^*\right|}{\left|x_n-x^*\right|^p}=\frac{\varphi^{(p)}\left(\xi_n\right)}{p!}\to\frac{\varphi^{(p)}\left(x^*\right)}{p!}\neq 0,\quad(n\to+\infty)$$

故 $\{x_n\}\,p$ 阶收敛

8.7.1 练习题

1. 略
2. 例如，取 $f(x)=x^3+1$ 在 $\left[-2,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ 上，则不满足条件 (3)，此时 Newton 迭代公式为

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n-\frac{x_n^3+1}{3x_n^2}\\&=\frac{2}{3}x_n-\frac{1}{3}\frac{1}{x_n^2}\end{aligned}$$

则 $x_1=0$，不能继续迭代了。

3. 设对应的数列为 $\{x_n\}$，则 $\left|x_{n+1}-x_n\right|=\dfrac{|b-a|}{2^{n+1}}$，设根为 x^*，由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

若 $x_n>x_{n+1}$，则 $x_{n+2}>x_{n+1}$ 可得

$$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}<0$$

若 $x_n<x_{n+1}$，则 $x_{n+2}<x_{n+1}$ 可得

$$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}<0$$

又

$$\left|\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right|=\frac{\frac{|b-a|}{2^{n+2}}}{\frac{|b-a|}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}$$

故 $\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=-\dfrac{1}{2}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=-\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\frac{1}{2}$$

故为线性收敛

4.

$$\begin{aligned}x_{n+1}-\sqrt{A}&=\frac{x_n^3+3Ax_n-3\sqrt{A}x_n^2-(\sqrt{A})^3}{3x_n^2+A}\\&=\frac{\left(x_n-\sqrt{A}\right)^3}{3x_n^2+A}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\sqrt{A}\right|}{\left|x_n-\sqrt{A}\right|^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|3x_n^2+A|}=\frac{1}{4A}$$

为三阶收敛。

5. $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$，其中 $f(x)=\dfrac{x^4+2Ax}{2x^3+A}$，若 $x_0\leqslant\sqrt[3]{A}$，由 $f'(x)=\dfrac{2\left(A-x^3\right)^2}{\left(A+2x^3\right)^2}$ 归纳可得 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)\leqslant f(\sqrt[3]{A})\leqslant\sqrt[3]{A}$，又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_n^3+2A}{2x_n^3+A}$，令 $g(x)=\dfrac{x^3+2A}{2x^3+A}$ 则 $g'(x)=-\dfrac{9Ax^2}{\left(A+2x^3\right)^2}<0$，故

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=g\left(x_n\right)\geqslant g(\sqrt[3]{A})=1$$

$\Rightarrow\{x_n\}$ 单增有上界，故 $\{x_n\}$ 收敛，对于 $x_0>\sqrt[3]{A}$，类似可得。

又

$$f''(x)=\frac{36Ax^2\left(-A+x^3\right)}{\left(A+2x^3\right)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{36Ax\left(2A^2-19Ax^3+8x^6\right)}{\left(A+2x^3\right)^4}$$

则 $f'(\sqrt[3]{A})=f''(\sqrt[3]{A})=0,\quad f'''(\sqrt[3]{A})\neq0$，故为三阶收敛。

6. $k\neq1$，迭代公式为

$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left((k-1)x_n+\frac{A}{x_n^{k-1}}\right)$$

令 $f(x)=(k-1)x+\dfrac{A}{x^{k-1}}$，则

$$f'(x)=k-1+A(1-k)x^{-k}$$
$$f''(x)=-A(1-k)kx^{-1-k}$$

则 $f'(\sqrt[k]{A})=0,f''(\sqrt[k]{A})\neq0$，故为二阶收敛。

7. 迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n\left(2-Ax_n\right),\quad 0<x_0<\frac{1}{A}$$

归纳可得 $0<x_n<\dfrac{1}{A}$，故 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2-Ax_n>1\Rightarrow\quad\{x_n\}$ 单增有上界，故 $\{x_n\}$

收敛，令 $f(x)=x(2-Ax)$，则 $f'(x)=2-2Ax, f''(x)=-2A$，则 $f'\left(\frac{1}{A}\right)=0$，$f''\left(\frac{1}{A}\right)\neq 0$，故为二阶收敛。

8.8 对于教学的建议

8.8.1 第一组参考题

1.

$$
\begin{aligned}
-1 \leqslant f(x)+f'(x) \leqslant 1 &\Rightarrow -e^x \leq (f(x)e^x)' \leqslant e^x \\
&\Rightarrow -\int_{-\infty}^{x} e^x dx \leqslant \int_{-\infty}^{x} (f(x)e^x)' dx \leqslant \int_{-\infty}^{x} e^x dx \\
&\Rightarrow -e^x \leq f(x)e^x \leqslant e^x \Rightarrow -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad \Rightarrow |f(x)| \leqslant 1
\end{aligned}
$$

2. 显然 $f(0)=0$，又

$$
\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)}
$$

可得 $f'(0)=0, f''(0)=4$

$$
\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2
$$

3.

$$
x_{n+1}-x_n=x_n^k(A+o(1)) \quad n\to+\infty
$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ 且 $\{x_n\}$ 为正数列，可得 $A<0$，则 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0，则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n x_n^{\alpha} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^{\alpha}}-\frac{1}{x_n^{\alpha}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^{\alpha}x_{n+1}^{\alpha}}{x_n^{\alpha}-x_{n+1}^{a+1}}
\end{aligned}
$$

由题目可知

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}^{a}=\left(x_n+Ax_n^k+o\left(x_n^k\right)\right)^{\alpha} &= x_n^{\alpha}\left(1+Ax_n^{k-1}+o\left(x_n^{k-1}\right)\right)^{\alpha} \\
&= x_n^{\alpha}\left(1+\alpha A x_n^{k-1}+o\left(x_n^{k-1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

可得

$$
\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^{2\alpha}+\alpha A x_n^{2\alpha+k-1}+o\left(x_n^{2\alpha+k-1}\right)}{-Ax_n^{\alpha+k-1}+o\left(x_n^{\alpha+k-1}\right)}
$$

故

$$
\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{A}x_n^{\alpha+1-k}=\begin{cases} 0 & \alpha>k-1 \\ -\dfrac{1}{A} & \alpha=k-1 \\ +\infty & \alpha<k-1 \end{cases}
$$

4. 充分性显然，下证必要性，反证法，假设 f 在 $[a,b]$ 上不是严格单调的，不妨设不

是严格减，则 $\exists[a,b]$ 中的三个点 x_1,x_2,x_3 满足 $x_1<x_2<x_3$，但是 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 且 $f(x_3)\geqslant f(x_2)$，可得 f 在区间 $[x_1,x_3]$ 内的最小值不在 x_1,x_3 处取得，故 f 在 $[x_1,x_3]$ 内有极小值点，矛盾。

5. 由 $|a+b|^p\leq ||a|+|b||^p$，不妨设 $b>a>0$，则

$$\begin{aligned}(a+b)^p-b^p&=a\cdot\xi^{p-1}\quad&\xi\in(b,a+b)\\ a^p=a^p-0^p&=a\cdot\eta^{p-1}\quad&\eta\in(0,a)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}(a+b)^p-b^p&\leqslant a^p\\(a+b)^p&\leqslant a^p+b^p\end{aligned}$$

6. 只证左端不等式，右端类似可得

令

$$f(n)=n\ln(n+1)-n\ln n-\ln 2n+\ln(2n+1)-1$$

则

$$f(+\infty)=0\quad f'(n)=\ln(1+n)-\ln n-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{2}{2n+1}$$

$$f''(n)\frac{5n^2+5n+1}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}>0$$

而 $f'(+\infty)=0$ 故 $f'(n)\leqslant0\Rightarrow f(n)\geqslant0$

7. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x\Leftrightarrow\tan x\sin^2x>x^3\Leftrightarrow\tan^{\frac13}x\sin^{\frac23}x-x>0\quad(1)$$

令 $f(t)=\tan^{\frac13}t\sin^{\frac23}t-t\Rightarrow f(0)=0$ 则

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac13\tan^{-\frac23}\tan^{\frac23}t\sec^2t+\frac23\cos t\tan^{\frac13}t\sin^{-\frac13}t-1\\&=\frac13\cos^{-\frac43}t+\frac23\cos^{\frac23}t-1\Rightarrow f'(0)=0\end{aligned}$$

$$f''(t)=\frac49\sin t\cos^{-\frac73}t-\frac49\sin t\cos^{-\frac13}t=\frac49\sin t\cos^{-\frac73}t\left(1-\cos^2t\right)>0$$

故 $\forall t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow f'(t)>0\Rightarrow f(t)>0$，(1) 式成立

8. 利用泰勒展开

$$\begin{aligned}\sin x&=x-\frac16x^3+\frac{1}{5!}(\theta x)^5\quad&((0<\theta<1))\\\tan x&=x+\frac13x^3+\frac{2}{15}(\alpha x)^5\quad&(0<\alpha<1)\end{aligned}$$

可得

$$2\sin x+\tan x-3x=\frac{2}{5!}(\theta x)^5+\frac{2}{15}(\alpha x)^5\geq0$$

故 $2\sin x+\tan x\geqslant3x$

9. 即证 $\pi x(1-x)<\sin\pi x<4x(1-x)$，令 $f(x)=\sin\pi x-\pi x(1-x)$，则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\pi(\cos\pi x+2x-1)\\f''(x)&=\pi(-\pi\sin\pi x+2)\\f'''(x)&=-\pi^3\cos\pi x\end{aligned}$$

则 $f''(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单减，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 单增，又

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)<0,f''(0)=f''(1)=2>0$$

可知 $0<x_1<\dfrac{1}{2}<x_2<1$ 使得 $f'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单增，在 (x_1,x_2) 单减，在 $(x_2,1)$ 单增，而 $f'(0)=f'(1)=0=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 单增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 单减，故

$$f(x)>\min\{f(0),f(1)\}=0$$

令 $g(x)=\sin\pi x-4x(1-x)$，则

$$\begin{aligned}g'(x)&=\pi\cos\pi x+8x-4\\g''(x)&=-\pi^2\sin\pi x+8\\g'''(x)&=-\pi^3\cos\pi x\end{aligned}$$

$g''(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 单减，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 单增，又

$$g''(0)=g''(1)=8>0,g\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

故存在 $0<x_3<\dfrac{1}{2}<x_4<1$ 使得 $g'(x)$ 在 $(0,x_3)$ 上单增，在 (x_3,x_4) 单减，在 $(x_4,1)$ 单增。而

$$g'(0)<0,g'\left(\frac{1}{2}\right)=0,g'(1)>0,g'\left(\frac{3}{4}\right)<0$$

故存在

$$0<x_5<\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<x_6<1$$

使得 $g(x)$ 在 $(0,x_5)$ 单减，在 $\left(x_5,\dfrac{1}{2}\right)$ 单增，在 $\left(\dfrac{1}{2},x_6\right)$ 单减，在 $(x_6,1)$ 单增。又

$$g(0)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g(1)=0$$

故 $g(x)\leqslant 0$

10. 令 $f(x)=\sin x-\left(\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{1}{12\pi}x\left(\pi^2-4x^2\right)\right)$ 则

$$f'(x)=\cos x-\left(\frac{2}{11}+\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{\pi}x^2\right)$$

$$f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}x,f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{\pi}$$

令 $f'''(x)<0$，得 $x\in(0,x_0)$ 其中 $\cos x_0=\dfrac{2}{\pi}$ 且 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，可得 x_0 是 $f''(x)$ 的极小值点，又

$$f''(x_0)=-\sin x_0+x_0\cos x_0=(x_0-\tan x_0)\cos x_0<0$$

$f''(0)=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 可得 $f''(x)\leq 0$,故 $f'(x)$ 单调递减,而 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)<0$ 故 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$ 或者 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，而 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow f(x)\geqslant 0$

11. 令 $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x$ 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{x^2}>0$$

可得 $f(x)$ 是下凸函数，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\ln\left(1+\frac{n}{x_1+\cdots+x_n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(1+\frac{n}{x_1+\cdots+x_n}\right)^n$$

即

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\left(x_1+\cdots+x_n\right)^n}\leqslant\frac{\left(1+x_1\right)\cdots\left(1+x_n\right)}{\left(n+x_1+\cdots+x_n\right)^n}$$

等号当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立。

12. 设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 则

$$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}\Leftrightarrow\frac{\ln\sin x}{\sin x}<\frac{\ln\cos x}{\cos x}$$

考虑函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，可得在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时 $\sin x<\cos x$，故

$$\frac{\ln\sin x}{\sin x}<\frac{\ln\cos x}{\cos x}$$

在 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>\cos x$，故

$$\frac{\ln\sin x}{\sin x}>\frac{\ln\cos x}{\cos x}$$

13. (1) 令 $f(t)=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{p}}b,t>0$，则

$$f(t)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{p}-1\right)t^{\frac{1}{P}-2}a+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{P}-1}b$$

令 $f'(t)>0\Rightarrow -a+bt>0\Rightarrow t>\frac{a}{b}\Rightarrow t=\frac{a}{b}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，故

$$f(t)\geqslant f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{p}a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}=a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}$$

(2) 令 $g(t)=t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p,t\in(0,1)$ 则

$$g'(t)=(1-p)t^{-p}a^p+(-1)(1-p)(1-t)^{-p}b^p$$

令 $g'(t)>0\Rightarrow a/t+b/(t-1)>0\Rightarrow t>\frac{a}{a+b}$ 则

$$g(t)\geq g\left(\frac{a}{a+b}\right)=a(a+b)^{p-1}+b(a+b)^{p-1}=(a+b)^p$$

14. 必要性. 当 $p'(a)p'(b)\leqslant 0$ 时

$$p'(a)p'(b)=-(a-b)^2(a-c)(b-c)\leqslant 0$$

这就是 $(a-c)(b-c) \geqslant 0$, 这说明 $c \in(-\infty, a] \cup[b,+\infty)$, 即 p 在 $[a, b]$ 中没有零点, 也就是 p 在 $[a, b]$ 上不变号.

充分性: 如果 p 在 $[a, b]$ 上不变号, 那么 $c \in(-\infty, a] \cup[b,+\infty)$, 这就说明

$$p'(a) p'(b)=-(a-b)^{2}(a-c)(b-c) \leqslant 0$$

15. 引理：给定函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $x \in \mathbb{R}$ 使 $f(x)=x$, 称 x 为 f 的一个不动点. 若 $f \circ f$ 有唯一的不动点, 求证 f 也有唯一的不动点。

证明：先说明 f 存在不动点. 设 x_{0} 为 f^{2} 的不动点. 因为

$$f\left(f^{2}\left(x_{0}\right)\right)=f\left(x_{0}\right) \Longrightarrow f^{2}\left(f\left(x_{0}\right)\right)=f\left(x_{0}\right)$$

这说明 $f\left(x_{0}\right)$ 也是 f^{2} 的不动点, 因为 f^{2} 的不动点唯一, 则只有 $f\left(x_{0}\right)=x_{0}$, 也就是说 f 存在不动点 x_{0}

再说明不动点的唯一性。如果 f 有两个不动点 x_{1}, x_{2}, 即

$$f\left(x_{1}\right)=x_{1}, \quad f\left(x_{2}\right)=x_{2}$$

那么再用 f 作用一遍, 则有

$$f^{2}\left(x_{1}\right)=f\left(f\left(x_{1}\right)\right)=f\left(x_{1}\right)=x_{1}, \quad f^{2}\left(x_{2}\right)=f\left(f\left(x_{2}\right)\right)=f\left(x_{2}\right)=x_{2}$$

也就是 x_{1} 与 x_{2} 都是 f^{2} 的不动点, 与 f^{2} 有唯一的不动点矛盾.

回到本题，用反证法. 如果存在 f 满足条件, 先求 $f \circ f$ 的不动点:

$$f \circ f(x)=-x^{3}+x^{2}+1=x \Rightarrow x=1$$

即 $x=1$ 是 $f \circ f$ 的唯一不动点. 再由引理可知 $x=1$ 也是 f 的不动点, 对 $f \circ f$ 求导可得

$$(f \circ f)'(x)=f'(f(x)) f'(x)=-3 x^{2}+2 x$$

将 $x=1$ 代入就有 $\left(f'(1)\right)^{2}=-1$, 这是不可能的, 故这样的 f 不存在.

16. 设 $x_{0} \in(0,1)$，有 $f\left(x_{0}\right)=-1$ 且 $f'\left(x_{0}\right)=0$，可得

$$\left\{\begin{array}{l}
f(1)=f\left(x_{0}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1-x_{0}\right)^{2} f''\left(\alpha_{1}\right) \\
f(0)=f\left(x_{0}\right)+\dfrac{1}{2} x_{0}^{2} f''\left(\alpha_{2}\right)
\end{array}\right.$$

可得

$$\left\{\begin{array}{l}
f''\left(\alpha_{1}\right)=\dfrac{2}{\left(1-x_{0}\right)^{2}} \\
f''\left(\alpha_{2}\right)=\dfrac{2}{x_{0}^{2}}
\end{array}\right.$$

故

$$\max \left\{f''\left(\alpha_{1}\right), f''\left(\alpha_{2}\right)\right\} \geqslant \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=8$$

故 $\exists \xi \in(0,1)$，使得 $f''(\xi) \geqslant 8$

17.

$$\begin{array}{ll}
1=f(1)=\dfrac{1}{2} f''(0)+\dfrac{1}{6} f'''(\alpha) \quad(0<\alpha<1) & (1) \\
0=f(-1)=\dfrac{1}{2} f''(0)-\dfrac{1}{6} f'''(\beta) \quad(-1<\beta<0) & (2)
\end{array}$$

(1) − (2) 可得

$$1=\frac{1}{6}\left[f'''(\alpha)+f'''(\beta)\right]\Rightarrow 6=f'''(\alpha)+f'''(\beta)$$

故 $\exists\xi\in(-1,1),f'''(\xi)\geqslant 3$

18. 若 $g(x)$ 在 (a,b) 中无零点，则由

$$f(x)g'(x)-g(x)f'(x)\neq 0,\forall x\in[a,b]$$

可得 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'\neq 0$，又 $g(a)\neq 0,g(b)\neq 0$，而 $\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f(b)}{g(b)}=0$ 故 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\left.\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'\right|_{x=\xi}=0$ 矛盾

8.8.2 第二组参考题

1. $0<f(x)<\left|f'(x)\right|$，又 $f(x)$ 单调递减，可知

$$f(x)+f'(x)<0,\Rightarrow\left[e^x f(x)\right]'<0$$

得 $e^x f(x)$ 单调递减，故

$$\begin{aligned}
&x^2 f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\\
&=x^2e^{-x}\cdot e^x f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\\
&>x^2e^{-x}\cdot e^{1/x}f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)\\
&=\left(x^2e^{1/x-x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

设 $g(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}-1$，$x\in(0,1)$ 则

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\left[2x+x^2\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)\right]e^{1/x-x}\\
&=-(x-1)^2e^{\frac{1}{x}-x}<0
\end{aligned}$$

故 $g(x)$ 单调递减，$g(x)>g(1)=0$ 即 $x^2f(x)-f(1/x)>0$，即

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),x\in(0,1)$$

2. 数学归纳法

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\\ \dfrac{1}{2}f'(0)\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，且 $g^{(1)}(0)=\dfrac{1}{2}f^{(2)}(0)$

设 $g^{(n-1)}(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $g^{(n-1)}(0)=\dfrac{1}{n}f^{(n)}(0)$，又有 $xg(x)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 0 的某个邻域内 n 次可微 $\Rightarrow xg^{(n)}(x)+ng^{(n-1)}(x)=f^{(n)}(x)\Rightarrow g^{(n)}(x)=\dfrac{f^{(n)}(x)-ng^{(n-1)}(x)}{x}$ 故

$$\lim_{x\to 0}g^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-ng^{(n-1)}(x)}{x}=f^{(n+1)}(0)-ng^{(n)}(0)$$

$$g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$$

3. (数学归纳法) 当 $n=1$ 时，显然有 $F^{(k)}(a)=0,k=0,1,\cdots,n-1$, 假设 $n=N$ 时，对于 $k=0,1,\cdots,N-1$ 成立 $\left[(f(a))^N\right]^{(k)}=0$; 当 $n=N+1$ 时，$\left[(f(x))^{N+1}\right]'=(N+1)(f(x))^N f'(x)$，故对于 $1\leqslant k\leqslant N$，$\left[(f(x))^{N+1}\right]^{(k)}=(N+1)\left[(f(x))^N f'(x)\right]^{(k-1)}=(N+1)\sum\limits_{i=0}^{k-1}[(f(x))^N]^{(i)}f^{(k-i)}(x)$，由归纳假设可得 $\left[(f(a))^{N+1}\right]^{(k)}=0$，当 $k=0$ 时，$\left[(f(a))^{N+1}\right]^{(k)}=0$，故对于 $k=0,1,\cdots,n-1, F^{(k)}(a)=0$

反例为：$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}\\ 1 & ,x \text{ 为无理数}\end{cases}$ $\quad n=2,a=0$ 此时 $F(x)=(f(x))^2=f(x)$，但是 $F'(x)$ 处处不存在。

4. (1) 数学归纳法，设 $n=2k$，当 $k=1$ 时

$$P_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$$

假设为 $k-1$ 时 $P_{2k-2}(x)>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow P_{2k-1}(x)$ 单调递增，显然 $P_{2k-1}(x)$ 有唯一根，设为 x_0，即

$$1+x_0+\cdots+\frac{1}{(2k-1)!}x_0^{2k-1}=0$$

可得

$$P_{2k}(x_0)=\frac{1}{(2k)!}x_0^{2k}>0\Rightarrow P_{2k}(x)>0$$

(2) 从 (1) 可得

(3) 我们已经说明了 $x_n<0$, 如果要说 $\{x_n\}$ 严格递减, 也就是要说明

$$P_{2n+3}(x_n)>0\quad n=0,1,2,\ldots$$

而因为 $P_{2n+1}(x_n)=0$, 于是只要说明

$$\frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{x_n^{2n+3}}{(2n+3)!}>0\Longrightarrow 1+\frac{x_n}{2n+3}>0$$

下面来说明实际上 $x_n>-(2n+2)$, 即比我们需求的更强一些. 要说明 $x_n>-(2n+2)$, 也就是说明 $P_n(-2n-2)<0$ 即可 , 即

$$P_n(-2n-2)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k)!}+\frac{(-2n-2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

因为对每个 $0\leqslant k\leqslant n$ 都有

$$\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k)!}+\frac{(-2n-2)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k+1)!}(2k+1-(2n+2))<0$$

这就说明了 $\{x_n\}$ 严格递减.

再设 $\{x_n\}$ 有下界 $m<0$, 于是对任意的 x_n, 都有

$$\mathrm{e}^m<\mathrm{e}^{x_n}=P_{2n+1}(x_n)+\frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(2n+2)!}x_n^{2n+2}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(2n+2)!}x_n^{2n+2},\quad n=0,1,2\ldots$$

其中 $\xi_n \in (x_n, 0)$, 所以 $\mathrm{e}^{\xi_n} < 1$, 于是

$$0 < \mathrm{e}^m < \frac{m^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0, \quad n \to \infty$$

这与 $\mathrm{e}^m > 0$ 矛盾, 故 $\{x_n\}$ 没有有限的下界, 则只能 $x_n \to -\infty (n \to \infty)$.

(4) 用数学归纳法. 这里我们从 $n = 0$ 开始归纳，当 $n = 0$ 时, 当 $x < 0$ 时 $\mathrm{e}^x < 1$, 即 $\mathrm{e}^x < P_0(x)$, 考虑

$$f(x) = \mathrm{e}^x - P_1(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$$

对 f 求导可得 $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, 由 $n = 0$ 时可知

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 < 0$$

这说明 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时严格递减, 也就是 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\mathrm{e}^x > P_1(x)$. 归纳假设当 $n = k$ 时不等式成立, 那么当 $n = k + 1$ 时, 先记

$$f(x) = \mathrm{e}^x - P_{2k}(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{i=0}^{2k} \frac{x^i}{i!}$$

对 f 求导可得

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{x^i}{i!} = \mathrm{e}^x - P_{2k-1}(x)$$

由归纳假设可知

$$\mathrm{e}^x \geqslant P_{2k-1}(x)$$

那么就有 $f'(x) > 0$, 这说明 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时单调递增, 也就是 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\mathrm{e}^x < P_{2k}(x)$. 再记

$$g(x) = \mathrm{e}^x - P_{2k+1}(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{x^i}{i!}$$

对 g 求导再由 $\mathrm{e}^x < P_{2k}(x)$ 可知 $g'(x) < 0$, 那么 $g(x) > g(0)$ 即 $\mathrm{e}^x > P_{2k+1}(x)$. 归纳结束. 上述不等式对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

(5) 先用数学归纳法证明左侧不等式. 当 $n = 0$ 时, $\mathrm{e}^x > 1 (x > 0)$, 归纳假设当 $n = k$ 时 $\mathrm{e}^x > P_k(x)$, 那么当 $n = k + 1$ 时, 记

$$f(x) = \mathrm{e}^x - P_{k+1}(x)$$

对 f 求导可得 $f'(x) = \mathrm{e}^x - P_k(x) > 0$, 即有 $f(x) > f(0) = 0$, 也就是 $\mathrm{e}^x > P_{k+1}(x)$. 归纳结束. 再证明右侧不等式, 仍然使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时有 $1 + x = 1 + x$. 归纳假设当 $n = k$ 时不等式成立. 那么当 $n = k + 1$ 时, 记

$$f(x) = P_{k+1}(x) - \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}$$

对 f 求导可得

$$f'(x) = P_k(x) - \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^n > P_k(x) - \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k > 0$$

即 $f(x) > f(0) = 0$, 这说明

$$P_{k+1} \geqslant \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}$$

归纳结束, 上述不等式对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

(6) (Case 1) 当 $x = 0$ 时这是 e 的定义, 显然成立.

