§8.3 二次曲面

本节将介绍空间中曲线和曲面的方程与性质. 根据曲线和曲面的几何性质来建立方程, 同时通过方程的代数性质来推导几何性质.

8.3.1 曲线与曲面的方程

曲线参数方程 设 $x(t), y(t), z(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 则

$$P(t) = \big((x(t), y(t), z(t)\big), \ t \in [\alpha, \beta] \tag{8.1}$$

表示空间中一条曲线, 称 $P(t)$ 为该曲线的参数方程.

曲面参数方程 设 $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ 是 D 上的二元连续函数, 则

$$P(s,t) = ((x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \ (s,t) \in D \tag{8.2}$$

表示空间中一张曲面, 称 $P(s,t)$ 为该曲面的参数方程.

曲面一般方程 设 $f(x,y,z)$ 是三元连续函数. 则满足

$$f(x,y,z)=0 \tag{8.3}$$

的点 (x,y,z) 的集合形成一个曲面, 称为该曲面的一般方程.

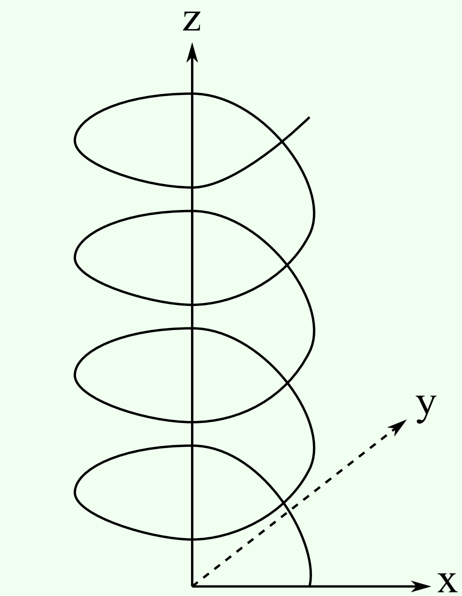
曲线一般方程 设 $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ 都是三元连续函数. 则满足满足

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{8.4}$$

的点 (x,y,z) 的集合是两个曲面 $f(x,y,z)=0$ 和 $g(x,y,z)=0$ 的交线, 称为该曲线的一般方程.

例 1 参数方程

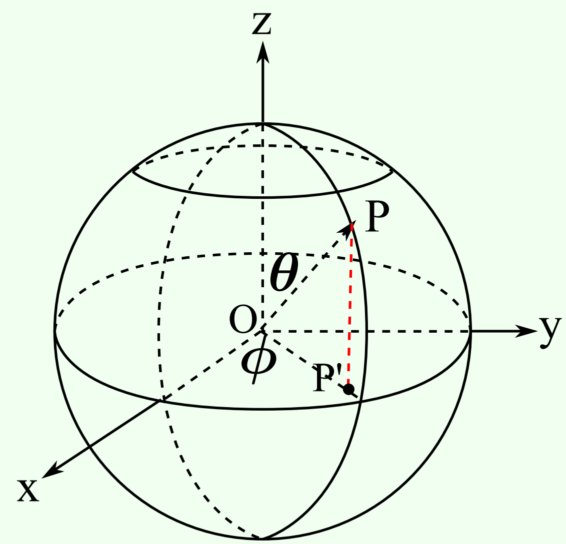
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$$



表示空间中的一条曲线, 称为**螺旋线**, 它的形状类似弹簧.

例 2 参数方程

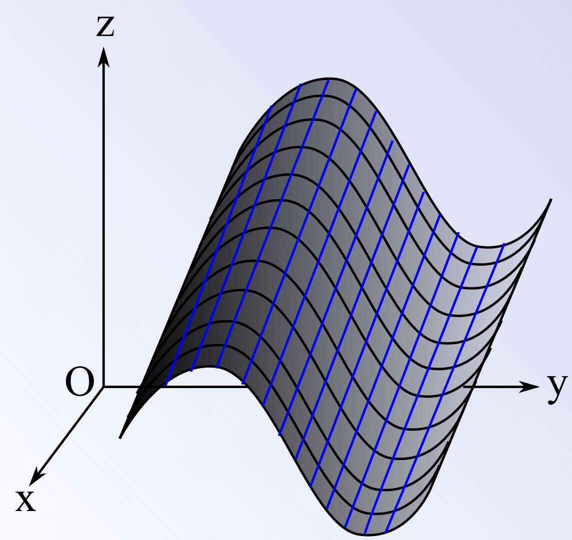
$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\theta\cos\phi \\ y = y_0 + r\sin\theta\sin\phi \\ z = z_0 + r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant \phi < 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{array}$$



表示空间中以 (x_0, y_0, z_0) 为球心, 半径为 r 的球面. ϕ 变化得到是纬线, θ 变化得到是经线.

