线性动态电路暂态过程的时域分析

本章主要讨论线性动态电路的暂态过程。着重研究一阶电路方程的解法和初始值、时间常数、自由分量和强迫分量；零输入响应和零状态响应并讨论二阶电路在不同条件解的特点。简要介绍卷积及状态变量分析法

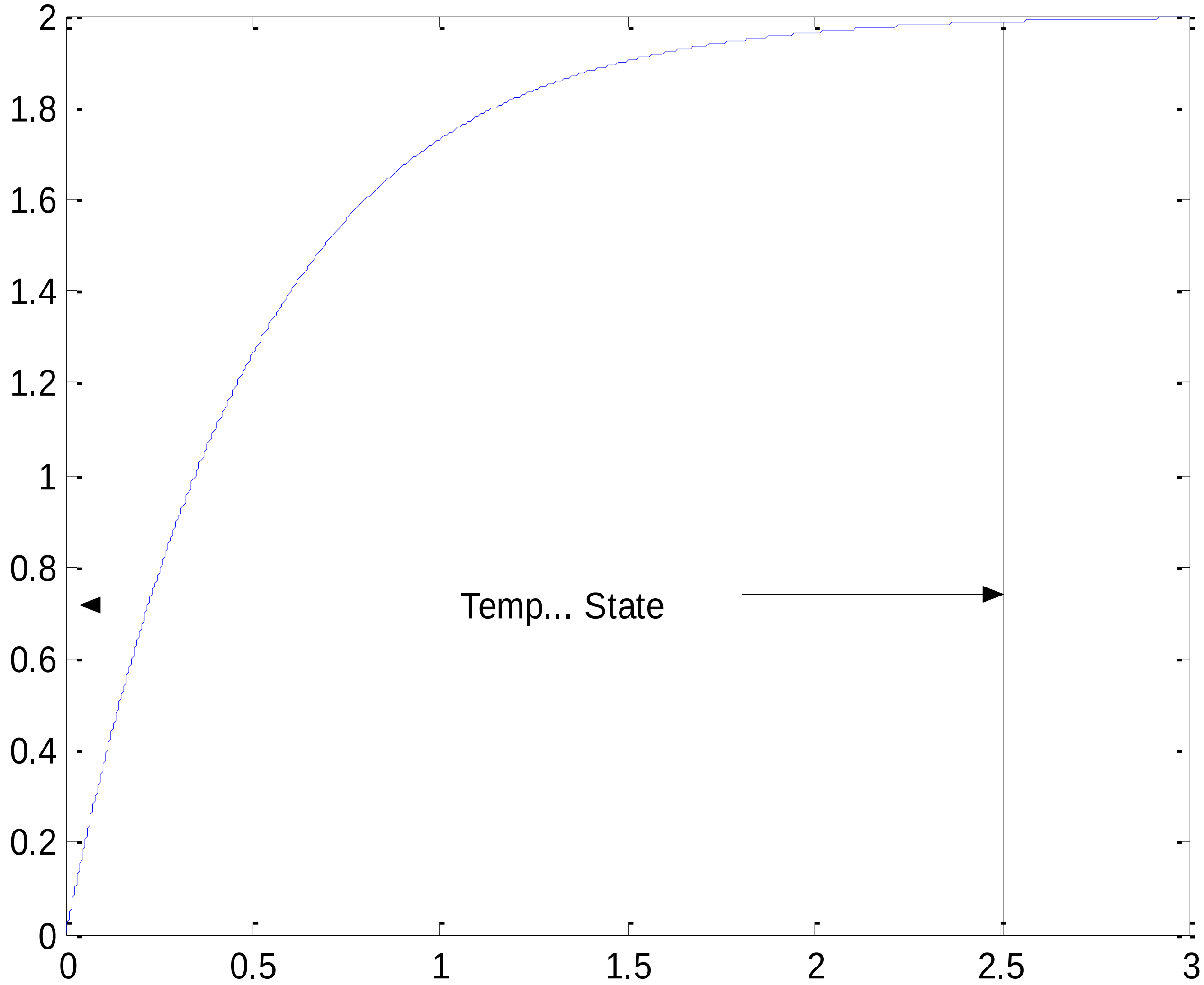
动态电路的暂态过程及其方程

- 回顾
  - 以前所讲述的电路电流和电压满足在一定时间内恒定，或者按照一定周期进行重复。称谓稳定状态
- 思考
  - 一个电路会受到以外的干扰以及开关的通断，此时储能元件发生能量变化，称谓暂态过程

动态电路的暂态过程及其方程

- 暂态过程和稳态过程的区别
  - 稳态过程其电路特性是一个代数方程组，
    - 直流电路是一个纯电阻电路的线性代数方程组
    - 正弦电流电路是一个复数形式的线性代数方程组
  - 暂态过程其电路特性是一个微分积分方程组
    - 一般采用时域分析的方法分析从状态改变前到状态改变后的变动规律

线性动态电路暂态过程



电容初始值

研究电容在电路状态改变的瞬间的量值

$$q(t) = Cu_c(t) = \int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\, d\tau$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\, d\tau$$

$$\left.\begin{array}{l} q(0^+) = q(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau)\, d\tau \\ u_c(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau)\, d\tau \end{array}\right. \underset{i_C(\tau)<\infty}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} q(0^-) = q(0^+) \\ u_C(0^-) = u_C(0^+) \end{array}\right.$$

结论：当经过电容的电流为一个**有界变量**时，电容的电荷数和电压是一个连续量，即是一个**渐变量**

线性电感的初始值

$$\begin{cases} \psi(t) = \int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\, d\tau \\ i_L(t) = \frac{1}{L}\psi(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

电压有界

$$\begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} u_L(\tau)\, d\tau \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u_L(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$$\underset{u_L(\tau)<\infty}{\Rightarrow} \begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

结论： 电压为**有界条件**下，电感的磁通和电流都是连续变化的，或者是**渐变**的（gradual change).

储能元件的能量储存

储能元件中能量存储计算：

$$\begin{cases} w_c = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2C}q^2 \\ w_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2L}\psi^2 \end{cases}$$

吸收或者释放功率计算：

$$\begin{cases} p_C = \frac{dw_c}{dt} \\ p_L = \frac{dw_L}{dt} \end{cases}$$

电压电流初始值的确定

电路定律任何时刻都成立

$$KCL:\sum i\left(0^{+}\right)=0 \quad KVL:\sum u\left(0^{+}\right)=0$$

t=0时，瞬间电容相当于电压源，电感相当于电流源，利用电压源和电流源进行电容和电感置换。

电路元件电压电流关系确定：

$$R: u_R\left(0^{+}\right)=Ri_R\left(0^{+}\right), i_R\left(0^{+}\right)=Gu_R\left(0^{+}\right);$$

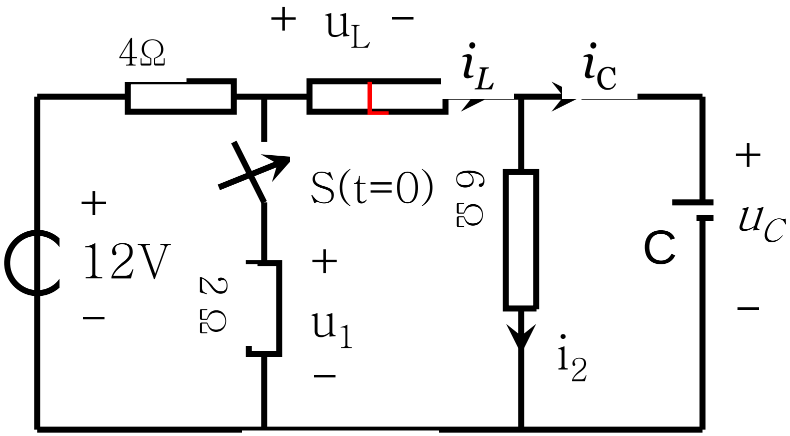
$$C: u_C\left(0^{+}\right)=u_C\left(0^{-}\right)$$

$$L: i_L\left(0^{+}\right)=i_L\left(0^{-}\right)$$

电路量的初始值

- 突变参数
  - 电容 电流
  - 电感 电压
  - 电阻 电流和和电压

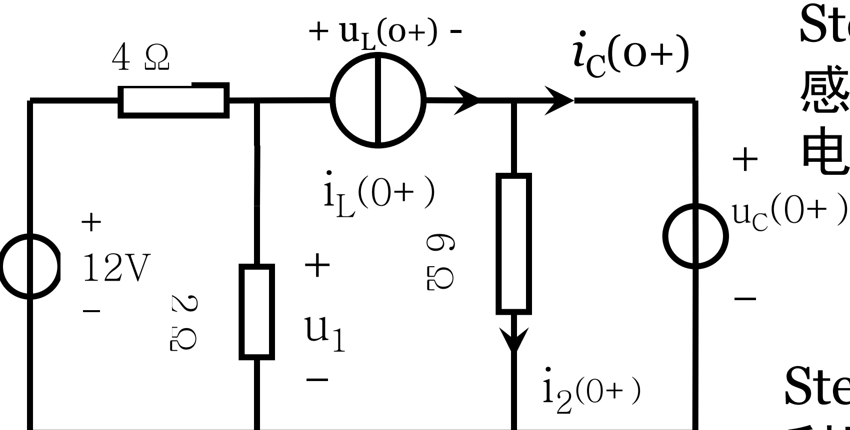
电路量的初始值



Step 1:换路前电路状态，此时为直流电路，电容开路，电感短路，计算电容电压和通过电感的电流

$$i_L\left(0^-\right)=\frac{12V}{(4+6)\Omega}=1.2A$$

$$u_C\left(0^-\right)=6\Omega\bullet i_L\left(0^-\right)=7.2V$$



Step2:换路后，根据电容电压是连续渐变量，电感电流是连续渐变量计算换路后电容电压和电感电流

$$i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=1.2A$$

$$u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=7.2V$$

Step3:将电感等效为电流源，电容等效为电压源利用节点电压法计算其他支路的电压和电流

$$\left(\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)u_1\left(0^+\right)=\frac{1}{4\Omega}12V-i_L\left(0^+\right) \quad \rightarrow i_C\left(0^+\right)=0$$

$$\rightarrow u_L\left(0^+\right)=u_1\left(0^+\right)-u_C\left(0^+\right)=-4.8V \quad \rightarrow u_1\left(0^+\right)=2.4V$$

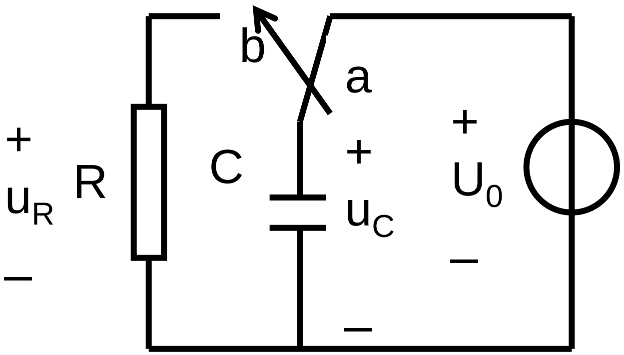
电路量的初始值

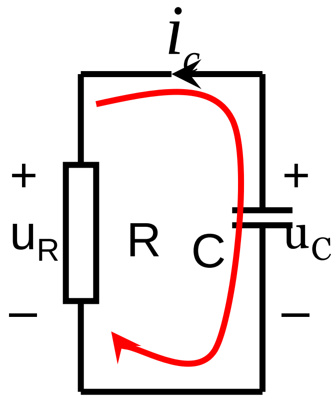
- 结论
  - 任何电路变量的初始值等于储能元件的初始储能单独作用产生的初始值与外加独立电源单独产生的初始值的叠加
  - 条件，满足叠加原理的线性电路条件