(Case 2) 当 $x > 0$ 时. 首先我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x\cdot x} = \mathrm{e}^x$$

根据 (5) 与夹逼定理可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = P_n(x) = \mathrm{e}^x$$

(Case 3) 当 $x < 0$ 时, 由 (4) 知对每一个 $x < 0$, 都有

$$|\mathrm{e}^x - P_{2n}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty$$

$$|\mathrm{e}^x - P_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty$$

这说明了当 $x < 0$ 时

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

5. 由 $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{1}{2n}(x_n - x_{n-1})$ 得

$$x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2n-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)(x_1 - x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}(b-a)$$

可得

$$\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{i!}(b-a) = (b-a)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = x_{n+1} - a$$

故

$$x_{n+1} = a + (b-a)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(-\frac{1}{2}\right)^i \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}x_{n+1} = a + (b-a)e^{-\frac{1}{2}}$$

6. 由 $x_0 < y_0$ 归纳可得 $0 < x_n < y_n \leq \dfrac{\pi}{2}$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ 故存在 s 使得 $y_s < x_0$，归纳可得 $y_{s+n} < x_n$，则

$$1 > \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_{n-s}}{y_n} > \frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_{n-s+1}}{x_{n-s}}$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$，由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$$

7. $ax^2 + bx + c$ 对 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 做带余除法，可化为如下形式

$$k\frac{dx+e}{x^2+ux+v} + a_1x + a_2$$

根据拐点的意义只需研究

$$\frac{dx+e}{x^2+ux+v} = d\frac{x+\frac{e}{d}}{x^2+ux+v}$$

再做一步平移化为如下形式：

$$k\frac{x}{x^2+ux+v}$$

那我们只需证明对 $y=\dfrac{x}{x^2+ux+v}$ 成立即可

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x^2+ux+v-x(2x+u)}{(x^2+ux+v)^2}\\
&= \frac{-x^2+v}{(x^2+ux+v)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{-2x\left(x^2+ux+v\right)^2-2\left(x^2+ux+v\right)(2x+u)\left(-x^2+v\right)}{(x^2+ux+v)^4}\\
&= \frac{-2x^3-2ux^2-2vx-2\left(-2x^3+2vx-ux^2+uv\right)}{(x^2+ux+v)^3}\\
&= 2\frac{x^3-3vx-uv}{(x^2+ux+v)^3}
\end{aligned}$$

设三个拐点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$，其中 $x^3-3vx-uv=0$ 有三个解 $x=x_1,x_2,x_3$，由 Vieta 定理可知

$$\begin{cases}
x_1+x_2+x_3=0\\
x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3v\\
x_1x_2x_3=uv
\end{cases}$$

过 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的直线为 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$，只需证

$$y_3=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)+y_1$$

即证

$$\frac{\frac{x_3}{x_3^2+ux_3+v}-\frac{x_1}{x_1^2+ux_1+v}}{\frac{x_2}{x_2^2+ux_2+v}-\frac{x_1}{x_1^2+ux_1+v}}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$$

即证

$$\frac{\left(x_2^2+ux_2+v\right)\left(x_1^2+ux_1+v\right)}{\left(x_3^2+ux_3+v\right)\left(x_1^2+ux_1+v\right)}\cdot\frac{x_1-x_3}{x_1-x_2}\cdot\frac{x_1x_3-v}{x_1x_2-v}=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_2}$$

即证

$$\frac{\left(x_2^2+ux_2+v\right)}{x_3^2+ux_3+v}=\frac{x_1x_2-v}{x_1x_3-v}$$

即证

$$(x_1x_2-v)\left(x_3^2+ux_3+v\right)=(x_1x_3-v)\left(x_2^2+ux_2+v\right)$$

$$\begin{aligned}
&x_1x_2x_3^2+ux_1x_2x_3+vx_1x_2-vx_3^2-uvx_3-v^2\\
&=x_1x_2^2x_3+ux_1x_2x_3+vx_1x_3-vx_2^2-uvx_2-v^2
\end{aligned}$$

化简得

$$uvx_3+vx_1x_2-vx_3^2-uvx_3$$

$$=uvx_2+vx_1x_3-vx_2^2-uvx_2$$

即证

$$v\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(x_2-x_3\right)=0$$

由 Vieta 定理可知上式成立。

8. $\Leftarrow$：令 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 可得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= f\left[\lambda x_1+(1-\lambda) x_2\right] \leqslant \lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda) f\left(x_2\right) \\ &= \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2} \quad \left(\forall x_1, x_2 \in I\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$：先证 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n} \quad (1)$$

$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$，有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)}{4} \end{aligned}$$

依次可得对任意 k 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_{2^k}\right)}{2^k}$$

若 (1) 式对 $n=k+1$ 成立时, 必对 $n=k$ 也成立，记 $A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_k=kA$, 所以

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}$$

若 (1) 式对 $n=k+1$ 成立, 故

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}\right) \\ &\leqslant \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_k\right)+f(A)}{k+1} \end{aligned}$$

不等式两边同乘以 $k+1$, 减去 $f(A)$, 最后除以 k. 注意

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_k\right)}{k}$$

此式表示 (1) 式对 $n=k$ 成立. 又 2^k 趋于无穷，故可得 (1) 式成立

下面再证明：$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in(0,1)$, 有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda) x_2\right) \leqslant \lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda) f\left(x_2\right) \quad (2)$$

设 $x_1, x_2 \in I$ 为任意两点, 为了证明 (2) 式对于任意实数 $\lambda \in(0,1)$ 成立. 我们先来证

明: (2) 式当 λ 为有理数 $\lambda=\frac{m}{n}\in(0,1)(m<n$ 为自然数) 时成立. 事实上:

$$\begin{aligned}
f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]&=f\left[\frac{m}{n}x_1+\left(1-\frac{m}{n}\right)x_2\right]\\
&=f\left[\frac{mx_1+(n-m)x_2}{n}\right]\\
&=f\left[\frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{m\text{个}}+\overbrace{x_2+\cdots+x_2}^{n-m\text{个}}}{n}\right]\\
&=\frac{\overbrace{f(x_1)+\cdots+f(x_1)}^{m\text{个}}+\overbrace{f(x_2)+\cdots+f(x_2)}^{n-m\text{个}}}{n}\\
&=\frac{mf(x_1)+(n-m)f(x_2)}{n}\\
&=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)
\end{aligned}$$

λ 为有理数的情况获证。若 $\lambda\in(0,1)$ 为无理数, 则存在有理数 $\lambda_n\in(0,1)(n=1,2,\cdots)$ 使得 $\lambda_n\to\lambda$ (当 $n\to\infty$ 时) 从而由 $f(x)$ 的连续性,

$$\begin{aligned}
f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]&=f\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2\right]\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}f\left[\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2\right]
\end{aligned}$$

对于有理数 $\lambda_n\in(0,1)$, 上面已证明有

$$f\left[\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2\right]\leqslant\lambda_n f(x_1)+(1-\lambda_n)f(x_2)$$

此式中令 $n\to\infty$ 取极限, 联系上式, 有

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

即 (2) 式对任意无理数 $\lambda\in(0,1)$ 也成立. 证毕

9. 由 f 至多只有第一类间断点，可得每一点都存在有限得左右极限，则 $\forall x\in(a,b)$，有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<\frac{f\left(x+\frac{1}{2}(b-x)\right)-f(x)}{\frac{1}{2}(b-x)},\quad\forall y\in(a,x)$$

且 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 关于 y 在 (a,x) 单调递增，可得 $\lim\limits_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 存在且有限可得 $\lim\limits_{y\to x^-}(f(y)-f(x))=0\Rightarrow\lim\limits_{y\to x^-}f(y)=f(x)$ 类似可得 $\lim\limits_{y\to x^+}f(y)=f(x)\Rightarrow f$ 在 (a,b) 上连续。

10. $\forall x\in(a,b)$，有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<\frac{f\left(x+\frac{1}{2}(b-x)\right)-f(x)}{\frac{1}{2}(b-x)},\quad\forall y\in(a,x)$$

且 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 关于 y 在 (a,x) 单调递增，可得 $\lim\limits_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 存在且有限可得 $\lim\limits_{y\to x^-}(f(y)-f(x))=0\Rightarrow\lim\limits_{y\to x^-}f(y)=f(x)$ 类似可得 $\lim\limits_{y\to x^+}f(y)=f(x)\Rightarrow f$ 在 (a,b) 上连续。

11. 考虑区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，在该区间上有

$$\left|f''(x)\right| \leqslant |f(x)|+|f'(x)| \quad \forall x \in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

则

$$\left|f'(x)\right|=\left|\int_0^x f''(t)dt\right| \leqslant \int_0^x \left|f''(t)\right| dt$$

$$\leqslant \int_0^x (|f(t)|+|f'(t)|)dt=\int_0^x |f(t)|dt+\int_0^x \left|f'(t)\right| dt \quad (1)$$

又 $|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt$ 可得

$$(1)\text{式} \leqslant (x+1)\int_0^x |f'(t)|dt$$

设 $[0,x]$ 内使得 $f'(x)$ 在 $[0,x]$ 上最大，可得

$$\left|f'(\xi)\right| \leqslant (\xi+1)\int_0^{\xi} |f'(t)|dt \leqslant (\xi+1)\xi\left|f'(\xi)\right| \leqslant \frac{3}{4}|f'(\xi)|$$

故 $|f'(\xi)|=0 \Rightarrow \left|f'(x)\right|=0$，可得 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上 $f'(x)\equiv 0$，$f(x)\equiv 0$，类似可得 $(-1,1)$ 上，$f(x)\equiv 0$

12. 若 $f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 单调，假设 $f'(x)$ 变号，则 $\exists \xi \in I$，使得 $f'(\xi)=0$，且不妨设在 ξ 的左右邻域内，$f'(x)$ 是异号的，记左邻域为 (a,ξ)，右邻域为 (ξ,b)，则存在 $\alpha \in (a,\xi),\beta \in (\xi,b)$，使得 $f(\alpha)=f(beta)$，可得

$$f'(\alpha)=g(f(\alpha))=g(f(\beta))=f'(\beta)$$

但是 $f'(\alpha),f'(\beta)$ 异号，矛盾。

13. 由 $f'(x)>0,f''(x)<0$ 可得 $f'(x)>f'(0), \quad \forall x<0$，故

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt<f(0)+xf'(0)$$

可得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，矛盾

14. 若存在一点 $x\in\mathbb{R}$，使得 $f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)$ 中有一个为 0，则不等式成立。若不存在这样的 x，则 $f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)$ 均不变号，不妨设 $f'''(x)>0$，不然考虑 $-f(x)$，即可。

$f'''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ 是下凸函数，则固定 $x_0\in R$，有

$$f'(x) \geqslant f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f'\left(x_0\right)$$

则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 有一个为 $+\infty$，故 $f'(x)>0$

类似可得，若 $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)>0$，若 $f''(x)<0 \Rightarrow -f''(x)>0 \Rightarrow -f(x)>0 \Rightarrow f(x)<0$

故 $f'''(x)$ 与 $f'(x)$ 同号，$f''(x)$ 与 $f(x)$ 同号。故此时任意 $x\in R$，都有 $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x)\geqslant 0$

15. (Step 1) 先证明一个引理: 如果多项式 p 使得 $p\pm p'\geqslant 0$, 那么必有 $p\geqslant 0$. 因为 $p\pm p'$ 仍是一个多项式, 如果 $p\pm p'\geqslant 0$ 恒成立, 那么说明 $p\pm p'$ 一定为一个首项系数为正

的偶次多项式, 而这个最高次只能由 p 提供, 也就是说

$$\lim_{x\to\infty} p(x)=+\infty$$

那么可知 $p(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上必有最小值, 设最小值点为 x_0, 那么就有 $p'(x_0)=0$, 于是

$$p(x)\geqslant p(x_0)\pm p'(x_0)\geqslant 0$$

(Step 2) 再考虑

$$p'''-p''-p'+p=\left(p-p''\right)-\left(p'-p'''\right)\geqslant 0$$

由引理可知 $p-p''\geqslant 0$ 恒成立, 也就是

$$\left(p-p'\right)+\left(p'-p''\right)\geqslant 0$$

又可以得到 $p-p'\geqslant 0$, 再次使用引理可知 $p\geqslant 0$.

16. 令 $p(x)=P(x), q(x)=Q(x)$, 对 $q(x)$ 进行因式分解可以得到

$$\begin{aligned}q(x)&=p(x)p'(x)+x^2p(x)p'(x)+xp(x)^2+xp'(x)^2\\&=p'(x)\left(p(x)+xp'(x)\right)+xp(x)\left(p(x)+xp'(x)\right)\\&=\left(p'(x)+xp(x)\right)\left(p(x)+xp'(x)\right)\end{aligned}$$

于是 $q(x)=0$ 的根的集合为两个因式的根的集合的并. 故记 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}p(x), g(x)=xp(x)$, 于是

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}\left(p'(x)+xp(x)\right),\quad g'(x)=p(x)+xp'(x)$$

故分别分析 f' 和 g' 的根的情况. 设 $p(x)=0$ 大于 1 的根为 $1<x_1<x_2<\cdots<x_n$, 那么 $f(x)=0$ 大于 1 的根也为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$, 那么对

$$\left[x_1,x_2\right],\left[x_2,x_3\right],\ldots,\left[x_{n-1},x_n\right]$$

这 $n-1$ 个区间使用 Rolle 定理可知存在 $\xi_i\in\left(x_i,x_{i+1}\right)$, 其中 $i=1,2,\ldots,n-1$, 使得 $f'\left(\xi_i\right)=0$, 即 $f'(x)=0$ 至少有 $n-1$ 个根. 再考虑 $g(x)$, 可知 $g(x)=0$ 的根至少为 $0,x_1,x_2,\ldots,x_n$, 那么对

$$\left[0,x_1\right],\left[x_1,x_2\right],\left[x_2,x_3\right],\ldots,\left[x_{n-1},x_n\right]$$

这 n 个闭区间使用 Rolle 定理可知存在 $\eta_i\in\left(x_i,x_{i+1}\right)$, 其中 $_0=0, i=0,1,\ldots,n$, 使得 $g'\left(\eta_i\right)=0$ 可知 $g'(x)=0$ 至少有 n 个根. 我们再来说明对任意的 $i=1,2,\ldots,n,\xi_i\neq\eta_i$. 如果存在 $1\leqslant i\leqslant n$ 可以使 $\xi_i=\eta_i=r$, 那么由

$$rp(r)+p'(r)=0$$

可知 $p'(r)=-rp(r)$, 把它代入 $rp'(r)+p(r)=0$, 可以知道

$$p(r)\left(1-r^2\right)=0$$

由于 $1-r^2\neq 0$, 所以有 $p(r)=0$, 这与 x_i 和 x_{i+1} 为 $p(x)=0$ 的相邻零点相矛盾. 故对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有 $\xi_i\neq\eta_i$. 这样就说明 $q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个零点.

17. 考虑方程 $a^x-x=0\Leftrightarrow x\ln a-\ln x=0\Leftrightarrow \ln a=\dfrac{\ln x}{x}$，令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $f(x)>0\Rightarrow x<e$ ，$f(e)=\dfrac{1}{e}$ 又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，可

得若 $\ln a \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$，即 $a \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ 时，方程有两个解；若 $\ln a = \dfrac{1}{e}$，即 $a = e^{\frac{1}{e}}$，方程有一个解；若 $\ln a \in \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$，即 $a > e^{\frac{1}{e}}$，方程无解。

18. (1) 设 $G(x)=g(x)-x$，$G'(x)=(\ln a)^2 a^{a^x+x}-1$，令 $h(x)=a^x+x$，$h'(x)=a^x\ln a+1$ 单调递增，存在唯一的 x_0 使得 $h'(x_0)=0 \Rightarrow x_0=\dfrac{-\ln(-\ln a)}{\ln a}=\log_a\left(-\dfrac{1}{\ln a}\right)$，则 $h(x)\geqslant h(x_0), G'(x)\leqslant G'(x_0)$，可得 $G'(x_0)\leq 0 \Leftrightarrow 1 > a \geqslant e^{-e}$，故 $G(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单减，又 $G(-\infty)=+\infty, G(+\infty)=-\infty$，故 $G(x)$ 存在唯一的零点，即 $g(x)$ 存在唯一的不动点

(2) 由于 $g(0)=a^1>0$，$g(1)=a^a=e^{a\ln a}<e^0=1$，故 0,1 均不是 $g(x)$ 的不动点

若 x_0 是 $g(x)$ 的不动点 $\Leftrightarrow a^{a^{x_0}}=x_0 \Leftrightarrow a^{x_0}\ln a=\ln x_0 \Leftrightarrow \dfrac{a^{x_0}\ln a}{\ln x_0}=1$

令 $G(x)=\dfrac{a^x\ln a}{\ln x}$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，故

$$G'(x)=\frac{a^x(\ln a)^2\left(x\ln x-\frac{1}{\ln a}\right)}{x\ln^2 x},\quad x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

当 $x>1$ 时，$x\ln x-\dfrac{1}{\ln a}>-\dfrac{1}{\ln a}>0$，故 $G'(x)>0$，从而 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递增，并且注意到，当 $x>1$ 时，$G(x)<0<1$，故 $G(x)=1$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上无解。

当 $0<x<1$ 时，令 $\varphi(x)=x\ln x$，于是 $\varphi'(x)=1+\ln x$，令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=e^{-1}$，于是 $\varphi(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 上递减，在 $(e^{-1},+\infty)$ 上递增，且取最小值 $\varphi\left(e^{-1}\right)=-e^{-1}$ 由于 $\ln a<-e$ 即 $\dfrac{1}{\ln a}>-e^{-1}$ 从而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\ln a}$ 有两个零点 x_1,x_2，满足 $x_1<e^{-1}<x_2$，从而可知 $G(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单增，在 (x_1,x_2) 单减，在 $(x_2,1)$ 单增，又

$$\lim_{x\to 0^+}G(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 1^-}G(x)=+\infty$$

故只需证明 $G(x_1)>1>G(x_2)$ 即可。

注意到 x_1,x_2 均满足 $x_1\ln x_1=\dfrac{1}{\ln a}=x_2\ln x_2$，故

$$G(x_1)=\frac{a^{x_1}\ln a}{\ln x_1}=\frac{a^{x_1}}{x_1\ln^2 x_1},\quad G(x_2)=\frac{a^{x_2}}{x_2\ln^2 x_2}$$

只需证明 $a^{x_1}>x_1\ln^2 x_1$ 与 $a^{x_2}<x_2\ln^2 x_2$

即证明

$$x_1\ln a>\ln x_1+2\ln|\ln x_1| \text{与} x_2\ln a<\ln x_2+2\ln|\ln x_2|$$

又 $x_1<e^{-1}$，故 $|\ln x_1|=-\ln x_1>1$，$|\ln x_2|=-\ln x_2\in(0,1)$ 为此只要证明 $-\dfrac{1}{t}>-t+2\ln t$ 对 $t\in(1,+\infty)$ 成立，及 $-\dfrac{1}{t}<-t+2\ln t$ 对 $t\in(0,1)$ 成立即可。令 $\eta(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t, t\in(0,+\infty)$，则 $\eta'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}\geqslant 0$，故 $\eta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增，又 $\eta(1)=0$，故当 $t>1$ 时，有 $\eta(t)>0$，当 $0<t<1$ 时，有 $\eta(t)<0$，因此结论成立。综上，$g(x)$ 有三个不动点。

19. 若 $\theta=0$ 或 π 为方程的根，则 $b=0$；若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$ 为方程的根，则 $a=0$，下设 $a\neq 0,\quad b\neq 0$，于是 $0,\pi,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ 均不是方程的根，且对应的 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 均不

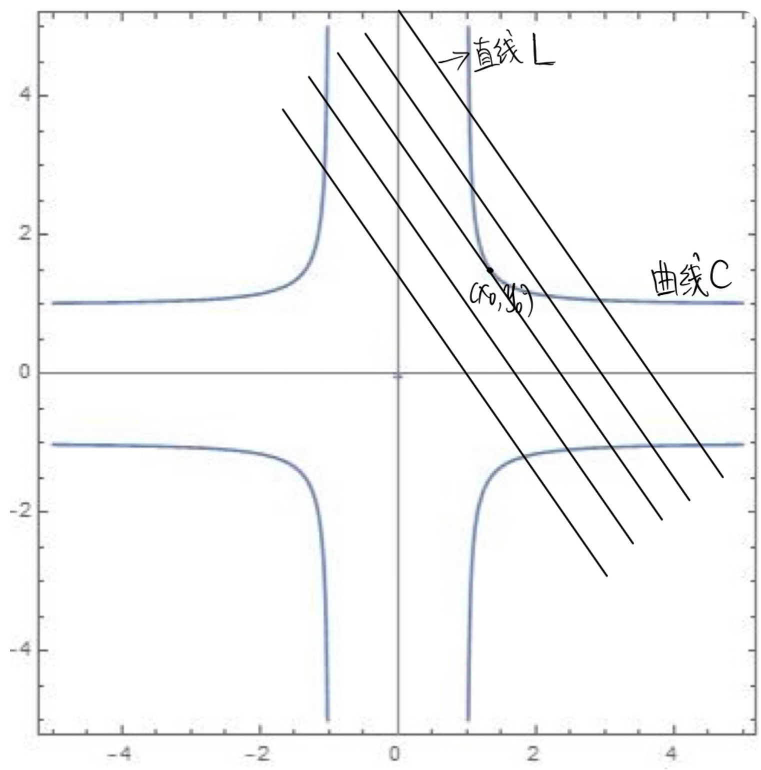

图 8.2

为 0，令 $x=\dfrac{1}{\cos\theta}, y=\dfrac{1}{\sin\theta}$，于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1 \end{cases}$$

设 $L: ax+by=1, C:\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$，即求两者的交点的个数，如图 8.2. 于是 L 在两轴的截距分别为 $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}$，根据对称性，不妨设 $a>0, b>0$，此时 L 与 C 在第二和第四象限中恒有交点。考虑在第一象限，当 L 与 C 相切时，恰好有三个交点，若 L 与 C 不相交，则有两个交点；若 L 与 C 相交但不相切，即在第一象限有两个交点，则总共有四个交点。因此，相切便是临界情况，设 L 与 C 在 (x_0,y_0) 处相切，对 C 求导可得 $-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{y^3}y'$，可得 $y'=-\dfrac{y^3}{x^3}$，又 C 在 (x_0,y_0) 处切线的斜率等于 L 的斜率 $-\dfrac{a}{b}$，故 $ax_0^3=by_0^3 \Rightarrow a^{\frac{2}{3}}x_0^2=b^{\frac{2}{3}}y_0^2 \Rightarrow y_0^2=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{3}}x_0^2$，故 $y_0^2=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x_0=a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{A}$，$y_0=b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{A}$，其中 $A=a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$，又

$$ax_0+by_0=a^{\frac{3}{3}}\sqrt{A}+b^{\frac{2}{3}}\sqrt{A}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{3}}\right)\sqrt{A}=(\sqrt{A})^3$$

故当 $A=1$，即 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=1$ 时，在第一象限 L 与 C 相切，此时有三个交点；当 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>1$ 时，在第一象限 L 与 C 无交点，故总共只有两个交点；当 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}<1$ 时，在第一象限 L 与 C 有两个交点，故总共有四个交点。

20. 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，参数方程为 $r(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi)$，切向量方程为 $r'(\theta)=(-a\sin\theta, b\cos\theta)$，定点设为 (x_0,y_0)，此点连接椭圆上一点为椭圆

法向量等价于此连线与切向量所在直线垂直，即

$$\frac{y_0 - b\sin\theta}{x_0 - a\cos\theta} \cdot \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = -1$$

化简得

$$\frac{x_0 a}{a^2 - b^2}\sin\theta + \frac{-y_0 b}{a^2 - b^2}\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$$

由上题可得，解的个数与

$$A = \left(\frac{x_0 a}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0 b}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

的符号有关。

第 9 章 不定积分

9.1 不定积分的计算方法

9.1.1 练习题

1. (1) 原式 $=\int\frac{dx^2}{1+x^4}=\arctan x^2+c$

(2) 令 $x=\sin^2\theta\quad dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$ 则原式 $=\int 2d\theta=2\theta+c=2\arcsin\sqrt{x}+c$

(3) 原式 $=x\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{x\cdot 2x}{1+x^2}dx=x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x+c$

(4) 原式 $=\int\frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}=\arctan^2\sqrt{x}+c$

(5) 原式 $\int\frac{1-e^x+e^x}{e^x-1}dx=-x+\int\frac{de^x}{e^x-1}=-x+\ln\left|e^x-1\right|+c$

(6) 原式 $=\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\left(1+x^2\right)^2}dx^2=-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\left(1+x^2\right)}+\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$，令 $x=\tan\theta$ 则

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\cos\theta d\theta=\sin\theta+c$$

故原式 $=-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\left(1+x^2\right)}+\sin(\arctan x)+C$

(7) 原式 $=\int\frac{xe^x+e^x-e^x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{-e^x}{(1+x)^2}dx+\int\frac{e^x}{1+x}dx=\int\frac{-e^x}{(1+x)^2}dx+\frac{e^x}{1+x}+\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx=\frac{e^x}{1+x}+C$

(8) 原式 $=\int\frac{e^x+xe^x}{xe^x\left(1+xe^x\right)}dx=\int\frac{dxe^x}{xe^x\left(1+xe^x\right)}=\ln xe^x-\ln\left(1+xe^x\right)+c$

(9) 原式 $=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{2x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\int\frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+c$

(10) 令 $x=\tan\theta$，则

原式 $=\int e^\theta\cos\theta d\theta=\frac{e^\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2}+c=\frac{e^{\arctan x}(\sin\arctan x+\cos\arctan x)}{2}+c$