8.3.2 柱面

由一族平行直线形成的曲面叫柱面, 这些直线叫做柱面的母线. 柱面上与每条母线都相交的一条曲线叫做柱面的一条准线.



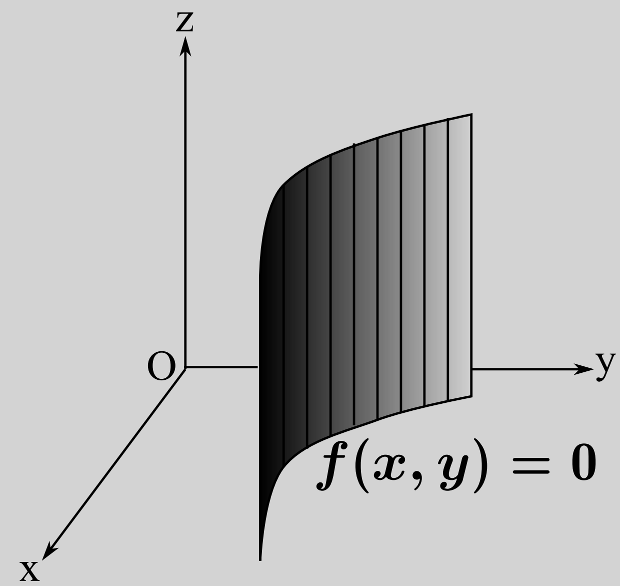
过准线上的各点作平行于母线方向的直线, 或者将一条母线沿着准线作平行移动, 又或者将一条准线沿着母线作平行移动, 都可以得到柱面.

一般地, 设母线的方向 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, 准线的参数方程为 $\vec{Q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$, 则柱面具有参数方程

$$\vec{P}(s,t) = s\vec{u} + \vec{Q}(t). \tag{8.5}$$

特别地, 当准线为一个圆, 且母线方向与圆所在平面垂直时, 该柱面为圆柱面.

例 3 方程 $f(x, y) = 0$ 在空间中表示一个柱面. 其母线平行于 z 轴, Oxy 平面上的曲线 $f(x, y) = 0$ 是它的一条准线.



例 4 求准线为 $C := \{(x, y, z) \,|\, f(x, y) = 0, z = 0\}$, 母线方向 $\vec{u} = (u_1, u_2, 1)$ 的柱面的一般方程.

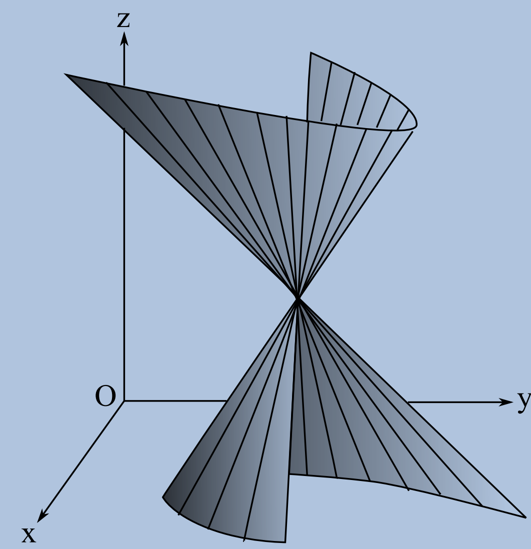
解 设 $\vec{P}(x, y, z)$ 是柱面上的点, 则 $\vec{Q} = \vec{P} - z\vec{u} = (x - zu_1, y - zu_2, 0)$ 为准线上的点, 它满足

$$f(x - zu_1, y - zu_2) = 0.$$

这就是所求柱面的一般方程.