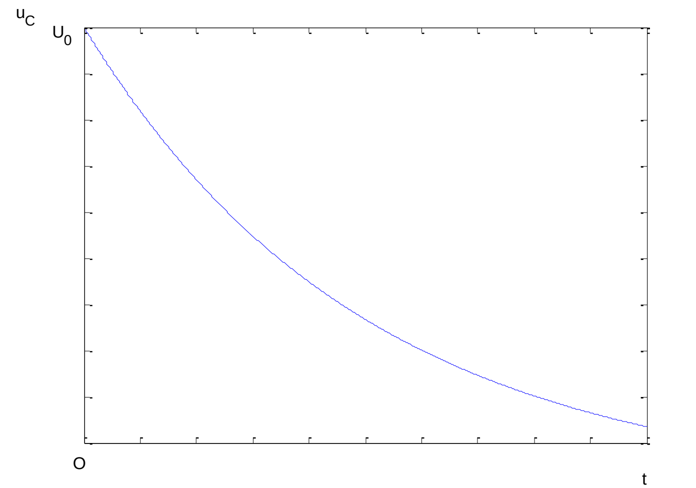
一阶电路微分方程的普遍形式

- 一阶电路
  - 用一阶微分方程描述的电路称为一阶电路(First Order Circuit).
  - 仅仅含有 1 个动态元件的电路属于 1 阶电路
- 处理方法
  - 将动态元件从电流分离，剩余部分为线性含源电阻电路
- 主要内容
  - 零输入响应
  - 零状态响应
  - 全响应

一阶RC电路的零输入响应







$$\begin{cases} -u_R + u_C = -Ri_C + u_C = RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_C(t) = Ae^{pt}\ (t>0) \\ RCp + 1 = 0 \\ u_C(0^+) = U_0 \end{cases}$$

齐次微分方程的解的形式

p是时间常数

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}\ (t>0)$$

一阶RC电路的零输入响应

u_c和i_c衰减速率取决于RC之积,RC为电路的**时间常数**(time constant)

$$\tau = RC$$

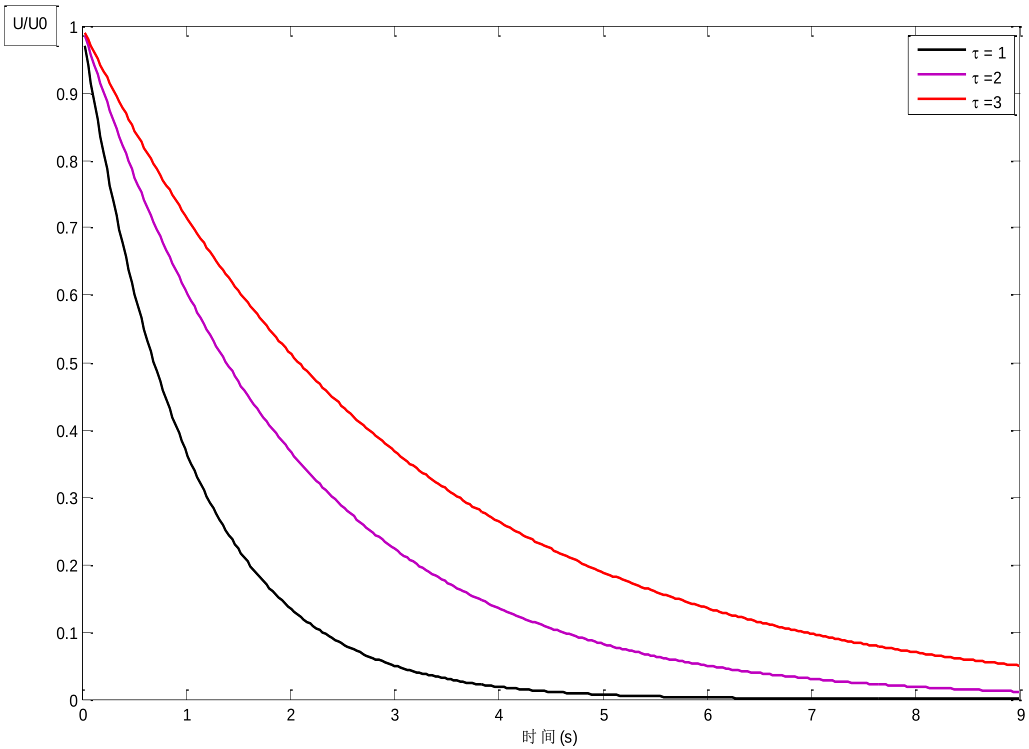
物理意义：指任意时刻t_0开始，电压下降到原来的36.8%所需要的时间经过3-5倍的时间常数的放电，可近似认为放电基本结束

讨论1：τ=RC的国际单位制的匹配问题

$$1\Omega \times 1F = 1\Omega \times \frac{1C}{1V} = 1\Omega \times \frac{1A \cdot 1s}{1V} = 1s$$

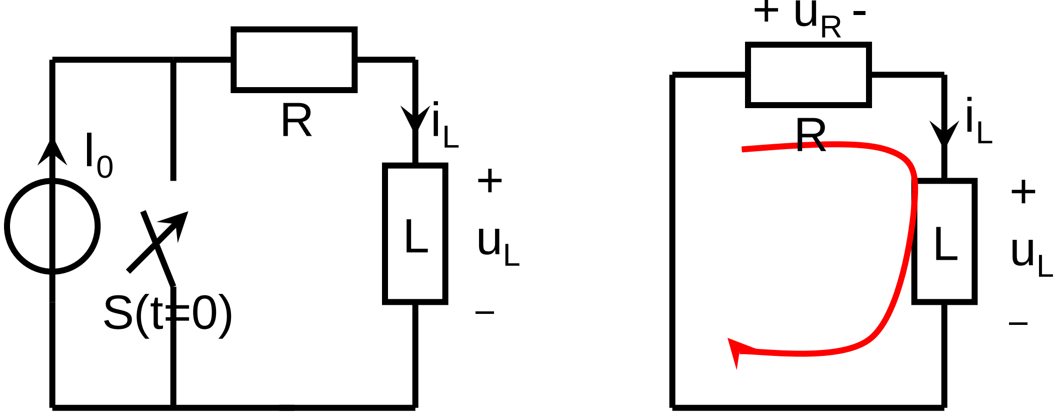
讨论2：R、C越大， τ越大，所需放电时间越长。物理解释为R越大，电容的储备的电荷通过电阻迁移到负极的电流越小，电荷数降低越慢，电压降低慢，放电时间长；固定R，C越大，相同的电压储能越多，但是放电的电流大小是固定的，自然放电就缓慢

不同时间常数的对应的u_C



图中给出了不同的时间常数下的零输入情况的RC电路的电压曲线，横坐标为时间单位为τ，纵坐标的是U/U_0，可以看出随着时间常数的增加放电时间变长

一阶RL电路的零输入响应

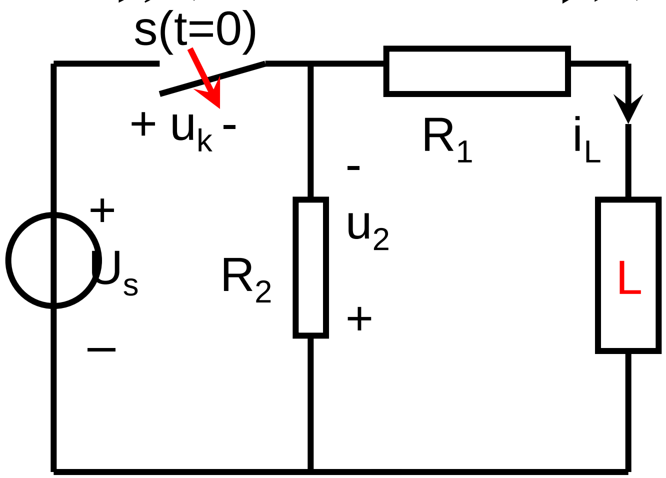


1. $t<0, i_L=I_0 \Rightarrow i_L(0^+)=i_L(0^-)=I_0$
2. $t>0, L\dfrac{di_L}{dt}+Ri_L=0$
3. $i_L=Ae^{-t/(L/R)}$
4. $A=I_0, i_L=I_0e^{-t/(L/R)}$
5. $u_R(t)=-Ri_L(t)=-I_0\mathrm{R}e^{-t(R/L)}$

解 = 通解+特解

讨论：RL电路中时间常数τ=L/R，国际单位制运算为1H/1Ω=1Ω.1s/1 Ω = 1s

一阶RL电路的零输入响应



U_s=35V,R1=5Ω,R2=5KΩ L=0.4H,t<0开关闭合处于直流稳态，t=0开关打开。求t>0时的i_L以及开关2端的电压$u_k(t)$

Step1:计算换路前的储能元件的参数

$$i_L|_{t<0} = U_s/R_1 = 7A$$

Step2:计算换路后的时间常数

$$\tau = L/\left(R_1 + R_2\right) \approx 8 \times 10^{-5}s$$

$$i_L\left(t\right) = i_L|_{t=0^-} e^{-t/\tau} = 7e^{-1.25\times10^4 t}A$$

$$u_2\left(t\right) = i_L\left(t\right)|_{t=0^+} R_2 = 35e^{-1.25\times10^4 t}KV$$

$$u_k\left(t\right) = U_s + u_2 = 35V + 35e^{-1.25\times10^4 t}KV$$

$$u_k(0^+) = 35035V$$

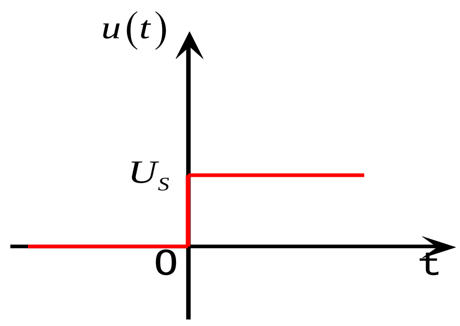
一阶RL电路的零输入响应

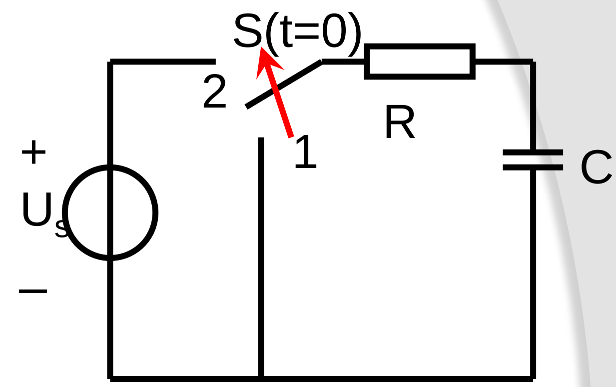
- 前述例题的一些讨论
  - 一阶电感电路可能在开关状态发生改变的瞬间承受**远远超过电源电压**的冲击
  - 选择开关元器件时必须考虑短时的最大可能承受的冲击电压，否则开关器件烧毁
  - 电路设计要避免开关发生时候的过高电压，设计保护电路
  - 该电路行为也可以用于设计大幅度脉冲系统，通过快速通断产生远远超过电源的脉冲信号