2. (1) 令 $M(x)=\int\frac{dx}{1+x^2+x^4}\quad N(x)=\int\frac{x^2}{1+x^2+x^4}dx$ 则

$$M(x)-N(x)=\int\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}dx=-\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+c$$

$$M(x)+N(x)=\int\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+c$$

故

$$M(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+c$$

(2) 令 $M(x)=\int\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}dx, N(x)=\int\frac{e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$ 则

$$\begin{aligned}M(x)+N(x)&=x+c\\M(x)-N(x)&=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+c\end{aligned}$$

故

$$M(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)+c$$

(3) 令 $M(x)=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx \quad N(x)=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ 则

$$\begin{aligned}aM(x)+bN(x)&=x+c\\aN(x)-bM(x)&=\ln|a\sin x+b\cos x|+c\end{aligned}$$

故原式 $=\frac{b}{a^{2}+b^{2}}(ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|)+\frac{a}{a^{2}+b^{2}}(bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|)+c=\frac{2ab}{a^{2}+b^{2}}x-\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}+b^{2}}\ln|a\sin x+b\cos x|+c$

(4) 原式 $=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{1-x+x^{2}}dx=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{1-x+x^{2}}dx$，令 $M(x)=\int\frac{1}{1-x+x^{2}}dx, \quad N(x)=\int\frac{x}{1-x+x^{2}}dx$ 则

$$\begin{aligned}M(x)-2N(x)&=\int\frac{1-2x}{1-x+x^{2}}dx=\int\frac{d\left(x-x^{2}\right)}{1-x+x^{2}}=-\ln\left(1-x+x^{2}\right)+c\\M(x)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c\end{aligned}$$

故原式 $=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\ln\left(1-x+x^{2}\right)+c$

3.

$$\begin{aligned}\int\cos^{4}x-\sin^{4}xdx&=\int\cos^{2}x-\sin^{2}xdx=\sin 2x+c\\\int\cos^{4}x+\sin^{4}xdx&=\int 1-2\sin^{2}x\cos^{2}xdx=\int-\frac{1}{2}\sin^{2}2xdx\\&=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\sin 4x+C\end{aligned}$$

4. (1) 由于

$$\begin{aligned}I_{n}=\int\sin^{n}xdx=-\int\sin^{n-1}xd\cos x&=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^{2}xdx\\&=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_{n})\end{aligned}$$

故

$$I_{n}=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}I_{n}=\int\tan^{n}xdx=\int\tan^{n-2}x\sin^{2}xd\tan x&=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\sin^{2}x-\frac{2}{n-1}\int\tan^{n-2}x\sin^{2}xdx\\&\triangleq\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\sin^{2}x-\frac{2}{n-1}J_{n-2}\end{aligned}$$

故 $J_{n-2}=I_{n-2}-J_{n-4}$

(3) 由于

$$\begin{aligned} I_n=\int \sec^n xdx &= \tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int \sec^{n-2}x\tan^2 xdx \\ &= \tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\left(I_n-I_{n-2}\right) \end{aligned}$$

故

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

(4) 由于

$$I_n=\int\frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{d\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+2}}dx$$

又记

$$J_n=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}dx$$

则 $J_n=I_n+I_{n+2}$ 故

$$I_n=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}+(n+1)\left(I_{n+2}+I_n\right)\Rightarrow I_n=\frac{-\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

5. (1) 原式 $=xf'(x)-f(x)+c$

(2) 原式 $=\frac{1}{2}f(2x)+c$

6. (1) 由于

$$\begin{aligned} I(m,n) &= -\int \cos^m x\sin^{n-1}xd\cos x \\ &= -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int\cos^{m+2}x\sin^{n-2}xdx \\ &= -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}(I(m,n-2)-I(m,n)) \end{aligned}$$

故

$$I(m,n)=-\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} I(n,n)=\frac{1}{2^n}\int\sin^n 2xdx &= \frac{-1}{2^{n+1}}\int\sin^{n-1}2xd\cos 2x \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}}\sin^{n+1}2x\cos 2x+\frac{n-1}{2^n}\int\sin^{n-2}2x\cos^2 2xdx \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}}\sin^{n-1}2x\cos 2x+\frac{n-1}{2^n}\left(2^{n-2}I(n-2,n-2)-2^nI(n,n)\right) \end{aligned}$$

故

$$I(n,n)=-\frac{1}{n2^{n+1}}\sin^{n-1}2x\cos 2x+\frac{n-1}{4n}I(n-2,n-2)$$

9.2 几类可积函数

9.2.1 练习题

1. (1) 原式 $=\int\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}dx=2\ln|x+2|-\ln|x+1|+c$

(2) 原式 $=\int \frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}dx=\ln|x|+\arctan x+c$

(3) 原式 $=\int \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}dx=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

(4) 原式 $=\int \frac{5}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\arctan x+c$

2. (1) 令 $t=x^2$ 则

$$\begin{aligned}原式=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^4+1}dt &= \frac{1}{2}\int\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt\\ &=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|+C\end{aligned}$$

(2) 原式 $=\frac{1}{a}\int\frac{1}{x}-\frac{x^{n-1}}{x^n+a}dx=\frac{1}{a}\ln|x|-\frac{1}{an}\ln|x^n+a|+C$

(3) 原式 $=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2+3}dx=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{8}\ln|x^2+3|+\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

(4) 原式 $=\int\frac{x+1-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$ 令 $I_1=\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^1}$ 则

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{x}{x^2+2x+3}+2\int\frac{x^2+x}{(x^2+2x+3)^2}dx\\ &=\frac{x}{x^2+2x+3}+2I_1-2\int\frac{x+3}{(x^2+2x+3)^2}dx\end{aligned}$$

又

$$\int\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\frac{1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

代入原式可得结果

(5) 原式 $=\int\frac{(x-2)^2+5(x-2)+7}{(x-2)^{10}}dx=-\frac{1}{7(x-2)^7}-\frac{5}{8(x-2)^8}-\frac{7}{9(x-2)^9}+C$

(6) 原式 $=x+\int\frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)}dx=x+\int\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}dx=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c$

(7) 原式 $=\int\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx$

$=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x-1}\right|+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})+C$

(8) 原式 $=\int\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{2x+4}{3(x^2+x+1)}dx=-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

3. (1) 原式 $=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\tan\frac{x}{2}+c$

(2) 令 $t=\cos x$ 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)t^4} = \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{t^2+1}{t^4}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + C
\end{aligned}
$$

(3) 令 $t=\tan x$ 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+t^2\right)} &= \arctan t + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C \\
&= x + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}
$$

(4) 令 $t=\cos x$ 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = \int -\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^8}dt &= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} + C \\
&= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{5\cos^3 x} + \frac{1}{7\cos^2 x} + C
\end{aligned}
$$

(5) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 则

$$
\text{原式} = \int \frac{\cos x}{(1+\cos x)^2}dx = \int \frac{1-t^2}{2}dt = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2} + c
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x - \sin^3 x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x}dx \\
&= -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right| + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| - \frac{1}{4}\cos 2x + c
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\text{原式} = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan\left(\sin^2 x\right) + c
$$

(8) 令 $t=\tan x$ 则

$$
\text{原式} = \int \frac{dt}{\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^4}dt = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + C
$$

4. 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(1-r^2\right)\int \frac{2}{\left(1+r^2\right)\left(1+t^2\right) - 2r\left(1-t^2\right)}dt \\
&= \frac{1+r}{1-r}\int \frac{2dt}{1+\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2} \\
&= 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

5. (1) 用计算机算不出来，可能没有初等原函数。

(2) 令 $t=\sqrt{2x^2+3}$ 则

$$
\text{原式} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{t^2-3}{2}} = \int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c
$$

(3) 原式 $=\int\sqrt{\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}}dx$，令 $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}$ 则原式 $=\int\dfrac{2\cos^2 y}{1-2\sin^2 y}dy$，令 $t=\tan y$ 则原式 $=\int\dfrac{2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|+\arctan t+c$

(4) 原式 $=2x\sqrt{1+e^x}-2\int\sqrt{1+e^x}dx$，令 $t=\sqrt{1+e^x}$ 则 $\int\sqrt{1+e^x}dx=\int\dfrac{2t^2}{t^2-1}dt$ 故

$$原式=2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+1$$

(5) 令 $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 即 $x=\dfrac{1-2t^2}{1-t^2}$ 故

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}dx=\int\frac{t\cdot(-2t)}{\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^2(1-t^2)^2}dt\\&=\int\frac{-2}{t^2}dt=\frac{2}{t}+C=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C\end{aligned}$$

(6) 令 $t=x^{\frac{1}{6}}$，原式 $=\int\dfrac{t^3-1}{t^2+1}\cdot 6t^5dt=\dfrac{6}{7}t^7-\dfrac{6}{5}t^5+2t^3-6t+6\arctan t-\dfrac{3}{2}t^4+3t^2-3\ln\left|t^2+1\right|$ 故

$$原式=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\arctan x^{\frac{1}{6}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-3\ln\left|x^{\frac{1}{3}}+1\right|+c$$

9.3 对于教学的建议

9.3.1 参考题

1. 令 $t=\sin^2 x$ 则

$$f'(t)=1-2\sin^2 2x+\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1-8t(1-t)+\frac{t}{1-t}$$

故

$$f(x)=-\ln|1-t|-4t^2+\frac{8}{3}t^3+c=-2\ln\cos x-4\sin^4 x+\frac{8}{3}\sin^6 x+c$$

2. (1)

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}\left(\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right)\arctan x-\frac{1}{2}\int\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{1+x^2}dx\\&=\frac{1}{2}\left(\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right)\arctan x-\frac{1}{2}x\ln\left(1+x^2\right)+3x-3\arctan x+c\end{aligned}$$

(2) 令 $x=e^t$ 则

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{1-t}{(e^t-t)^2}e^tdt=\int\frac{1-t}{(e^t-t)^2}d(e^t-t)+\int\frac{1-t}{(e^t-t)^2}dt\\&=-\frac{1-t}{e^t-t}+\int\frac{1}{e^t-t}+\frac{1-t}{(e^t-t)^2}dt=-\frac{1-t}{e^t-t}+\frac{1}{e^t-t}+c\end{aligned}$$

故

$$原式=\frac{\ln x}{x-\ln x}+C$$

(3) 考虑函数

$$
\begin{aligned}
F(t) &= F(0) + \int_0^t [x]|\sin \pi x| dx \\
&= F(x) + \sum_{i=0}^{[t-1]} i \cdot \frac{2}{\pi} + \int_{[t)}^t [x]|\sin \pi x| dx \\
&= F(0) + \frac{[t-1]\cdot[t]}{\pi} + \frac{[t]}{\pi}|\cos \pi t - \cos \pi [t]|
\end{aligned}
$$

则 $F(x)$ 即为所求

(4)

$$原式 = -\cos x \ln \sin x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = -\cos x \ln \sin x + \cos x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + c$$

(5)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \sin(x+b)\cos(x+a)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C
\end{aligned}
$$

(6) 原式 $= \displaystyle\int \frac{1}{x} - \frac{2x^{n-1}}{1+x^n} dx = \ln|x| - \frac{2}{n} \ln|1+x^n| + c$

3. 由于

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2}{c}(ax+b)^n\sqrt{cx+b} - \frac{2na}{c}\int \frac{(ax+b)^{n-1}(cx+b)}{\sqrt{cx+b}} dx \\
&= \frac{2}{c}(ax+b)^n\sqrt{cx+b} - 2n\left(I_{n-1} + \frac{ab-bc}{c} I_n\right)
\end{aligned}
$$

故

$$I_n = \frac{2}{2n(ab-bc)+c}(ax+b)^n\sqrt{cx+b} - \frac{2nc}{2n(ab-b)+c} I_{n-1}$$

4. 由于

$$t = \frac{\sin\left(\frac{x+a}{2} - a\right)}{\sin\frac{x+a}{2}} = \frac{\sin\frac{x+a}{2}\cos a - \sin a \cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}} = \cos a - \frac{\sin a}{\tan\frac{x+a}{2}}$$

故

$$x = 2\arctan\frac{\sin a}{\cos a - t} - a$$

可得

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \frac{2t^n \sin a}{1-2t\cos a + t^2} dt &= \int 2t^{n-2}\sin a + \frac{2\sin a\left(2t^{n-1}\cos a - t^{n-2}\right)}{1-2t\cos a+t^2} dt \\
&= \frac{2\sin a}{n-1} t^{n-1} - I_{n-2} + 2I_{n-1}\cos a
\end{aligned}
$$

5. 设

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

等式两边同乘 $(x-x_i)$， $i=1,\cdots,n$ 并令 $x \to x_i$ 可得 $A_i = \dfrac{P(x_i)}{Q(x_i)}$ 故

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i)}{Q(x_i)} \ln|x-x_i| + c$$

6. 考虑函数

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)dt = F(v) + \sum_{i=1}^{f(x)-1} i + \int_{f(x)-\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt$$
$$= F(0) + \frac{f(x)(f(x)-1)}{2} + f(x)\left(x - f(x) + \frac{1}{2}\right)$$

7. 由定理不妨设 $\int e^{-x^2}dx = h_1(x)e^{-x^2} + C$，其中 $h_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 为有理函数，P, Q 互素。对等式两边求导可得

$$1 = -\frac{2xP_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_1'(x)}{Q_1(x)} - \frac{P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)}$$

即

$$Q_1(x)\left(Q_1(x) - P_1'(x) + 2xP_1(x)\right) = P_1(x)Q_1'(x)$$

若 $Q_1(x)$ 次数大于等于 1，取其一根 x_0，重数设为 r，则 x_0 为左端 r 重根，右端 $r-1$ 重根；

若 $Q_1(x)$ 为常数 a，则有 $a - P_1'(x) + 2xP_1(x) = 0$，考虑两端多项式次数得出矛盾。

可得 $\int e^{-x^2}dx$ 为非初等函数。

假设 $\int \frac{1}{x}e^x dx$ 为初等函数，则设

$$\int \frac{1}{x}e^x dx = h_2(x)e^x + c, h_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

对两边求导可得

$$\frac{1}{x} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_2'(x)}{Q_2(x)} - \frac{P_2(x)Q_2'(x)}{Q_2^2(x)}$$

即

$$Q_2(x)\left(Q_2(x) - xP_2'(x) - xP_2(x)\right) = xP_2(x)Q_2'(x)$$

若 $Q_2(x)$ 为常数或者有非零根，则与上述同理可导出矛盾；

不妨设 $Q_2(x) = bx^r, r \geqslant 1, b \neq 0$，则有

$$rP_2(x) = bx^r - xP_2'(x) - xP_2(x)$$

考虑 $P_2(x)$ 的次数 m，若 $m \geq r$，则左端次数为 m，右端次数为 $m+1$, 若 $m < r-1$，则左端次数为 m, 右端次数为 r

所以不妨设 $P_2(x) = ba_{r-1}x^{r-1} + \cdots + ba_s x^s, s \leqslant r-1$ 且 $a_s \neq 0, a_{s+1} = \cdots = a_0 = 0$

可得

$$h_2(x) = a_{r-1}x^{-1} + \cdots + a_s x^{s-r}$$
$$h_2(x) + h_2'(x) = \frac{1}{x}$$

左端最低次数为 $s-r-1$，最高次数为 -1，可得 $s-r-1 = -1 \Rightarrow s = r$ 矛盾，可得 $\int \frac{1}{x}e^x dx$ 为非初等函数，$\int \frac{1}{\ln x}dx$ 中令 $t = \ln x$ 可得 $\int \frac{1}{\ln x}dx = \int \frac{e^t}{t}dt$。

第 10 章 定积分

10.1 定积分概念与可积条件

1. 由于 f 的间断点都为有理数，而有理数集是可列集, 故由 Lebesgue 定理即证。
2. 解 $g \circ f$ 在 $[a,b]$ 上不一定可积, $g \circ f$ 不可积的例子: $g(x) = \operatorname{sgn} x, f(x) = R(x)$ (Riemann 函数) , $[a,b] = [0,1]$, 则 $g \circ f = D$ (Dirichlet 函数) 在 $[0,1]$ 上不可积; 而若 f, g 都是连续函数, 显然 $g \circ f \in R[a,b]$; $g \circ f$ 在 $[a,b]$ 上不一定一定不可积. $g \circ f$ 可积的例子: $f = D$ (Dirichlet 函数), $[a,b] = [0,1]$, 而
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ 0, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$
$g \circ f \equiv 0$, 显然在 $[a,b]$ 上可积.
3. 若 $f \in R[a,b]$, 则 $|f|, f^2 \in R[a,b]$ 由于若 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $|f|, f^2$ 也在 x_0 处连续, 故 $|f|, f^2$ 的不连续点集含于 f 的不连续点集中，也为零测集, 故由 Lebesgue 定理知可积.
若 $|f| \in R[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上不一定可积, 而 $f^2 \in R[a,b]$.f 不可积的例子:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ -1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$
而 $[a,b] = [0,1]$, 则 $|f| \equiv 1 \in R[a,b]$, 但类似 Dirichlet 函数, f 在 $[0,1]$ 上不可积; 由 f^2 的不连续点集等于 $|f|$ 的不连续点集及 Lebesgue 定理可证。
若 $f^2 \in R[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上不一定可积, 而 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积. f 不可积的例子: 同上.
4. 由于 $f \in R[a,b]$, 故 f 的不连续点集为零测集. 由于 g 与 f 在 $[a,b]$ 上仅在有限个点上取不同值, 而零测集并上有限点集仍为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $g \in R[a,b]$
5. $\int_a^b f = 0$. 若 $\int_a^b f > 0$, 可知 $\exists [c,d] \subset [a,b], \mu > 0, s.t. |f(x)| \geq \mu, \forall x \in [c,d]$, 只要取 $(\alpha, \beta) \subseteq [c,d] \subseteq [a,b]$ 即得矛盾. 类似可得若 $\int_a^b f < 0$ 时的矛盾 (或令 $g = -f$).
6. 由于若 g 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $f \circ g$ 也在 x_0 处连续, 故 $f \circ g$ 的不连续点集含于 g 的不连续点集中, 也为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $f \circ g \in R[a,b]$
7. 由于若 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $\frac{1}{f}$ 也在 x_0 处连续, 故 $\frac{1}{f}$ 的不连续点集含于 f 的不连续点集中, 也为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $\frac{1}{f} \in R[a,b]$
8. 由于 f 所有的间断点构成一个收敛数列, 即 f 的间断点可列, 其构成的点集为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $f \in R[a,b]$
9. 依题意知, 对 $\forall \varepsilon, \eta > 0, x_0 \in [a,b], \exists \delta_{x_0} > 0, \forall x \in O(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a,b]$, 成立 $|f(x)| < \frac{\eta}{2}$. 每个这样的开区间构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 由有限覆盖定理知存在有限个开区间覆盖住 $[a,b]$, 取 a, b 及这些开区间中落在区间 $[a,b]$ 内的端点作为分划 P 的分点。

由于

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right| \leq \left|f\left(x'\right)\right|+\left|f\left(x''\right)\right|<\eta, \forall x', x'' \in\left[x_{i-1}, x_i\right]$$

则所有小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅都小于 η, 显然振幅不小于 η 的所有小区间长度之和小于 ε, 故 $f \in R[a,b]$. 下证 $\int_a^b f dx=0$

由于 f 在区间 $[a,b]$ 的每一点的极限都存在且为零, 故对 $\forall x \in [a,b]$, 则 $f(x)=0$ 等价于 f 在 x 处连续, $f(x) \neq 0$ 等价于 f 不在 x 处连续. 由 Lebesgue 定理知 f 的不连续点为零测集, 故 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0. 故由本节练习题中第 4 题可知 $\int_a^b f dx=0$

10. Riemann 函数在区间 $[a,b]$ 的每一点的极限都存在且为 0, 故由上题可知其可积性.
11. 可以, 但没必要. 对于每个连续函数，其都是 Riemann 可积的，所以题目中的极限和 I 必然存在, 和 Riemann 积分值相同. 而对于非连续函数，按照定义, 将是不可积的. 这样的定义没有实际意义。
12. 设

$$S=\sum_{k=1}^n f\left(x_k\right) \sin \left(g\left(x_k\right) \Delta x_k\right), T=\sum_{k=1}^n f\left(x_k\right) g\left(x_k\right) \Delta x_k$$

显然只需证, 对于任意划分 P, 成立

$$\lim_{\|P\| \to 0} S=\lim_{\|P\| \to 0} T$$

设 $M>0, |f(x)|<M, |g(x)|<M, \forall x \in [a,b]$. 因此

$$\begin{aligned}
0 \leq |S-T| & =\left|\sum_{k=1}^n f\left(x_k\right)\left[\sin \left(g\left(x_k\right) \Delta x_k\right)-g\left(x_k\right) \Delta x_k\right]\right| \\
& <M \sum_{k=1}^n\left|\sin \left(g\left(x_k\right) \Delta x_k\right)-g\left(x_k\right) \Delta x_k\right| \\
& =\frac{M}{6} \sum_{k=1}^n\left|g^3\left(x_k\right)(\Delta x)^3+o\left((\Delta x)^3\right)\right| \\
& <\frac{\left(M^3+1\right) M}{6} \sum_{i=1}^n(\Delta x)^3 \\
& \leq \frac{\left(M^3+1\right) M\|P\|^2}{6} \sum_{i=1}^n \Delta x \\
& =\frac{(b-a)\left(M^3+1\right) M\|P\|^2}{6} \rightarrow 0, \|P\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

即证。

10.2 定积分的性质

1. 若 $f(a)=f(b)=0$, 令 $g(x)=f(x)$, 则 $\int_a^b f^2(x) \mathrm{d} x=0$, 故 f 几乎处处为 0, 又 f 连续, 故 $f \equiv 0$
2. 若 $f(a) \neq 0$ 或 $f(b) \neq 0$, 不妨 $f(a) \neq 0, f(b)=0$(其他情况同理), 则由f 连续性知

存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, a+\varepsilon]$. 令

$$g(x) = \begin{cases} \text{点}(a,0)\text{ 与点}(a+\varepsilon, f(a+\varepsilon))\text{ 线性连接}, & x \in [a, a+\varepsilon] \\ f(x), & x \in (a+\varepsilon, b] \end{cases}$$

$g(x)$ 满足题意, 且 $f(x)g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 由 fg 连续性知 $fg \equiv 0$ 且 $f(a+\varepsilon)g(a+\varepsilon) = f^2(a+\varepsilon) = 0$, 矛盾.