8.3.3 锥面

由一族经过定点的直线形成的曲面叫**锥面**, 这些直线叫做锥面的**母线**, 定点叫做锥面的**顶点**. 锥面上与每条母线都相交但不经过顶点的一条曲线叫做锥面的一条**准线**. 把准线上的各点与顶点用直线联结起来, 就可以得到锥面.



一般地, 设顶点 $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$, 准线的参数方程 $\vec{Q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$, 则锥面具有参数方程

$$\vec{P}(s,t) = (1-s)\vec{A} + s\vec{Q}(t). \tag{8.6}$$

特别地, 当准线为一个圆, 且顶点与圆心的连线与圆所在平面垂直时, 称该锥面为**圆锥面**.

例 5 考虑方程 $xy + yz + zx = 0$ 所表示的曲面 S. 如果 (x, y, z) 在 S 上, 则对任意实数 t, (tx, ty, tz) 也在 S 上. 因此, S 是一个以原点为顶点的锥面.

例 6 求准线为 $C := \{(x, y, z) \mid f(x, y) = 0, z = 0\}$, 顶点为 $A = (0, 0, 1)$ 的锥面的一般方程.

解 设 $P = (x, y, z)$ 是锥面上的点, 则

$$Q = \frac{1}{1-z}(P - zA) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

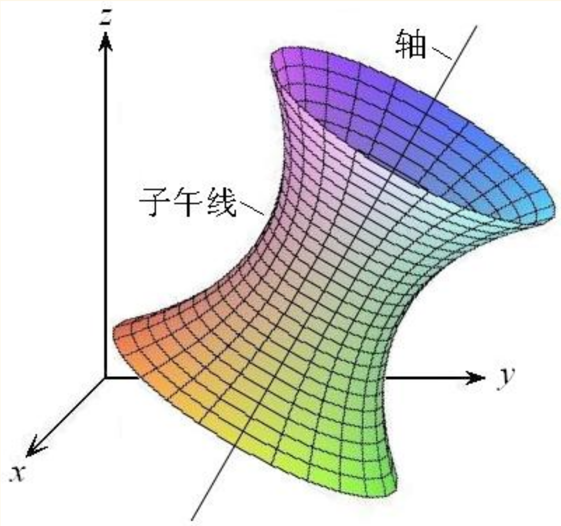
为准线上的点, 它满足

$$f\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = 0.$$

这就是所求锥面的一般方程.

8.3.4 旋转面

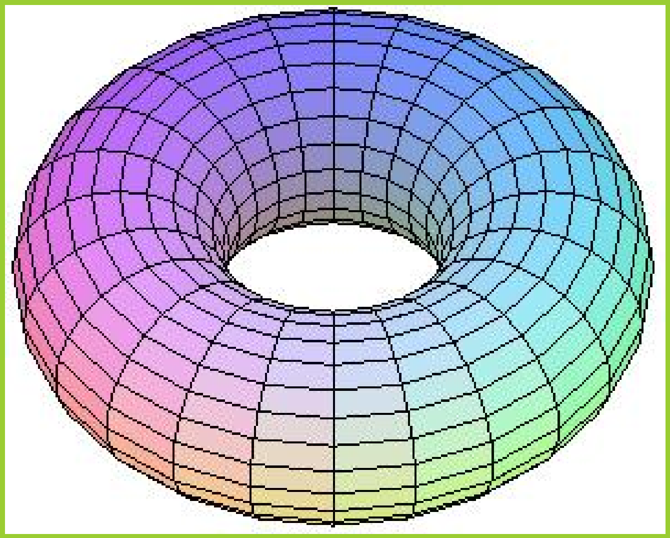
由空间中的一条曲线 γ 绕着一条直线 ℓ 旋转而产生的曲面叫做旋转面, γ 叫做旋转面的子午线, ℓ 叫做旋转面的旋转轴. 旋转面的参数方程和一般方程的形式通常都比较复杂. 然而, 对于以坐标轴为转轴的旋转面, 我们可以相对容易地写出它的参数方程或一般方程.