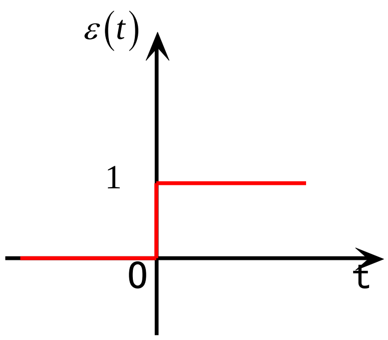
阶跃函数和冲击函数

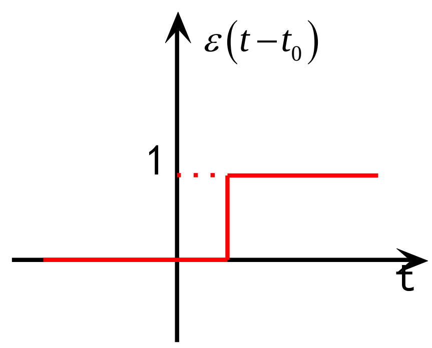
unit step function:

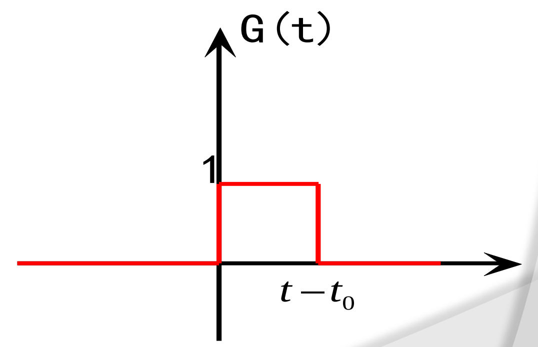
$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & \mathrm{t} < 0 \\ 1 & \mathrm{t} > 0 \end{cases}$$







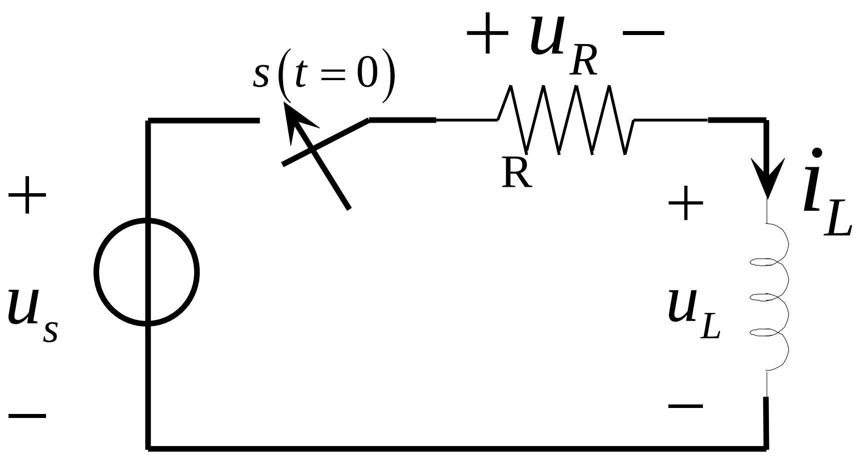




一阶电路的零状态响应

- 零状态响应
  - 当系统的储能元件的原始储能为0时,仅由独立电源作用而引起的响应
  - 独立电源类型
    - 正弦电源
    - 阶跃响应
    - 冲激响应

一阶电路的在正弦电源作用下的零状态响应



$$u_s = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_S$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

解的组成:此方程任意特解i_{Lh} 和齐次方程的通解 i_{Lp} 。即:

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

1. 利用正弦稳态解作为特解

$$i_{Lp}(t) = I_{mLp}\cos(\omega t + \psi_i)$$

$$j\omega L\dot{I}_{mLp} + R\dot{I}_{mLp} = \dot{U}_m$$

一阶电路的在正弦电源作用下的零状态响应

Step2:求取对应齐次微分方程的通解

$$L\frac{di_{Lh}}{dt}+Ri_{Lh}=0 \qquad i_{Lh}(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Step3:求解对应非齐次微分方程的解=特解+通解×待定系数A

$$\begin{cases} i_L=\mathrm{I}_{mLp}\cos(\omega t+\psi_i)+Ae^{-\frac{t}{\tau}} \\ A=-I_{mLp}\cos(\psi_i) \\ i_L(0^+)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_L(t)=I_{mLp}\cos(\omega t+\psi_i)-I_{mLp}\cos(\psi_i)$$

一阶电路的在正弦电源作用下的零状态响应

$$i_L(t) = \underline{I_{mLp}\cos(\omega t+\psi_i)} - \underline{I_{mLp}\cos(\psi_i)\,e^{-t/\tau}}$$

特解 $i_{Lp}(t)$ 形式和 $u_s(t)$ 的形式相同，强制分量

稳态分量

steady state component

函数形式通解和独立电源无关，仅仅和电路结构和元件参数相关，其量值和独立电源相关联，称为自由分量

暂态分量

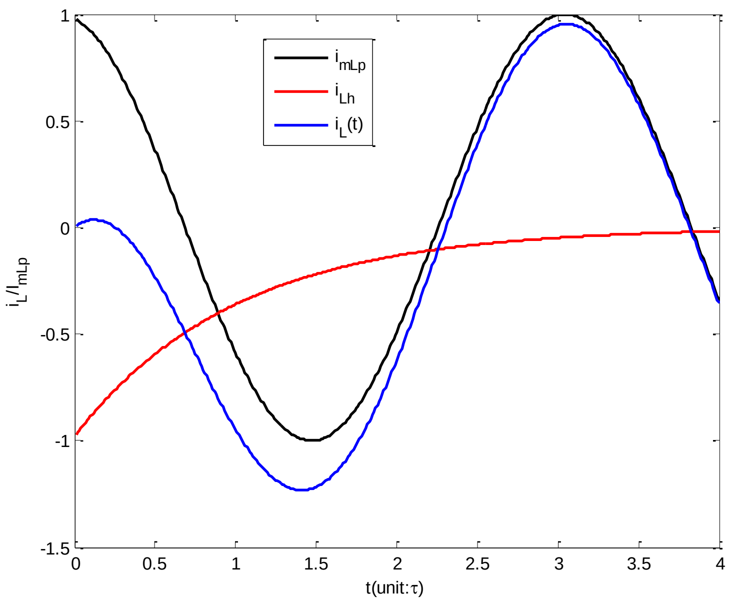
transient component

零输入响应中只有暂态响应（自由响应）

一阶电路的在正弦电源作用下的零状态响应

关于正弦电源零状态响应的一些讨论

1、电流i_L 的自由分量的量值与$\varphi i = \varphi u - \varphi$ 有关，接入相位角φu可以为任意相位值



Condition1: $\psi_i = \psi_u - \phi = \pi/2$

此时特解对应的暂态分量为0，则本系统不经过暂态过程直接进入正弦稳态

Condition1: $\psi_i = \psi_u - \phi = k\pi(k \in Z)$，此时特解对应的暂态分量最大

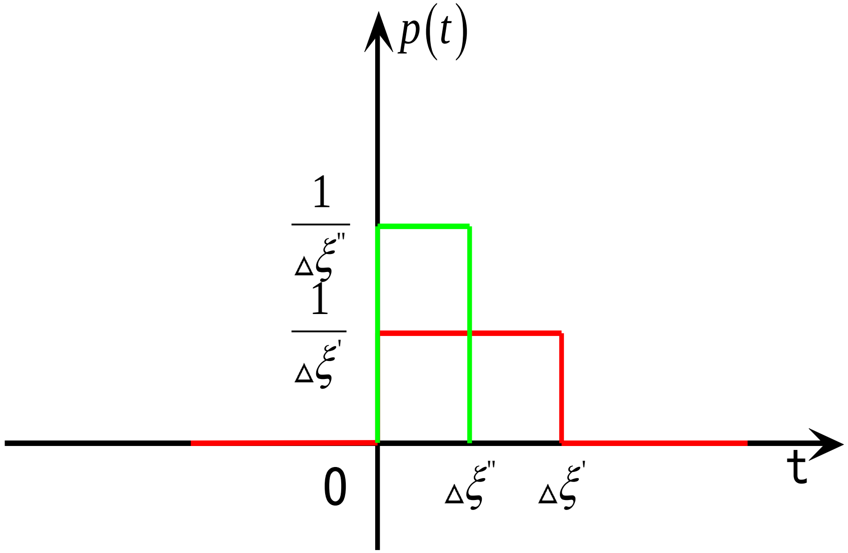
阶跃函数和冲击函数

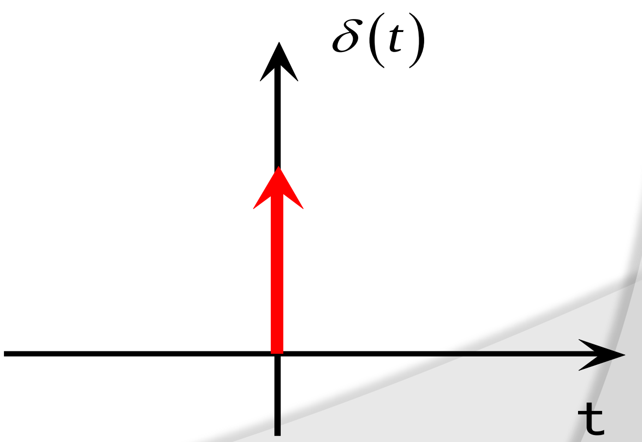
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

对一个面积为1的脉冲进行无限制的时间域压缩的结果

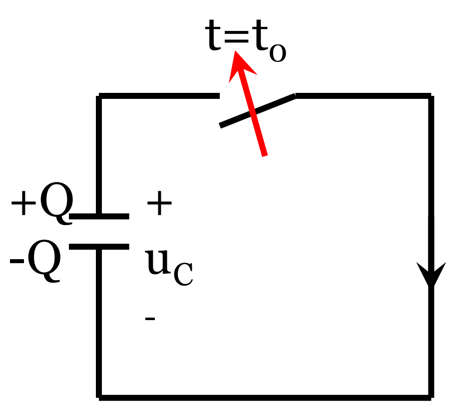
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