综上所述, $f \equiv 0$

3. 由于 $\int_a^b P^2(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ 且 $P^2(x)f(x)$ 非负, 故 $P^2(x)f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0. 若 $P \neq 0$, 则 $P^2(x)$ 的零点至多为有限个, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0 且 $\int_a^b f dx = 0$, 矛盾. 故 $P \equiv 0$
4. 令 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $\int_{-1}^1 f(x)[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$, 换元, $\int_{-1}^1 f(-x)[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$, 两式相加, $\int_{-1}^1 [f(x)+f(-x)]^2\mathrm{d}x = 0$, 由连续性知 $f(x)+f(-x) \equiv 0, \forall x \in [-1,1]$, 即 f 是 $[-1,1]$ 上的奇函数。
5. 令 $x = \cos t$, 由原书中例题 10.2 .4 即知极限为 0.
6. 推广：若 $f \in C[a,b], |f(x)| \leq 1, \forall x \in [a,b]$, 且只存在有限个 $x \in [a,b]$ 使得 $|f(x)| = 1$ 则 $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x = 0$

   Proof：对每个使得 $|f(x_k)| \geq 1$ 的 $x_k \in [a,b]\,(k \in \mathbb{N}_+)$, 不妨 $x_k \in (a,b), x_k = a$ 或 $x_k = b$ 时同理, 对任意充分小的 $\varepsilon > 0$, $0 < \left|\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f^n(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} 1\mathrm{d}x = 2\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0^+$ 对于任意一个不含 x_k 的区间 $[c,d]$, 由 f 连续性知 $\exists 0 < M < 1, s.t. |f(x)| \leq M < 1$, 故

$$0 < \left|\int_c^d f^n(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_c^d M^n\mathrm{d}x = M^n(d-c) \to 0, n \to \infty$$

   由于 x_k 只有有限多个, 故区间 $[x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon]$ 和 $[c,d]$ 只有有限多个, 由积分和极限的可加性即知结论成立。
7. 依题意得

$$\sin x_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

   而由原书中例题 10.2 .5 知

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

   故

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

   又 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], n = 1, 2, \cdots$, 故由函数 $\sin x$ 连续性知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$

8. 将积分拆成两部分分析

$$\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$$

对于第一个部分及 $h>0$, $\int_{0}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$

由积分第一中值定理及 f 连续性知

$$\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=f\left(\xi_h\right)\int_{0}^{\frac{1}{h}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{h^2}f\left(\xi_h\right)\to\frac{\pi}{2}f(0),h\to0^+,0<\xi_h<\frac{1}{h}$$

由 f 连续性知 $\exists M>0,s.t.|f(x)|\le M,\forall x\in[-1,1]$, 又 $h>0$, 则

$$\int_{\frac{1}{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\le M\int_{\frac{1}{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{h^2}\right)\to0,h\to0^+$$

同理对第二部分分析, 即得结论。

9. 由 f 连续性知 $\exists M>0,s.t.|f(x)|\le M,\forall x\in[0,1]$

(1)$0<\left|\int_{0}^{1}x^nf(x)\mathrm{d}x\right|\le M\int_{0}^{1}x^n\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\to0,n\to\infty$

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, $\int_{0}^{1}nx^nf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1-\varepsilon}nx^nf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^{1}nx^nf(x)\mathrm{d}x$

对于第一个部分

$$0<\left|\int_{0}^{1-\varepsilon}nx^nf(x)\mathrm{d}x\right|\le M\int_{0}^{1-\varepsilon}nx^n\mathrm{d}x\le\frac{Mn}{n+1}(1-\varepsilon)^n\to0,n\to\infty$$

对于第二个部分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}nx^nf(x)\mathrm{d}x=f\left(\xi_\varepsilon\right)\int_{1-\varepsilon}^{1}nx^n\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\left[1-(1-\varepsilon)^{n+1}\right]f\left(\xi_\varepsilon\right)\to f\left(\xi_\varepsilon\right),1-\varepsilon<\xi_\varepsilon<1$$

由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon\to0^+$, 由 f 连续性即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}nx^nf(x)\mathrm{d}x=f(1)$$

10. 依题意得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{a_n}x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{n+1}}{n+1}=2$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^{n+1}}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}=1$$

11. 由于

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2n+2)t}{2\sin t}\mathrm{d}t-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2nt}{2\sin t}\mathrm{d}t\\&=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+2)t-\cos2nt}{2\sin t}\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t\sin t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

故由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

10.3 变限积分与微积分基本定理

1. (1) 补充定义函数 $t\sin\dfrac{1}{t}$ 在 $t=0$ 处的函数值为 0, 则该函数在 $x=0$ 处附近连续

$$\left(\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)'\Bigg|_{x=0}=x\sin\frac{1}{x}\Bigg|_{x=0}=0$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt\right)=3x^2\dfrac{\sin x^3}{x^3}-2x\dfrac{\sin x^2}{x^2}$

(3) 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\arctan x)^2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{1+x^2}=0$$

(4) 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$$

2. 依题意知, 对每个 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 恒有

$$\left|\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\le M(\beta-\alpha)^\eta$$

两边令 $\beta\to\alpha$, 则 $|f(\alpha)|\le0$, 即 $f(\alpha)=0$, 由 α 任意性知 $f\equiv0$

3. 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 由连续性知 $F'(x)=f(x),x\in[a,b]$. 由于 $f(x)\le\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 即 $\left[F(x)e^{-x}\right]'\le0$, 即函数 $F(x)e^{-x}$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则 $F(x)e^{-x}\le F(a)e^{-a}=0,\forall x\in[a,b]$ 即 $f(x)\le F(x)\le0,\forall x\in[a,b]$

4. 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\sin x\mathrm{d}x,x\in[0,\pi]$, 则 $F(0)=F(\pi)=0$. 又 $0=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos t\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\sin t\cot t\mathrm{d}t=\int_0^\pi\cot t\mathrm{d}(F(t))=\frac{F(t)}{\tan t}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi F(t)\mathrm{d}(\cot t)=\int_0^\pi F(t)\csc^2 t\mathrm{d}t=0$, 由积分第一中值定理 (或另设函数, 由 Rolle 中值定理) 知, 存在 $\xi\in(0,\pi)$, s.t. $F(\xi)\csc^2\xi=0$, 即 $F(\xi)=0$ 由 Rolle 中值定理即得结论。

5. 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=g(x)+k(x-x_0)+y_0$, 其中 $g(x),k,x_0,y_0$ 待定, g 为周期函数. 假设 $f(x)=\sin x,\cos x,\sin^2 x$, 求出 $F(x)$ 后, 对照表达式, 可猜想 $x_0=0$. 设 f 周期为 T 猜想 g 的周期也为 T, 则令 $x=0,T$ 得 $0=g(0)+y_0$, $\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=g(0)+kT+y_0$, 可解得 $k=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$. 由于 f 的未知性且 g 依赖于 f, 故剩下的待定数和函数无法也无需明确求出, 直接把 $F(x)$ 写成 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)+\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 只需验证 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ 是周期函数. 事实上, $\displaystyle\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\frac{x+T}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=$

$$\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t+T)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

6. 将积分 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$ 视为关于 a 的函数, 由于其值与 a 无关, 故 $\left(\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x\right)' \equiv 0, \forall a \in (-\infty,+\infty)$, 即 $f(a+T) \equiv f(a), \forall a \in (-\infty,+\infty)$, 即证.
7. 固定 b, 则 $\int_a^{ab} f(x)dx = k($ 常数$)\forall a > 0$, 对 $\int_a^{ab} f(x)dx = k$ 求导 (关于a) 可得
$$bf(ab) = f(a)$$
取 $a = 1$ 得
$$f(b) = \frac{f(1)}{b}$$
8. 设 $g(t) = \int_t^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $g(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, g(b) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, g(a)g(b) \leq 0$ 由 g 连续性及介值定理即证。
注意到若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 ξ 即有可能只能为 a 或 b. 故可尝试 $f(x) = x, [a,b] = [-1,1]$, 由于
$$\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x,$$
故可解得$\xi = \pm 1$
9. 由均值不等式
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$$
10. 设
$$f(x) = \int_1^x a(t)c(t)\mathrm{d}t \int_1^x b(t)d(t)\mathrm{d}t - \int_1^x a(t)d(t) \int_1^x b(t)c(t)\mathrm{d}t$$
易知 $f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = 0$, 故 $f(x)$ 可被 $(x-1)^4$ 整除.
11. 由于 $g(x)$ 单调减少且 $g(0) = 0$, 故 $g(x) \leq 0, \forall x \in [0,+\infty)$, $\int_0^s g(x)\mathrm{d}x \leq 0, \forall s \in [0,+\infty)$ 在 $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边分别积分
$$\int_0^s g(x)\mathrm{d}x = \int_0^s \left(f(t)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^s \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geq 0, \forall s \in [0,+\infty)$$
故 $\int_0^s g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = 0, \int_0^s f(t)\mathrm{d}t = 0, f(s) = 0, \forall s \in [0,+\infty)$. 同理易证 $f(s) = 0, \forall s \in (-\infty,0]$, 故 $f \equiv 0$
12. 由于
$$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \frac{x}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [0,+\infty)$$
两边对 x 求导
$$2xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [0,+\infty)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = 0, \forall x \in (0,+\infty)$$
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = C\sqrt{x}, \forall x \in [0,+\infty), C \text{ 为常数}$$

两边对 x 求导

$$f(x)=\frac{C}{2\sqrt{x}},\forall x\in[0,+\infty),C\text{ 为常数}$$

又 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 故 $f\equiv 0$

10.4 定积分的计算

1. 令

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(\sec x), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{2}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases},g(x)=\begin{cases}\arctan(\sec x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\\ -\frac{\pi}{2}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

故 $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的原函数为 $f(x)$, 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的原函数为 $g(x)$
由 Newton-Leibniz 公式

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=f(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}+g(x)|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\\&=\frac{3\pi}{4}-\arctan\sqrt{2}\end{aligned}$$

2. (1) 由定积分的几何意义知 $\int_0^2|1-x|\mathrm{d}x=1$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x&=2\int_0^2\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\frac{2}{3}+2\ln 2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\cos t}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}(x<\xi<x+1)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{x}+\frac{\cos\xi}{x}}}\\&=1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x}\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(5) 交换积分次序 $\int_0^{\pi}\left(\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 2$

(6)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}(\text{ 命题10.4.6 结论}) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(b^2-a^2)\cos^2 x + a^2} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{(b^2-a^2)+a^2(\tan^2+1)} \\
&= \frac{2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x + \frac{b^2}{a^2}} \\
&= \frac{2}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{|ab|}
\end{aligned}$$

3. (1)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} &= \int_0^{\pi}\frac{(\pi - x)\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x + 2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1-x}{e^x+e^{1-x}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(e^x\right)}{e^{2x}+e} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{e}}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}\arctan\frac{e-1}{2\sqrt{e}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x\ln\left(1+e^x\right)\mathrm{d}x &= \int_{-2}^2\left[-x\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^2\left[x\ln\left(1+e^x\right)-x\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^2 x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\ln(1+\tan x)+\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\right\}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(6)$a=0,b\neq 0$ 时，$\displaystyle\int_0^\pi\frac{a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b^n}$

$a\neq 0,b=0$ 时，$\displaystyle\int_0^\pi\frac{a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a^n}$

$b\neq 0$ 且 $a\neq 0$ 时, 设 $k=\dfrac{b}{a}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{a^n\sin^2x+b^n\cos^2x}{a^{2n}\sin^2x+b^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^n\sin^2x+b^n\cos^2x}{a^{2n}\sin^2x+b^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x+k^n\cos^2x}{\sin^2x+k^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{a^n}+\frac{2k^n\left(1-k^n\right)}{a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{\sin^2x+k^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{a^n}+\frac{k^n\left(1-k^n\right)}{a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\sin^2x+k^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由对称性易知 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\sin^2x+k^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x=0$, 故由上题的 (6) 知

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{a^n\sin^2x+b^n\cos^2x}{a^{2n}\sin^2x+b^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{a^n}+\frac{k^n\left(1-k^n\right)}{a^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2x+k^{2n}\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{a^n}\left[1+\frac{\left(a^n-b^n\right)|a^n|\,b^n}{2a^n\,|b^n|}\right]\end{aligned}$$

4. (1) $\displaystyle I=\int_0^a\frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$

(2)$\displaystyle I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+f(a-x)}\right]\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$

5. (1) $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin(\pi-x))\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[xf(\sin x)+(\pi-x)f(\sin(\pi-x))]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$

(2) 令 $t=x^2$, 则

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}+\int_a^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}$$

令 $s=\dfrac{a^2}{t}$, 则

$$\int_a^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\int_1^a f\left(s+\frac{a^2}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{2s}$$

故

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}+\int_1^a f\left(s+\frac{a^2}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{2s}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

(3) 设 $\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi))\mathrm{d}x\\&=\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}[f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)+f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(2\pi-x))]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^{2n-1} x\cos(2n+1)x\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^{2n-1} x\cos(2n+1)x+\sin^{2n-1}(\pi-x)\cos(2n+1)(\pi-x)\right]\mathrm{d}x\\
=&\,0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \cos^{2n-1} x\sin(2n+1)x\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^{2n-1} x\sin(2n+1)x+\cos^{2n-1}(\pi-x)\sin(2n+1)(\pi-x)\right]\mathrm{d}x\\
=&\,0
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
I(m,n)&=\int_0^1 x^m\ln^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\int_0^1\ln^n x\mathrm{d}\left(x^{m+1}\right)\\
&=-\frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\mathrm{d}\left(\ln^n x\right)=-\frac{n}{m+1}I(m,n-1)\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right)I(m,0)\\
&=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

8.

$$
J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}
$$

9. 由于

$$
F(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^x t^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t
$$

故由 L'Hospital 法则

$$
F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left(-x^2\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0
$$

10. 设 $I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$, 则

$$
\begin{aligned}
I(n+1)-I(n)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{x}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(\text{ Dirichlet 积分})
\end{aligned}
$$

故 $I(n)=\dfrac{n\pi}{2}$

11. (1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t\xlongequal{s=t+\pi}f(x),\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 故 f 是周期为 π 的周期函数

(2) 由于 f 是周期为 π 的周期函数, 故对于 f 的最值, 只需讨论 f 在区间 $[0,\pi]$ 上的

最值. 由于 $f'(x)=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 故 f 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减，又 $f(0)=f(\pi)=1, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 故 f 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 1

12. 由积分第一中值定理知 $\exists\eta\in\left(\dfrac{7}{8},1\right)$, s.t. $\dfrac{1}{8}f(\eta)=\displaystyle\int_{\frac{7}{8}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}f(0)$, 由 Rolle 中值定理即证

10.5 对于教学的建议

10.5.1 第一组参考题

1. 取如下划分和介点集

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^m\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\eta_i\right)\Delta x_i\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^m+x_{i-1}^{m-1}x_i+\cdots+x_i^m}{m+1}\left(x_i-x_{i-1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{m+1}-x_{i-1}^{m+1}}{m+1}\\
&=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

2. (1)

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ -1, x\in[a,b]-\mathbb{Q}\end{cases}$$

(2) 反设 f 不可积, 则存在 $\varepsilon_0,\eta_0>0$, 对于 $[a,b]$ 的任意划分 P, 振幅不小于 η_0 的子区间长度之和不小于 ε_0(原书上提到的可积的第三充分必要条件). 由f 的介值性 (Darboux 定理) 知, f 在该子区间内至少存在符号相同的两点 x_1,x_2, 其函数值之差的绝对值大于 $\dfrac{\eta_0}{2}$. 则对于 $|f|$, 令 $\eta_1=\dfrac{\eta_0}{2},\varepsilon_1=|x_1-x_2|$, 则对于任意划分 T, 振幅不小于 η_1 的子区间长度之和不小于 ε_1. 这与 $|f|$ 可积矛盾。

3. 因为 $f,g\in R[a,b]$, 所以 $fg\in R[a,b]$. 故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 对于任意分划

$$P: a=x_0<\cdots<x_n=b$$

和任意点 $\xi_k\in\left[x_{k-1},x_k\right]$, 只要 $\|P\|<\delta_1$, 即有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right)g\left(\xi_k\right)\Delta x_k-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

设 $f(x)<M,\forall x\in[a,b]$. 由 $g\in R[a,b]$ 知, $\exists\delta_2>0$, 当 $\|P\|<\delta_2$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k<\varepsilon$$

故

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}^{\prime}\right) \Delta x_{k}-\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}\right) \Delta x_{k}\right| \\
&=\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_{i}\right)\left[g\left(\xi_{k}^{\prime}\right)-g\left(\xi_{k}\right)\right)\right] \Delta x_{k}| \\
&<M \sum_{i=1}^{n} \omega_{i}(g) \Delta x_{i} \\
&<M \varepsilon
\end{aligned}
$$

故 $\|P\|<\min \left\{\delta_{1}, \delta_{2}\right\}$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}^{\prime}\right) \Delta x_{k}-\int_{a}^{b} f(x) g(x) \mathrm{d} x\right| \\
\leq&\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}^{\prime}\right) \Delta x_{k}-\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}\right) \Delta x_{k}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}\right) \Delta x_{k}-\int_{a}^{b} f(x) g(x) \mathrm{d} x\right| \\
<&(M+1) \varepsilon
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim _{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k}\right) g\left(\xi_{k}^{\prime}\right) \Delta x_{k}=\int_{a}^{b} f(x) g(x) \mathrm{d} x
$$

4. 由原书中命题 8.4.3 知 $f_{-}^{\prime}(x)$ 和 $f_{+}^{\prime}(x)$ 在 (a, b) 上处处存在, 且均为单调递增函数. 由原书中命题 5.5.2 知单调函数的间断点至多为可列个, 故 $f_{-}^{\prime}(x), f_{+}^{\prime}(x) \in R[c, d]$ 对任意划分 $P: x_{0}=c<x_{1}<\cdots<x_{n}=d$, 由于

$$
f(d)-f(c)=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right]
$$

只证 $f_{+}^{\prime}(x)$ 的 Leibniz 公式, 另一个类似. 只需证明

$$
\sum_{k=1}^{n} m_{k} \Delta x_{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{n} M_{k} \Delta x_{k}
$$

其中 $m=\min\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_{k}} f_{+}^{\prime}(x)=f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right), M_{k}=\max\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_{k}} f_{+}^{\prime}(x)=f_{+}^{\prime}\left(x_{k}\right), k=1,2, \cdots, n$

然后两边取极限, 由定积分定义及夹逼定理即得结论。只证左边不等号成立, 右边类似. 只需证

$$
f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right) \Delta x_{k} \leq f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right), x_{k-1} \leq x \leq x_{k}
$$

即

$$
f\left(x_{k}\right)-f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right) x_{k} \geq f\left(x_{k-1}\right)-f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right) x_{k-1}
$$

只需证 $g(x)=f(x)-f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right)x$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 单调递增. 对 $\forall x_0\in[x_{k-1},x_k)$

$$\begin{aligned}
g_{+}^{\prime}(x)&=\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{g(x)-g\left(x_0\right)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0^{+}}f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right)\\
&=f_{+}^{\prime}\left(x_0\right)-f_{+}^{\prime}\left(x_{k-1}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

5. (1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个划分 $P:a=x_0<\cdots<x_n=b$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$. 现作阶梯函数如下:

$$g(x)=\begin{cases}f\left(x_{i-1}\right),x\in[x_{i-1},x_i]\\ f\left(x_{n-1}\right),x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$

则

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|\leq\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$$

(2)(3) 构造折线函数 (连续函数) 如下:

$$g(x)=f\left(x_{i-1}\right)+\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{x_i-x_{i-1}}\left(x-x_{i-1}\right),x\in[x_{i-1},x_i]$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$. 其余同 (1)

(4) 由 (3) 知, 存在连续函数 h, 使得

$$\int_a^b|f(x)-h(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

由 Weierstrass 第一逼近定理知, 存在多项式 g, 使得

$$|h(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

则

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leq\int_a^b|f(x)-h(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|h(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mathrm{d}x=\varepsilon$$

6. 由 $f\in R[a-\delta,b+\delta]$ 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上的连续函数 g, 使得

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

对 $|h|<\delta$, 我们将 $\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$ 分成三段进行研究

$$\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x,\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x,\int_a^b|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

第一段:

$$\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leq\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

第二段: 由 $g\in C[a-\delta,b+\delta]$ 知, g 在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上一致连续. 故对上述 $\varepsilon>$

$0, \exists \delta_1 > 0, |h| < \delta_1$ 时, 有

$$|g(x+h) - g(x)| < \varepsilon$$

故

$$\int_a^b |g(x+h) - g(x)| \mathrm{d}x < (b-a)\varepsilon$$

第三段:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon$$

综上,$|h| < \min\{\delta, \delta_1\}$ 时, 由绝对值不等式

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| \mathrm{d}x < (2+b-a)\varepsilon$$

即证。

7. 反设 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall [c,d] \subseteq [a,b]$, 使 $\omega_{f[c,d]} \geq \varepsilon_0$. 则对 f 的任意划分 $P: x_0 = a < \cdots < x_n = b$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i \geq \varepsilon_0(b-a)$$

这与 $f \in R[a,b]$ 矛盾.

8. 假设 $\exists (c,d) \subseteq [a,b]$, 使得 f 在该区间内没有连续点, 则 f 的不连续点不为零测集, 这与 $f \in R[a,b]$ 矛盾.

9. 必要性：假设 f 在连续点 x_0(不妨$x \in (a,b)$) 处不为 0, 则 $f(x_0) > 0$. 于是 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a,b]$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$$

即

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$$

故

$$0 = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \mathrm{d}x > \frac{1}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x_0) \mathrm{d}x > 0$$

矛盾。

充分性因为 $f \in R[a,b]$, 所以 f 几乎处处连续, 又 f 在所有的连续点处的值都等于 0, 故 f, π 乎处处为 0, 即 $\forall (c,d) \subseteq [a,b]$ 中, f 必有零点. 设 $P: x_0 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a,b]$ 的一个划分, 取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使$f(\xi_i) = 0$ 则

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

10. 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0. 由上题知

$$\int_a^b h(x) \mathrm{d}x = 0$$

则

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$$

11. 由 $f\in R[a,b]$ 知, f 有界, 设其下确界为 m, 上确界为 M. 因为 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 不妨 g 非负, 所以

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$
$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时, $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 结论显然成立.

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ne 0$ 时

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$$

若存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$, 或不存在这样的 x_1 或 x_2. 由于 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, 故由 Darboux 定理及确界定义知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若 f 至多只在端点处取得上或下确界, 不妨只考虑 $f(a)=m, f(b)=M$ 时, 其余情况类似.

当 $m<\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}<M$ 时. 由 Darboux 定理即证.

当 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=m=f(a)$ 时, $\int_a^b[f(x)-f(a)]g(x)\mathrm{d}x=0$, 因为 $[f(x)-f(a)]g(x)$ 非负, 故由上题可知 $[f(x)-f(a)]g(x)$ 几乎处处为 0, 又 $f(x)-f(a)$ 只在 $x=a$ 处为 0, 故 g 几乎处处为 0 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$, 这与假设矛盾综上, 总能找到 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

12.
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^n\right)}{n(1+x)}\\&=\frac{x^n}{n(1+x)}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{x^n}{n(1+x)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right)}{n(n+1)(1+x)^2}\\&=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n(n+1)}+\frac{2}{n(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

至此, 我们可以断定 $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{4}$. 下面证明确实是这样只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}}{\frac{1}{n^2}}=0$$

即证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4n(n+1)}-\frac{1}{4n^2}-\frac{2}{n(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x}{\frac{1}{n^2}}=0$$

即证

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{4(n+1)}-\frac{2n^2}{n^2+n}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\right]=0$$

即证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=0$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x&=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\\&\le(1-\varepsilon)^{n+1}+[1-(1-\varepsilon)]\\&=(1-\varepsilon)^{n+1}+\varepsilon\end{aligned}$$

故

$$0\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\le\varepsilon$$

由 ε 任意性知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=0$$

即证。

13. 对任给的 $\varepsilon>0$

$$\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t>\int_{b-\varepsilon}^b f^p(t)\mathrm{d}t>f^p(b-\varepsilon)\varepsilon\quad(1)$$

由于 $f(b-\varepsilon)>f(b-2\varepsilon)$, 故存在 $A>0$, 当 $p>A$ 时

$$\left(\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right)^p>\frac{b-a}{\varepsilon}$$

即 $f^p(b-\varepsilon)\varepsilon>(b-a)f^p(b-2\varepsilon)$, 代人式 (1), 得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t>f^p(b-2\varepsilon)$$

即 $f^p(x_p)>f^p(b-2\varepsilon)$. 由此得 $x_p>b-2\epsilon$, 因而

$$b-2\varepsilon<x_p<b$$

所以 $\lim\limits_{p\to+\infty}x_p=b$

14. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=A$. 由 f 连续知, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导. 观察 $f(x)+a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F'(x)+aF(x)$, 我们发现这很像微分学中一种常见中值定理证明题中的式子, 故我们作此处理

$$f(x)+a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F'(x)+aF(x)=\frac{\left(e^{ax}F(x)\right)'}{e^{ax}}=\frac{a\left(e^{ax}F(x)\right)'}{\left(e^{ax}\right)'}$$

由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{ax}F(x)\right)'}{\left(e^{ax}\right)'}=\frac{A}{a}$$

则

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+aF(x)) - \lim_{x\to+\infty} aF(x) = A - A = 0$$

15. 利用含参变量积分求导。

$$F(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(s)\cos(s-x)\mathrm{d}s$$

则

$$F'(x) = f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a + \int_{a+x}^{b+x} f(s)\sin(s-x)\mathrm{d}s$$

16. 设 $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
I(n) - I(n-2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

$n = 2k-1\,(k\in\mathbb{N}_+)$ 时

$$\begin{gathered}
I(2k-1) - I(2k-3) = \frac{1}{k-1}\sin(k-1)\pi = 0 \\
I(2k-3) - I(2k-5) = 0 \\
I(3) - I(1) = 0 \\
I(n) = I(2k-1) = I(1) = \frac{\pi}{2}
\end{gathered}$$

$n = 2k\,(k\in\mathbb{N}_+)$ 时

$$\begin{gathered}
I(2k) - I(2k-2) = \frac{2}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{2}{2k-1}(-1)^{k+1} \\
\cdots \\
I(4) - I(2) = \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{2}{3}(-1)^3 \\
I(n) = I(2k) = I(2) + \sum_{i=2}^{k}\frac{2}{2i-1}(-1)^{i+1} = 2 + \sum_{i=2}^{k}\frac{2}{2i-1}(-1)^{i+1}
\end{gathered}$$

17. (1)

$$\begin{aligned}
B(m,n) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^{m+k}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^m \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k(-x)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=1-x} \int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t \\
&= B(n,m)
\end{aligned}$$

(2) 由原书上例题 10.4.10 直接就能知道 $B(m,n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

18.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^m}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t^2}{x^m} \\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x^m} \\
=&\lim_{x\to 0^+}x^{2-m}\cos\frac{1}{x}-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x^m} \\
=&-2\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{mx^{m-1}} \\
=&\,0
\end{aligned}$$

19. 令 $t=\sin\theta$, 则

$$0<R^\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta<R^\lambda\int_0^1\frac{e^{-Rt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t<R^\lambda\int_0^1 e^{-Rt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{R^{1-\lambda}}\left(e^{-R}-1\right)$$

令 $R\to+\infty$, 夹逼即得.

20. 角

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x \\
=&\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}\left(f'(x)\right) \\
=&-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x \\
=&-\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}(f(x)) \\
=&f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

又

$$f(\pi)=2,\int_0^\pi\left(f(x)+f''(x)\right)\sin x\mathrm{d}x=5$$

故

$$f(0) = 3$$

21. 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \left[\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]$$

而由题目条件我们知道

$$\left[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right]^2 = \left[\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]$$

此时 Cauchy-Schwarz 不等式不等号取等，又 f 为连续函数，则

$$x\sqrt{f(x)} = C_1\sqrt{f(x)} \text{ 或} \sqrt{f(x)} = C_2 x\sqrt{f(x)}, \forall x \in [0,1], C_1, C_2 \text{ 为固定常数.}$$

因此只能 $\sqrt{f(x)} = 0, \forall x \in [0,1]$, 故 $f \equiv 0, \forall x \in [0,1]$, 这与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ 矛盾. 故不存在满足题意的函数 f

22. 设 $F(x) = e^{x-1}f(x)$. 由积分第一中值定理

$$F(1) = f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{x-1}f(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{1}{3}} F(x)\mathrm{d}x = F(\eta), \eta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

则由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0,1)$, 使得

$$F(\xi) = 0$$

即

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

23. 由于 f 于 $[0,1]$ 上非负连续, 且

$$f^2(t) \le 1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

故

$$f(t) \le \sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}$$

$$\frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}} \le 1$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}}\frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}x \le \int_0^x 1\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)}{\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}} \le x$$

$$\left.\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\right|_0^t \le x$$

$$\sqrt{1 + 2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le x + 1$$

则

$$f(t) \leq \sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s} \leq t+1$$

24. 由

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

知

$$f'(x) \geq 0$$

故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增 , $f(x) \geq f(1) = 1$. 则

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)} &\leq \frac{1}{x^2+1} \\
\int_1^x f(t)\mathrm{d}t &\leq \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
f(x)-f(1) &\leq \arctan x - \frac{\pi}{4} \\
f(x) &\leq \arctan x + 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

由于 f 单调递增且有上界, 故存在有限极限 $f(+\infty)$ 令上式 $x \to +\infty$, 则

$$f(+\infty) \leq \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

25.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = x\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0$$

10.5.2 第二组参考题

1. (1) 不妨设 f 在 $[0,+\infty)$ 单调递增. 令 $t = sx$, 则

$$F(x) = \int_0^1 f(sx)\mathrm{d}s$$

对 $\forall 0 \leq x \leq y$

$$F(x) = \int_0^1 f(sx)\mathrm{d}s \leq \int_0^1 f(sy)\mathrm{d}s = F(y)$$

故 F 单调递增，即和 f 有相同的单调性.