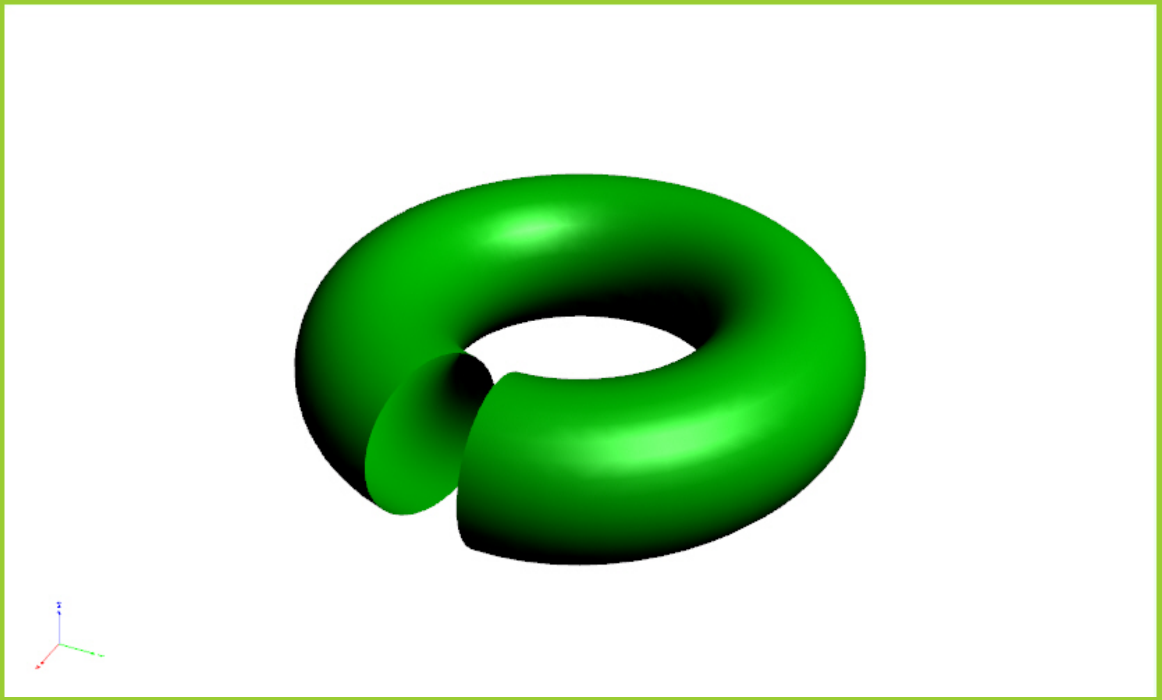


例 7 求圆 $L:\begin{cases}(y-R)^2+z^2=r^2\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的环面的方程, 其中 $0<r<R$.

解 环面上的点 $P=(x,y,z)$ 可由圆 L 上的点 $(0,\sqrt{x^2+y^2},z)$ 旋转得到, 因此环面具有一般方程

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2.$$





或者, 由圆的参数方程 $y = R + r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ 也可得环面的参数方程 (θ 是圆 L 上的点与其圆心的向量与 y 轴正向的夹角, ϕ 是向量 $(x, y, 0)$ 与 x 轴正向的夹角.)

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

8.3.5 二次曲面简介

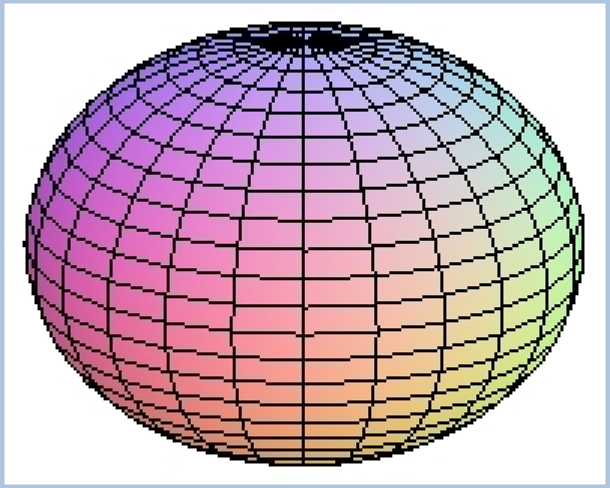
二次曲面是应用广泛的一类曲面, 椭球面、圆柱面、圆锥面等都是二次曲面. 二次曲面的一般方程具有二次多项式形式

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2 + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0. \quad (8.7)$$

非退化的二次曲面有九种, 常见的标准形式如下.

