3.1A-4

(a)

$$\begin{aligned} \min\ w &= -2y_1 + 5y_2 \\ s.t. -y_1 + 2y_2 &\geq -5 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b)(c) 略

3.1A-7

将原问题转化成等式形式

$$\min \quad z = \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$s.t. \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = b$$

$$x,\ \bar{x} \geq 0$$

对偶问题为：

$$\max \quad w = y^T b$$

$$s.t. \quad y^T \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix}$$

约束条件化简为

$$y^T A \leq c^T$$

$$y \geq 0$$

3.1B-5

(a) 对偶问题

$$\begin{aligned} \min\ & w = 4y_1 + 8y_2 \\ s.t.\, & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1 \geq 4 \\ & y_2 \geq -3 \end{aligned}$$

(b) 参照 43 页的第一个表计算 z 行系数

$$c_B^T B^{-1} A - c^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

全部非负，则 B 为最优基矩阵。

(c) 对偶问题的最优解

$$y = (B^{-1})^T c_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1D-2

单纯行法求得最优解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} \max\ w &= 3y_1 + 2y_2 \\ s.t.\ 2y_1 + y_2 &\le 2 \\ -y_1 - y_2 &\le -1 \\ -y_1 + y_2 &\le 0 \\ y_1 &\ge 0 \\ y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题的最优解

$$y = (B^{-1})^T c_B = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

3.1D-3

一组基可行解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/2, 0, 0, 3, 9/2, 0).$$

单纯行法求得最优解为（有无穷组最优解，所以该题答案不唯一）

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 1, 0, 3, 0).$$

对偶问题

$$\begin{aligned} \max\ \ w &= 4y_1 + 5y_2 + y_3 \\ s.t.\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 &\le 5 \\ -y_1 + y_2 - y_3 &\le 3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 &\le 0 \\ y_1 \le 0, y_2 \le 0, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题的解 (答案不唯一)

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

3.2A-2
最优可行解

$$(x_1, x_2) = (0, 5).$$

3.2A-4
最优可行解

$$(x_1, x_2, x_3) = (56/9, 26/3, 14/9).$$

3.2B-1（略）

3.3A-3

$$
\begin{aligned}
&b^{new} = (28, 8, 1, 2)^T \\
&x_B^{new} = (x_1, x_2, s_3, s_4)^T = B^{-1}b^{new} = (3, 2.5, 1.5, -0.5)^T, \\
&z = c_B^T B^{-1} b = 25.
\end{aligned}
$$

由于新的基解不满足可行性，用对偶单纯行法恢复可行性，得到新的最优基可行解为

$$(x_1, x_2, s_2, s_3) = (10/3, 2, 2/3, 70/3)$$

最优目标函数值为

$$z^* = 74/3$$

3.3C-3

$$c^{new} = (1,4,0,0,0,0)\ c_B^{new} = (1,4,0,0)$$

新的 z 行系数为

$$(c_B^{new})^T B^{-1} A - (c^{new})^T = (0,0,-1/4,5/2,0,0)$$

非基变量 s_1 在 z 行的系数为负，当前解不是最优解。

$$x_B^{new} = (3,5/2,3/2,-1/2)^T$$

由于 $s_4 = -1/2 < 0$，所以当前解不可行。
计算新的 z 行系数

$$z^{new} = c_B^{new} B^{-1} b^{new} = 13$$

然后用广义单纯形法恢复最优性和可行性，得最优基可行解为

$$(x_1,x_2,s_2,s_3) = (10/3,2,2/3,7/3)$$
$$z = 34/3$$