因为 f 单调, 所以 f 可积, 则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 又 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 只需再证 F 在 $x=0$ 处右连续. 由

$$f\left(0^+\right) \leq f(sx) \leq f(x), \forall x > 0, 0 < s \leq 1$$

知

$$F(0) = f\left(0^+\right) = \int_0^1 f\left(0^+\right)\mathrm{d}s \leq \int_0^1 f(sx)\mathrm{d}s = F(x) \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}s = f(x)$$

令 $x \to 0^+$, 则

$$F\left(0^+\right) = F(0)$$

综上所述,F 在 $[0,+\infty)$ 上为单调连续函数, 且与 f 具有相同的单调性.

(2) 当 f 有上界时, $f(+\infty)$ 存在且为有限数, 设为 A. 则对 $\forall x \in [0,+\infty)$, 有 $f(x) \leq A$.

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则对于充分大的 x, 成立

$$\begin{aligned}
|F(x) - A| &= \left|\int_0^1 (f(sx) - A)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_0^\varepsilon (f(sx) - A)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_\varepsilon^1 (f(sx) - A)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \int_0^\varepsilon |f(sx) - A|\mathrm{d}s + \int_\varepsilon^1 |f(sx) - A|\mathrm{d}s \\
&< |A|\varepsilon + \varepsilon(1-\varepsilon) \\
&< (|A| + 1)\varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$F(+\infty) = A$$

当 f 无上界时, $f(+\infty) = +\infty$. 则

$$F(x) = \int_0^1 f(sx)\mathrm{d}s \ge \int_{\frac{1}{2}}^1 f(sx)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}f(\xi x), \frac{1}{2} < \xi < 1$$

令 $x \to +\infty$, 则

$$F(+\infty) = +\infty$$

2. 由于对 $\forall \xi_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$, 成立

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} = I$$

故

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \sup_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} = I$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \inf_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} = I$$

又

$$\text{Darboux 上和} S(f) \le \sum_{i=1}^{n_k} \sup_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i}, \ \text{Darboux 下和} s(f) \ge \sum_{i=1}^{n_k} \inf_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i}$$

令 $k \to \infty$, 则

$$S(f) \le I \le s(f)$$

又 $s(f) \le S(f)$, 故 $S(f) = s(f) = I$, 即证.

3. 引理: 设函数 f 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 且 m 和 M 分别为其上确界与下确界, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[\alpha, \beta]$ 的一个划分 $\widetilde{P} = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_k\}$, 使得

$$f(\xi_i)(\xi - \xi_{i-1}) \begin{cases} \ge \left(M_i - \dfrac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_i - \xi_{i-1}), & i \text{ 为奇数}, \\ > M_i(\xi_i - \xi_{i-1}) - \dfrac{\varepsilon}{6N}, & i \text{ 为偶数} \end{cases}$$

其中

$$M_i=\sup\{f(x)|\xi_{i-1}\le x\le\xi_i\}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$
$$k\le 2N, N=\left[\frac{12(M-m)}{\varepsilon}\right]+1$$

这里 $[x]$ 为 x 的最大整数部分.

引理的证明: 记 $\xi_0=\alpha, g(x)=\sup\{f(t)|x\le t\le\beta\}(\alpha\le\beta)$, 则 g 在 $[\alpha,\beta]$ 上不增, 而且 $g(\alpha)=M$ 我们按以下办法, 考虑对 $[\alpha,\beta]$ 的划分.

第一步：若 $g(\beta)\ge M-\frac{\varepsilon}{12}$, 由于 $g(\beta)=f(\beta)$, 此时取 $\xi_1=\beta$, 便有

$$f(\xi_1)\ge M-\frac{\varepsilon}{12}>M_1-\frac{\varepsilon}{6}$$

令 $\widetilde{P}=\{\xi_0,\xi_1\}$, 就是所要求的划分. 若 $g(\beta)<M-\frac{\varepsilon}{12}$, 由于 $g(\alpha)=M$, 必存在 $\bar{\xi}_1\in[\alpha,\beta]$, 使得

$$g(x)\ge M-\frac{\varepsilon}{12},\quad \text{当}\alpha\le x\le\bar{\xi}_1$$
$$g(x)<M-\frac{\varepsilon}{12},\quad \text{当}\bar{\xi}_1\le x\le\beta$$

在上面的式子中, 只有当 $\bar{\xi}_1=\alpha$ (或$\bar{\xi}_1=\beta$) 时, 我们才考虑 “$x\le\bar{\xi}_1$” (或 “$\bar{\xi}_1\le x$”) 中的等号. 由 g 的定义可知, 当 $\bar{\xi}_1\le x\le\beta$ 时 $f(x)<M-\frac{\varepsilon}{12}$, 而且考虑到

$$g\left(\bar{\xi}_1-h\right)\ge M-\frac{\varepsilon}{12}$$

(当 $\bar{\xi}_1-h\le\alpha$ 时, 用α 代替$\bar{\xi}_1-h$), 其中 $h=\frac{\varepsilon}{12N(M-m+1)}$, 所以存在 $\bar{\xi}_1\in\left[\bar{\xi}_1-h,\bar{\xi}_1\right]$, 使得

$$f(\overline{\xi_1})\ge g(\overline{\xi_1}-h)-\frac{\varepsilon}{12}\ge g(\overline{\xi_1})-\frac{\varepsilon}{12}\ge M-\frac{\varepsilon}{6}$$

取

$$\xi_2=\begin{cases}\bar{\xi}_1+h, & \text{当}\bar{\xi}_1+h<\beta\\ \beta, & \text{当}\bar{\xi}_1+h\ge\beta\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}f(\xi_1)(\xi_1-\xi_0)&\ge\left(M_1-\frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_1-\xi_0)\\ f(\xi_2)(\xi_2-\xi_1)&=M_2(\xi_2-\xi_1)+[f(\xi_2)-M_2](\xi_2-\xi_1)\\ &\ge M_2(\xi_2-\xi_1)-2h(M-m)>M_2(\xi_2-\xi_1)-\frac{\varepsilon}{6N}\end{aligned}$$

如果 $\xi_2=\beta$, 把 $[\alpha,\beta]$ 划分成两个子区间即可. 如果 $\xi_2<\beta$, 再进行下一步.

第二步：对区间 $[\xi_2,\beta]$, 重复第一步的做法, 即若 $g(\beta)\ge g(\xi_2)-\frac{\varepsilon}{12}$, 取 $\xi_3=\beta$, 则对 $[\xi_2,\beta]$ 不需再细分; 若 $g(\beta)<g(\xi_2)-\frac{\varepsilon}{12}$, 可得 ξ_3,ξ_4, 使

$$f(\xi_3)(\xi_3-\xi_2)\ge\left(M_3-\frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_3-\xi_2)$$
$$f(\xi_4)(\xi_4-\xi_3)>M_4(\xi_4-\xi_3)-\frac{\varepsilon}{6N}$$

如果 $\xi_4<\beta$, 再按上述方法继续下去. 由于每次细分后, 有

$$M_3<M_1-\frac{\varepsilon}{12}$$
$$M_{2j+1}<M_{2j-1}-\frac{\varepsilon}{12}<\cdots<M_1-\frac{j\varepsilon}{12}$$

而且 $M_1 \leq M, M_{2j+1} \geq m$, 所以

$$m < M - \frac{j\varepsilon}{12}$$

即

$$j < \frac{12(M-m)}{\varepsilon} < N$$

这就是说, 经过有限步, 总存在 k, 使 $\xi_k = \beta$, 而且不管 k 是奇数还是偶数, 都有 $k \leq 2N$. 因此 $\widetilde{P} = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_k\}$ 就是所要求的一个划分. 由此, 引理获证. 下面讨论原题目的证明。设

$$m = \inf\{f(x) | a \leq x \leq b\}$$
$$M = \sup\{f(x) | a \leq x \leq b\}$$

依题意知对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a,b]$ 的任意分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 只要 $\|P\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

由此取定一个划分 P(即$\|P\| < \delta$), 记

$$m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

则 $m \leq m_i \leq M_i \leq M (i = 1, 2, \cdots, n)$. 根据引理可知, 对每个区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$, 都有一个划分 $P_i = \{\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \cdots, \xi_{i,k_i}\}$, 使得

$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) \geq \left(M_{i,j} - \frac{\varepsilon}{6(b-a)}\right)(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}), \quad j \text{ 为奇数}$$
$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) > M_{i,j}(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) - \frac{\varepsilon}{6Nn}, \quad j \text{ 为偶数},$$

其中

$$M_{i,j} = \sup\{f(x) | \xi_{i,j-1} \leq x \leq \xi_{i,j}\} (j = 1, 2, \cdots, k_i)$$
$$k_i \leq 2N, \quad N = \left[\frac{12(b-a)(M-m)}{\varepsilon}\right] + 1$$

然后, 再取划分 $P_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的并, 记作

$$P^* = \bigcup_{i=1}^{n} P_i = \{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_r\}$$

显然 P^* 是 $[a,b]$ 的一个划分, 而且 $r \leq 2Nn$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) \geq & \sum_{i=1}^{r} \sup\{f(x) | \eta_{i-1} \leq x \leq \eta_i\}(\eta_i - \eta_{i-1}) \\ & - \frac{\varepsilon}{6(b-1)} \sum_{i \text{ 为奇数}} (\eta_i - \eta_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{6Nn} \sum_{i \text{ 为偶数}} 1 \\ & \sum_{i=1}^{r} \sup\{f(x) | \eta_{i-1} \leq x \leq \eta_i\}(\eta_i - \eta_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{3} \\ & > S(f) - \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

又因为 $\|P^*\| \le \|P\| < \delta$, 所以

$$\left|\sum_{i=1}^{r} f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$S(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{r} f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $I \le S(f)$, 故 $0 \le S(f) - I < \varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $S(f) = I$ 对于确定的划分 P, 同理还可作出$[a,b]$ 的另一个新的划分, 使其相应的和数

$$\sum_{i=1}^{s} f(\zeta_i - \zeta_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{s} \inf\{f(x)|\zeta_{i-1} \le x \le \zeta_i\}(\zeta_i - \zeta_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{3} < s(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

因此又有 $0 \le I - s(f) < \varepsilon$, 故 $s(f) = I$. 综上所述, $S(f) = s(f) = I$, 即证.

4. 不妨设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 否则令 $G(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$. 由 $f \in R[a,b]$ 知 $\forall\varepsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 $f_\varepsilon(x)$, s.t. $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. 由于 g 以 T 为周期且在 $[0,T]$ 上可积, 所以 $\exists M > 0, |g(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$, 故

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)g(px)\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]\,g(px)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,|g(px)|\mathrm{d}x + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)\mathrm{d}x\right| \\
&\le M\varepsilon + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

只需证 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)\mathrm{d}x = 0$, 进一步地, 只需证 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b g(px)\mathrm{d}x = 0$ 即可对 $\forall p > 0$, 设 $pb = pa + n(p)T + l(p), n(p) \in \mathbb{N}, 0 \le l(p) < T$, 则 $\int_a^b g(px)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_{pa}^{pb} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_{pa}^{pa+n(p)T+l(p)} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{n(p)T+l(p)} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{l(p)} g(x)\mathrm{d}x < \frac{MT}{p} \to 0, p \to +\infty$, 即证.

5. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 要证 $a_0 = (n+1)^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 由假设 $\frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1} = 0 (k = 1,2,\cdots,n)$, 对上式的左边通分，得

$$\frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

其中 Q 是 k 的 n 次多项式, 且以 $k = 1,2,\cdots,n$ 为零点, 因此可把 $Q(k)$ 写作 $Q(k) = c(k-1)\cdots(k-n)$ 在等式

$$\frac{c(k-1)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} = \frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1}$$

的两边乘 $k+1$ 后. 再令 $k = -1$, 即得 $a_0 = c(-1)^n(n+1)$. 再在等式

$$\int_0^1 f(x)x^k dx = \frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

中令 $k=0$, 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = c\frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{a_0}{(n+1)^2}$$

于是 $a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

6. $n=0$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=0$

$n\geq 1$ 时, 先求

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x e^{inx}\mathrm{d}x &= \int\left(e^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}\sin x\right)^n e^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\\
&= \int\left[\left(e^{\mathrm{i}x}-\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)e^{\mathrm{i}x}\right]^n\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2^n}\int\left(e^{\mathrm{i}x}+1\right)^n\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2^n}\int\left[1+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}e^{2\mathrm{i}kx}\right]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2^n}\left[x+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{e^{2\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}k}\right]\\
&= \frac{1}{2^n}\left[x+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{\sin 2kx-\mathrm{i}\cos 2kx}{2k}\right]
\end{aligned}$$

故 $n\geq 1$ 时

$$\int\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(\int\cos^n xe^{\mathrm{i}n\,x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2^n}\left[x+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{\sin 2kx}{2k}\right]$$

$$\int\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int\cos^n xe^{\mathrm{i}n\,x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2^n}\left[x-\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{\cos 2kx}{2k}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\left[\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2k+1}\frac{1}{2k+1}\right]$$

7. 令 $t=\frac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t, \forall A>1$$

对于第一个部分，由积分第二中值定理 $\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^{\xi_A}\cos^n t\mathrm{d}t, 1\leq\xi_A\leq A$, 故对任意给定的 $A>1$, 由 10.2 .2 练习题 5 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=0$, 故对 $\forall\varepsilon>0, n$ 充分大时，成立 $\left|\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

对于第二个部分, 由于 $\left|\frac{\cos^n t}{t^2}\right|\leq\frac{1}{t^2}$, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t$ 收敛, 则

对上述 $\varepsilon>0, \exists A_0>1, \forall A>A_0, \left|\int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

综上所述，取定一个 $A>A_0$，则 n 充分大时，$\left|\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon$ 即证。

8.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\mathrm{d}x &= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}x^3+x^2-1}{(x^4+1)(x^2-1)}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{y=\sqrt{2}x} 16\int_0^1 \frac{y^3+y^2-2}{(y^4+4)(y^2-2)}\mathrm{d}y \\
&= 16\int_0^1 \frac{(y-1)\left(y^2+2y+2\right)}{(y^2+2y+2)(y^2-2y+2)(y^2-2)}\mathrm{d}y \\
&= 16\int_0^1 \frac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}\mathrm{d}y \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

第 11 章 积分学的应用

11.1 积分学在几何计算中的应用

11.1.1 练习题

1.

$$A\left(x^2+\frac{2B}{A}xy\right)+Cy^2=1$$
$$A\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+\left(c-\frac{B^2}{A}\right)y^2=1$$

令

$$\sqrt{\Delta}\left(x+\frac{B}{A}y\right)=\cos t$$
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{A}}\cdot y=\sin t$$

则

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{\sqrt{A}}-\dfrac{B}{\sqrt{A}}\dfrac{\sin t}{\sqrt{\Delta}} \\ y=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{\Delta}}\sin t \end{cases}$$

故

$$s=\int_0^{2\pi}xdy=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t}{\sqrt{\Delta}}dtx=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

2. 设夹角为 θ_1,θ_2 的两条线段为 l_1,l_2，则面积为

$$S=\frac{1}{2}\left(\int_{l_1}(xdy-ydx)+\int_{l_2}(xdy-ydx)+\int_{\theta_1}^{\theta_2}(xdy-ydx)\right)$$

直接计算可得

$$\int_{l_1}(xdy-ydx)=\int_{l_2}(xdy-ydx)=0$$

则

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(xdy-ydx)$$

又 $x=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta$ 代入上式可得

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)d\theta$$

3. 将公共区域分成一个等边三角形和三个等大的小弓形，则

$$S_\Delta=\frac{1}{2}r\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$
$$S_{弓}=\frac{\pi r^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$
$$S=S_\Delta+3S_{弓}=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

4. 设腰长为 a，底边为 b，则 $2a+b=l$ 为常数，则旋转体高 x_c 和底面积为 S，分别为

$$x_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$$
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\cdot b$$

则由命题 11.1.3 可得体积为

$$\begin{aligned}V&=2\pi x_c S\\&=2\pi\frac{1}{4}\left(a^2-\frac{b^2}{4}\right)\cdot b\\&=\frac{\pi}{8}\left(4a^2-b^2\right)\cdot b\\&=\frac{\pi}{8}l(l-2b)\cdot b\\&=\frac{\pi}{16}l\cdot(l-2b)2b\\&\leqslant\frac{\pi}{16}l\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{\pi l^3}{64}\end{aligned}$$

当 $b=\dfrac{l}{4}$ 时等号成立

5. 设椭圆为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则椭圆周长为

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(d\left(a\cos\theta\right)\right)^2+\left(d(b\sin\theta)\right)^2}\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\theta d\theta)^2+(b\cos\theta d\theta)^2}\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta d\theta}\end{aligned}$$

一周期曲线 $y=c\sin(x/a)$ 的长度为

$$\begin{aligned}&\int_0^{2a\pi}\sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^2}dx\\=&\int_0^{2a\pi}\sqrt{a^2+c^2\cos^2\frac{x}{a}}d\left(\frac{x}{a}\right)\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2\cos^2\frac{x}{a}}d\frac{x}{a}\\=&\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+c^2\cos^2\theta}d\theta\end{aligned}$$

故当 $c^2=b^2-a^2$ 时上述两者长度相等，即椭圆滚了一圈，恰好也在曲线上滚过了一个周期。

6. 弧长为 s，即角度为 s 设弧的起点对应的角度为 θ_1，则

$$
\begin{aligned}
A+B&=\int_{\theta_1}^{\theta_1+s} y\cdot(-dx)+\int_{\theta_1}^{\theta+s} xdy\\
&=\int_{\theta_1}^{\theta_1+s}(xdy-ydx)\\
&=2\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1+s}(xdy-ydx)\\
2\cdot S_{扇形}&=2\cdot\frac{1}{2}s=s
\end{aligned}
$$

其中 $S_{扇形}$ 是弧长 s 对映的扇形面积。

7. 焦点为 $(\frac{1}{2},0$，设过焦点的直线为 $x-\frac{1}{2}=ky$，设此直线与原抛物线的交点为 y_1,y_2，则围成的面积为

$$S=\int_{y_1}^{y_2}\left[\left(ky+\frac{1}{2}\right)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\frac{k}{2}(y_2-y_1)\cdot(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1)-\frac{1}{6}(y_2-y_1)\left(y_2^2+y_1y_2+y_1^2\right)$$

由 $y^2=2x$ 可得

$$y^2=2\left(ky+\frac{1}{2}\right)=2ky+1$$

则韦达定理可得

$$
\begin{aligned}
y_1+y_2&=2k\\
y_1\cdot y_2&=-1
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{6}(y_2-y_1)\cdot\left[3k(y_2+y_1)+3-\left(y_2^2+y_1y_2+y_1^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\sqrt{k^2+1}\cdot\left[3k\cdot 2k+3-\left(4k^2+1\right)\right]\\
&=\frac{1}{3}\sqrt{k^2+1}\cdot\left(2k^2+2\right)\\
&=\frac{2}{3}\cdot\left(k^2+1\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

故 $S_{min}=\frac{2}{3}$

8. 公共区域在第一象限，可将此区域分为一个扇形 ($x^2+y^2\leqslant 4$ 对应的扇形)，还余下两个小弓形，则

$$S_{扇}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\cdot 2\cdot 2=\frac{\pi}{3}$$

$$S_{弓}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 2-\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$

故总面积为

$$S=S_{扇}+2S_{弓}=\frac{5}{3}\pi-2\sqrt{3}$$

9. $y=\sqrt{100-\frac{25}{4}x^2}$,$S_\Delta=\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}y^2=25-\frac{25}{16}x^2$, 故体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-4}^{4}\left(25-\frac{25}{16}x^2\right)dx\\&=2\int_{0}^{4}\left(25-\frac{25}{16}x^2\right)dx\\&=2\cdot\left(100-\frac{25}{16}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4\right)\\&=2\left(100-\frac{100}{3}\right)\\&=\frac{400}{3}\end{aligned}$$

10. $x^2+y^2=a^2$，$S=4\cdot y^2=4\left(a^2-x^2\right)$ 则体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-a}^{a}4\left(a^2-x^2\right)dx\\&=8\int_{0}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx\\&=8\cdot\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{16}{3}a^3\end{aligned}$$

11.2 不等式

11.2.1 练习题

1. $\forall 0\leq x_1<x_2<x_3\in[0,+\infty)$ 有

$$\begin{aligned}\frac{F(x_3)-F(x_2)}{x_3-x_2}&=\frac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3}f(t)dt\geqslant f(x_2)\\\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}&=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\leqslant f(x_2)\\\Rightarrow\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}&\leq\frac{F(x_3)-F(x_2)}{x_3-x_2}\end{aligned}$$

2. 由下凸函数的积分不等式可得

$$\begin{aligned}&\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\\=&\lambda\int_0^{x_1}f(t)\frac{dt}{x_1}+(1-\lambda)\cdot\int_0^{x_2}f(t)\frac{dt}{x_2}\\\geqslant&f\left(\int_0^{x_1}\frac{\lambda}{x_1}tdt+\int_0^{x_2}\frac{1-\lambda}{x_2}tdt\right)\\=&f\left(\frac{\lambda x_1}{2}+\frac{(1-\lambda)}{2}x_2\right)\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}{2}\right)&\geqslant\frac{1}{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\int_0^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}f(t)dt\\&=F\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\end{aligned}$$

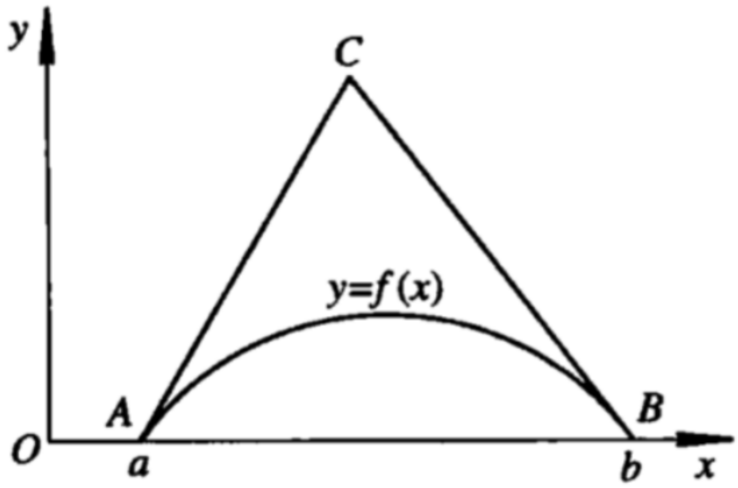

图 11.1

可得

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\geqslant F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

故 F 是下凸函数

3. 实际上我们有设 $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的非负上凸函数, 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\max_{[a,b]}\{f(x)\}$$

证明 不妨设 $x_0\in(a,b)$ 且 $f(x_0)=\max\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, 则由题设知

$$f(x)\geqslant\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}(x-b)+f(b)\quad(x_0\leqslant x\leqslant b)$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}\left(-\frac{(x_0-b)^2}{2}\right)+f(b)(b-x_0)\\&=\frac{f(x_0)+f(b)}{2}(b-x_0)\geqslant\frac{f(x_0)}{2}(b-x_0)\end{aligned}$$

类似地可得 $\int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(x_0)(x_0-a)/2$. 两式相加即得所证.