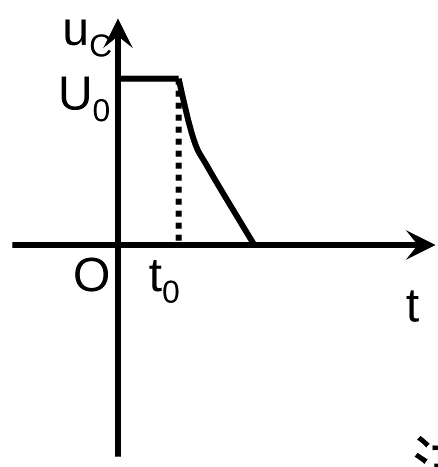
面积约束条件，非常重要！

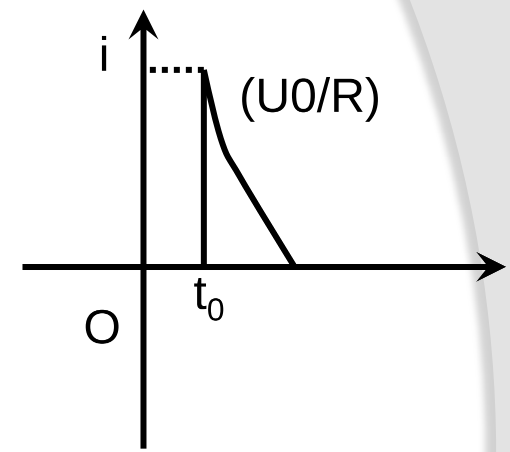


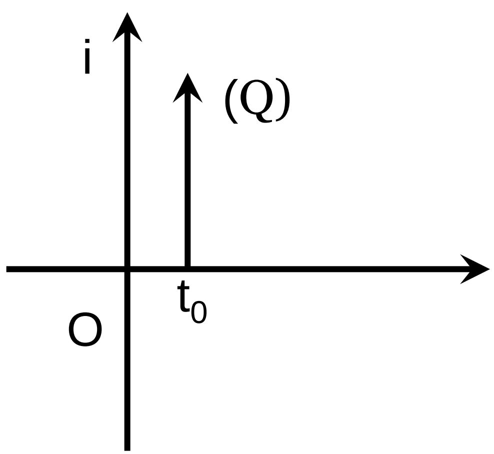


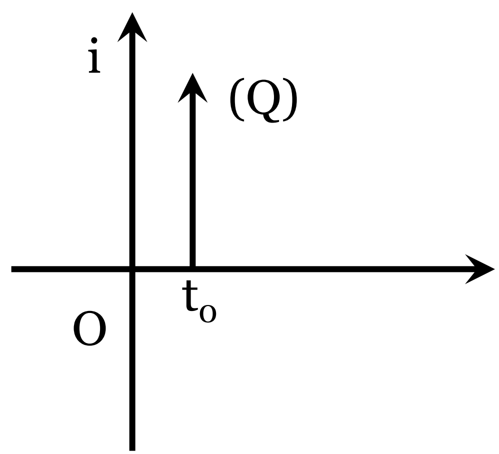
冲击函数的若干例子





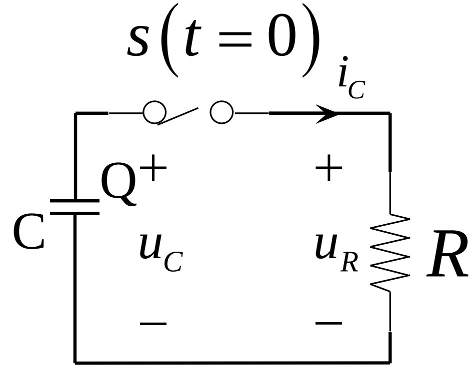






注意在系统电流为冲击的情况下电容的电压不再保持连续，和以前讲述的电容电压是连续量不矛盾，后者存在的前提是电流是一个有界函数

冲激函数的若干例子



$$\begin{cases} C\dfrac{du_c}{dt}+\dfrac{u_c}{R}=0 \\ u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=\dfrac{Q}{C} \end{cases}$$ 初值

电容电流表达式为：$i_C=\dfrac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}=\dfrac{Q}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

电容电压表达式为：$u_C\left(t\right)=\dfrac{Q}{C}e^{-t/\tau},\tau=RC$

$$R\to 0, i_C\left(t\right)=0,\left(t\neq 0\right)$$

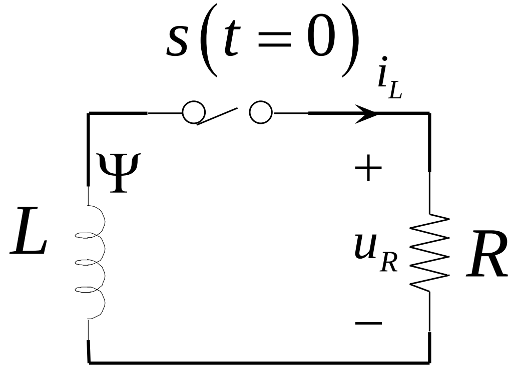
$$R\to 0, i_C\left(t\right)=i_\delta\delta\left(t\right)$$

$$\Rightarrow i_C\left(t\right)=Q\delta\left(t\right)$$

单位:库仑

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_C\left(t\right)dt=Q$$

冲激函数的若干例子



$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt}+i_L R=0 \\ i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=\dfrac{\psi}{L} \end{cases}$$

电感电流表达式为： $i_L(t)=\dfrac{\psi}{L}e^{-t/\tau},\tau=L/R$

电感电压表达式为： $u_R=\dfrac{\psi R}{L}e^{-t/\tau}$

$$R\to\infty,u_R(t)=0,(t\neq 0)$$

$$\begin{cases} R\to\infty,u_R(t)=U_\delta\delta(t) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u_R(t)\,dt=\psi \end{cases} \Rightarrow u_R(t)=\psi\delta(t)$$

单位：韦伯

冲击函数的一些性质

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta(kt) = k\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_1)\,dt = f(t_1)$$

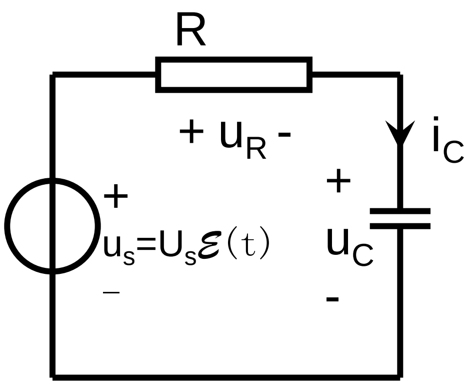
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t-t_0)\,dt = \varepsilon(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_0) = \varepsilon'(t-t_0)$$

一阶电路的零状态响应

阶跃响应与单位阶跃响应

- 电路在阶跃电源作用下的零状态响应成为阶跃响应
- 线性电路的阶跃响应与阶跃电源的幅值比为该电路的单位阶跃特性



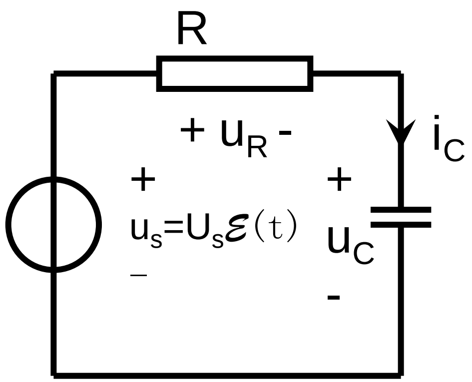
Step1:电容电压初始值

$$u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=0$$

Step2:列出微分方程

$$CR\frac{du_c}{dt}+u_c=U_S\varepsilon\left(t\right)$$

一阶电路的零状态响应之阶跃响应



Step3:求特解$s_p(t)$

$$s_p(t) = \varepsilon(t)$$

Step4:求通解$s_h(t)$

$$s_h(t) = Ae^{-t/RC}$$

Step5:求零状态的微分方程的解

$$s(t) = s_p(t) + s_h(t) = 1 + Ae^{-t/RC}$$

Step6:求解待定系数A=-1，于是

$$s(t) = 1 - e^{-t/RC}, t > 0$$

$$s(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right)\varepsilon(t)$$

矩形脉冲输入的零状态响应

输入信号

$$U_s\varepsilon(t) - U_s\varepsilon(t-t_0)$$

线性叠加原理 $\Longrightarrow$

输出信号

$$u_c(t) = U_s s(t) - U_s s(t-t_0)$$

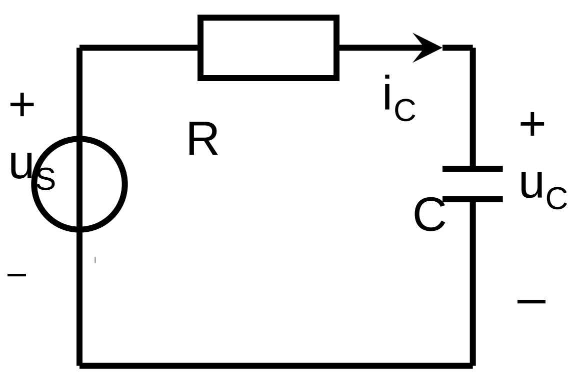
$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ U_S\left(1-e^{-t/\tau}\right) & (0 \le t < t_0) \\ U_S\left(1-e^{-t/\tau}\right) - U_s\left(1-e^{-(t-t_0)/\tau}\right) = U_S\left(1-e^{-t_0/\tau}\right)e^{-(t-t_0)/\tau} & (t \ge t_0) \end{cases}$$

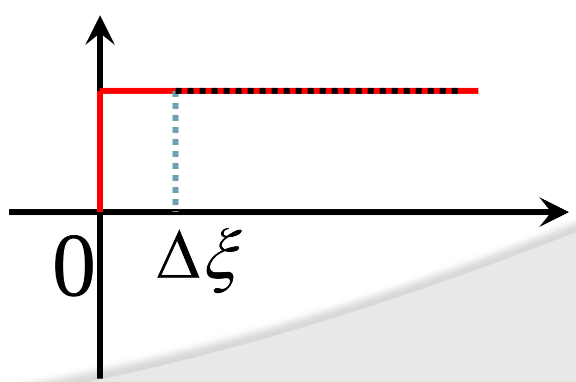
一阶电路的零状态响应

- 冲激响应和单位冲激响应
  - 电路在冲击电源作用下的零状态响应成为冲激响应
  - 线性电路的冲击响应与电源的冲击强度之比成为单位冲激特性

$$h(t) = \frac{u_C(t)}{\psi}$$

注意！h(t)的单位是s^{-1}, 单位脉冲函数在脉冲宽度趋于o的极限





一阶电路零状态响应-线性叠加

计算输入信号: $u_s = \frac{\psi}{\Delta\xi}\varepsilon(t) - \frac{\psi}{\Delta\xi}\varepsilon(t-\Delta\xi)$

此时对应的输出为：

$$u_c(t) = \frac{\psi}{\Delta\xi}\left(s(t) - s(t-\Delta\xi)\right), s(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\varepsilon(t)$$

$\Delta\xi \to 0$ 时，得到冲击响应：$h(t) = \lim\limits_{\Delta\xi\to 0}\frac{ds(t)}{dt}$

$$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$

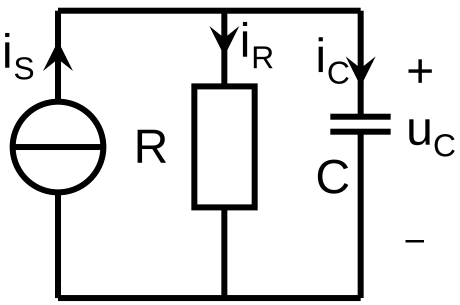
$$U_C(t) = \psi h(t) = \frac{Q}{C}e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$

$$i_C(t) = C\frac{du_c}{dt} = Q\delta(t) - (U/\mathrm{R})\,e^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$