1. 椭球面 设 $a > 0, b > 0, c > 0$ 则方程

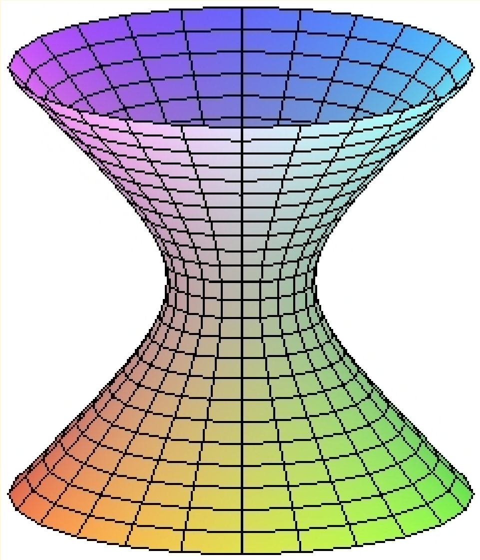
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8.8)$$



表示椭球面, 它可以被看作是一个被压缩或拉伸了的球面, 且关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的. 椭球面与任意一个平面的交线可能是一个圆、椭圆、点或空集.

2. 单叶双曲面 设 $a>0,b>0,c>0$ 则方程

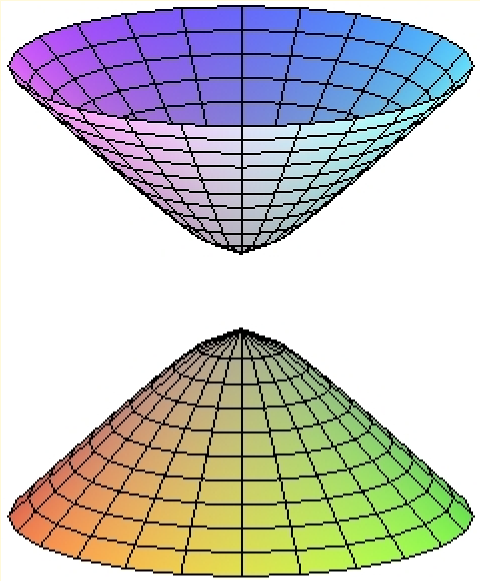
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.9}$$



表示单叶双曲面，它关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的. 单叶双曲面有一渐近锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$，它们在无穷远处任意接近. 单叶双曲面与一个平面的交线可能是一个椭圆、双曲线、抛物线或者一对相交直线等.

3. 双叶双曲面 设 $a>0,b>0,c>0$ 则方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{8.10}$$

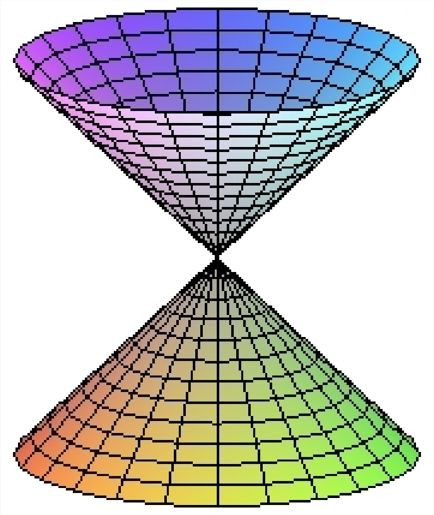


表示双叶双曲面，它位于 $|z|\leqslant c$ 之外，且关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的. 锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 是它的渐近锥面. 双叶双曲面与平面的交线可能是椭圆、双曲线、抛物线等.

4. 二次锥面 设 $a>0, b>0, c>0$ 则方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{8.11}$$

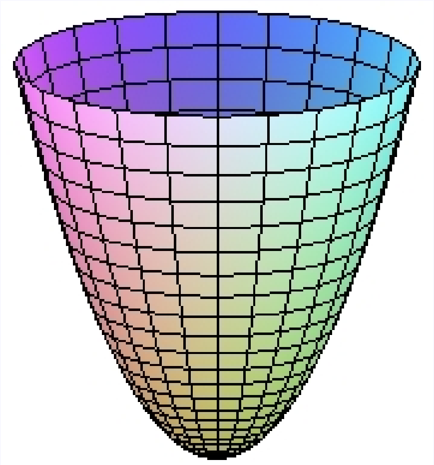
表示二次锥面, 它是一般锥面的特殊情形, 其准线可取为椭圆, 且轴线与椭圆所在平面垂直. 二次锥面关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的, 它与平面的交线可能是一个椭圆、双曲线、抛物线或者是一对相交直线等.