4. 按题意, $y=f(x)$ 的图像如图 11.1 所示, 因此 $0\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\triangle ABC$ 的面积. 写出切线 AC,BC 的方程, 即可写出 C 点的坐标, 从而可算出 $\triangle ABC$ 的面积, 即得所要的不等式。

5. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(t)dt+1\\&\geqslant\int_0^x(-1)dt+1\\&=1-x\end{aligned}$$

当 $1\leqslant x\leq 2$ 时，有

$$f(x)=f(2)-\int_x^2 f'(t)dt\geq f(2)-\int_x^2 1dt=x-1$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\
&\geqslant \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

可得 $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \geqslant 1$

6. 由柯西不等式可得

$$
\text{左边} \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right)^2 = (b-a)^2 = \text{右边}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_a^b f(x)\cos kx dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx dx\right)^2 \\
\leq &\left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}|\cos kx| dx\right)^2 + \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}|\sin kx| dx\right)^2 \\
\leq &\left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \int_a^b f(x)\cos^2 kx dx + \left(\int_a^b f(x)dx\right)\int_a^b f(x)\sin^2 kx dx \\
= &\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = 1
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_a^x f'(t)dt \\
f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \leq \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dt \\
&= \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot (x-a)
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &\leqslant \int_a^b \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot (x-a) dx \\
&= \int_a^b \int_a^x (f'(t))^2 dt d\frac{(x-a)^2}{2} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \cdot (x-a)^2 dx \\
&= \text{右边}
\end{aligned}
$$

9. 令 $F(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)dt$ 则

$$
F'(t) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt - f^3(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\right)
$$

令 $g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$ 则

$$
g'(x) = 2f(x)\left(1 - f'(x)\right) > 0
$$

故 $F'(t) > F'(0) = 0$ 则 $F(1) > F(0) = 0$，即

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

10. (1) 令 $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$，则 g 和 f 互为反函数，则由图像可得

$$(a-b)\cdot b \leqslant \int_0^{a-1} f dx + \int_1^b g(x)dx$$

化简得

$$e^{a-1} + b\ln b \geqslant ab$$

(2)(法一)(反证) 假设 $\int_0^{\pi}(f(x)-\sin x)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4}$ 与 $\int_0^{\pi}(f(x)-\cos x)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4}$ 同时成立，则

$$\begin{aligned}
3 < \pi &= \left(x + \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \int_0^{\pi}(1-\sin 2x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\left(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin 2x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\sin x - \cos x)^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\pi}(|f(x)-\sin x| + |f(x)-\cos x|)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}(f(x)-\sin x)^2\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}(f(x)-\cos x)^2\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} 2|f(x)-\sin x||f(x)-\cos x|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\left[\int_0^{\pi}(f(x)-\sin x)^2 + \int_0^{\pi}(f(x)-\cos x)^2\mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant 2\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right) = 3
\end{aligned}$$

矛盾. 故式中两个不等式不能同时成立。

(法二)

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &\geqslant \sqrt{\int_0^{\pi}|f(x)-\sin x|^2dx} + \sqrt{\int_0^{\pi}|f(x)-\cos x|^2dx} \\
&\geqslant \sqrt{\int_0^{\pi}|\cos x - \sin x|^2dx} = \sqrt{\int_0^{\pi}(1-\sin 2x)dx} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

得 $\sqrt{3} \geqslant \sqrt{\pi}$，矛盾，故式中两个不等式不能同时成立。

11.3 积分估计与近似计算

11.3.1 练习题

1. (1)

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x^2}{2x}dx^2$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)dt > 0$$

(2)

$$\text{中间} > \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}}dx = \frac{1}{20\sqrt[3]{2}} = \text{左边}$$

$$\text{中间} < \int_0^1 x^{19}dx = \frac{1}{20} = \text{右边}$$

(3) 根据第二版勘误应该证 $\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx < \frac{n^2\pi^2}{4}$。下证：$\frac{\sin nx}{\sin x} \leq n, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$，即证 $f(x) = n\sin x - \sin nx \geqslant 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= n\cos x - n\cos nx \\ &= n\cdot(-2)\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(1-n)x}{2} \\ &= 2n\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(n-1)x}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{(n+1)x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{(n-1)x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

故 $f'(x) \geqslant 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$，$f(x) \geqslant 0$，故

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx \\ =& \int_0^{\frac{\pi}{2n}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx \\ <& \int_0^{\frac{\pi}{2n}} xn^4 dx + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{2}{\pi x}\right)^4 dx \\ =& \frac{n\pi^2}{4} \end{aligned}$$

(4) 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有

$$x > \sin x > \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

故

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

故

$$0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)dx = \frac{\pi^3}{144}$$

(5)

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{100}dx = 0.01\cdot\left(1-e^{-100}\right) < 0.01$$

$$\begin{aligned} \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx > \int_0^{99} \frac{e^{-x}}{x+100}dx \int_0^{99} \frac{e^{-x}}{199}dx & \\ &= \frac{1}{199}\cdot(1-e^{-99}) \\ &> 0.005 \end{aligned}$$

(6)

$$中间 > \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = \frac{2}{9}\pi^2 = 左边$$

由 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$，$\frac{1}{\sin x} < \frac{\pi}{2x}$ 可得

$$中间 < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi dx = \frac{\pi^2}{3} = 右边$$

2. 设 $f(\xi) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx$ 则

$$f(0) = f(\xi) - \int_0^{\xi} f'(t)dt$$

故

$$\begin{aligned}|f(0)| &\leqslant |f(\xi)| + \int_0^{\xi} \left|f'(t)\right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a \left|f'(x)\right| dx\end{aligned}$$

3. (i) 若 f 不变号，则 $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \int_0^1 |f(x)|dx$，故

$$\max\left\{\int_0^1 \left|f'(x)\right| dx, \left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\} \geqslant \int_0^1 |f(x)|dx$$

(ii) 若 f 在 $[0,1]$ 上变号，则 $\exists x_0 \in [0,1], f(x_0) = 0$ 故

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \geqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| = |f(x)|$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|dx &\leqslant \int_0^1\int_0^1 |f'(y)|dydx \\ &= \int_0^1 \left|f'(y)\right| dy \\ &\leqslant \max\left\{\int_0^1 \left|f'(x)\right| dx, \left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\}\end{aligned}$$

4. (1)

$$\begin{cases} F(a) = F(x) + F'(x)(a-x) + \dfrac{F''(\xi)}{2}(a-x)^2 & (i) \\ F(b) = F(x) + F'(x)(b-x) + \dfrac{F''(\eta)}{2}(b-x)^2 & (ii) \end{cases}$$

$(b-x)\cdot(i) - (a-x)\cdot(ii)$ 可得

$$(a-b)F(x) = \frac{F''(\xi)}{2}(a-x)^2(b-x) + \frac{F''(\eta)}{2}(b-x)^2(a-x)$$

则

$$|b-a||F(x)| \leq \frac{M}{2}\left[(x-a)^2(b-x) + (b-x)^2(x-a)\right]$$

即

$$|F(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leqslant \frac{M(b-a)^2}{8}$$

(2) 已知 $F(a) = F'(a) = F(b) = F'(b) = 0$，$\left|F''(x)\right| \leqslant M$，证 $|F(x)| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{16}$，

设 $F(x)$ 在 $c \in [a,b]$ 取得最大值，若 $c = a$ 或 b，则 $F'(c) = 0$，若 $c \in (a,b)$，则 $F'(c) = 0$。

若 $c \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$，则

$$\begin{aligned}
|F(c)| &= \left|\int_a^c F'(x)dx\right| \\
&= \left|\int_a^c F'(x)d\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right| \\
&= \left|\int_a^c F''(x)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)dx\right| \\
&\leqslant \int_a^c \left|F''(x)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right|dx \\
&= M\int_a^c \left|x - \frac{a+c}{2}\right|dx \\
&= \frac{(c-a)^2 M}{4} \\
&\leqslant \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 M}{4} \\
&= \frac{(b-a)^2 M}{16}
\end{aligned}$$

若 $c \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right]$，同理可得。设 $F(d) = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$，同理可证

$$|F(d)| \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{16}$$

故

$$\begin{aligned}
|F(x)| &\leqslant \max\{|F(c)|, |F(d)|\} \\
&\leq \frac{(b-a)^2 M}{16}
\end{aligned}$$

5.

$$\text{中间} \geqslant \int_0^n \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}n \cdot \sqrt{n} = \text{左边}$$

又

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \int_0^n \sqrt{x}dx \\
&= \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \sqrt{x}dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (\sqrt{k} - \sqrt{x})dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{k-x}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}dx \\
&< \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{k-x}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (k-x)\cdot(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})dx \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = \frac{\sqrt{n}}{2}
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2n}{3}\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n}}{2}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

6. 由

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)dx\right|\\&=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right|\\&\leqslant\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx\right|+\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{a+b} f(x)dx\right|&=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(\theta x)(x-a)dx\right|\\&\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}} M\cdot(x-a)dx=\frac{M}{8}(b-a)^2\end{aligned}$$

类似可得

$$\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2$$

7. 由例题 11.3.4 可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\frac{(b-a)}{2}\cdot[f(a)+f(b)]-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3\\&=-\frac{1}{12}f''(\xi)\cdot(b-a)^3\end{aligned}$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{12}(b-a)^3$$

8. 由

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx&=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a)\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2}\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}f''(x)dx\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''\left(\xi_1\right)\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}dx\qquad(1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\cdot d(x-b)\\
&= -f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a-b}{2} - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f'(x)\cdot(x-b)dx\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2} - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f'(x)\cdot d\frac{(x-b)^2}{2}\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8} + f''\left(\xi_2\right)\cdot\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\frac{(x-b)^2}{2}dx \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1)+(2) 得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a) + f'\left(\xi_1\right)\cdot\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}dx\\
&+ f''\left(\xi_2\right)\cdot\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\frac{(x-b)^2}{2}dx\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \left(f''\left(\xi_1\right)+f''\left(\xi_2\right)\right)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}
\end{aligned}
$$

则

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}
$$

9. 由 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ 故 $\exists x_0 \in [-a,a]$ 使得 $f\left(x_0\right)=0$ 做如下分解

$$
\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx + \int_{-1}^{-a} f(x)dx
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\int_a^1 f(x)dx| = |\int_a^1 f\left(x_0\right)+f'(\xi)\left(x-x_0\right)dx| \le M\int_a^1\left(x-x_0\right)dx = M\cdot\frac{\left(1-x_0\right)^2-\left(a-x_0\right)^2}{2}\\
&\left|\int_{-1}^{-a} f(x)dx\right| \le \left|\int_{-1}^{-a} f\left(x_0\right)+f'(\eta)\left(x-x_0\right)dx\right| \leqslant M\int_{-1}^{-a}\left(x_0-x\right)dx = m\cdot\frac{\left(1+x_0\right)^2-\left(x_0+a\right)^2}{2}\\
&\int_{-1}^{1} f(x)dx| \le |\int_a^1 f(x)dx| + |\int_{-1}^{-a} f(x)dx| \le M\cdot\frac{\left(1-x_0\right)^2-\left(a-x_0\right)^2+\left(1+x_0\right)^2-\left(x_0+a\right)^2}{2}\\
&= M\left(1-a^2\right)
\end{aligned}
$$

10. $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$ 则

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\\
\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| &\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dx\\
&\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M\cdot\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\\
&= \frac{M}{2n^2}
\end{aligned}
$$

故

$$\left|\int_0^1 f dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}$$

11.

$$A_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n}\right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$$

设 $|f'(x)| \leqslant M$ 则

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = -\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f d\left(\frac{2k-1}{2n}-x\right)$$

$$= f\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2n-1}{2n}\right)f'(x)dx$$

$$= \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)dx$$

$$\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)dx\right| \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M\cdot\left|x-\frac{2k-1}{2n}\right|dx$$

$$= \frac{M}{4n^2}$$

又

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot f'dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'dx$$

$$= f'(\xi_k)\cdot\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)dx + f'(\xi_k')\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)dx$$

$$= -\frac{f'(\xi_k)}{8n^2} + \frac{f'(\xi_k')}{8n^2}$$

故

$$nA_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f'(\xi_k)}{8n} - \frac{f'(\xi_k')}{8n}\right) + \frac{f(0)-f(1)}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} nA_n = \frac{1}{8}\left(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx\right) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$$

12.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)$$

又

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right) \\
&= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} f(x)d\left(x-\frac{k-1}{n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d\left(x-\frac{k}{n}\right) \\
&= -\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} f'(x)\cdot\left(x-\frac{k-1}{n}\right)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\cdot\left(x-\frac{k}{n}\right)dx\right] + f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{n}} f''(x)\cdot\frac{(x-\frac{k-1}{n})^2}{2}dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f''(x)\cdot\frac{(x-\frac{k}{n})^2}{2}dx \\
&= \frac{1}{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f''(\xi_k)\frac{1}{48n^3} + f''(\xi_k')\cdot\frac{1}{48n^3}
\end{aligned}
$$

故

$$
n^2B_n = \sum_{k=1}^{n}\left(f''(\xi_k)\frac{1}{48n} + f''(\xi_k')\frac{1}{48n}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^2B_n &= \frac{1}{48}\left(f'(1)-f'(0)\right) + \frac{1}{48}\cdot\left(f'(1)-f'(0)\right) \\
&= \frac{1}{24}\left(f'(1)-f'(0)\right)
\end{aligned}
$$

11.4 积分学在分析中的其他应用

11.4.1 练习题

1. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \arctan x\Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+(i-1)}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i-1}{n}}}\frac{1}{n} \\
&= \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{2}-2
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^a\right]^{b+1}}{\left[\sum_{k=1}^{n}(2k)^b\right]^{a+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2k+1}{n}\right)^a \cdot \frac{2}{n}\right]^{b+1}}{\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^b \cdot \frac{2}{n}\right]^{a+1}} \\
& \frac{\left[\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 x^a dx\right]^{b+1}}{\left[\frac{1}{2}\int_0^2 x^b dx\right]^{a+1}} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{a+1}2^a\right]^{b+1}}{\left[\frac{1}{b+1}\cdot 2^b\right]^{a+1}} \\
&= 2^{a-b}\cdot\frac{(b+1)^{a+1}}{(a+1)^{b+1}}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}} \\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}} \\
&= e^{\int_0^\pi \ln(2+x)dx} \\
&= e^{\ln(2+\pi)\cdot\pi-\int_0^\pi x\frac{1}{x+2}dx} \\
&= e^{(\pi+2)\cdot\ln(\pi+2)-(\pi+2\ln 2)}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+(k-1))} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k-1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}} \\
&= e^{\int_0^1\ln(1+x)dx} \\
&= e^{\int_1^2\ln x dx} \\
&= e^{2\ln 2-\int_1^2 1dx} \\
&= e^{2\ln 2-1}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(x+\frac{k-1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 (x+t)dt = \left.\frac{(x+t)^2}{2}\right|_0^1 \\
&= \frac{(x+1)^2}{2}-\frac{x^2}{2} \\
&= \frac{2x+1}{2}
\end{aligned}
$$

2. 根据 $\sqrt{x}$ 的图像得

$$
\begin{aligned}
\text{左边} < \int_1^{n+1}\sqrt{x}dx < \frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1} \\
= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}n\cdot\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

令 $A_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3},\forall A\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 则存在 N，$n>N$ 时有 $<A_n<A$，故

$$
\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to+\infty}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right] \\
&= \exp\left[\int_0^1 \ln f(x)dx\right]
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\ln 2 - A_n &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n+(k-1)}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[-\ln\left(1-\frac{1}{n+k}\right)-\frac{1}{n+k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{-\left[-\frac{1}{n+k}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2+\frac{1}{3!}\frac{6}{(1-\theta_k)^3}\left(-\frac{1}{n+k}\right)^3\right]-\frac{1}{n+k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2+\frac{1}{3!}\frac{6}{(1-\theta_k)^3}\left(\frac{1}{n+k}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-\theta_k)^3}\left(\frac{1}{n+k}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\cdot(\ln 2-A_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}&\ln 2-B_n\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)-\frac{2}{2n+(2k-1)}\right]\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{n+(k-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+(k-1))^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+(k-1))^3}\right]\right.\\ &\left.-\frac{2}{2n+(2k-1)}\right\}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{[n+(k-1)]^2\left[n+\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+(k-1))^3}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

则

$$n^2(\ln 2-B_n)=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{\left[1+\frac{k-1}{n}\right]^2\cdot\left[1+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right]}\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^3}\frac{1}{n}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^2(\ln 2-B_n) &= -\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx\\ &=\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx\\ &=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)\Big|_0^1\\ &=\frac{1}{32}\end{aligned}$$

6. $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx=2\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$ 则

$$\begin{aligned}I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx &= x\left(1-x^2\right)^n\Big|_0^1+2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}dx\\ &=-2n\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx+2n\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n-1}dx\end{aligned}$$

可得

$$I_n=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

$$I_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

由 Wallis 公式得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

故

$$\sqrt{n}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx=2\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\to\sqrt{\pi}(n\to+\infty)$$

7. $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$，则 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}}$，$\ln\dfrac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1$

由

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$0\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

可得

$$1\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$$
$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{4n}}\leqslant a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{4(n+1)}}$$

又 $a_n>0$，且单调递减，故设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\alpha$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2}{n^{2n+1}}\cdot\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}\\&=\sqrt{2\pi}=\alpha\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_ne^{-\frac{1}{4n}}=\alpha$

$$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{4n}}<a_ne^{-\frac{1}{4n}}<\sqrt{2\pi}$$
$$\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{4n}}$$

故

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n^n}{e^n}\right)e^{\frac{\theta_n}{4n}}$$

其中 $0<\theta_n<1$

8.

$$(2n)!!=2^n\cdot n!\sim 2^n\cdot\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!}\sim\sqrt{n\pi}$$
$$(2n-1)!\sim\frac{(2n)!}{\sqrt{n\pi}}\sim 2^n\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\begin{aligned}C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}&=\frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!}\cdot 2^{2n}\\&\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\end{aligned}$$

9. (1)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}\sim\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{e^n}$$

$$\begin{aligned}
\ln\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\cdot\frac{1}{e^n}&=n^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\\
&=n^2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n\\
&=-\frac{1}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\cdot\frac{1}{e^n}=e^{-\frac{1}{2}}$$

可得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

(2) 由

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

得

$$(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\sqrt{n}=\sqrt{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}(2n-1)!!}{(2n)!!}\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}(n\to+\infty)$$

10.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{k}{k}\right)^k}=\sqrt{n}\cdot\frac{n!}{(n+1)^n}e^{n-1-\frac{1}{2}-\cdots\frac{1}{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi}ne^{-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{n}-\ln n}}\to\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}
\end{aligned}$$

11.5 对于教学的建议

11.5.1 第一组参考题

1. 令 $g(x)=f(x)e^{-x}$, 则有 $\int_0^1 g'(x)=\frac{1}{e}\Rightarrow\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|dx\geq\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|e^{-x}dx=\int_0^1\left|g'(x)\right|dx\geq\int_0^1 g'(x)dx=\frac{1}{e}$

2. 由 $\int_0^\pi xa^{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi a^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}dx,\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\sin x}dx$. 再由柯西不等式可得

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}a^{-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\sin x}dx\geqslant\frac{\pi^3}{4}$$

3. (1)$F(x)F(y)(F(x)-F(y))(x-y)\leq 0\Rightarrow xF^2(x)\int_a^b F(y)dy+F(x)\int_a^b yF^2(y)dy\leq F^2(x)\int_a^b yF(y)dy+xF(x)\int_a^b F^2(y)dy\Rightarrow\int_a^b F(y)dy\int_a^b xF^2(x)dx+\int_a^b yF^2(y)dy\int_a^b F(x)dx\leq\int_a^b yF(y)dy\int_a^b F^2(x)dx+\int_a^b F^2(y)dy\int_a^b xF(x)dx\Rightarrow\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\int_a^b xF^2(x)\mathrm{d}x\leqslant$

$\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b xF(x)\mathrm{d}x$

(2) 由 $p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$ 类似于 (1), 先对 x 积分, 再对 y 积分, 即可得到不等式。

4. $\frac{x}{1-x}$ 在 $[0,1)$ 上是凸函数，由 Jensen 不等式可得, $\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

5. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\sin x dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\cos x dx$ 由于 $\cos\sin x \geq \cos x \geq \sin\cos x$, 故 $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

6. 令 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$, 则 $\int_a^b f(x)dx = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_a^b fg^{(2n)}dx = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left[f(x)g^{(2n-1)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'g^{(2n-1)}dx\right] = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left[-f'(x)g^{(2n-2)}(x)\Big|_a^b + \int_a^b f^{(2)}g^{(2n-2)}dx\right] = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_a^b f^{(2)}g^{(2n-2)} = \cdots = (-1)^n\int_a^b f^{(2n)}gdx \leq \frac{(-1)^n}{(2n)!}\max_{a\leq x\leq b}\left\{\left|f^{(2n)}(x)\right|\right\}$ 用归纳法可得 $\int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$. 从而得到

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max\left\{\left|f^{(2n)}(x)\right| \,\middle|\, x\in[a,b]\right\}$$

7. 由柯西不等式得 $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 单调递增. 易知 $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 有界故设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{d_n}=l$. $g>0 \Rightarrow 0<m=\min g(x)<\max g(x)=M$, 因此 $m\int_a^b |f(x)|^n dx \leq d_n \leq M\int_a^b |f(x)|^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{d_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b |f(x)|^n = \max|f(x)|$

8. 由

$$\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n)\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\pi/n}{n+1}+\frac{\sin 2\pi/n}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n)\right)$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n)=\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi}$$

9. 由

$$\ln\left(\cos\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=\ln\left(1-2\sin\frac{\sqrt{2k-1}}{2n}a^2\right)=-\frac{2k-1}{2n^2}a^4+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n+1}\ln\cos\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2=-a^4\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2n^2}+o(1)=-\frac{a^4}{2}+o(1)$$

10. 由

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)dx\right)+f(n)\geqslant 0$$

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant 0$$

可知 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界，故极限存在。

11. 由

$$x\in[0,1], x-\frac{1}{3!}x^3 \leq \sin x \leq x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$$

可得

$$\int_0^1 x^2-\frac{1}{3!}x^6dx \leq \int_0^1 \sin x^2 dx \leq \int_0^1 x^2-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{10}dx$$

12. 令 $a_n=\left|\int_{\frac{1}{n\pi}}^{\frac{1}{(n-1)\pi}} \sin\frac{1}{t}dt\right|$ 则 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0. 而

$$\int_0^{\frac{1}{n\pi}} \sin\frac{1}{t}dt=\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$$

由 Leibniz 判别法可知上述级数收敛，有知道 $\operatorname{sgn}\left(\int_0^{\frac{1}{n\pi}}\sin\frac{1}{t}dt\right)=(-1)^n$ 可得 $F(x)$ 有无穷多个零点

13. 由积分第二中值定理可得

$$原式=\left|\int_a^b \frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}dx\right|=\frac{\left|\int_a^{\xi} f'(x)\cos f(x)dx\right|}{f'(a)}=\frac{|\sin f(\xi)-\sin f(a)|}{f'(a)} \leqslant \frac{2}{m}$$

14. $f'(x)>0$，可得 $f(x)$ 至多有一个零点，设为 c，则 $f(x)<0, x\in(a,c)$，$f(x)>0, x\in(c,b)$ 则

$$\int_a^b \sin f(x)dx=\int_a^c \sin f(x)dx+\int_c^b \sin f(x)dx$$

若 $\left|\int_c^b \sin f(x)dx\right|>\left|\int_a^c \sin f(x)dx\right|$ 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| &\leqslant \int_c^b \sin f(x)dx=\int_c^b \frac{f'(x)\sin f(x)}{f'(x)}dx\\ &\leqslant \frac{\int_c^b f'(x)\sin f(x)dx}{m}=\frac{1-\cos f(b)}{m}\\ &\leq \frac{2}{m}\end{aligned}$$

类似可得当 $\left|\int_c^b \sin f(x)dx\right| \leqslant \left|\int_a^c \sin f(x)dx\right|$ 时也有

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \leqslant \frac{2}{m}$$

当 $f(x)$ 无零点，不妨设 $f(x)>0$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| &= \int_a^b \sin f(x)dx=\int_a^b \frac{f'(x)\sin f(x)}{f'(x)}dx\\ &\leqslant \frac{\int_a^b f'(x)\sin f(x)dx}{m}\\ &=\frac{\cos f(a)-\cos f(b)}{m} \leq \frac{2}{m}\end{aligned}$$

综上可得

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \le \frac{2}{m}$$

15. S_n 可写为

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+2)\cdots(n+k+1)}\\
&= 1+\frac{1}{\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}}\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}2n\\ n+k+1\end{pmatrix}\\
&= 1+\frac{1}{\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix}2n\\ n+2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2n\\ n+3\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}2n\\ 2n\end{pmatrix}\right)\\
&= 1+\frac{1}{\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}}\left(\sum_{k=0}^{2n}\begin{pmatrix}2n\\ k\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}\right)\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}}2^{2n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\begin{pmatrix}2n\\ n-1\end{pmatrix}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

最后用 Stirling 公式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

11.5.2 第二组参考题

1. 由 $\rho^2(\theta)+\rho^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\le 1$ 可得

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\rho^2(\theta)+\rho^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)d\theta\le\frac{\pi}{4}$$

2. 等式等价于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{1}^{n}\ln f(a+kh_n)=\int_a^b \ln f(x)dx$$

成立，而由积分的定义可得上式成立

取 $f(x)=r^2-2r\cos x+1, x\in[0,2\pi]$ 则

$$\left(\left(\prod_{k=1}^{n}\left(r^2-2r\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\prod_{k=1}^{2n}\left(r-e^{\frac{2k\pi}{n}}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\left(r^{2n}-2r^n+1\right)^{\frac{1}{n}}$$

由于 $r>1$，令 $n\to+\infty$ 可得。

3. 设 $M=\sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|, g(x)=x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x, x\in[0,1]$

(1)$1=\int_0^1 x^2 f(x)dx\le\int_0^1 Mx^2=\dfrac{M}{3}\Rightarrow M\ge 3$

(2) 由于 $\int_0^1|g(x)|=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}<\dfrac{1}{10.2}$ 又

$$1=\int_0^1 fgdx\le\int_0^1|fg|dx\le M\int_0^1|g|dx<\frac{M}{10.2}$$

可得 $M>10.2$

4.（反证）假设对 $\forall x\in(0,1),|f(x)|<2^n(n+1)$. 则

$$\begin{aligned}1&=\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n|f(x)|\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x\\&=2^n(n+1)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x\right]\\&=2^n(n+1)\cdot 2\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x\\&=2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1=1\end{aligned}$$

矛盾. 故必 $\exists\xi\in(0,1)$, s. $t.|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1)$

5. (1) 设 $(n-1)\pi\leqslant a<n\pi,\quad m\pi\le b<(m+1)\pi, m\geqslant n$

(i) 若 $n=m$，当 n 为偶数则

$$-\int_0^\pi\frac{\sin t}{\pi+t}dt\le\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt\le\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_a^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{n\pi}^b\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\pi\frac{\sin t}{n\pi+t}dt\le\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt$$

若 n 为奇数，类似可得

$$-\int_0^\pi\frac{\sin t}{\pi+t}dt\le\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx$$

(ii) 若 $m>n$，则

$$\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx=\int_a^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{m\pi}^b\frac{\sin x}{x}dx$$

若 n 为偶数，m 为偶数，则

$$\int_a^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant 0$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{m\pi}^{b}\frac{\sin x}{x}dx\\
&=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{n\pi+x}dx-\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(n+1)\pi+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(n+2)\pi+x}dx\right.\\
&\left.+\cdots+\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(m-1)\pi+x}dx-\int_{m\pi}^{b}\frac{\sin x}{x}dx\right)\\
&\leq\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{n\pi+x}dx\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx
\end{aligned}$$

$$-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi+t}dt\leq\int_a^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{m\pi}^{b}\frac{\sin x}{x}dx\\
&=\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{n\pi+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(n+1)\pi+x}dx\right)+\cdots\\
&+\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(m-2)\pi+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(m-1)\pi+x}dx\right)+\int_{m\pi}^{b}\frac{\sin x}{x}dx\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

故

$$-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi+x}dx\leq\int_a^{b}\frac{\sin x}{x}dx\leq\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

其它情况类似，故取 $c_1=-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi+x}dx, c_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

(2) 若 a,b 同号，$0\leq a<b$ 则利用 (1) 可得，若 $a<b\leq 0$，令 $x=-t$，则

$$\int_a^{b}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{-b}^{-a}\frac{\sin t}{t}dt$$

由 (1) 可得，若异号 $a<0<b$，考虑

$$\int_a^{b}\frac{\sin x}{x}dx=\int_a^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{b}\frac{\sin x}{x}dx$$

再次利用 (1) 可得。即得

6. 如图 11.2，可得

$$S_1=\int_0^{b}g(y)dy,\quad S_2=\int_0^{a}f(x)dx$$

根据几何意义可得

$$bf(b)+af(a)-f(a)g(b)\geqslant S_1+S_2\geqslant ab$$

即

$$ab\leqslant\int_0^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{b}g(y)\mathrm{d}y\leqslant bg(b)+af(a)-f(a)g(b)$$

根据图像可知等号成立当且仅当 $b=f(a)$

7. **证明** (1) 下证满足题目条件的 f 在 (a,b) 内任何闭区间必于端点取到最大值. 否则存在闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$, 使得 $\max\limits_{x\in[c,d]}f(x)=f(x_0), x_0\in(c,d)$, 不妨设 $x_0\in$

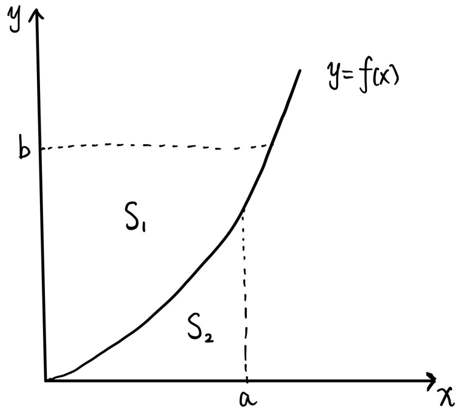

图 11.2

$\left(c, \dfrac{c+d}{2}\right]$. 依题意可知

$$f\left(\frac{c+2x_0-c}{2}\right) \leq \frac{1}{2x_0-c-c}\int_c^{2x_0-c} f(x)dx,$$

即

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x)-f(x_0)]\,dx \geq 0,$$

而由 $f(x_0)$ 定义知

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x)-f(x_0)]\,dx \leq 0,$$

所以

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x)-f(x_0)]\,dx = 0, f(x)=f(x_0), \forall x \in [c, 2x_0-c],$$

则 f 在 $[c,d]$ 端点取到最大值, 矛盾.

