

# 中国科学技术大学2015-2016第二学期测验试卷

考试科目: 数学分析A2

得分:

姓名:

学号:

1. 按要求答题 (40分):

(1) 设函数 $f$ 连续, 改变下面两个累次积分的顺序

$$\int_0^{2b} dx \int_0^{\sqrt{4bx-x^2}} f(x, y) dy; \quad \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

(2) 计算三重积分 $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中 $V$ 由柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 $z = 3, z = 0$ 围成。

(3) 计算 $n$ 重积分

$$\int \cdots \int_{[0,1]^n} (x_1 + \cdots + x_n)^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

(4) 设一元函数 $f$ 连续可微且 $f(0) = 0$ , 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

2. (30分) 设一元函数 $g(x)$ 为连续奇函数, 而二维区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ ,

(1) 计算二重积分 $\iint_D \cos(g(x)) \cdot \sin(g(y)) dx dy$ ;

(2) 证明 $\iint_D e^{g(x+y)} dx dy \geq 2$ .

3. (30分) (i). 计算积分:  $A = \iint_D |xy - \frac{1}{4}| dx dy$ , 其中 $D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ ;

(ii). 若函数 $z = f(x, y)$ 在 $D$ 上连续且满足

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0 \quad \text{及} \quad \iint_D xy f(x, y) dx dy = 1,$$

证明: 存在 $(\xi, \eta) \in D$ 使得 $|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{A}$ .