5. 椭圆抛物面 设 $a>0, b>0$ 则方程

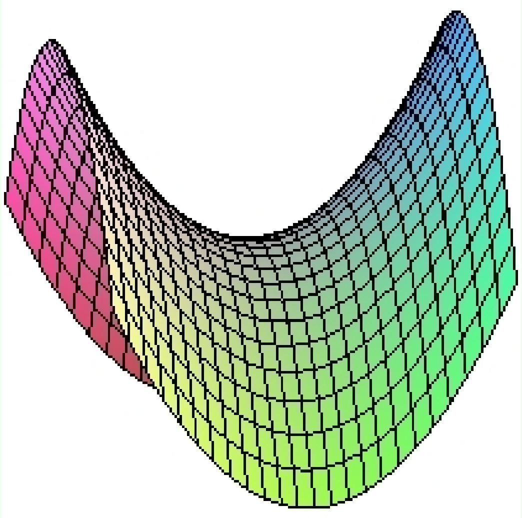
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{8.12}$$

表示椭圆抛物面, 它在平面 $z=0$ 之上, Ozx 面与 Oyz 面是它的对称面, z 轴是它的对称轴. 椭圆抛物面与一个平面的交线可能是一个椭圆或者是一条抛物线等。



6. 双曲抛物面(俗称马鞍面) 设 $a>0, b>0$ 则方程

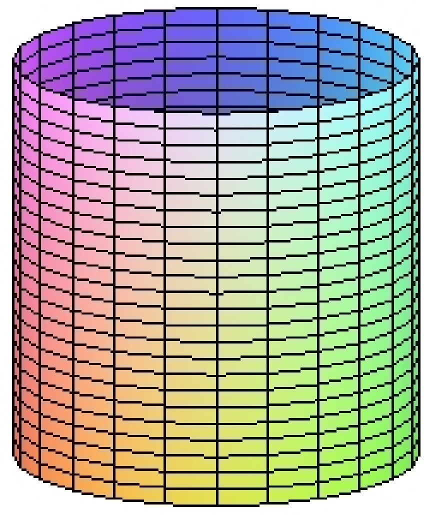
$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \tag{8.13}$$



表示双曲抛物面, 具有对称面 Ozx 面与 Oyz 面, 及对称轴 z 轴. 它与平面的交线可能为双曲线、抛物线、一对相交直线等。

7. 椭圆柱面 设 $a>0, b>0$ 则方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.14}$$

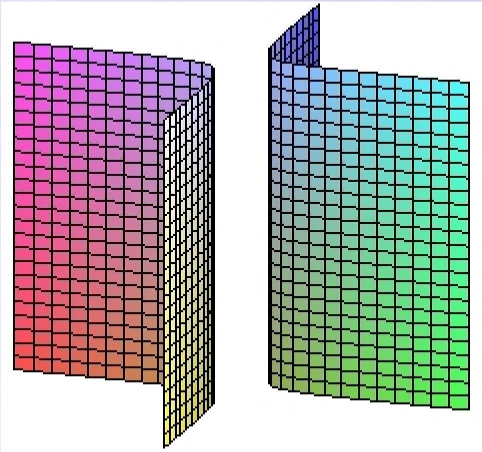


表示准线为椭圆，且母线方向与椭圆所在平面垂直的柱面.

8. 双曲柱面 设 $a>0, b>0$ 则方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.15}$$

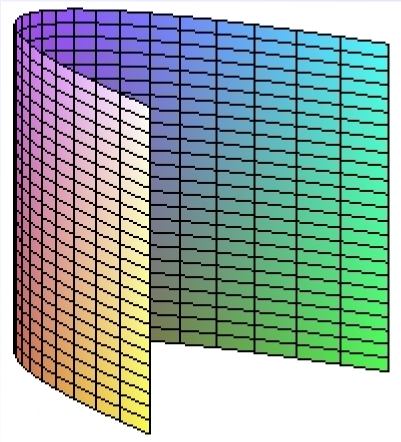
表示准线为双曲线, 且母线方向与双曲线所在平面垂直的柱面.