对 $\forall [x_1,x_2] \subset (a,b)$, 令 $h(x) = f(x) - f(x_1) - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1), x \in [x_1,x_2]$, 显然

h 满足题目条件, 因此 $h(x) \leq \max\{h(x_1),h(x_2)\} = 0$, 此即 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\forall x \in [x_1,x_2]$, 即证 f 为下凸函数.

(2) 反设 f 不为下凸函数, 则存在 $\lambda_0 \in (0,1), x_0, y_0 \in (a,b), x_0 \neq y_0$, 使得

$$f(\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0) > \lambda_0 f(x_0) + (1-\lambda_0) f(y_0).$$

不妨设 $x_0 < y_0$. 令 $g(\lambda) = f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) - \lambda f(x_0) - (1-\lambda)f(y_0), \lambda \in [0,1]$, 则 $g(\lambda_0) > 0, g(0) = g(1) = 0$, 故由 g 连续性可知, 存在 $\{\lambda_0\} \subset [c,d] \subset [0,1]$, 使得 $g(\lambda) > 0$,

$\forall \lambda \in (c,d)$, 且 $g(c) = g(d) = 0$. 因此在区间 (c,d) 内函数 $y = f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)$ 的图象恒在直线 $y = \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(y_0)$ 的上方, 且在 $\lambda = c, d$ 时二者相交, 由几何意义易知对 $\forall t \in (0,1)$, 成立 $f(tc + (1-t)d) > tf(c) + (1-t)f(d)$, 类似 Hadamard 不等式的证明方法, 两边积分即得矛盾.

(3) 分别将 (1) 和 (2) 中的 $\leq$ 和 $\geq$ 改为 $\geq$ 和 $\leq$, 易知都能得到 f 为下凸函数的

结论. 因此若 (1) 或 (2) 中不等式的任何一个始终成立等号, 则 f 既是上凸函数, 又是下凸函数, 显然 f 只能是线性函数.

笔记 (1) 的不等式条件可以等价为

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[f(x)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]dx \geq 0,$$

这就是 (1) 的证明思路来源. 另外, 其证明过程中用到了如下常见性质:

f 在区间 I 中为下凸函数 $\Longleftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3 \in I, x_1<x_2<x_3$, 下列不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

中任何两个组成的不等式成立. 同理对于上凸函数.

(2) 的证明关键在于理解 g 的几何意义, 然后构造可计算的非下凸区间, 可辅以作图来理解.

(3) 从 f 既是上凸函数又是下凸函数得到 f 是线性函数, 可利用上述常见性质, 辅以一个取极限得到导数的过程即容易得到结论.

8. (1) 令 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt,\quad f(x)=\int_0^x f'(t)dt$ 则

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx &\leq \int_0^a g(x)g'(x)dx=\frac{1}{2}g^2(a)\\ &=\frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(t)|\,dt\right)^2 \leq \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2\,dt\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}} |f(x)f'(x)|\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^a |f(x)f'(x)|\,dx$$

其中

$$\int_0^{\frac{a}{2}} |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \frac{a}{4}\int_0^{\frac{a}{2}} |f'(x)^2|\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a}{2}}^a |f(x)f'(x)|dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} |f'(a-t)f(a-t)|\,dt \leq \frac{a}{4}\int_0^{\frac{a}{2}} |f'(a-t)|^2\,dt\\ &=\frac{a}{4}\int_{\frac{a}{2}}^a |f'(x)|^2dx\end{aligned}$$

故

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leq \frac{a}{4}\int_0^a |f'(x)|^2dx$$

9.

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)dt} \leqslant g(x)\\ \Rightarrow &\int_0^y \frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)dt}dx \leqslant \int_0^y g(x)dx\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)dt}dx &= \ln\left(A+\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\Big|_0^y\\ &=\ln\frac{A+\int_0^x f(t)g(t)dt}{A}\end{aligned}$$

可得

$$A+\int_0^x f(t)g(t)dt \le A\exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

若 $\exists x_1$ 使得 $f(x_1)>A\exp\left(\int_0^{x_1} g(t)dt\right)$，则存在 (a,b) 使得 $x_1\in(a,b)$ 且

$$f(x)>A\exp\left(\int_0^x g(t)dt\right),\forall x\in(a,b)$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^b g(x)dx &= \int_a^b \frac{\mathrm{Aexp}\left(\int_0^x g(t)dt\right)g(x)}{\mathrm{Aexp}\left(\int_0^x g(t)dt\right)}dx \\ &\leqslant \int_a^b \frac{\mathrm{Aexp}\left(\int_0^x g(t)dt\right)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)dt}dx \\ &< \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)dt}dx \leqslant \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

矛盾。

10. 由于 $f(x)\neq 0$, 不妨设 $f(x)>0$. 记

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=f(c)\quad (0<c<1)$$

因 $f(0)=f(1)=0$, 由微分中值定理，得

$$\begin{aligned}&f(c)-f(0)=f'(\xi)c\quad (0<\xi<c)\\ &f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)\quad (c<\eta<1)\end{aligned}$$

由此得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},\quad f'(\eta)=\frac{f(c)}{c-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x &> \frac{1}{f(c)}\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{f(c)}\int_\xi^\eta \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{f(c)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{f(c)}\left|f'(\eta)-f'(\xi)\right|\\ &= \frac{1}{f(c)}\left|\frac{f(c)}{c-1}-\frac{f(c)}{c}\right| = \frac{1}{|c(c-1)|}\\ &= \frac{1}{c(1-c)}\geqslant 4\end{aligned}$$

11. 由题意即得

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\leqslant 0,\quad x\in[0,1]$$

变形为

$$f(x)-(m+M)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant 0$$

积分就有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant m+M$$

令 $u=mM\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+u\leqslant m+M$, 或

$$u\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant(m+M)u-u^2=\left(\frac{m+M}{2}\right)^2-\left(u+\frac{m+M}{2}\right)^2\leqslant\frac{(m+M)^2}{4}$$

所以

$$mM\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=u\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4}$$

即证得

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

12. 令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}$，若 $M=+\infty$ 则必存在 $\xi\in[a,b]$, s. t. $f'(\xi)>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$，若 $M+\infty$ 为有限数，由 Lagrange 中值定理及 $f(a)=f(b)=0$, 得

$$\begin{cases}|f(x)|=\left|f'\left(\xi_1\right)\right|(x-a)\leqslant M(x-a), & a<\xi_1<x\leqslant\dfrac{a+b}{2}\\ |f(x)|=\left|f'\left(\xi_2\right)\right|(b-x)\leqslant M(b-x), & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x<\xi_2<b\end{cases}$$

令

$$g(x)=\begin{cases}M(x-a), & a\leqslant x\leqslant\dfrac{a+b}{2}\\ M(b-x), & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负, 但在 $\frac{a+b}{2}$ 处不可导而 $f(x)$ 可导, 故 $|f(x)|\leqslant g(x)$, 且 $|f(x)|\not\equiv g(x)$. 必 $\exists x_0\in(a,b)$, s. t. $\left|f\left(x_0\right)\right|<g\left(x_0\right)$, 可得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

注意, 这里是不等号成立！计算 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=M\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{(b-a)^2}{4}M$$

即有

$$M>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

由 M 为上确界, $\exists x_1\in[a,b]$, s. t. $\left|f'\left(x_1\right)\right|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$. 再由 Darboux 定理 $\exists\xi\in(a,b)$, s. t.

$$\left|f'(\xi)\right|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

13. 令 $p(x)=x^3-x^2$，则 $p(0)=p(1)=p'(0)=0, p'(1)=1$，$p''(x)=6x-2, p^{(4)}(x)=0$ 则

$$\int_0^1\left[p''(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(36x^2-24x+4\right)\mathrm{d}x=12-12+4=4$$

当 $f(x)=p(x)=x^3-x^2$ 时, 等号成立. 考虑积分 $\int_0^1\left(\left[f''(x)\right]^2-\left[p''(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\left[f''(x)\right]^2-\left[p''(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left(f''(x)-p''(x)\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^1 2f''(x)p''(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1\left[p''(x)\right]^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left[f''(x)-p''(x)\right]^2\mathrm{d}x+2f'(x)p''(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f'(x)p'''(x)\mathrm{d}x-8\\
=&\int_0^1\left[f''(x)-p''(x)\right]^2\mathrm{d}x+2f'(1)p''(1)-2f'(0)p''(0)-2f(x)p'''(x)\big|_0^1\\
&+2\int_0^1 f(x)p^{(4)}(x)\mathrm{d}x-8\\
=&\int_0^1\left[f''(x)-p''(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\times1\times4-0-0+0-8\geqslant 0
\end{aligned}$$

所以, $\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left[p''(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$, 且等号仅当 $f''(x)=p''(x)$ 时成立. 再由 f 与 p 满足的条件知, 仅当 $f(x)=p(x)=x^3-x^2$ 时, 等号成立.

14. 由 Lipschitz 条件知 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故可设 $\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=f(x_0)=m>0$, 则

$$\begin{gathered}
0<m\leq f(x)\leq m+L\left|x-x_0\right|,x\in[a,b]\\
0<\frac{1}{m+L\left|x-x_0\right|}\leq\frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{m},x\in[a,b]
\end{gathered}$$

两边积分, 则

$$\begin{gathered}
m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq m(b-a)+\frac{L}{2}\left[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2\right]\\
\frac{1}{L}\ln\frac{\left(x_0+\frac{m}{L}-a\right)\left(-x_0+\frac{m}{L}+b\right)}{\left(\frac{m}{L}\right)^2}\leq\beta\leq\frac{b-a}{m}
\end{gathered}$$

故

$$\begin{gathered}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\sup_{x_0\in[a,b]}\left\{m(b-a)+\frac{L}{2}\left[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2\right]\right\}\\
\inf_{x_0\in[a,b]}\left\{\frac{1}{L}\ln\frac{\left(x_0+\frac{m}{L}-a\right)\left(-x_0+\frac{m}{L}+b\right)}{\left(\frac{m}{L}\right)^2}\right\}\leq\beta
\end{gathered}$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq m(b-a)+\frac{L}{2}(b-a)^2$$

$$b-a\leq\frac{\left(\mathrm{e}^{L\beta}-1\right)m}{L}$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{\left(\mathrm{e}^{L\beta}-1\right)m^2}{L}+\frac{L}{2}\left[\frac{\left(\mathrm{e}^{L\beta}-1\right)m}{L}\right]^2=\frac{\left(\mathrm{e}^{2L\beta}-1\right)m^2}{2L}$$

欲证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

只需证

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{2L\beta}-1\right)m^2}{2L} \leq \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

即证

$$m^2 \leq \frac{\int_c^d f(x)\mathrm{d}x}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}$$

而

$$f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$$

笔记 本题关键在于Lipschitz条件的使用,然后敢于不断计算下去. 为什么取 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 计算积分值而不取 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 计算积分值呢? 因为我们只能确定 $x_0 \in [a,b]$, 而不能确定 $x_0 \in [c,d]$, 这样一来, 只能计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$, 而不能计算 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$. 然后因为欲证之式中没有 x_0, a 和 b, 故将 x_0 和 $b-a$ 放缩掉, 接着的一切则是水到渠成的事。

15. 用微分法可证

$$0 < \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x < \frac{x^3}{3\left(1-x^2\right)}$$

将 $x = \dfrac{1}{2n+1}$ 代入上式可得

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{3(2n+1)(2n+2)n}$$

令 $a_n = \dfrac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 则 $\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = -1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 可得

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3(2n+1)(2n+2)n} = \frac{1}{12(n+1)n}$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \dot{e}^{\frac{1}{12(n+1)n}}$$

可知 $\left\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\right\}$ 单增，又 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$，故 $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$，其中 $0 < \theta_n < 1$。

第 12 章 广义积分的定义

12.1 广义积分的定义

12.1.1 练习题

1. $\forall A>0$，有

$$0 \leq \int_0^A f(x)dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^A f(x)dx = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,A]$ 上恒为 0，由 A 的任意性可知 $f(x)=0, \forall x \in [0,+\infty)$

2. 无穷限积分：取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散，但是 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛

取

$$f(x)=\begin{cases} n & x \in \left[n, n+\dfrac{1}{n^3}\right], n=1,2,\cdots \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

则 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但是 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散

无界积分：若 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$ 则

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^2 \leq \int_a^b 1^2 dx \cdot \int_a^b f^2(x)dx < +\infty$$

可得 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛

取 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，但是 $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx$ 发散

3. $\Rightarrow$：只要注意到 $f_N(x)$ 对 N 递增, 且 $f_N(x) \leqslant f(x)$，立刻可用单调有界原理, 证得 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$\Leftarrow$：因 $\displaystyle\lim_{x\to0+} f(x)=+\infty$, 故 $\exists\delta>0$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时 $f(x)>0$. 故对 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性, 可用非负函数的判别法进行判定. 下面我们来证明当 $0<\alpha<\delta$ 时 $\displaystyle\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x$ 保持有上界. 事实上，因为 $f(x)$ 在 $[\alpha,1]$ 上连续, 所以 $\exists M>0$, 使得 $f(x)\leqslant M$, 当 $x\in[\alpha,1]$ 时. 因而 $N>M$ 时 , $[\alpha,1]$ 上恒有

$$f_N(x)=\min\{f(x),N\}=f(x)$$

从而

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_\alpha^1 f_N(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $N \to +\infty$ 取极限，得

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{1} f_N(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

故 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 由

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|dx\right)^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+a)|^2 dx < +\infty$$

可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|dx$ 收敛

5. 由

$$\int_{M}^{N} (f(x+a)-f(x))dx = \int_{N}^{N+a} f(x)dx - \int_{M}^{M+a} f(x)dx$$

可知

$$\lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to+\infty}} \int_{M}^{N} (f(x+a)-f(x))dx = (A-B)a$$

6. 因为广义积分不收敛

主值为：

$$\lim_{\delta\to0^+}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$$

12.2 广义积分的敛散性判别法

12.2.1 练习题

1. (1)

$$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{5\pi}{6}} x\sin^4 x dx \ge \frac{1}{16}\int_{\pi\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{5\pi}{6}} x dx \ge \frac{1}{16}\cdot\frac{2\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{144}$$

可知 $\int_{0}^{+\infty} x\sin^4 x dx$ 发散。

(2) 设 $F(x) = \dfrac{\ln\ln x}{\ln x}, F'(x) = \dfrac{1-\ln\ln x}{x(\ln x)^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$，当 $x > e^e$ 时有 $F(x)$ 单调递减，又 $\int_{0}^{A} \sin x dx$ 为有界量，从而 $\int_{3}^{+\infty} \dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x dx$ 收敛

又

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \ge \left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\sin^2 x = \left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

已知 $\int_{3}^{+\infty} \left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right| dx$ 发散, $\int_{3}^{+\infty} \left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right| \cos 2x dx$ 收敛,从而 $\int_{3}^{+\infty} \left|\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| dx$ 发散。

综上，$\int_{3}^{+\infty} \dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x dx$ 条件收敛。

(3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x) = e$ 可知 $x=0$ 不是瑕点，令 $F(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$ 则有 $F(x) = F(x+2\pi)$ 即 $F(x)$ 为周期函数，且 $|F(x)| \le e$，由于 $F(x)$ 是奇函数，故在

一个周期上的积分为 0，从而 $\forall A>0$，有 $\int_0^A F(x)dx$ 有界，又 $\frac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法可得 $\int_0^{+\infty} e^{\cos x}\sin(\sin x)dx$ 收敛。
又考虑

$$\left|\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\right|\geq\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin^2(\sin x)=\frac{1}{x}e^{\cos x}\left[\frac{1-\cos(2\sin x)}{2}\right]$$

又 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}dx$ 发散，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\cos(2\sin x)dx$ 收敛，从而知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)dx$ 条件收敛

(4)$\ln\frac{x^2}{x^2-1}=\ln\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ 又 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}}{\ln(x-1)}=-1$ 且 $\int_1^a|\ln(x-1)|dx$ 收敛，又

$$\ln\frac{x^2}{x^2-1}=\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$$

从而，当 $x\to+\infty,\ln\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)\sim\frac{1}{x^2-1}$，由 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{1}{x^2-1}\right|dx$ 收敛，可知 $\int_a^{+\infty}\left|\ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right|dx$ 收敛 $(a>1)$，
综上，$\int_1^{+\infty}\ln\frac{x^2}{x^2-1}dx$ 绝对收敛

(5) 做代换 $t=\frac{1}{x}$，有

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^1\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t^2}dt$$

而

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t}=1$$

即 $\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t^2}\sim\frac{1}{t}$，又 $\int_0^1\frac{1}{t}dt$ 发散，可知 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx$ 发散

(6)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}=2$，可知 $x=0$ 并非瑕点，又当 $x\to1^-$ 时，有 $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\sim(-\ln2)\cdot\ln(1-x)$ 且 $\int_a^1|\ln(1-x)|dx$ 收敛 $(0<a<1)$，从而 $\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ 绝对收敛。

(7)$\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}}>0$，又 $\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}}$ 和 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ 是同阶无穷小 $(x\to+\infty)$，从而 $\int_a^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx$ 收敛 $(a>0)$，又 $\int_0^a\sqrt{\frac{1}{x}}dx$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}=0$ 从而 $\int_0^a\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx$ 收敛

综上，$\int_a^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx$ 绝对收敛

(8) $\int_0^A \sin x dx$ 有界，又

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\cos x}}, F'(x)=\frac{\sin x-1}{2(x+\cos x)^{\frac{3}{2}}}<0, \lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

从而 $F(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时，单调递减趋于 0

由 Dirichlet 判别法知，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}dx$ 收敛，又

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x+\cos x}}=\frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x+\cos x}}$$

且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\cos x}}dx$ 发散，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x+\cos x}}dx$ 收敛，从而知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}dx$ 条件收敛

2. (1) 当 $x\to 0$ 时，$\sin^p x\sim x^p$，$x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos^q x\sim\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q$

从而可知，当 $p<1$ 且 $q<1$ 时，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}dx$ 绝对收敛

当 $p>1$ 或者 $q>1$ 时，积分发散

(2) 当 $p>1$ 时

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^p}\right|\leq\frac{1}{1+x^p}$$

从而积分绝对收敛

当 $0<p\leqslant 1$ 时，积分条件收敛，当 $p\leqslant 0$ 时，积分发散。

(3)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}|\ln x|^p dx=-\int_0^e\frac{\sin x}{x}\ln^p x dx+\int_e^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ln^p x dx$$

易知 $\int_0^e\frac{\sin x}{x}\ln^p x dx$ 收敛，$\int_e^M\sin x dx$ 有界，$\frac{\ln^p x}{x}$ 单调递减趋于 0，故 $\int_e^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ln^p x dx$ 条件收敛。

当 $p<-1$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}\ln^p x\right|\leq\frac{\ln^p x}{x}$，此时 $\int_e^{+\infty}\frac{\ln^p x}{x}dx$ 收敛

综上，当 $p<-1$ 时，积分绝对收敛，当 $p\geq -1$ 时，积分条件收敛

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$，又

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^a\frac{\ln(x+1)}{x^p}dx+\int_a^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$$

当 $p<2$ 时，$\int_0^a\frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ 收敛，当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^p}dx$ 收敛，从而 $1<p<2$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛

(5) 做变换 $t=x^2$ $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=dx$ 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}\left(1+t^{p/2}\right)}dt$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{2\sqrt{t}\left(1+t^{p/2}\right)}\sim\frac{1}{2t^{\frac{p+1}{2}}}$

从而当 $p\leq -1$ 时，积分发散

当 $-1<p\leq 1$ 时。积分条件收敛

当 $p>1$ 时，积分绝对收敛

(6) 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x^p}{1+x^q}\sim x^{p-q}$

从而当 $p-q<-1$ 时，积分绝对收敛

当 $-1\leq p-q<0$ 时，积分条件收敛

当 $p-q\geq 0$ 时，积分发散

(7)$e^{\sin x}\sin 2x=2e^{\sin x}\sin x\cos x$ 从而有

$$\int_a^A e^{\sin x}\sin 2xdx=2\left[e^{\sin A}(\sin A-1)-e^{\sin a}(\sin a-1)\right]$$

易知 $\displaystyle\int_a^{+\infty}e^{\sin x}\sin 2xdx$ 为有界量，又当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{e^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^p}\sim\dfrac{2}{x^{p-1}}$

从而当 $p<2$ 时，$\displaystyle\int_0^a\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛

由此可见，当 $0<p\leq 1$ 时积分条件收敛

当 $1<p<2$ 时，$\left|\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\leqslant\dfrac{e}{x^p}$，积分绝对收敛

当 $p\leq 0$ 时积分发散

(8) 当 $x\to e$ 时，$(x-e)^p(\ln\ln x)^q\sim\dfrac{(x-e)^{p+q}}{e^q}$

从而当 $p+q<1$ 时，$\displaystyle\int_e^a\frac{dx}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q}$ 收敛

当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q}\sim\dfrac{1}{x^p(\ln\ln x)^q}$

当 $p\leq 1$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln\ln x)^q}dx$ 发散

当 $p>1$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln\ln x)^q}dx$ 收敛

综上可得，当 $p+q<1$ 且 $p>1$，积分收敛；当 $p+q\geqslant 1$ 或者 $p\leq 1$ 时，积分发散

3. 当 $x\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\sim\frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

若要保证积分收敛必须有 $p_1+p_2+\cdots+p_n>1$，又 $x=a_k$ 为奇点，从而 $0<p_k<1\quad(k=1,2,\cdots,n)$

综上，当 $p_1+p_2+\cdots+p_n>1$ 且 $0<p_1,\cdots,p_n<1$ 时积分收敛，其它情况发散

4. 设 $F(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$，则

$$F'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2(x+1)}=\frac{-x}{x^2(x+1)^2}<0$$

即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于 0，

即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}>0$，又 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{x}$，从而有

$$0<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{x(x+1)}$$

积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}dx$ 收敛，又 $x=0$ 为奇点，$\displaystyle\int_0^a\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ 收敛，

从而可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}dx$ 收敛

5. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx$ 的敛散性和级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx$ 相同，从而只需考虑该无穷级数的敛散性

我们有

$$\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{x}{1+x^4\sin x}dx \xlongequal{x-n\pi=t} \int_0^{\pi}\frac{t+n\pi}{1+(t+n\pi)^4\sin^2 t}dt \geqslant \int_0^{\pi}\frac{n\pi}{1+(\pi+n\pi)^4t^2}dt$$

$$\int_0^{\pi}\frac{n\pi}{1+(n\pi+\pi)^4t^2}dt = \frac{n\pi}{(n\pi+\pi)^2}\int_0^{\pi}\frac{d(\pi+n\pi)^2t}{1+(\pi+n\pi)^4t^2} = \frac{n\pi}{(\pi+n\pi)^2}\cdot\arctan\left[\pi^3(1+n)^2\right]$$

从而可知 $\int_0^{\pi}\frac{n\pi}{1+(\pi+n\pi)^4t^2}dt \sim \frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4\sin^2 x}dx$ 发散

6.