一阶电路的零状态冲击响应求解方法

1．计算电路单位冲击电压或者电流在储能元件中产生的初始值

2．计算在该初始值前提下的零输入响应



$$i_C + i_R = C\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R}u_C(t) = Q\delta(t)$$

对2边进行积分，可以得到：

$$C\int_{0^-}^{0^+} u_c(t)\,dt + \int_{0^-}^{0^+} u_c(t)\,dt = Q\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt$$

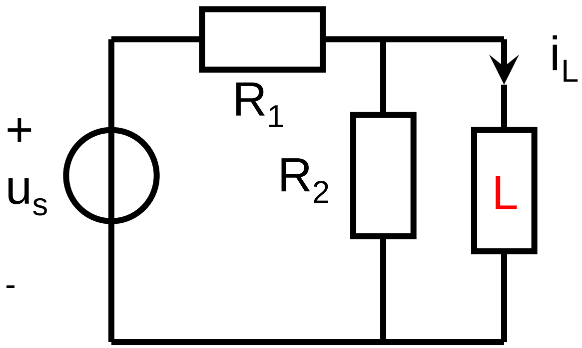
经过处理可以得到：

$$u_C(0^+) = Q/C + u_C(0^-)$$

思考：对于冲击电压源对LR电路进行激励后的电感初始值：

$$i_L(0^+) = \frac{\psi}{L} + i_L(0^-)$$

一阶电路的零状态冲击响应

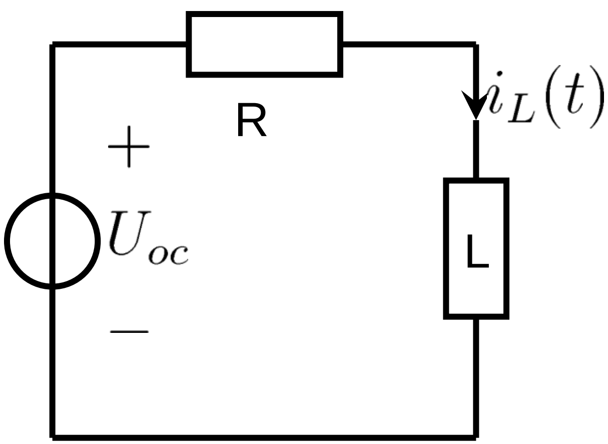


$$R_1 = 30\Omega, R_2 = 60\Omega, L = 0.1H$$

$u_S = 18Wb \cdot \delta(t)$ 求：冲激响应$\boldsymbol{i_L}$

1. 对原图戴维南等效，得到新的等效电路图

$$U_{oc} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_S = 12Wb \times \delta\left(t\right)$$
$$R = R_1//R_2 = 20\Omega$$



2. 计算冲击电源引起的储能元件初始值

$$i_L\left(0^+\right) = \frac{\psi}{L} + i_L\left(0^-\right) = 120A$$

3. 计算时间常数 τ

$$\tau = \frac{L}{R} = 0.005s$$

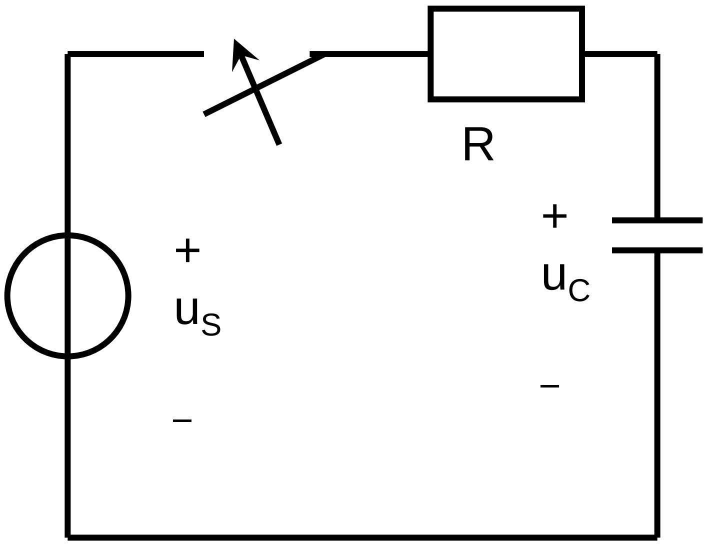
4. 电感电流i_L

$$i_L\left(t\right) = 120e^{-200t}\varepsilon\left(t\right)A$$

一阶电路的全响应

- 全响应
  - 由独立源和储能元件的原始储能共同作用引起的响应成为全响应(complete response)
  - 求解过程A
    - Step1:求该微分方程特解 ---强制分量
    - Step2:求齐次微分方程的通解---自由分量
    - Step3:求取通解的的待定系数
  - 求解过程B
    - Step1:求取零状态响应
    - Step2:求取零输入响应
    - Step3:合并零输入相应+零状态相应

一阶电路的全响应



Step1:电路方程及初始条件

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$
$$u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=U_0$$

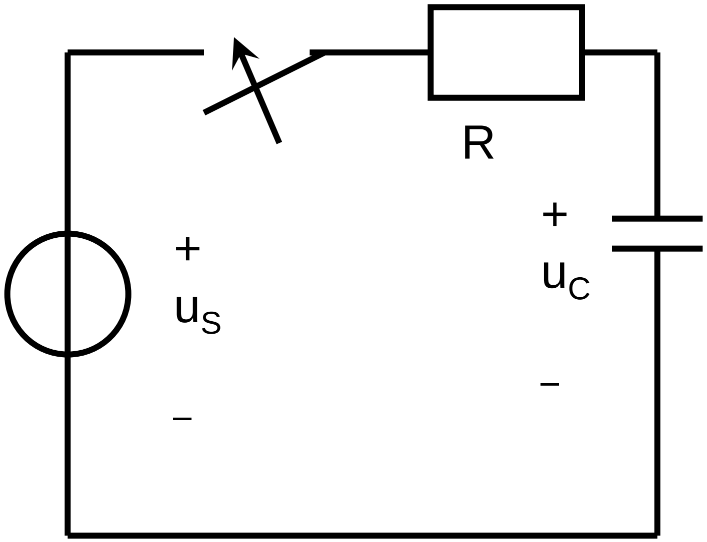
Step2:计算零输入响应

$$RC\frac{du_c'}{dt}+u_c'=0$$
$$u_c'\left(0^+\right)=u_c'\left(0^-\right)=U_0$$

Step3:计算零状态响应

$$RC\frac{du_c''}{dt}+u_c''=u_s$$
$$u_c''\left(0^+\right)=u_c''\left(0^-\right)=0$$

一阶电路的全响应



Step4:合并验证

$$RC\frac{d(u_C''+u_C')}{dt}+(u_C''+u_C')=u_S$$

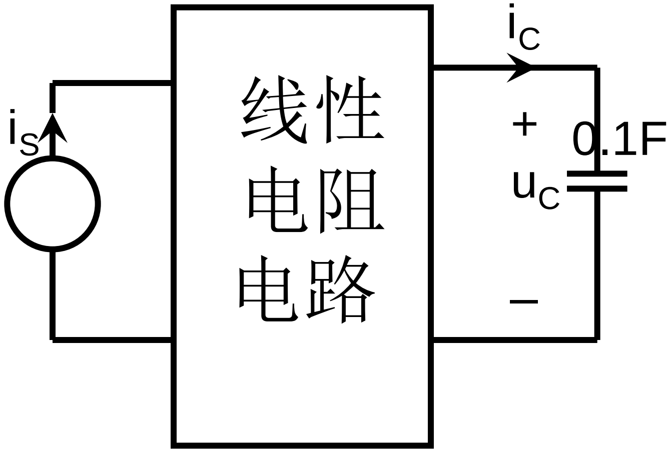
$$u_C'(0^+)+u_C'(0^-)=U_S$$

$$\Rightarrow u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)$$

全响应 = 零状态相应 + 零输入响应

零状态响应中既包括自由分量也包括强制分量，零输入响应仅仅包含自由分量

一阶电路的全响应



电流源i_s是激励，以u_c响应时，单位阶跃特性$s(t) = 2\left(1 - e^{-5t}\right)\Omega\varepsilon(t)$. t<0 时$u_C(0^-) = 3V$电容充电, 求$i_s = 2\varepsilon(t)$和$i_s = 0.2C \times \delta(t)$的全响应

全响应 $u_C(t) = u'_C(t) + u''_C(t)$

自由分量

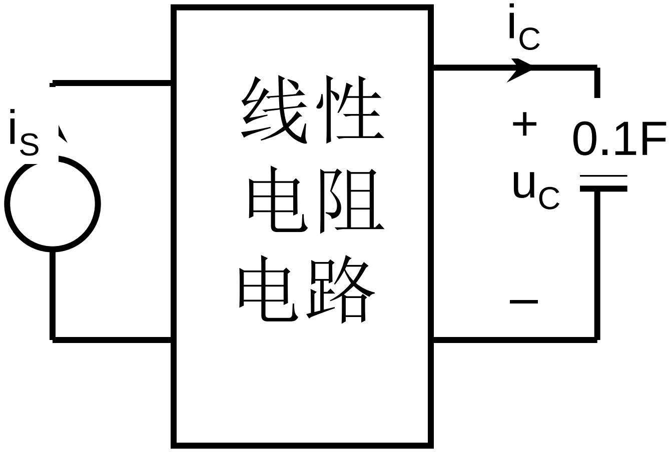
零状态响应$u''_C(t) = 2\varepsilon(t) \times s(t) = 2A \times (1 - e^{-5t})\Omega\varepsilon(t)|_{i_s=2\varepsilon(t)}$

零输入响应仅包含自由分量 $u'_C(t) = Ae^{-5t}\Omega\varepsilon(t)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 3V \Rightarrow A = 3$$

$$\Rightarrow u_C(t) = 2\Omega\varepsilon(t) + e^{-5t}\Omega\varepsilon(t)|_{i_s=2\varepsilon(t)}$$