9. 抛物柱面 方程

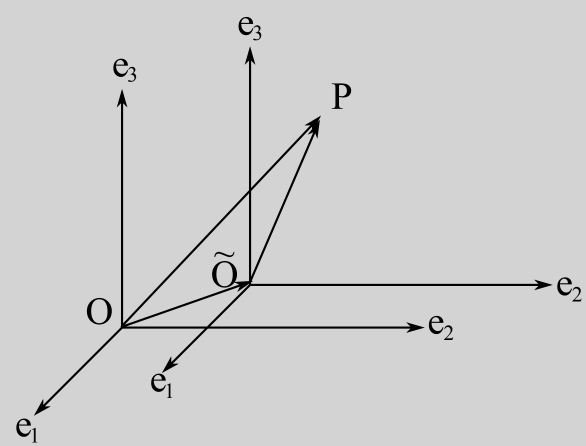
$$y^2=2px, \quad (p>0) \tag{8.16}$$

表示准线为抛物线, 且母线方向与抛物线所在平面垂直的柱面.



§8.4 坐标变换*

在上节中, 我们简单介绍了空间中的二次曲面及其标准方程. 对于一般形式的三元二次方程(8.7), 它是否一定是上述给出的各种曲面中的一种呢? 如果是, 我们如何才能知道它对应的是哪种二次曲面呢? 通常的作法是选择恰当的新坐标系, 将方程化简为标准形式, 从而判断曲面的类型及几何形状. 反过来, 也可以将二次曲面通过平移和旋转变换到新的位置, 使其变换后的曲面具有简化的方程形式. 这两个过程是互逆的过程. 本节中, 我们仅讨论空间直角坐标系的坐标变换问题, 即坐标在原坐标系与新坐标系之间的变换关系.



8.4.1 坐标系的平移

设当前的坐标系为 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 点 $\tilde{O}$ 在此坐标系中的坐标为 (x_0,y_0,z_0). 我们以 $\tilde{O}$ 为原点, 保持坐标轴的方向不变, 建立新的坐标系 $[\tilde{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 这称为坐标系的平移.

设空间中一点 P 在 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中的坐标为 (x,y,z), 在 $[\tilde{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中的坐标为 $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, 则由

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O\tilde{O}}+\overrightarrow{\tilde{O}P}=\overrightarrow{O\tilde{O}}+\tilde{x}\vec{e}_1+\tilde{y}\vec{e}_2+\tilde{z}\vec{e}_3$$

可得坐标变换公式

$$\begin{cases} x=\tilde{x}+x_0 \\ y=\tilde{y}+y_0 \\ z=\tilde{z}+z_0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tilde{x}=x-x_0 \\ \tilde{y}=y-y_0 \\ \tilde{z}=z-z_0 \end{cases} \tag{8.17}$$

例 8 判断二次曲面 $x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 2y - 2z = 0$ 的类型和位置.

解 曲面方程可配方为

$$(x+1)^2 - (y-1)^2 - (z+1)^2 = -1.$$

将坐标系原点平移到 $(-1, 1, -1)$. 则新坐标与原坐标系关系为

$$\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y - 1, \quad \tilde{z} = z + 1.$$

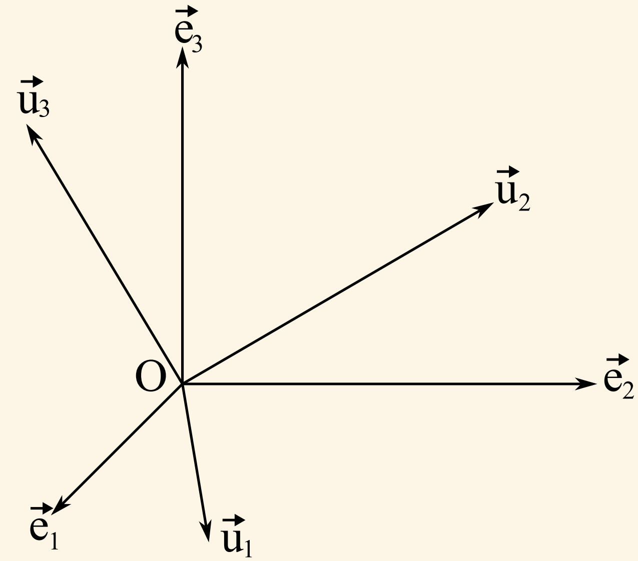
曲面在新坐标系中的方程为

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = -1.$$

这表示一个旋转单叶双曲面. 由坐标变换公式(8.17)知, 曲面以 $(-1, 1, -1)$ 为中心, 以直线 $y - 1 = z + 1 = 0$ 为对称轴.