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^a dt=\int_0^{+\infty}\frac{\left|t^4-1\right|^a}{t^{2a}}dt$$

当 $t\to 0$ 时，$\frac{\left|t^4-1\right|^a}{t^{2a}}\sim\frac{1}{t^{2a}}$ 故当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$\int_0^A\frac{\left|t^4-1\right|^a}{t^{2a}}dt$ 收敛

当 $t\to+\infty$ 时，$\frac{|t^4-1|^a}{t^{2a}}\sim t^{2a}$，故当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$\int_4^{+\infty}\frac{\left|t^4-1\right|^a}{t^{2a}}dt$ 收敛

当 $t\to 1$ 时，$\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^a\sim|t-1|^a$，当 $a>-1$ 积分收敛

综上，定义域为 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

7. 由 $f'\in C[0,1]$ 且 $f'>0$ 可知 $\forall x\in[0,1]$ 有 $0<m\le f'(x)\le M$，故

$$\frac{f(x)-f(0)}{x^p}=\frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}\quad \xi\in[0,x]$$

即

$$\frac{m}{x^{p-1}}\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\leqslant\frac{M}{x^{p-1}}$$

从而可得当 $p<2$ 时积分收敛，当 $p>2$ 积分发散

8. (1) 由 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛可知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty}|f|dx$ 发散，所以容易得到 $\int_a^{+\infty}f\pm|f|dx$ 发散

(2)

$$\int_a^x fdx=\frac{1}{2}\int_a^x f+|f|dx+\frac{1}{2}\int_a^x f-|f|dx$$

由 $\int_a^{+\infty}f\pm|f|dx$ 发散可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x|f|-fdx=+\infty$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx$，可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\int_a^x|f|+fdx}{\int_a^x|f|-fdx}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x fdx}{\int_a^x|f|-fdx}=0$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x|f|+fdx}{\int_a^x|f|-fdx}=1$$

9.

$$\int_a^x f'(x)\sin^2 xdx = f(x)\sin^2 x\Big|_a^x - 2\int_a^x \sin x\cos x f(x)dx$$
$$= f(x)\sin^2 x - f(a)\sin^2 a - \int_a^x \sin 2x f(x)dx$$

由题意可得 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 单调递减趋于 0，又 $\int_a^x \sin 2xdx$ 有界，从而可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$ 收敛，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)\sin 2xdx$ 存在

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\sin^2 x=0$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(x)\sin^2 xdx = -f(a)\sin^2 a - \int_0^{+\infty}\sin 2x\cdot f(x)dx$$

即 $\int_a^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx$ 收敛

10.

$$\int_a^x f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x g(x)f'(x)dx$$

又 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，即 $|g(x)|\leqslant M$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒成立

已知 $f'(x)$ 非负，故

$$\int_a^x \left|g(x)f'(x)\right|dx \le M\int_a^x f'(x)dx = M(f(x)-f(a))$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知 $\int_a^{+\infty} g(x)f'(x)dx$ 收敛，因为 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$ 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)g'(x)dx = -f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x)dx$$

即 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ 收敛

12.3 广义积分的计算

12.3.1 练习题

1. (1) 由

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}dt$$

可得若 $\dfrac{f(\tan t)}{\cos^2 t}$ 关于 $\dfrac{\pi}{4}$ 为奇函数则原积分为 0

(2) 由命题 10.4.5 即证

2. (1) 由

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|dx = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin xdx$$

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin xdx = -\, e^{-x}\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos xdx = 1+e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin xdx$$

可得 $\int_0^{+\infty} e^x|\sin x|dx = \frac{e^\pi+1}{2(e^\pi-1)}$

(2)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{d(e^x)}{e^{2x+1}+e^3} = \frac{1}{e}\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2+e^2} = \frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4e^2}$$

(3) 令 $x = a+(b-a)\sin^2 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 可得

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$$

(4) 令 $x = \tan\theta$ 则

$$I_{n-1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\theta d\theta$$

分部积分可得 $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$，故 $I_{n-1} = \frac{(2n-2)!!\pi}{2(2n-1)!!}$

(5)

$$\int_0^1 x^n \ln^m \frac{1}{x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-nt}t^m d\left(e^{-t}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^m \int_0^{+\infty} e^{-y}y^m dy = \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

(6) 令 $x = \tan t$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{2\cos 2t}{\sin 2t}\right)}{\sin 2t}dt$$

令 $g(t) = \frac{2\sin\left(\frac{2\cos 2t}{\sin 2t}\right)}{\sin 2t}$ 则在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有

$$g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -g(\theta)$$

由本练习题的第一题可得 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}dx = 0$

(7)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx &= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx - \frac{1}{3}\frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= -\frac{\pi\ln 2}{12} + \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t dt}{e^{2t}+1} = -\frac{\pi\ln 2}{12}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx + \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx \\ &= \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\Bigg|_{-1}^{0^-} + \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\Bigg|_{0^+}^{1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. (1) 由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\tan x dx = 0$

(2)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = \ln x \cdot \arcsin x|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x dx = x\ln\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

(5) 由于

$$\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\ln\sin x dx$$

又

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\ln\sin x dx \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t)\ln\sin t dt$$

故

$$\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

(6)$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ 则

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}dx = \int_0^{\pi} \frac{x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

令 $x = 2t$ 则

$$\text{原式} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cot t dt = 2\pi\ln 2$$

(7) 令 $e^x = t$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t\sqrt{t^2-1}}dt$$

令 $t = \frac{1}{\theta}$ 则

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{\ln\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}d\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

(8) 若 $a \neq 0$ 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left|\sin^2 x - a^2\right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin x - |a||dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin x + |a||dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x - |a|)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin x + |a|\right)^2 dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx + \pi\ln|a| \\ &= \pi\ln|a| - \pi\ln 2 = \pi\ln\frac{|a|}{2}\end{aligned}$$

若 $a = 0$ 则原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\pi\ln 2$

4. (1) 取 $f(x)=\arctan x$ 则原式 $=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$

(2) 取 $f(x)=e^{-x}$ 则原式 $=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$

(3) 取 $f(x)=\cos x$ 则原式 $=f(0)\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$

(4) 由于 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$ 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(a+b)x-\cos(a-b)x}{x}dx\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{|a-b|}{a+b}\end{aligned}$$

(5) 取 $x=e^{-t}$ 则

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=-\ln\frac{b}{a}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}dx&=-\left.\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x}\right|_0^{+\infty}+ab\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx\\&=\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

5. (1) 对 $I=\int_0^{+\infty}\sin^2 x d(-1/x)$ 作分部积分，可知

$$\begin{aligned}I&=-\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=2x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(2) 应用公式 $\sin^4 x=\sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$. 我们有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

(3) 由 $\sin^4 x=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$ 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{x^4}dx&=-\left.\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{3x^3}\right|_0^{+\infty}+\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin 2x-\sin 4x}{x^3}dx\\&=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin 2x-\sin 4x}{x^3}dx\\&=\cdots\\&=\frac{16}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$

(4)

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx=-\left.\frac{x-\sin x}{2x^2}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x-\pi)}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-\pi}dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

令 $x=\pi+t$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-\pi}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

故原式 $=0$

(6) 令 $x=\sqrt{t}$ 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{4}$$

6. (1)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{4\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(2x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\frac{1}{t}}4\int_{+\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}t^4}{\left(2+t^2\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\frac{\mathrm{d}\left(2+t^2\right)}{\left(2+t^2\right)^2}\\&=-2\left[\frac{t}{t^2+2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\left(1+\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t\right]\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{1}{t^2}=s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

(2) 由下面一题可知

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}dx=e^{2ab}\int_0^{+\infty}e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}$$

7. 令 $ax-b/x=t$, 则 $(x>0)ax+b/x=\sqrt{t^2+4ab}$. 从而知

$$x=(t+\sqrt{t^2+4ab})/2a,\quad \mathrm{d}x=(t+\sqrt{t^2+4ab})/2a\sqrt{t^2+4ab}\mathrm{d}t$$

代人原式可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{+\infty}\right)f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{2\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ba}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

12.4 广义积分的特殊性质

12.4.1 练习题

1. 由题设知，存在极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}[f(A)-f(a)]$, 即存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.
若 $l\neq 0$, 不妨假定 $l>0$, 则存在 $X: X>a$, 使得 $f(x)>l/2(x>X)$. 此时有 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_X^A f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{l}{2}(A-X)=+\infty$, 矛盾. 证毕.
2. 导函数有界说明一致连续
存在 $\delta>0$, 使得
$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<1\quad\left(x',x''\in[a,\infty);\left|x'-x''\right|<\delta\right)$$
若 $f(x)$ 无界, 则存在 $\{x_n\}: x_n\to+\infty(n\to\infty)$, 且有 $x_{n+1}>x_n+\delta,\left|f\left(x_n\right)\right|\geqslant n$ $(n=1,2,\cdots)$. 从而得
$$\begin{aligned}\left|\int_a^{x_n}f(t)\mathrm{d}t\right|&\geqslant\left|\int_{x_n-\delta/2}^{x_n}f(t)\mathrm{d}t\right|-\left|\int_a^{x_n-\delta/2}f(t)\mathrm{d}t\right|\\&\geqslant\left|\int_{x_n-\delta/2}^{x_n}f(t)\mathrm{d}t\right|-M\geqslant\left(\left|f\left(x_n\right)\right|-1\right)\frac{\delta}{2}-M\geqslant(n-1)\frac{\delta}{2}-M\end{aligned}$$
这与题设矛盾. 证毕。
3. 考虑 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$，如果不等于 0，不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=m>0$, 则对于充分大的 x 可知 $f(x)>\dfrac{m}{2x}$ 可得 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$
不妨设 $f(x)\geq 0$，则
$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t&=\int_{\sqrt{x}}^x tf(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\geqslant xf(x)\int_{\sqrt{x}}^x\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=xf(x)[\ln x-\ln\sqrt{x}]=\frac{1}{2}xf(x)\ln x\end{aligned}$$
所以令 $x\to+\infty$ 即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0$
5. 考虑
$$f(\xi_n)=\int_n^{n+1}f(x)dx\to 0,n\to+\infty$$
则
$$f'(x_n)=\frac{f(\xi_{n+2})-f(\xi_n)}{\xi_{n+2}-\xi_n}$$
6. 考虑 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上，可知条件收敛结论是不成立的，考虑
$$\int_{2^k}^{2^{k+1}}|f(x)|dx=2^k|f(\xi_n)|\to 0,k\to+\infty$$
可知
$$\xi_n|f(\xi_n)|\leq 2^{k+1}|f(\xi_n)|=2\cdot 2^k|f(\xi_n)|\to 0,k\to+\infty$$

12.5 对于教学的建议

12.5.1 第一组参考题

1.
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$
$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\frac{\pi}{4}$$

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^{100}x}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{100})}=\frac{\pi}{4}$

2. 记 I 为相应的积分值可得

(1) $\displaystyle\frac{1}{29}=\int_1^{+\infty}\frac{x^{30}}{x^{60}}dx<I<\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^{60}}+\frac{x^{30}}{x^{60}}\right)dx=\frac{1}{29}+\frac{1}{59}$

(2) $\displaystyle A=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{10}=\frac{A}{5}<I<\frac{A}{4}=\frac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle\frac{1}{30}<\frac{1}{24}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx\int<I<\int_2^{+\infty}x^{-\frac{7}{2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{20}$

(4) $\displaystyle-\frac{1}{10000}=-\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{10000}dx<-\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{100(x+100)}dx=I-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100}dx<0$

3. 对于任意 $\epsilon>0$, 由于 $|f|^p$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，可得存在 $R>0$, s.t.
$$\int_R^{+\infty}|f|^p+\int_{-\infty}^{-R}|f|^p<\epsilon$$
记 $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_{-R}^R|f(x)-f(x+h)|^pdx=0$, 存在 $h_1>0$, s.t.
$$\int_{-R}^R|f(x)-f(x+h)|^pdx<\epsilon,\forall h,0<h<h_1$$
由于
$$\int_R^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^pdx<C\int_R^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|dx<C\epsilon$$
由 Minkowski 不等式知 C 是一个只依赖 p 的常数，因此
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^pdx<(1+2C)\epsilon,\forall0<h<h_1$$
故
$$\lim_{h\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^pdx=0$$

4. 由于
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x+t)dx\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)g(x+t)|dx$$
$$\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+t)|^{p/(p-1)}\right)^{1-1/p}$$
故原广义积分收敛

由于

$$\lim_{h\to 0}|I(t+h)-I(h)|=\lim_{h\to 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+t+h)-f(x+t))g(x)dx\right|$$

$$\le \lim_{h\to 0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)-f(x+t+h)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g^{p/(p-1)}dx\right)^{(p-1)/p}=0$$

最后一个极限等于零由上一题可知。

5. $\Rightarrow$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $f>0, f$ 单调递减 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$, 因此

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R xf'(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\left(Rf(R)-af(a)-\int_a^R f(x)dx\right)$$

收敛.

$\Leftarrow$: $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \forall\epsilon>0,\exists R>0$, s.t

$$\left|\int_{R_1}^{R_2} xf'(x)dx\right|<\epsilon,\forall R<R_1<R_2$$

由

$$|f(R_1)-f(R_2)|=\left|\int_{R_1}^{R_2} f'(x)dx\right|=\left|\frac{1}{\zeta}\int_{R_1}^{R_2} xf'(x)dx\right|<\frac{1}{\zeta}\epsilon<\frac{\epsilon}{R_1}$$

其中 $\zeta\in[R_1,R_2]$

可得

$$f(R_1)-f(R_2)<\frac{\epsilon}{R_1}$$

又 $\lim\limits_{R_2\to+\infty} f(R_2)=0$ 可得

$$R_1 f(R_1)<\epsilon$$

又因为

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R xf'(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\left(Rf(R)-af(a)-\int_a^R f(x)dx\right)$$

可得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

6. 对于充分大的 x，当 $p<-1$ 时有

$$f(x)<x^{-\frac{p+1}{2}}$$

所以原广义积分收敛

当 $p>-1$ 时有

$$f(x)>x^{-\frac{p+1}{2}}$$

故原广义积分发散

7.

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)=\gamma$$

8. 由

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1=-\frac{\sin x}{3x}+O\left(x^{-2}\right),(x\to 0)$$

故原级数条件收敛但不绝对收敛

9. (1) 当 $p \geq q-1$，原级数发散；

当 $p < q-1$ 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}dt$$

可得

$$\int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}dt \leq (k+1)\pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(k\pi)^q\left(\frac{2}{\pi}x\right)^r} = \frac{c(k+1)}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{2k^{\frac{q}{r}}\pi^{\frac{q}{r}}}\frac{dx}{1+x^r}$$

可知

$$C_1\frac{k^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{k^{\frac{q}{r}}}\frac{dx}{1+x^r} \leq \int_0^{\pi}\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}dt \leq C_2\frac{k^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{k^{\frac{q}{r}}}\frac{dx}{1+x^r}$$

若 $r > 1, \displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+x^r}$ 有界若 $r \leq 1$，则

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^r} \sim A^{1-r}(r<1) \text{ 或 } \ln A(r=1)$$

由于 $q > p+1$ 故原广义积分收敛当且仅当 $q > (p+1)r$

(2) 原广义积分收敛可得 $p > 0$ 又因为

$$\int_0^1 \frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{y}\cos y}{y^{2-p}}dy$$

且

$$\sin\frac{1}{y} \sim \frac{1}{y}, \cos\frac{1}{x} \to 1, x\to+\infty$$

可得 $p < 3$，再由 Dirichlet 判别法可得当 $0 < p < 3$ 时条件收敛，当 $1 < p < 2$ 时绝对收敛

10. 不妨设 f 是单调递减的。对于充分大的 k，和任意的 ϵ 可得

$$\int_{\frac{(12k+1)\pi}{6p}}^{\frac{(12k+5)\pi}{6p}} f(x)\sin px dx < \epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

任意给定 $\epsilon > 0$. 由 Riemann 引理可知

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^A f(x)\sin px dx = 0, \forall A > 0$$

对于充分大的 $R, 0 < f(x) < \epsilon$ 可得

$$\left|\int_R^{R+t} f(x)\sin px dx\right| = \left|f(R)\int_R^{\xi}\sin px dx\right| < 2\epsilon \Rightarrow \left|\int_R^{+\infty} f(x)\sin px dx\right| < 2\epsilon.$$

故

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin px dx = 0$$

11. $\forall\epsilon > 0$, 对于充分大的 n, 有 $\left|f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0)\right| < \epsilon$ 可得

$$\left|\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)dx - \int_0^{\sqrt{n}} f(0)\phi(x)dx\right| < \epsilon\int_0^{+\infty}|\phi(x)|dx$$

可得

$$\left|\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)dx-\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f(0)\phi(x)dx\right|<\epsilon\int_0^{+\infty}|\phi(x)|dx$$

由 ϵ 的任意性可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x$$

12. 我们将证明对于在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的 f 和周期为 $T>0$ 的连续函数 g 有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\int_0^T g(x)dx$$

由此由此可推出 (1), (2). 由例题 10.2.7 (Riemann 定理) 可知

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

因为 f 绝对可积且 g 有界，可得

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx-\int_{-A}^{+A} f(x)g(px)dx\right|<M\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|dx+M\int_A^{+\infty}|f(x)|dx<2M\epsilon,$$

对于充分大的 A 有

$$\lim_{p\to+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx-\int_{-A}^{A} f(x)g(px)dx\right|<2M\epsilon$$

故

$$\left|\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx-\frac{1}{T}\int_{-A}^{+A} f(x)dx\int_0^T g(x)dx\right|<2M\epsilon$$

可得

$$\begin{aligned}&\left|\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right|\\ \leq&\left|\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx-\frac{1}{T}\int_{-A}^{+A} f(x)dx\int_0^T g(x)dx\right|\\ +&\left|\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\int_0^T g(x)dx-\frac{1}{T}\int_{-A}^{+A} f(x)dx\int_0^T g(x)dx\right|<2M\epsilon+M\epsilon=3M\epsilon.\end{aligned}$$

可得

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(px)dx=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\int_0^T g(x)dx$$

13. 不妨设 $f(x)$ 单调递减且 $f\geq 0$, 我们证明

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f\left(a^+\right)\int_a^{\xi} g(x)dx$$

设 $m=\inf_{A\in[a,b]}\int_a^A g(x)dx, M=\sup_{A\in[a,b]}\int_0^A g(x)dx$. 积分是收敛的，故 $\exists A_1,A_2\in[a,b], m=\int_a^{A_1} g(x)dx, M=\int_a^{A_2} g(x)dx$, 我们需要证明

$$mf\left(a^+\right)\leq\int_a^b fgdx\leq Mf\left(a^+\right).$$

因为

$$mf\left(a^+\right)\leq\int_{a-\delta}^{b+\delta} f(x)g(x)dx\leq Mf\left(a^+\right)$$

由积分的收敛性可知

$$mf\left(a^{+}\right) \leq \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx \leq Mf\left(a^{+}\right)$$

A_1, A_2 的存在性可以保证 ξ 的存在性

14. 取 $f(x)=\dfrac{1}{x}, g(x)=f(x)$ 代入上题中

15. 任意的 $\epsilon>0$, 存在 $A>0$, s.t. $\dfrac{1}{A}\int_{a}^{+\infty} f(x)^{2}dx<\epsilon^{2}$. 任意 $A_2>A_1>0$ 有

$$\left(\int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x)}{x}dx\right)^{2} \leq \int_{A_1}^{A_2} f^{2}(x)dx \int_{A_1}^{A_2} \frac{1}{x^{2}}dx \leq \frac{1}{A_1}\int_{A_1}^{+\infty} f^{2}(x)dx<\epsilon^{2}$$

可知 $\int_{a}^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛

16. (1) 由 $t^{x-1}e^{-t}=O\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ 和 $x>0, t^{x-1}e^{-t}=O\left(t^{x-1}\right)$ 可得原积分收敛

(2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=\frac{1}{x}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt^{x}=\frac{1}{x}e^{-t}t^{x}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{x}\int_{0}^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$

(3) 由 (2) 可得

(4)$\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=2\int_{0}^{+\infty} e^{-t}d\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^{2}}dt=\sqrt{\pi}$

12.5.2 第二组参考题

1. 不等式易证由

$$1-x^{2} \leq e^{-x^{2}} \leq \frac{1}{1+x^{2}}$$

可得

$$\int_{0}^{1}\left(1-x^{2}\right)^{n}dx \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-nx^{2}}dx \leq \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^{2}\right)^{n}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx$$

而

$$\int_{0}^{1}\left(1-x^{2}\right)^{n}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} xdx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \int_{0}^{1} \cos^{2n-2} xdx=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

故由 Wallis 公式可得

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. 由

$$g(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^{2}}{2}}dt-e^{-\frac{x^{2}}{2}}\cdot\frac{1}{x}, g'(x)=e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left(-1+\frac{1}{x^{2}}+1\right)>0$$

可知 $g(x)$ 单调递增且 $g(x)<g(+\infty)=0$

由

$$h(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^{2}}{2}}dt-e^{-\frac{x^{2}}{2}}\cdot\frac{x}{x^{2}+1}, h'(x)=e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left(-\frac{2}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}\right)<0$$

可知 $h(x)$ 单调递减且 $h(x)>h(+\infty)=0$

3. 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g^{2}(x)}{x}=\lim_{x\to 0+} 2g(x)f(x)=0$$

故对于 $A>0$, 由分部积分

$$\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^A g^2(x)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{g^2(A)}{A}+2\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$$

而由 Schwarz 不等式

$$\left[\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x\right]^2\leq\left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

故

$$\left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{g^2(A)}{A}\right]^2\leq 4\left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

又 f 在 $[0,+\infty)$ 上平方可积, 故两边取上极限

$$\left[\lim_{A\to+\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right]^2\leq 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x\left[\lim_{A\to+\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$\lim\limits_{A\to\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=0$, 显然结论成立

若 $\lim\limits_{A\to\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\neq 0$, 则

$$\lim_{A\to\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leq 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$

即 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 有界, 由单调有界定理知 $\frac{g(x)}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上平方可积, 且

$$\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leq 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$

4. 由 $f^2(x)+\left(f''(x)\right)^2\geqslant 2\left|f(x)f''(x)\right|$ 可知, $\int_a^{+\infty} f(x)f''(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 由 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛以及 $f^2(x)-f^2(a)=2\int_a^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$ 可知, 不可能有 $f(x)f'(x)\to+\infty$ ($x\to+\infty$). 从而根据

$$\int_a^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t=f(x)f'(x)-f(a)f'(a)-\int_a^x\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

可选取一个趋于正无穷的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)f'(x_n)$ 有界, 可得 $\int_a^{x_n}\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$ 有界，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$ 存在。

5. (1) 由

$$\int_0^A f^2dx=xf^2(x)|_0^A-2\int_0^A xf(x)f'(x)dx$$

由柯西不等式知

$$\int_0^A xf(x)f'(x)dx$$

收敛，由于 $\int_0^A f^2dx$ 是关于 A 的递增函数，只需找到一个趋于正无穷的数列 $\{x_n\}$，使得 $x_nf^2(x_n)$ 有界此时 $\int_0^{x_n} f^2dx$ 有界故 $\int_0^{+\infty} f^2dx$ 存在

如果存在 $m>0$ 使得 $xf^2(x)>m$ 则 $x^2f^2(x)>mx$ 与 $xf(x)$ 平方收敛矛盾。故存在这样的 $\{x_n\}$，使得 $x_nf^2(x_n)$ 有界

所以 f 平方可积

(2) 由 (1) 的过程可知存在趋于正无穷的 $\{x_n\}$ 使得 $x_nf^2(x_n)$ 趋于 0，故

$$\int_0^{+\infty} f^2dx=-2\int_0^{+\infty} xf(x)f'(x)dx$$

所以由柯西不等式知

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{A} xf(x)f'(x)dx\leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

(3) 等号当且仅当 $xf(x)=cf'$ 即 $f(x)=ae^{-bx^2}$，$b>0$

6. 积分下限是 0，而 b 是正实数，导致 $\sqrt{x-b}$ 在 $(0,b)$ 上无意义，这题我们跳过。
7. 利用复变函数里的柯西积分公式即得。
8. (1) 由于 (2) 包含 (1) 的结论，我们只证 (2)

(2) 令 $\xi=e^{\frac{i\pi}{2n}}$ 由上题可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi^{2m(2k-1)}}{2n\xi^{(2n-1)(2k-1)}}=$$

$$\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi^{(2m+1)(2k-1)}=\frac{i\pi}{n}\xi^{2m+1}\frac{1-\xi^{2n(2m+1)}}{1-\xi^{2(2m+1)}}=\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{n}$$

(3) 令 $\xi=e^{\frac{i\pi}{2n}}$,n 为偶数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{n}}{x^{2n}+1}=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi^{n(2k-1)}}{2n\xi^{(2k-1)(2n-1)}}=$$

$$\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi^{(n+1)(2k-1)}=\frac{i\pi}{n}\xi^{n+1}\frac{1-\xi^{2n(n+1)}}{1-\xi^{2(n+1)}}=\frac{\pi}{n}\sec\frac{\pi}{2n}$$

取 $n=50,30$ 可得我们想要的答案

9. 设

$$A=\int_x^{+\infty} f(x)dx, B=\int_x^{+\infty} xf(x)dx, C=\int_x^{+\infty} x^2f(x)dx$$

则由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$AC\geq B^2,(1-A)(1-C)\geq B^2,B\geq xA$$

如果 $A>\dfrac{1}{x^2+1}$, 则

$$B>\frac{x}{1+x^2},C>\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow(1-A)(1-C)<\frac{x^2}{(1+x^2)^2}<B^2$$

矛盾，故 $A\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ (1) 和 (2) 都是 $A\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ 的推论

10. 设 $x>0,k=[x/p]$ 则

$$\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt}\frac{\sin xt}{t}=\sum_{n=-k}^{k}\cos npt\frac{\sin xt}{t}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-k}^{k}\frac{\sin\frac{npt+xt}{2}-\sin\frac{npt-xt}{2}}{t}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin st}{t} dt = \operatorname{sgn}(s)\pi$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt} dt =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-k}^{k} [\operatorname{sgn}(np+x) - \operatorname{sgn}(np-x)]\pi = (2k+1)\pi$$

可知等式对 $x > 0$ 成立，对 $x < 0$ 类似可得。