一阶电路的全响应



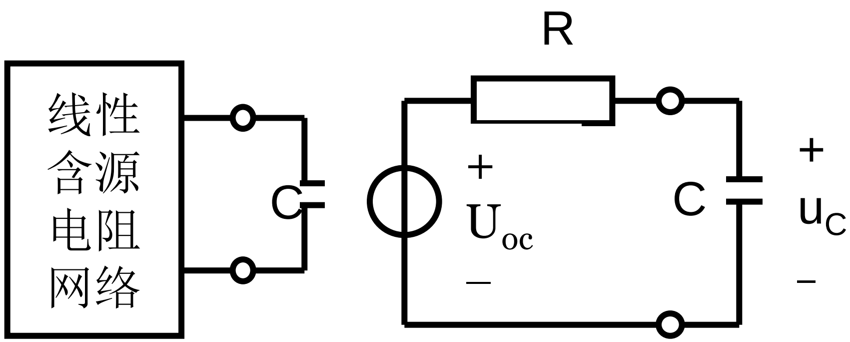
单位冲击响应

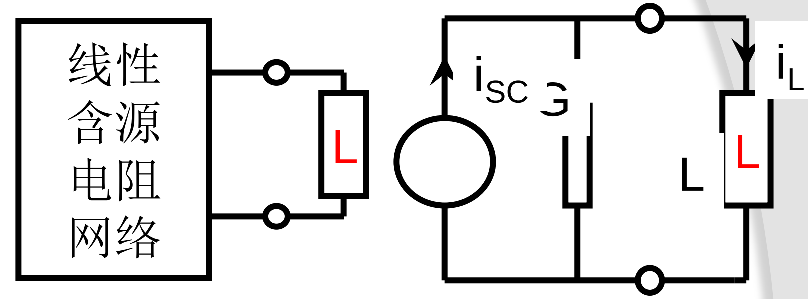
$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=10e^{-5t}\varepsilon(t)\,(\Omega/s)$$

零状态响应 $u''_C(t)=0.2\delta(t)A\times h(t)=2e^{-5t}\varepsilon(t)\big|_{i_s=0.2\delta(t)}$

全响应 $u_c(t)=u'_c(t)+u''_c(t)=\begin{cases}3V & t<0\\ 5e^{-5t}V & t\geq 0\end{cases}$

一阶电路暂态过程解的三要素公式





$$\begin{cases} RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u_{oc} \\ u_c\left(0^+\right)=U_0 \end{cases}$$

$$\tau=RC$$

$$\begin{cases} GL\frac{di_L}{dt}+i_L=i_{sc} \\ i_L\left(0^+\right)=I_0 \end{cases}$$

$$\tau=GL$$

$$\begin{cases} \tau\frac{df(t)}{dt}+f\left(t\right)=g\left(t\right) \\ f\left(0^+\right)=F_0 \end{cases}$$

任何只包含一个储能元件的含源电路的方程，都可化简为一阶常系数线性非齐次线性微分方程。

一阶电路暂态过程解的三要素公式

Step1:根据激励g(t)确定特解$f_p(t)$

Step2:求取齐次方程通解$f_h(t)$

$$f_h(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Step3:写出解的一般形式，并求取待定参数A

$$f(t) = f_p(t) + f_h(t) = f_p(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$t = 0^+, f(0^+) = f_p(0^+) + A$$
$$A = f(0^+) - f_p(0^+)$$
$$f(t) = f_p(t) + \left[f(0^+) - f_p(0^+)\right]e^{-t/\tau}$$

初始值,时间常数,特解(通常是强制分量)—求解一阶电路的暂态过程三要素

一阶暂态电路的三要素公式

特例：当激励源为**直流**或者**阶跃电源**时,此时的稳态解或者强制分量是常量

$$f_p(t) = f_p(0^+) = f(\infty)$$

$$f(t) = f(\infty) + \left(f(0^+) - f(\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

一阶电路暂态过程解的三要素之特解获取

$$g(t) \rightarrow f_p(t)$$

根据激励源得到特解的一般形式，带入到微分方程中，求取待定系数即可

$$g(t) = K \rightarrow f_p(t) = A$$

$$g(t) = Kt \rightarrow f_p(t) = A + Bt$$

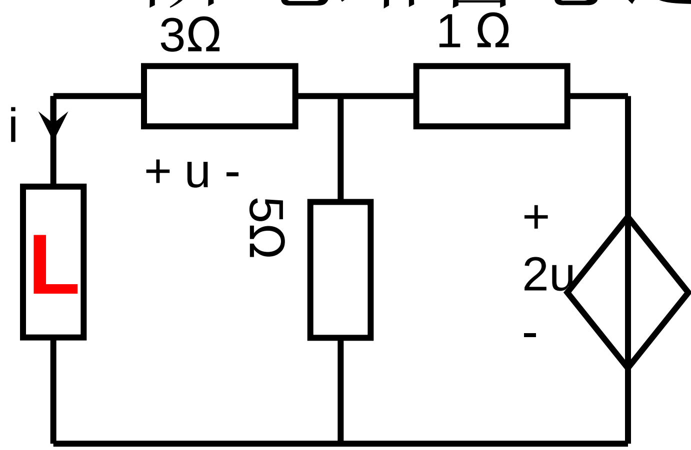
$$g(t) = Kt^2 \rightarrow f_p(t) = A + Bt + Ct^2$$

$$g(t) = Ke^{-bt} \left(b \neq 1/\tau\right) \rightarrow f(t) = Ae^{-bt}$$

$$g(t) = Ke^{-bt} \left(b = 1/\tau\right) \rightarrow f(t) = Ate^{-bt}$$

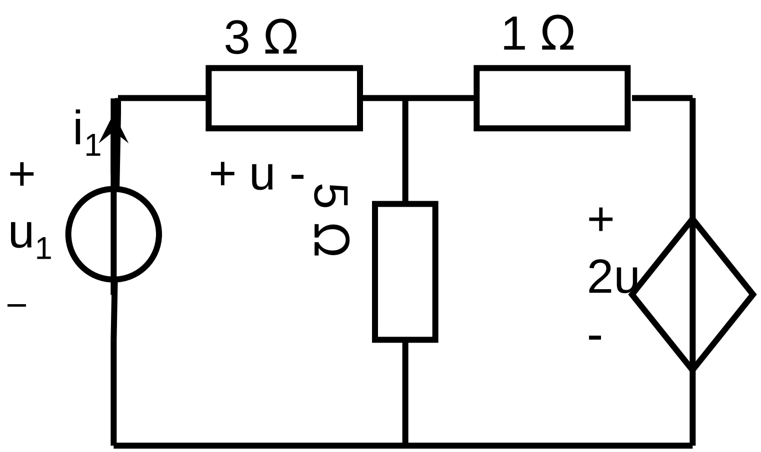
$$g(t) = k\cos(\omega t + \phi) \rightarrow f(t) = A\cos(\omega t + B)$$

一阶电路暂态过程解的三要素公式



已知：$i_L(0-)=10A, L=1/6H$，求t>0是电感电流i的变化规律

思路：该电路无独立源，因此属于典型的零输入响应，特解为0，仅需要考虑通解，初值已经给出，只需要求出时间常数即可解决问题



Step1:三要素之初值求取

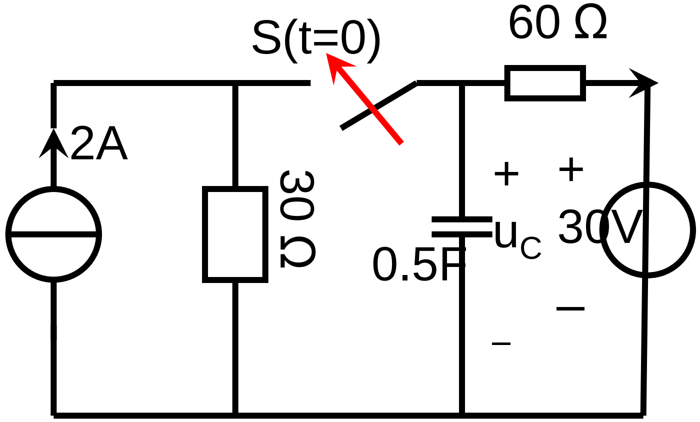
$$i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=10A$$

Step2:三要素之通解获取

$$R_i=53/6\Omega, \tau=1/53s$$

$$i_L\left(t\right)=i_L\left(0^+\right)e^{-t\tau}=10e^{-53t}$$

一阶电路暂态过程的三要素公式



思路：三要素法，初值，特解和通解，特解和通解先化简为戴维南等效

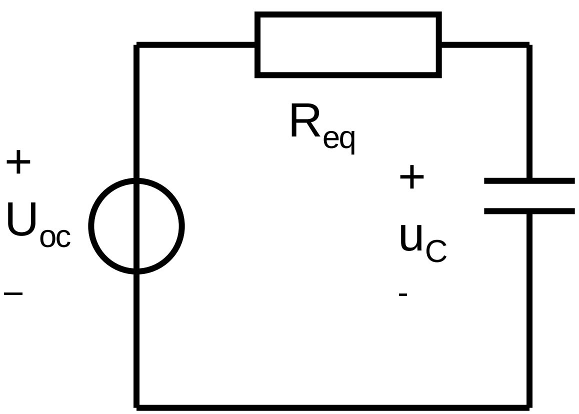
Step1:求初值

$$u_C\left(0^+\right)=u_C\left(0^-\right)=30V$$

Step2:戴维南等效

$$R_{eq}=20\Omega, U_{oc}=50V$$

Step3:计算时间常数 $\tau=10s$

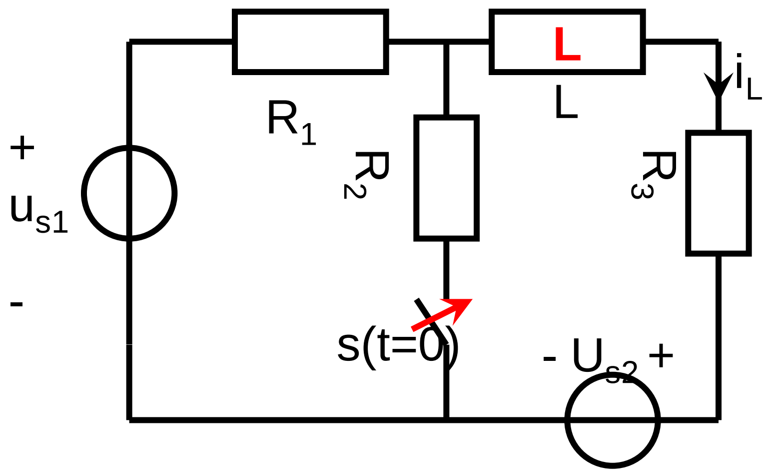


Step4:写出结果

$$u_C\left(t\right)=u_{cp}\left(t\right)+\left(u_c\left(0^+\right)-u_{cp}\left(0^+\right)\right)e^{-t/\tau}$$

$$u_C\left(t\right)=\left(50-20e^{-t/10}\right)V\left(t>0\right)$$

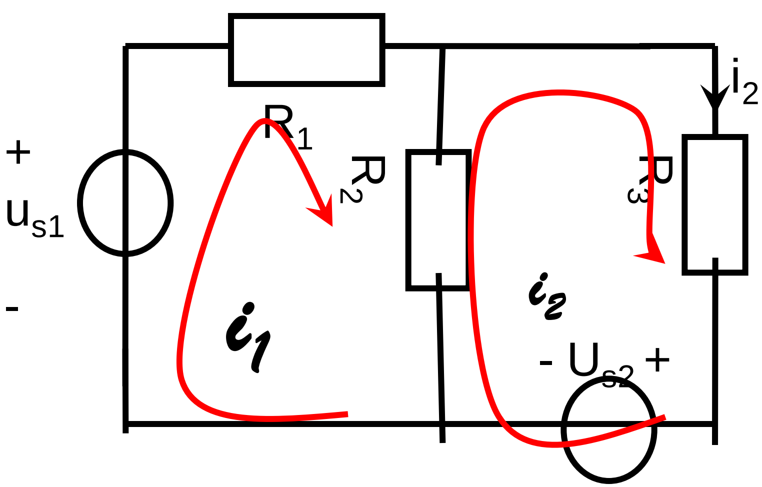
一阶暂态电路的三要素公式应用



电路在$t<0$时处于稳态，$U_{s1}=38V$, $U_{s2}=12V, R_1=20\Omega, R3=6\ \Omega, L = .2H, R2=5\Omega$
求：$t>=0$时的电感电流i_L