8.4.2 坐标系的旋转

保持坐标原点不变, 而仅改变坐标轴的方向, 建立新的坐标系 $[O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$, 称为坐标系的旋转.



设 $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ 是空间中一组两两垂直的单位向量并且构成右手系, 它们在当前的坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中的坐标分别为 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$.

设空间中一点 P 在 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中的坐标为 (x,y,z), 在 $[O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$ 中的坐标为 $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, 则由

$$
\begin{aligned}
x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 &= \overrightarrow{OP} = \tilde{x}\vec{u}_1+\tilde{y}\vec{u}_2+\tilde{z}\vec{u}_3 \\
&= \tilde{x}(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)+\tilde{y}(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)+\tilde{z}(c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3)
\end{aligned}
$$

可得坐标变换公式

$$\begin{cases} x = a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + c_1\tilde{z} \\ y = a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + c_2\tilde{z} \\ z = a_3\tilde{x} + b_3\tilde{y} + c_3\tilde{z} \end{cases} \tag{8.18}$$

又由向量 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ 的长度都等于 1 且两两垂直, 即

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0, \end{cases} \tag{8.19}$$

可得变换 (8.18) 的逆变换公式

$$\begin{cases} \tilde{x} = a_1x + a_2y + a_3z \\ \tilde{y} = b_1x + b_2y + b_3z \\ \tilde{z} = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases} \tag{8.20}$$

例 9 将坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 绕 $\vec{e}_3$ 逆时针旋转 θ 角后得到新的坐标系 $[O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$. 求新旧坐标系的坐标变换公式.

解 $[O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$ 在坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 中的坐标分别为

$$\vec{u}_1=(\cos\theta,\sin\theta,0),\quad \vec{u}_2=(-\sin\theta,\cos\theta,0),\quad \vec{u}_3=(0,0,1).$$

因此, 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=\tilde{x}\cos\theta-\tilde{y}\sin\theta \\ y=\tilde{x}\sin\theta+\tilde{y}\cos\theta \\ z=\tilde{z} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tilde{x}=x\cos\theta+y\sin\theta \\ \tilde{y}=-x\sin\theta+y\cos\theta \\ \tilde{z}=z \end{cases}$$

类似地, 将坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 分别绕 $\vec{e}_1$ 或 $\vec{e}_2$ 逆时针旋转 θ 角, 也可以得到相应的坐标变换公式.

8.4.3 一般坐标变换

对于一般情形, 设 $\tilde{O}$ 是空间中任意一点, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 是空间中一组两两垂直的单位向量并且构成右手系, 它们在当前的坐标系 $[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ 中的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0), (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$. 我们以此建立新的坐标系 $[\tilde{O}; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$. 设空间中一点 P 在 $[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ 中的坐标为 (x, y, z), 在 $[\tilde{O}; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ 中的坐标为 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. 由

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}P} = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \tilde{x}\vec{u}_1 + \tilde{y}\vec{u}_2 + \tilde{z}\vec{u}_3$$

可得坐标变换公式

$$\begin{cases} x = a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + c_1\tilde{z} + x_0 \\ y = a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + c_2\tilde{z} + y_0 \\ z = a_3\tilde{x} + b_3\tilde{y} + c_3\tilde{z} + z_0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tilde{x} = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) \\ \tilde{y} = b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) \\ \tilde{z} = c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0) \end{cases} \tag{8.21}$$

例 10 选取适当的新坐标系, 化二次曲面方程 $z = xy$ 为标准方程, 并指出曲面的类型.

解 曲面方程可化为

$$z = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

设

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\quad \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad \tilde{z} = z.$$

由坐标变换公式 (8.20) 知, 若令

$$\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\quad \tilde{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\quad \tilde{e}_3 = (0,0,1),$$

这是一个旋转变换, 则曲面在坐标系 $[O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ 中的方程为

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\tilde{y}^2}{2}.$$

这表示一个双曲抛物面.