思路：电源为直流电源，可以利用稳态解作为特解简化问题。

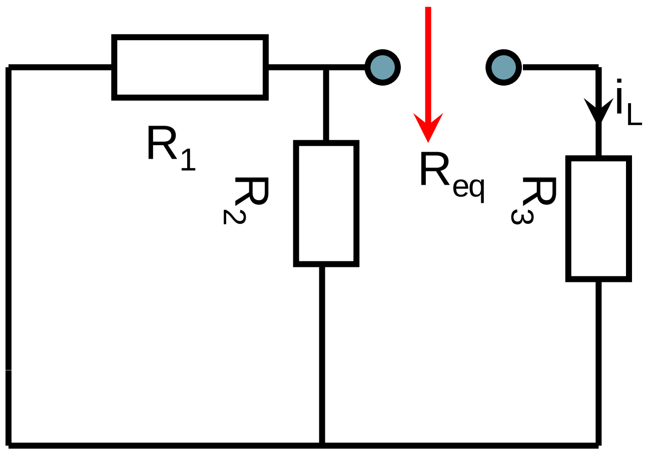
Step1:求解稳态解



$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38V \\ -12V \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_L(\infty) = i_2 = 0.44A$$

一阶电路全响应的三要素公式



Step2:求时间常数，仅仅需要求出在电源置0后从电感2端看进去的电阻。

$$R_{eq} = R_3 + (R_1//R2) = 10\Omega$$

$$\tau = L/R = 0.2H/10\Omega = 0.02s$$

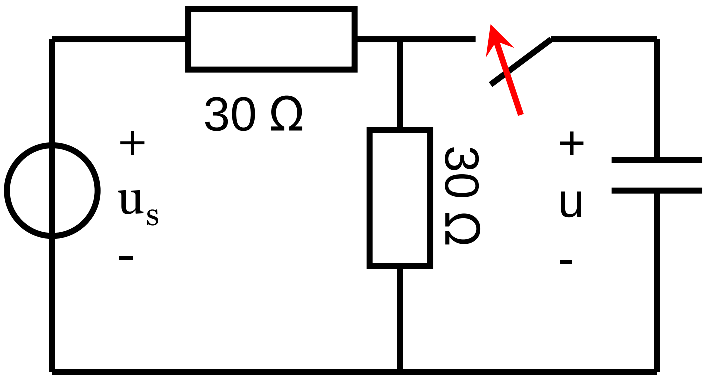
Step3：求取初值 $i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right) = 1A$

Step4:根据时间常数和稳态解写出电流

$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left(i_L\left(0^+\right) - i_L(\infty)\right)e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t) = \left(0.44 + 0.56e^{-50t}\right)A$$

一阶暂态电路的三要素公式应用



C=0.001F,u_s是正弦电压源，幅值为90V,角频率为50rad/s，u_s为正的最大值时，开关接通，开关接通前电容电压为10V,求开关接通后电压u的变化规律

Step1 :初值 $u\left(0^{+}\right)=u\left(0^{-}\right)=10V$

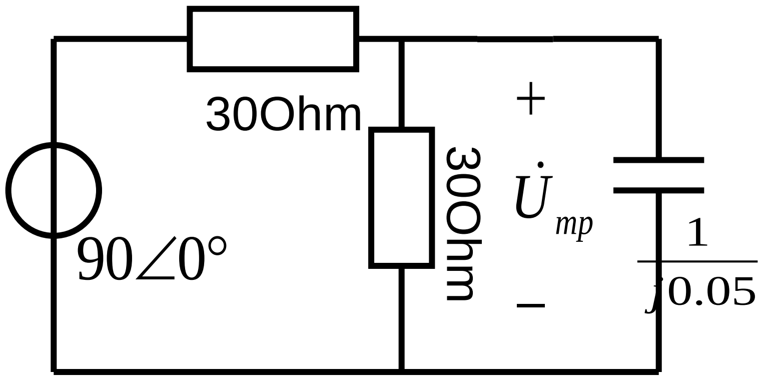
Step2:求系统的时间常数，看从电容2端看进去的等效电阻R_{eq}

$$\mathrm{R}_{eq}=30\Omega//60\Omega=20\Omega$$
$$\tau=RC=20\Omega\times0.001F=0.02s$$

Step3 :系统的通解

$$u_{mh}\left(t\right)=Ae^{-50t}V$$

一阶暂态电路的三要素公式



Step4:求系统的特解，t>0，写出电路的相量形式，利用节点电压法求解

$$\dot{U}_{sm} = 90\angle 0^\circ$$

$$\left(\frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{60\Omega} + j0.05S\right)\dot{U}_{mp} = \frac{90\angle 0^\circ}{30\Omega}$$

$$u_p(t) = 30\sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$\dot{U}_{mp} = 30\sqrt{2}\angle(-45)^\circ \quad u_p(t) = 30\sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ)$$

Step5:写出解的一般形式

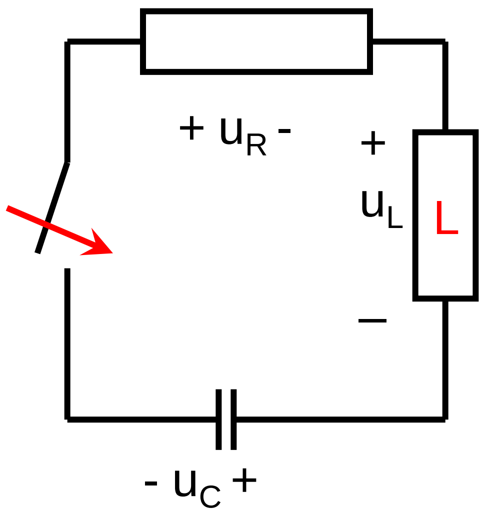
$$u_p(t) = 30\sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$u(t) = 30\sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ) - 20e^{-50t}V\ (t \geq 0)$$

二阶电路的暂态过程

- 定义
  - 必须使用二阶微分方程描述的电路成为二阶电路
    - 必须具有2个储能元件
    - 储能元件不一定是电感和电容各一，可以是2个电容，也可以是2个电感……
- 讲述内容
  - 以RLC串联电路为例讨论

RLC串联电路的暂态过程



$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$u_R = Ri_L, u_L = L\frac{di_L}{dt}, i_L = C\frac{du_C}{dt}$$

环路KVL方程：

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

电路的初值：
$$\begin{cases} u_C\left(0^+\right) = u_C\left(0^-\right) = U_{c0} \\ \frac{du_c}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{1}{C}i\left(0^+\right) = 0 \end{cases}$$

二阶电路的暂态方程

- 零输入响应

$$u_{Cp} = 0$$

- 特征方程

$$p^2 + (R/L)p + 1/(LC) = 0$$

$$\begin{cases} p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \alpha = R/(2L) \\ p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \end{cases}$$

二阶RLC串联电路的暂态方程

$$1.\quad \alpha > \omega_0$$

表达形式: $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

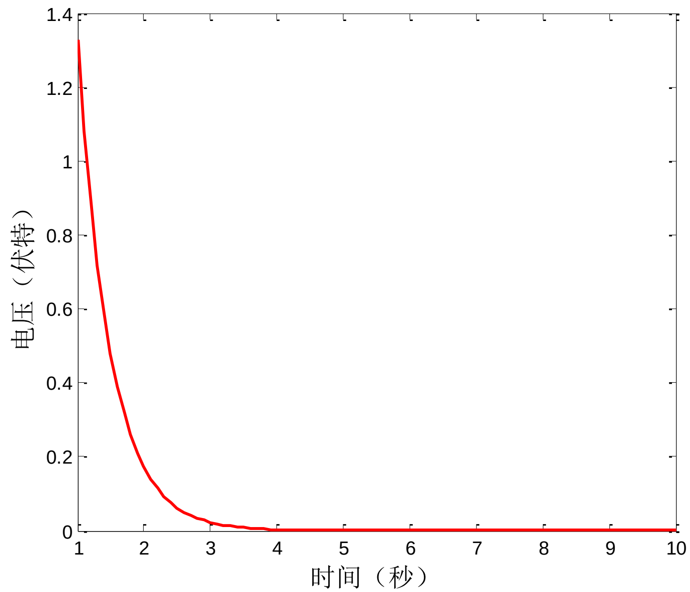
$$\begin{cases} \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} = A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0, \\ u_C\left(0^+\right) = A_1 + A_2 = U_{C0} \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_{c0} \\ A_2 = \frac{p_1}{p_1 - p_2} U_{c0} \end{cases}$$

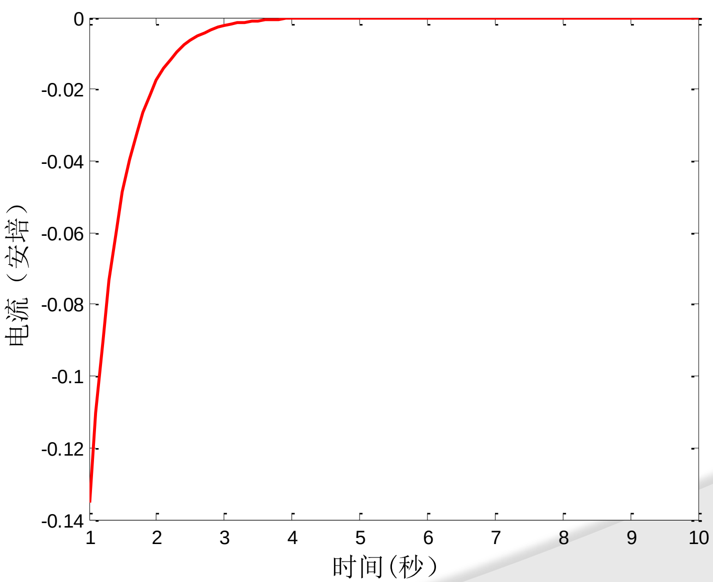
电容电压: $u_C = \dfrac{u_{C0}}{p_2 - p_1}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)\ (t > 0)$

电感电流、电压: $\begin{cases} i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{u_{C0}}{L(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) \\ u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{u_{C0}}{(p_2 - p_1)}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right) \end{cases}$

二阶RLC串联电路的暂态过程

- 关于本类型二阶电路的讨论
  - $p_1<0, p_2<0, |p_1|<|p_2|$ 过阻尼情形





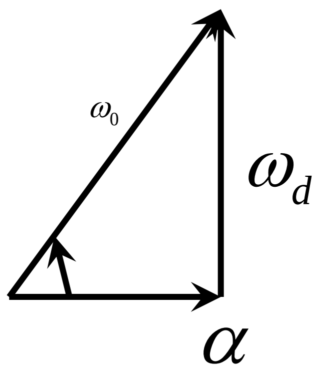
$R=10\Omega, L=0.1H, C=0.01F\ U_s=10V$

二阶RLC电路的暂态过程-欠阻尼

2、欠阻尼 $\alpha < \omega_0$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_d$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_d$$



响应的通解的一般形式

$$u_c(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin(\omega_d t) + A_2 \cos\omega_d t\right) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

电路初值

$$u_c(0^+) = A\sin\theta = u_{C0}$$

$$\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=0^+} = -\alpha A\sin\theta + A\omega_d\cos\theta = 0$$

$\longrightarrow$

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_{C0}$$

$$\theta = \arctan\frac{\omega_d}{\alpha}$$

二阶RLC电路的暂态过程-欠阻尼

电容电压的波形表达式

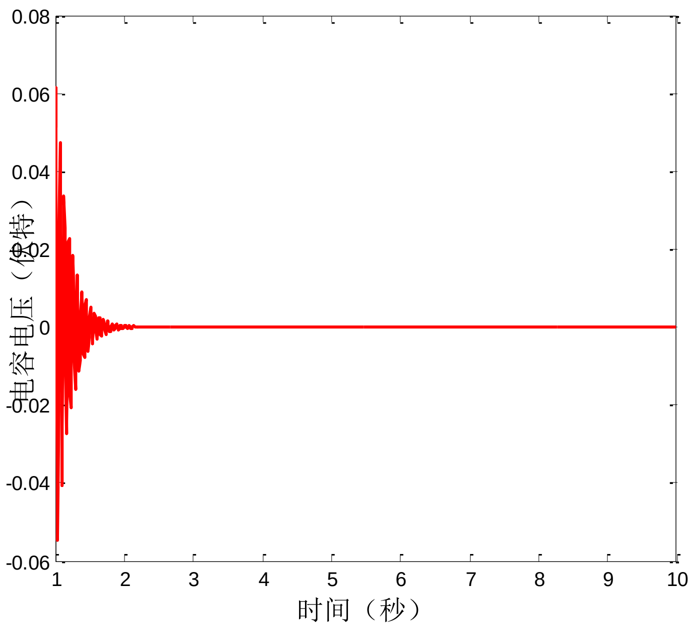
$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_{c0} e^{-\alpha t} \sin\left(\omega_d t + \theta\right)$$

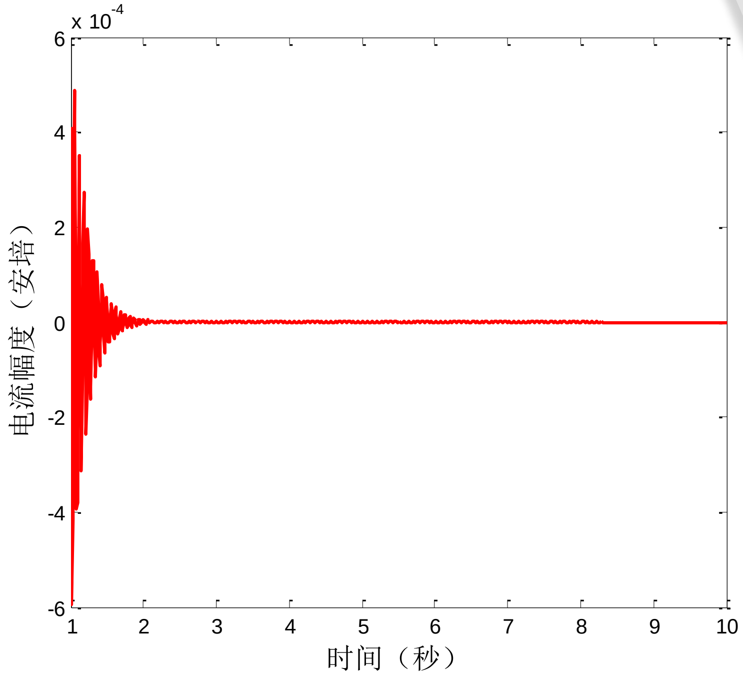
电感电流的波形表达式

$$i_L = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{\omega_0}{\omega_d} U_{C0} e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin\left(\omega_d t+\theta\right)+\omega_d\cos\left(\omega_d t+\theta\right)\right)$$

在欠阻尼的二阶RLC电路中，电压电流的幅度都是以指数规律衰减，波形表现出正弦振荡的形式，因此又叫做自由振荡，α 是衰减系数。
特别的可以考虑R=0的情况，表现为不衰减的自由振荡

二阶RLC串联电路暂态过程-欠阻尼





$R = 1\Omega, L = 0.1H, C = 0.001F$的RLC串联电路的暂态过程

二阶RLC串联电路暂态方程-临界状态

临界状态 $\alpha = \omega_0$

$$p_1 = p_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$$

响应通解的一般形式为：$u_C = e^{-\alpha t}\left(A_1 + A_2 t\right)$

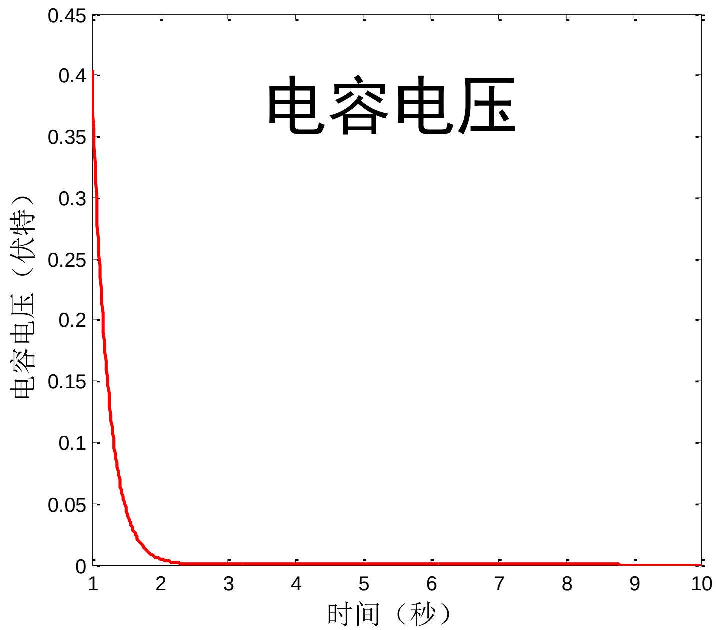
电路初值条件

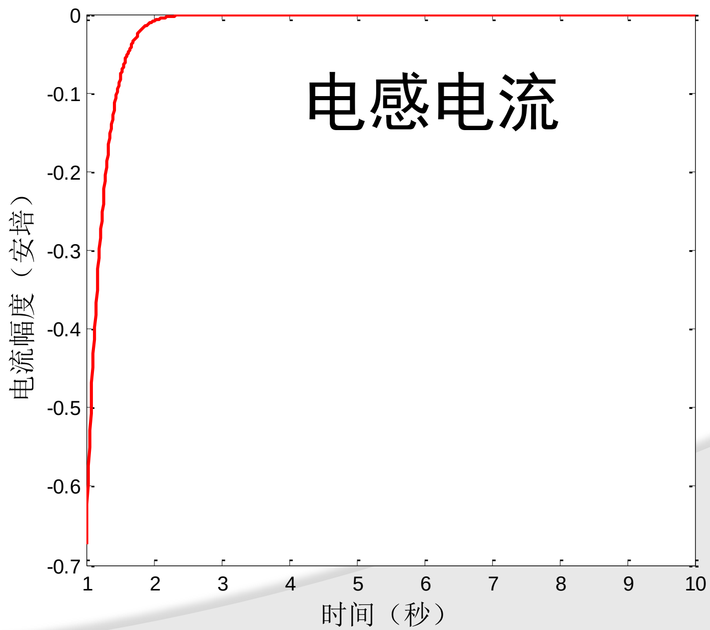
$$\begin{cases} u_C\left(0^+\right) = A\sin\left(\theta\right) = U_{C0} \\ \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = U_{C0} \\ A_2 = \alpha U_{C0} \end{cases}$$

二阶RLC串联电路暂态方程-临界状态

电容电压波形表达式:$u_C = U_{C0}\left(1+\alpha t\right)e^{-\alpha t}$

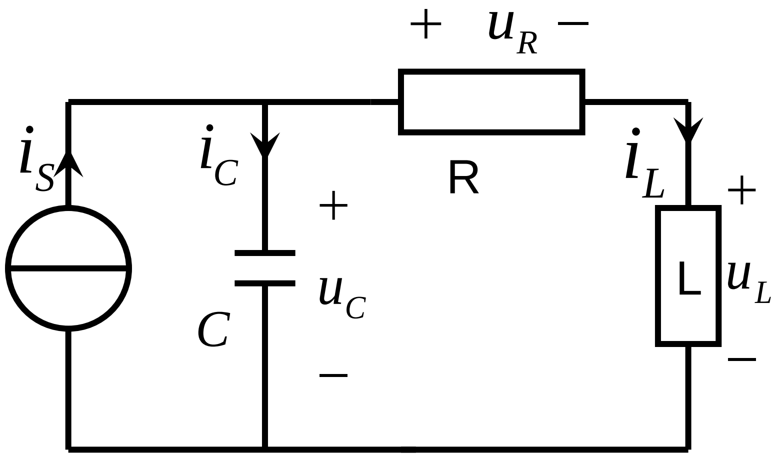
电路电流波形表达式:$i = C\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{u_{C0}te^{-\alpha t}}{L}$





R=1Ω
L=0.1H
C=0.01F
U_{co}=10V

二阶电路的暂态方程



R=20Ω,L=0.1H,C=20uF

分别求取i_L的单位阶跃特性s(t)和单位冲激特性

1、求取单位阶跃特性$i_S = \varepsilon(t)$

2、列电路方程(KCL,KVL)

$$i_C + i_L = C\frac{du_C}{dt} + i_L = i_S$$
$$u_L - u_C + u_R = L\frac{di_L}{dt} - u_C + i_L R = 0$$

二阶电路的暂态方程

3、电路微分方程

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_S$$

4、代入电路参数，可以具体的电路方程

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 200\frac{di_L}{dt} + 5\times 10^5 i_L = 5\times 10^5$$

初始条件

$$i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right) = 0, \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{1}{L} u_L\left(0^+\right) = 0$$

二阶电路的暂态方程

5、求取特解 $i_L(\infty) = i_S = 1A$

6、求特征方程和自有分量

$$\alpha = R/(2L) = 100, \omega_d = 700$$

欠阻尼工作模式 $p_{1,2} = -100 \pm j700$

信号自由分量的表达形式：

$$i_{Lh} = Be^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta) = Be^{-100t}\sin(700t + \theta)$$

7、信号的通解形式

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh} = 1 + Be^{-100t}\sin(700t + \theta)$$

二阶电路的暂态过程

8、代入初值，求解B和θ

$$B=-1.01A,\theta=81.87^{\circ}$$

9、写出具体的信号

$$i_L=\left[1-1.01e^{-100t}\sin\left(700t+81.87^{\circ}\right)\right]\varepsilon\left(t\right)$$

冲激响应可以由阶跃响应的微分获得，也可以按照下述方法获得，即：

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{1}{LC}\delta\left(t\right)$$

$$\Rightarrow i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right),\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}-\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^-}=\frac{1}{LC}$$